



20 a 24 junho de 2022

UFPA – Belém/Pará

Anais da
X Bienal de Matemática
da Sociedade Brasileira de
Matemática

Anais da
X Bienal de Matemática
da Sociedade Brasileira de
Matemática

Anais da X Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática

Copyright © 2022 Sociedade Brasileira de Matemática

Diretoria da SBM

Presidente: Paolo Piccione
Vice-Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita
Diretora: Walcy Santos
Diretor: Jorge Herbert Soares de Lira
Diretor: Daniel Gonçalves
Diretor: Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Ronaldo Alves Garcia
Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha
Editoração e Capa
Pablo Diego Regino

Comitê científico

Christina Brech
Hilário Alencar
Jaqueline Godoy Mesquita
João Rodrigues dos Santos Junior
Jorge Herbert Soares de Lira
José Nazareno Vieira Gomes

Keti Tenenblat
Paolo Piccione - Coordenador
Vinicius G. B. Ramos
Vyacheslav Futorny
Walcy Santos

Comitê Organizador (do lado do Científico)

Adam Oliveira da Silva
Cristina Lúcia Dias Vaz
Irene Castro Pereira
Janete do Socorro Santos Raiol
Jean Carlos de Aguiar Lelis
João da Costa Corrêa
Joao Pablo Pinheiro da Silva
João Rodrigues dos Santos Junior – Coordenador
Joelma Morbach
José Antonio Moraes Vilhena
José Miguel Martins Veloso

Juaci Picanço
Juliana Silva Canella
Marcel Vinhas Bertolini
Marcos Monteiro Diniz
Maria Macilene Barroso dos Santos
Mauro Costa da Silva Filho
Reginaldo da Silva – IFPA
Rubia Gonçalves Nascimento
Tania Madeleine Begazo Valdivia
Valter Borges Sampaio Junior

Organização: Universidade Federal do Pará

Apoios: Universidade Federal do Acre, Universidade Federal de Rondônia, Universidade Federal do Amazonas, Universidade Federal de Roraima, Universidade Federal do Amapá, Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto Federal do Pará, Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Bulletin Brazilian Mathematical Society e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

ISBN 978-85-8337-186-1

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

X Bienal de Matemática (10. : 2022 : Belém, PA)
Anais da X Bienal de Matemática da Sociedade
Brasileira de Matemática [livro eletrônico] /
organização Universidade Federal do Pará. --
Rio de Janeiro, RJ : SBM - Sociedade Brasileira de
Matemática, 2022.
PDF

Vários autores.
Bibliografia.
ISBN 978-85-8337-186-1

1. Matemática - Congressos I. Universidade Federal
do Pará. II. Título.

22-121794

CDD-510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380



20 a 24 junho de 2022

UFPA – Belém/Pará

Anais da
X Bienal de Matemática
da Sociedade Brasileira de
Matemática

1ª edição

2022

Rio de Janeiro

Sumário

PÔSTERES

A FUNÇÃO SIGMOIDAL LOGÍSTICA COMO MODELO DE CRESCIMENTO DE MUDAS DE AÇAIZEIRO	
Melo Rodrigues, Juliane do Socorro - Pantoja Maia, Luciano.....	17
ANÁLISE DO PROCESSO EDUCACIONAL MATEMÁTICO PARA PESSOAS SURDAS	
Oliveira, Allan - Maia, Josué - Marques, Richr - Lima, Reinaldo - Arruda, Suellen.....	21
DEFICIÊNCIA VISUAL E A UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS ADAPTADOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA	
Pinheiro, Alexandre - Carvalho, Aline - Lima, Reinaldo - Arruda, Suellen	26
REPRODUÇÃO COMPUTACIONAL COM PYTHON DE UMA CATENÁRIA DADOS O COMPRIMENTO DO FIO E DOIS PONTOS	
Begot, Luciano - Vaz, Cristina.....	30
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE AUTOVALORES	
Silva, Ângelo Felipe Machado - Arruda, Suellen Cristina Queiroz	35
O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA: ENTENDIMENTO SOBRE AS CURVAS	
Lopes Assunção, Lucas - Cruz dos Prazeres, Jose Anderson	39
NEUROCIÊNCIA E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA	
Tavares, Simone Cristina da Costa - Vale, Jesiane Calderaro Costa.....	43
CONTEXTO HISTÓRICO E APLICAÇÃO DA CATENÁRIA	
Vieira, Lehilson Pantoja - Castro, Lucas Bechara de.....	48
DA NECESSIDADE DE UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DINÂMICA PARA A DEFINIÇÃO DE DIFERENCIABILIDADE EM FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES	
Augusto Vaz, Guilherme - Silva, Erique Enrique Gomes da - Silva, Samuel Melo da -	

Pereira, Emanuel Fabiano Menezes	53
O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA EM ANIMAÇÃO NO GEOGEBRA	
Azevedo, Ytalo - Pinheiro, Leonan - Neri, Edilson	58
A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM 3D COMO FERRAMENTA NO ENSINO DE MATEMÁTICA	
Neri Júnior, Edilson dos Passos - Da Silva, Railane Caroline.....	62
RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA NUMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA	
Dias, Alyne - Silva, Paulo	67
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTERDISCIPLINARES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I E II PRESENTES NO EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES	
Corrêa Leão, Amanda Suellen Sena - Pires, Felipe Quaresma -Ramos Junior, Wallace Coelho	72
A LEI DE SNELL E O PRINCÍPIO DE FERMAT	
Boaventura Carneiro, Anita - Batisaco Lírio Nunes, Davi - Maria Dias de Ávila Rodrigues, Luciana.....	77
COMPARAÇÃO ENTRE UM MODELO ARIMA E UM MODELO ARIMA-RNA NA MODELAGEM DO FENÔMENO DA PROPAGAÇÃO ELETROMAGNÉTICA APLICADA EM TELECOMUNICAÇÕES	
de C. Barbosa, Breno - L.Fraiha Lopes, Ramz	81
TRANÇAS, NÓS E PROTETORES DE PARA-BRISA	
Tomás, Caio	86
SUPERFÍCIES MÍNIMAS E PELÍCULAS DE SABÃO	
Soares, Fabiane - Silva, Adam.....	91
ESTÁGIO SUPERVISIONADO COMO PAPEL PRIMORDIAL NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	
Santos, Jéssica de Sousa -Silva, Rosimeyre Vieira da.....	96
CODIGOS E CRIPTOGRAFIA POS-QUANTICA	
Miranda, Marcelo - Costa, Sueli I. R.....	100
MATEMÁTICA E TIPOSSANGUÍNEOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERDISCIPLINAR	
Barros, Marlon -Silva, Elias	103
FUNÇÕES RECURSIVAS: A MATEMÁTICA DA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO APLICADA AO ENSINO MÉDIO	
PINHEIRO, Ronaldo.....	106
INTRODUÇÃO A DINÂMICA E MODELAGEM NO ESTUDO DE FENÔMENOS EPIDEMIOLÓGICOS	
Viana Brito, Sandro Willian.....	111
USO DE HQ'S PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	
Sousa, Davison Renan Abreu de - Nascimento, João Batista do	114
O JOGO DE XADREZ COMO FERRAMENTA DE APLICAÇÕES DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA	

Veiga, Emerson de Sousa - Ramos, Augusto Cesar Abreu.....	119
MATEMÁTICA E LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA: RELATOS DE EXPERIÊNCIAS DE PROFESSORES EM ESCOLAS DE TEMPO INTEGRAL	
Santos, Jéssica de Sousa - Teixeira, Cícero dos Santos.....	124
GEOMETRIA ESPACIAL: O CÁLCULO DO VOLUME DO CUBO E DA PIRÂMIDE COM O AUXÍLIO DE MATERIAL CONCRETO	
Ribeiro, Raylanny Karynny dos Santos - Santos, Iago Alves dos.....	129
MÉTODO DE POLYA: UM PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	
Ribeiro, Raylanny Karynny dos Santos - Santos, Iago Alves dos - Azevedo, Gercyislan Pereira de.....	134
O CONCEITO DE FUNÇÃO: DE BERNOULLI A BOUBARKI	
Lira, Alailson Silva de - Brandemberg, João Cláudio.....	139
ANÁLISE DE LIVROS – 4 DÉCADAS DE DIFERENÇA ENTRE DOIS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA	
Ferreira, Jonatha Victor Chagas - Lima, Wenderson Oliveira de.....	144
O MOTIVO DE ESTUDAR EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU	
Oliveira, Beatriz - Brandemberg, João Cláudio.....	149
UM POUCO DA EVOLUÇÃO EM SÓLIDOS PLATÔNICOS	
Velasco, Brenda Leticia Noronha - Nascimento, João Batista do.....	153
ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DE POLIEDROS DURANTE O RENASCIMENTO	
Corrêa, João Nazareno Pantoja - Brandemberg, João Cláudio.....	158
APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDOS EM MODELOS POPULACIONAIS	
de Araújo Silva, Aryel Kathleen.....	163
ÁLBEBRA ABSTRATA: UM ESTUDO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DOS DISCENTES DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	
Monteiro, Dieli Baia - Maciel, Elany da Silva.....	166
LIBER ABACI: UM MANUAL DE ARITMÉTICA PRÁTICA ECOMERCIAL	
Guimarães Filho, José dos Santos - Brandemberg, João Cláudio.....	171
GRUPOS QUE POSSUEM O PROBLEMA DA PALAVRA DECIDÍVEL	
Leite, Rafael - Canella, Juliana.....	175
ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMA DE EQUAÇÕES DE ONDA SOB EFEITO TÉRMICO	
Barbosa, Ronald C. - Ramos, Anderson J. A.....	179
BELAS SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	
Lustosa, Italo Bruno Leandro - Veras, Leomar dos Santos.....	187
COMPORTAMENTO ARITMÉTICO DE FUNÇÕES TRANSCENDENTES	
Souza, Pedro - Lelis, Jean.....	194
UM ESTUDO SOBRE FRAÇÃO: UMA ABORDAGEM SOBRE AS ANÁLISES DE ERROS	

Oliveira da Silva, Jean - Sideneý Vidal de Santana, Francklim -Da Costa Trindade, Hailson	198
REFLEXÕES ACERCA DO USO DE MATERIAL CONCRETO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL, COM ÊNFASE EM CILINDRO E PARALELEPÍPEDO	
Gomes, Clovis - Nascimento, José - Souza, Leonaldo - Oliveira, Mauro - Chaquiam, Miguel	204
CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES ALGÉBRICAS EM TEMPOS DE ENSINO REMOTO	
Silva, Bárbara - Lima, Reinaldo - Gomes, Silvana - Arruda, Suellen	209
UM DIAGNÓSTICO ACERCA DO OBJETO DE CONHECIMENTO PROPORÇÃO COM O USO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL	
Delciana Góes da Silva -Leonardo Benedito Sarraf Caetano - Acylena Coelho Costa - Natanael Freitas Cabral.....	214
CONTAGEM E SISTEMAS NUMÉRICOS: ENCONTROS ENTRE A MATEMÁTICA E A LINGUAGEM	
Gomes Rosa de Mendonça, Raquel -Pitombeira Fernandes de Carvalho, João Bosco - Nunes da Silva, Patrícia	219
A MATEMÁTICA POR TRÁS DA PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA	
Arias, A. - Da Silva, A.	224
USO DO GEOPLANO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM COM UMA TURMA DE 3ª ETAPA EM UMA ESCOLA MUNICIPAL DE PARAUAPEBAS – PARÁ	
Costa, Bruno - Gomes, Clovis Laerdson - Junior, Fábio - Carvalho, Ricardo - Chaquiam, Miguel.....	227
A ÁLGEBRA DOS OCTÔNIOS	
Rodriguez, Marjenny - Morbach, Joelma.....	232
A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE	
Assunção, Railandi - Sobral, Yuri Dumaresq	236
A NECESSIDADE DO ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA	
Ramos, Augusto Cezar Abreu -Silva, Manoel Dione de Oliveira	241
A R-ÁRVORE DUAL PARA SUPERFÍCIES TOPOLOGICAMENTE INFINITAS	
Salazar Morales Jorge - Vinhas Bertolini Marcel.....	246
AS POTENCIALIDADES DO KIT MULTIPLANO NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DE PESSOAS DEFICIENTES	
Barros, Marlon - Silva, Maiko	251
CAOTICIDADE: DETERMINAÇÕES SEGUNDO O EXPOENTE DE LYAPUNOV	
Santos, Vinícius - Nascimento, Marcio.....	257
CARTEADO DA DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR	
Neto, Oséas Guimarães Ferreira - Nunes, Marly dos Anjos - Quadros, Glenda de Fátima Amorim	262
CRIOGRAFIA EM FUNÇÕES POLINOMIAIS	
Pontes, Edel Alexandre Silva - Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos - De Oliveira, Elinelson Gomes - Amorim, Heloíne Roberta Eloi Moura - De Melo, Camila Marques - Lira, Lidianne Leite e	267
ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA POR MEIO DE UM HIPERTEXTO MATEMÁTICO	

- HIPERMAT

Pontes, Edel Alexandre Silva - Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos -
De Oliveira, Elinelson Gomes - Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura -
Freitas, Esther Nascimento Soares de - Bastos, Tamara Moraes 270

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE AUTOVALORES

Silva, Ângelo Felipe Machado - Arruda, Suellen Cristina Queirós 273

GEOGEBRA REALIDADE AUMENTADA COMO NOVA FERRAMENTA EDUCACIONAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Pinheiro Siqueira, Maria Eduarda - Dos Passos Neri Junior, Edilson 277

JOGO COMO METODOLOGIA DE ENSINO APRENDIZAGEM DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Santos, Jéssica de Sousa -Teixeira, Cícero dos Santos - Feitosa, Marcia de Sousa 281

JOGO DO NIM E O ALGORITMO DE EUCLIDES

Cavalcante, Raiele Conceição -Lima, Cássio Gomes de -Cavalcante, Raimundo Nonato Barbosa 286

MODELAGEM DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA USANDO O MÉTODO VARIACIONAL E O SOFTWARE GEOGEBRA

Carvalho, Aline - Arruda, Suellen - Corrêa, Emerson..... 292

Bacelar, Leandro - Dalbelo, Thaís Maria..... 296

O GRAU TOPOLÓGICO E APLICAÇÕES

O USO DO GEOGEBRA PARA EXEMPLIFICAR A CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR

Melo, Renan Castro de - Brandemberg, João Claudio..... 299

O XADREZ PEDAGÓGICO E SUA INFLUÊNCIA NA MATEMÁTICA

Costa, Leandro 304

O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA: ENTENDIMENTO SOBRE AS CURVAS

Lopes Assunção, Lucas - Cruz dos Prazeres, Jose Anderson 309

RECURSOS DIDÁTICOS E A ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR NA MATEMÁTICA

Tavares, Simone Cristina da Costa -Vale, Jesiane Calderaro Costa..... 313

SOBRE ANÉIS DE INTEIROS E APLICAÇÕES EM COMUNICAÇÕES

de Souza, Juliana - Costa, Sueli I. R..... 318

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDO'S DE PRIMEIRA ORDEM PELO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Silva, Josiane Reis - Costa, Manuel de Jesus dos Santos - Lima, Rômulo Correa..... 323

UM JOGO MATEMÁTICO DESENVOLVIDO A PARTIR DO CONCEITO INTUITIVO DE PROBABILIDADES

Pontes, Edel Alexandre Silva - Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos -
De Oliveira, Elinelson Gomes - Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura -
Freitas, Esther Nascimento Soares de - Bastos, Tamara Moraes 328

UM REPASSO SOBRE AS FORMAS ANALÍTICA E GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Pereira, J.G. - Silva , J.R.S..... 331

UMA BUSCA PELA APRENDIZAGEM CRIATIVA ATRAVÉS DO USO DE SOFTWARES DE MODELAGEM 3D	
Abreu Ramos, Augusto Cezar - Dos Passos Neri Junior, Edilson	336
USO DE TABELAS E TEIAS DE CONGRUÊNCIA PARA RESOLUÇÕES DE QUESTÕES DO ENEM	
Neto, Oséas Guimarães Ferreira - Nunes, Marly dos Anjos - ROZAL, Edilene Farias	342
VERIFICANDO A POSSÍVEL OCORRÊNCIA DA LEI DE NEWCOMB-BENFORD PARA O APARECIMENTO DE LETRAS EM OBRAS LITERÁRIAS LUSÓFONAS	
Dias, Diego Nonato	347
VERIFICAÇÃO DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES MATEMÁTICAS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO NA CIDADE DE RIO LARGO	
Pontes, Edel Alexandre Silva - Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos -De Oliveira, Elinelson Gomes - Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura - Bastos, Tamara Moraes -Lira, Lidianne Leite e	352

COMUNICAÇÕES ORAIS

A IMPORTÂNCIA DO LABORATÓRIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA	
Lídia Alves - Nathane Lima - Marly Nunes	356
ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE LIVROS DIDÁTICOS: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	
Emily da Costa Madeira - Érica Leticia da Silva Madeira - Franco Deyvis Lima de Sena	369
APLICAÇÕES DE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA MODULAR: DO ENSINO BÁSICO AO SUPERIOR	
Oséas Guimarães - Marly Nunes - Edilene Farias	382
APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DUPLAS NO CÁLCULO DE MASSA, MOMENTO E CENTRO DE GRAVIDADE COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA	
Alana Seixas - Diego Pinheiro - Marly Nunes	398
AS LEIS DE KEPLER: UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO DEDUÇÕES ALGÉBRICAS E APLICAÇÕES NO GEOGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO	
Josué Coelho de Freitas.....	409
BARALHO DO CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA A COMPONENTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I	
Júlia Santa Brígida - Diego Silva - Marly Nunes.....	425

BINGO DAS GEOMETRIAS: UM ESTÍMULO PARA O ENSINO ATRAVÉS DO LÚDICO	
José Brito - Alana Seixas - Marly Nunes	437
CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS NO PLANO	
Ândson J.S. Almdeida	448
DINÂMICA DE LIMITE SINGULAR E ATRADORES PARA EQUAÇÕES DE ONDA ACOPLADAS	
Ronal Q. Caljaro - Mirelson M. Freitas - Mauro L. Santos - Anderson A. Ramos	458
Halyson Baltazar	492
ALGUNS AVANÇOS SOBRE A CONJECTURA DE BESSE	
COMUTATIVIDADE DE GRUPOS FINITOS	
Yerko Contreras Rojas	503
DOMINÓ DOS RESTOS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA MODULAR	
Emily Barbosa - Marly Nunes - Glenda Quadros	511
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: COMPREENSÕES DO CAMPO DE PESQUISA FRENTE AO CONTEXTO DA PANDEMIA DA COVID-19	
Filipe Carvalho Silva - Joás do Nascimento Lima - Rebeca Maciel da Silva - Júlio César Carvalho Alencar -José Milton Lopes Pinheiro.....	522
FORMAÇÃO CONTINUADA COM PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS: UMA INTERFASE ENTRE O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O ENSINO DA MATEMÁTICA	
Glenda Quadros - Matheus Luz - Maria Brito.....	556
O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT E INVARIANTES DE DEHN	
Sérgio Maciel.....	568
ONDE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ENCONTRA A PESSOA SURDA?	
Francisca Aglaiza Romão Sedrim Gonçalves	587
OS JOGOS (NO ENSINO DE MATEMÁTICA) DE ACORDO COM AS DIRETRIZES PROPOSTAS PELA FILOSOFIA DE JOHN DEWEY	
Lênio Levy	604
CLASSIFICAÇÃO DOS SUBGRUPOS FINITOS DO GRUPO DE ROTAÇÕES EM 3 DIMENSÕES	
Luiz Sales.....	615
UMA ABORDAGEM À TEORIA DOS FRACTAIS	
Marcos Roberto Berredo da Silva - Miguel Chaquiam	622
VIÈTE E O NASCIMENTO DA ÁLGEBRA SIMBÓLICA UM PERCURSO HISTÓRICO EM QUATRO CONTEXTOS	
Betânia de Almeida Prestes - Edna Machado da Silva - Miguel Chaquiam.....	704
ANALISE DO INDICE IFIX POR MEIO DE SERIES TEMPORAIS USANDO O SOFTWARE R	
Henriques Silva, Leto - Jules Aviz dos Santos Saraiva, Alexandre - Marcelo Brazão Protazio, João - João da Cunha Farias, Valcir.....	715
ABNER DE MOURA E OS “CENTROS DE INTERESSE NA ESCOLA”	
Fernandes, Juliana Chiarini Balbino.....	719

LADRILHAMENTOS	
Daniel Gonçalves	722
CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS UTILIZANDO A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA GEOMETRIA ANALÍTICA	
Dias, Gustavo Nogueira1 - Barreto, Wagner Davy Lucas - Silva, Pedro Roberto Sousa da	727
ANÁLISE DE SERIE TEMPORAL: COVID-19 NO ESTADO DO PARÁ	
Nascimento, Carlos Alan Vieira do - Coelho, Nilcilene da Silva - Protázio, João Marcelo Brazão	732
TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: UMA PESQUISA QUALITATIVA	
Araújo, Mirtys - Vieira, Francisca - Schivani, Juliana	737
PRODUÇÕES MATEMÁTICAS INTERDISCIPLINARES: EXPOSIÇÃO DE AÇÕES EXTENSIONISTAS VOLTADAS A VALORIZAÇÃO CULTURAL DA NEGRITUDE E DOS POVOS INDÍGENAS	
Conceição, Gabriel Viana da - Cunha, Débora Alfaia da	742
MODELO MATEMÁTICO PARA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE TORRES DE TRANSMISSÃO DE SINAL CELULAR	
Gomes, Herminio Simões - Gomes, Cristiane Ruiz	747
EVIDÊNCIAS DA MATEMÁTICA CONTIDAS NAS MITOLÓGICAS	
Lopes Júnior, José Erildo	752
UMA ABORDAGEM SOCIOCULTURAL DOS SABERES MATEMÁTICOS E SUAS RELAÇÕES COM A CONSTRUÇÃO NAVAL NA AMAZÔNIA	
Dias, Robson do Carmo Dutra - Brandemberg, João Cláudio - Moia, Romulo Everton de Carvalho	756
MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MAGNÉTICOS APLICADOS AO CARREGAMENTO WIRELESS DE VEÍCULOS ELÉTRICOS	
Gomes, Ian Wanderley - Lima, João Felipe Ximenes Paiva - Gomes, Cristiane Ruiz.....	760
ESQUEMA NUMÉRICO ENTRÓPICO ESTABLE Y BIEN BALANCEADO PARA EL MODELO DEL FLUJO SANGUÍNEO A TRAVÉS DE LAS ARTERIAS CON EL HOMBRE EN ETERNO REPOSO	
Valbuena, Sonia1, - Vega, Carlos	764
AS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Kenji Baia Alves - Maria Elizete Baia Alves.....	769
BOAMÁTICA: DECOLONIZANDO A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA ROBÓTICA	
Balbina da Silva Lopes Miguel, Vanessa - Costa Santos, Eliane - Dra.Baião, Jonê	772
A NAVEGAÇÃO COMO CONTEXTO PARA O ENSINO DE VETORES: UMA PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	
Abrantes, Wagner.....	776
ENSINO DE FATORAÇÃO PARA ALUNOS COM BAIXA VISÃO	
Almeida, Antonia Cristina Batista - Aragão, Ríglie da Costa.....	781
ME DÊ MOTIVO: UM ENSAIO SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA SUPERIOR SOB APLICAÇÕES EM CROCHÊ	
Luz, Matheus Amorim da - Nunes, Marly dos Anjos - Rozal, Edilene Farias	786
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PRESENTE NO LIVRO DIDÁTICO EM UMA INSTITUIÇÃO	

DE ENSINO FUNDAMENTAL DO MUNICÍPIO DE CAMETÁ-PA

Moia, Romulo Everton de Carvalho - Dias, Robson do Carmo Dutra - Melo, Laércio de Jesus Machado de 798

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO NA PERSPECTIVA DA FILOSOFIA LOGICISTA

Freitas Lima, Ana Paula - Xavier Nunes, João Henrique - de Vasconcelos Barros, Thiago..... 803

RECORTES HISTÓRICOS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Vasconcelos, Veraciv - Chaquiam, Miguel..... 808

ETNOMATEMÁTICA NAS RELAÇÕES ENTRE ENSINO DA MATEMÁTICA E AS VIVÊNCIAS RIBEIRINHAS NO SOME EM ABAETETUBA - PA

Costa, José - Silva, Odirley - Barros, Osvaldo 813

CÁLCULO DAS RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA A PARTIR DA FORMA ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Lobato Júnior, José Maria dos Santos - Lobato, Marinaldo Carvalho - Costa, José Francisco da Silva.. 818

GEOMETRIA RIBEIRINHA: ASPECTOS MATEMÁTICOS EM PRÁTICAS TRADICIONAIS RIBEIRINHAS

Silva, Odirley - Barros, Osvaldo - Costa, José 823

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PANTOGRÁFICAS

Ruffino, Paulo..... 828

PARADOXOS E SOFISMAS MATEMÁTICOS – UM CONVITE À INVESTIGAÇÕES NA ESCOLA BÁSICA

Fonseca, Rubens Vilhena - Figueroa, Teodora Pinheiro 830

ESTADO DA ARTE SOBRE O ENSINO DE CORPOS REDONDOS

Cordeiro Junior, Fernando Augusto Cunha, Fernando-jr - Fábio José da Costa..... 835

ESPIRAL DE TEODORO: DESCOBRINDO A SOMATORIO DA ÁREA

Cordeiro Junior, Fernando Augusto Cunha - Alves, Fábio José da Costa..... 840

UMA ADAPTAÇÃO AO MÉTODO GELOSIA

Reis, Adriano Rui Pinto dos - Nascimento, Rúbia Gonçalves..... 845

OFICINAS

FLEXÁGONOS: BRINCADEIRA, ARTE E MATEMÁTICA

Aniura Milanés Barrientos 850

GAMIFICAÇÃO E EXPERIÊNCIA DE FLOW EM DISCIPLINAS MATEMÁTICAS NO ENSINO SUPERIOR

Ana Maria Luz Fassarella do Amaral 868

O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO PARA AUXILIAR NO ENSINO DE SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	
Nazaré do Socorro Moraes da Silva - Regiane da Silva Reginaldo - Vera Debora Maciel Vilhena	891
MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG: DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS	
Carmen Rosa Giraldo Vergara	911
PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL	
Clícia Silva - Isabel de Sá - Jonatha Ferreira - Rafael Leite.....	937
SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS ESTRUTURADA POR UARC: UM MODELO PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO	
Edna Machado da Silva - Natanael Freitas Cabral - Miguel Chaquiam	952
CADERNOS AUTOCORRETIVOS DE FRAÇÕES E SITUAÇÕES PROBLEMA	
Albuquerque, Geovana - Carvalho, Raphael - Firer, Marcelo - Martinotti, Vitor - Silva, Douglas - Silva, Karoline - Vieira, João	986
UMA APLICAÇÃO LÓGICA ENTRE JOGOS DE MESA, DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA MODULAR	
Oséas Ferreira Neto - Marly Nunes - Emily Barbosa	1009
O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E SUA DISSEMINAÇÃO NA EUROPA OCIDENTAL	
Araújo, José Acácio de - Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira	1040
O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA	
Gonçalves de Araújo, Demetrius.....	1045
EDUCAÇÃO FINANCEIRA E O ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Lopes, Shirlane - Damasceno, Alexandre - Arruda, Suellen.....	1049
CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS REGULARES	
Vítor Teixeira Moura, João - Nascimento de Alencar, Lívia - Maria Dias de Ávila Rodrigues, Luciana....	1054
CONSTRUÇÃO E USO DO TEODOLITO CASEIRO NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA	
Santos, Luiz Anderson de Moraes - Brito, Gilmar Macedo - Santos, Yasmin Joana Mendonça dos.....	1059
JOGOS AFRICANOS E MATEMÁTICA, POSSIBILIDADES DE CONEXÃO NO ENSINO	
Moraes, Simone - Santana Silva, Jaqueline - Fagundes Reis, Leonardo.....	1064
UM JOGO DE ARITMÉTICA TRABALHADO COM METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	
Baldin, Yuriko Y.- Silva, Aparecida Francisco da	1069
OFICINA DA GIRAFINHA GEOMÉTRICA: ARTICULAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA, POESIA E CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS	
Lima, Darcinara da Silva - Araújo, Iza Helena Travassos Ferraz.....	1072

MINICURSOS

A MODELAGEM MATEMÁTICA CRÍTICA E A EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O QUESTIONAMENTO DE MUNDO Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo - Nazaré do Socorro Moraes da Silva - Jorge Williams Cunha Ferreira	1078
FINANÇAS NO COTIDIANO Jeronimo Monteiro.....	1092
GRAFOS E APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES Catarina Mendes de Jesus Sánchez.....	1169
HISTÓRIA E MATEMÁTICA DOS CONTEXTOS ÀS ATIVIDADES Miguel Chaquiam.....	1223
INTEGRAL DE RIEMANN GENERALIZADA: ALÉM DA INTEGRAL DE LEBESGUE André Fellipe Ribeiro de Almeida - Cristina Lúcia Dias Vaz.....	1253
INTRODUÇÃO A CADEIAS DE MARKOV Carolina S. Fraga	1288
INTRODUÇÃO À FÍSICA-MATEMÁTICA Emanuel Viana	1318
INTRODUÇÃO AO ESTUDO QUALITATIVO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS Kamilla Palhares - Ubirajara Castro	1397
MATEMÁTICA E DEFICIÊNCIA VISUAL: PROPOSTAS DE ADAPTAÇÕES DO ENSINO FUNDAMENTAL II AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UMA VARIÁVEL Jorge Brandão.....	1423
O CÁLCULO DAS TANGENTES A CURVAS NO SÉCULO XVII João Bosco Pitombeira de Carvalho	1440
NÚMEROS COMBINATÓRIOS Carlos A. Gomes e Jesus C. Diniz	1478
O MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO ESFÉRICA E APLICAÇÕES ÀS EDPS ELÍPTICAS Tiago L. Coelho Coelho - João R. Santos Júnior	1561
OS JOGOS DE BANACH-MAZUR E CHOQUET ENATHIELLE THIALA SOUZA DE ANDRADE - SAMUEL GOMES DA SILVA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: DA MATEMÁTICA BÁSICA AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues - Caio Tomás de Paula.....	1632
RESULTADOS SURPREENDENTES EM PROBABILIDADE Philip Cooley Junior.....	1658

SEQUÊNCIA FEDATHI E H5P PARA A PROMOÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA	
Carlos Delmiro, Milínia Felício - Hermínio Borges Neto.....	1677
TEORIA DOS NÚMEROS - UMA INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS P-ÁDICOS	
Bruno De Paula Miranda - Jean Lelis.....	1698
PESQUISAS SOBRE A MATEMÁTICA GREGA	
Gérard Grimberg - Marcela Amorim - Roberta Teixeira - Pã Montenegrov.....	1740
MATERIAIS DIDÁTICOS E JOGOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	
Clícia Silva - Isabel de Sá - Jonatha Ferreira - Rafael Leite.....	1795
MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE OTIMIZAÇÃO: EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E EVOLUÇÃO DIFERENCIAL MELHORADA IMPLEMENTADA EM PROCESSAMENTO PARALELO	
Milena Almeida Leite Brandão - José Laércio Dorício.....	1811
MÉTODOS HISTÓRICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS	
João Cláudio Brandemberg.....	1841
ESCHER E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA	
Solange Schardong e Heleno Cunha.....	1879



Pôsteres



A FUNÇÃO SIGMOIDAL LOGÍSTICA COMO MODELO DE CRESCIMENTO DE MUDAS DE AÇAIZEIRO.

Melo Rodrigues, Juliane do Socorro, juliane.rodrigues@cameta.ufpa.br¹
Pantoja Maia, Luciano, luciano.maia@cameta.ufpa.br²

¹Juliane do Socorro Melo Rodrigues FAMAT/PIBID/UFPA

²Luciano Pantoja Maia FAMAT/PIBID/UFPA

Resumo: A curva logística sigmoideal é uma função do tipo exponencial assintota e possui aplicações em diversos fenômenos da vida real, como químicos, físicos, biológicos etc. Por conseguinte, é notável a importância de se estudar métodos numéricos a fim de calcular os parâmetros dessa curva, ajustando-a, objetivando assim a resolução de problemas, como na modelagem de crescimento de açaizeiros. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar métodos lineares para o ajuste da curva logística e fazer uma aplicação da mesma no crescimento de mudas de açaizeiro, apresentando os passos algébricos para a obtenção de seus parâmetros, objetivando assim instruir o leitor sobre o ajuste através de métodos lineares e fazê-lo tomar conhecimento de uma, entre tantas, aplicações no mundo real da curva logística.

Palavras-chave: Curva logística. Métodos lineares. Crescimento de açaizeiro.

1. INTRODUÇÃO

Funções modelam o mundo em que vivemos, seja nos fenômenos da natureza, em situações complexas como nas engenharias, ou em situações simples do cotidiano, como as vendas em um supermercado. Fato é que, independente do contexto, elas nos ajudam-nos mais diversos problemas do nosso dia a dia. A essa resolução de problemas chamamos de modelagem matemática, ao qual consiste na “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolve-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Bassanezi, 2002).

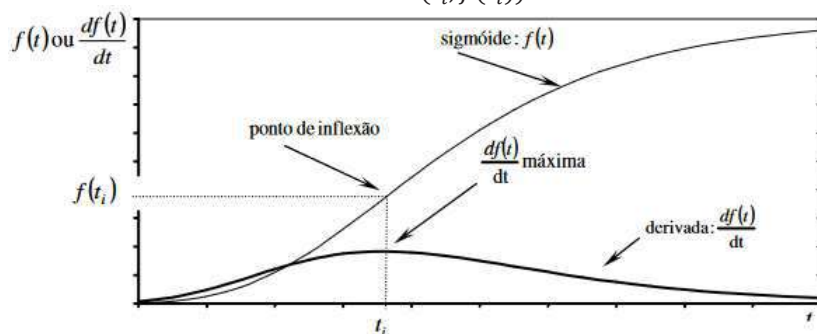
Diante desse pressuposto, segue que muitos fenômenos são melhores descritos e modelados por curvas específicas, como a curva logística. Por exemplo, em ecologia no crescimento populacional, em botânica no crescimento de árvores, na medicina na modelagem de crescimento de tumores etc. A função logística é uma curva do tipo exponencial assintótica, ou seja, uma curva que tende a uma estabilidade em certo momento. A exemplo do crescimento de uma árvore, sabe-se que desde o seu plantio sua tendência é crescer até um certo tempo t e após isso apenas envelhecer, ou seja, graficamente o crescimento de uma árvore é uma curva que tende a uma estabilidade sem apresentar máximos ou mínimos relativos, portanto, uma curva do modelo logístico.

Dessa forma, observada a tamanha importância do modelo logístico para a resolução das mais diversas situações-problemas da vida real, faz-se necessário abordarmos sobre os métodos para cálculo dos parâmetros dessa curva, pois, como citado anteriormente, os fenômenos reais como químicos, físicos e biológicos são melhores descritos por curvas diferentes das polinomiais e lineares (como a sigmoideal logística) que são as mais abordadas. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é apresentar o método linear para o ajuste da função logística e fazer uma aplicação da mesma no que diz respeito ao crescimento de mudas de açaizeiro (*Euterpe precatoria Mart.*) a partir de dados de crescimento (altura) ao longo do tempo (dias), obtidos de DE ALMEIDA et al (2019).

2. O Modelo Sigmoidal Logístico.

As funções sigmoidais (em forma de “S”) podem ser usadas para descrever crescimentos assintóticos. Este tipo de função não possui pontos de máximos e mínimos relativos, mas possui ponto de inflexão. O gráfico representativo da função sigmoidal e sua derivada está ilustrado na Figura 1. Neste vemos que até o ponto de inflexão (derivada segunda nula) ele apresenta concavidade para cima (derivada segunda positiva); daí em diante, apresenta concavidade para baixo (derivada segunda negativa), crescendo assintoticamente (assíntota horizontal $f(t) = \alpha$). Dentre as funções sigmoidais mais utilizadas destacamos: Logística, Gompertz, Richards, Morgan-Mercer-Flodin (MMF) e a função tipo Weibull.

Figura 1. Gráfico da função sigmoidal $f(t)$ sua derivada $f'(t)$ e as coordenadas do ponto de Inflexão $P(t_i, f(t_i))$.



Fonte: Silva *et al* (2010)

A curva logística foi proposta, inicialmente, para modelar a dinâmica de populações. Atualmente é usada para ajustar curvas de diversos fenômenos onde os dados apresentam comportamento exponencial assintótico, como o crescimento de árvores (Bassanezzi, 2002). A função sigmoidal logística é dada por:

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-\lambda(t)}} \quad (1)$$

sendo $a > 0$, $b > 1$ e $\lambda > 0$ parâmetros. Sua derivada é dada por:

$$f(t) = \frac{ab\lambda e^{-\lambda(t)}}{(1 + be^{-\lambda(t)})^2}$$

e as coordenadas do ponto de inflexão $(t_c, f(t))$ é dado por $t_c = \frac{1}{\lambda} \ln b$ e $f(t) = \frac{a}{2}$.

A curva logística possui as seguintes características:

- Os valores de $y = f(t)$ tendem a uma estabilidade $y_{máx}$ ou y^* , chamado de máximo sustentável ou capacidade suporte, quando os valores de t tendem ao infinito, o qual pode ser estimado fazendo uso do método de Ford-Walford, no caso de crescimento simples.
- Considerando que y_0 como o valor inicial dos valores de y , quando $t = t_0$, temos que a curva é:
 - a) crescente quando $y_0 < y^*$ e
 - b) decrescente quando $y_0 > y^*$.
- Possui crescimento relativo linear:

$$\phi = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i} \quad (2)$$

e assim, pode ser ajustado por uma reta $\phi = ay + b$.

3. Ajuste Linear do Modelo Logístico

Considere um conjunto de n dados $(t_i, f(t_i))$ com $i = 1, 2, \dots, n$. Ajustar linearmente a curva logística (1) significa dado $a = y^*$, estimar valores para os parâmetros $\ln b$ e λ , na reta $z = \lambda t - \ln b$ através da mudança de variável:

$$z = \ln\left(\frac{y/a}{1 - y/a}\right) \quad (3)$$

4. Aplicação do Modelo no Crescimento de Mudanças de Açaizeiro

Considere um conjunto de dados na Tabela 1. Os mesmos foram obtidos de DE ALMEIDA et al (2019) e refletem um experimento controlado de crescimento (altura) de mudas de açaizeiro instalado e conduzido no campo experimental da Embrapa Acre, cujo delineamento utilizado foi em blocos casualizados completos com quatro repetições e oito plantas por parcela em espaçamento 4 x 3 m.

Tabela 1. Dados referentes ao crescimento (cm) do açaizeiro em relação ao tempo (dia)

t_i (dias)	y_i (alturas em cm)
0	21,42
60	26,71
120	32,67
180	39,14
240	45,86
300	52,54
360	58,89

Fonte: DE ALMEIDA et al (2019)

Para realização do ajuste linear da curva logística nestes dados, iniciamos por calcular os valores de $\lambda_i = f(y_{i+1})$ pela equação (2) para com isso fazer o ajuste linear entre ϕ_i e y_{i+1} pelo método dos mínimos quadrados para se obter a reta:

$$\phi_i = ay + b = -0,0039135y_{i+1} + 0,35124$$

obtendo, assim, o valor do y^* (altura máxima do açaizeiro):

$$y^* = \frac{-b}{a} = \frac{-0,35124}{-0,0039135} \cong 89,75 \text{ cm.}$$

Com isso, calculamos os valores de z usando (3). Finalmente, fazemos o ajuste linear entre z e t com:

$$z = \lambda t - \ln b = 0,0050166t - 1,1600$$

donde, obtemos $\lambda = 0,0050166$ e $b = e^{(1,1600)} \cong 0,313486$.

Os dados obtidos e calculados estão apresentados da Tabela 2 com os valores calculados de y_{i+1} (que são os valores de y após o primeiro termo da sequência), os valores de λ , e os valores de z .

Tabela 2. Dados para o ajuste linear do modelo Logístico

t_i	y_i	y_{i+1}	ϕ_i	z
0	21,42	26,71	0,2470	-1,160058
60	26,71	32,71	0,2231	-0,858769
120	32,67	39,14	0,1980	-0,558038
180	39,14	45,86	0,1717	-0,257051
240	45,86	52,54	0,1454	-0,043853

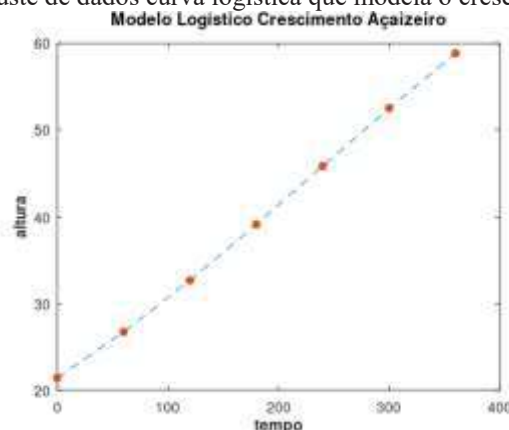
300	52,54	58,89	0,1209	-0,344934
360	58,89	-	-	-0,646134

A expressão da curva logística que ajusta o crescimento do açazeiro será dada por:

$$y(t) = \frac{89,75}{1 + e^{-\left(\frac{t-231,23}{199,57}\right)}}$$

E o seu gráfico está ilustrado na Figura 2.

Figura 2. Ajuste de dados curva logística que modela o crescimento de açazeiro



Fonte: Os autores

4. CONCLUSÕES

O trabalho ilustrou uma situação simples e bastante comum no mundo real de uma aplicação de modelagem matemática através de uma função logística: o crescimento de açazeiro. E, como calcular os parâmetros dessa curva através de métodos lineares. Dessa forma, observa-se como é fundamental a elaboração de materiais que busquem instruir sobre modelagens e aplicações dessas curvas “incomuns” mas fundamentais para a sociedade como um todo, afim de gerar conhecimento e entendimento do mundo em que vivemos e auxílio na resolução de problemas.

5. REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: prefácio de Ubiratan D’Ambrosio. Campinas: Contexto, 2002.

DE ALMEIDA, U. O.; ANDRADE NETO, R. de C.; LUNZ, A. M. P.; COSTA, D. A. da; DE ARAUJO, J. M.; RODRIGUES, M. J. da S. Crescimento de Açazeiro (*euterpe precatoria mart.*) Consorciado com Bananeira. **South American Journal of Basic Education, Technical and Technological** , [S. l.], v. 5, n. 3, 2019.

SILVA, Helenice de Oliveira Florentino; BISCARO, Adriana de Fátima Vilela; PASSOS, José Raimundo de Souza. Funções sigmoidais aplicadas na determinação da atividade metanogênica específica-AME. **Revista Brasileira de Biometria**, p. 141-150, 2010.



ANÁLISE DO PROCESSO EDUCACIONAL MATEMÁTICO PARA PESSOAS SURDAS

Oliveira, Allan, allan.oliveira@iced.ufpa.br¹
Maia, Josué, josue.maia@abaetetuba.ufpa.br²
Marques, Richr, richr.marques@abaetetuba.ufpa.br³
Lima, Reinaldo, reinaldo.lima@unifesspa.edu.br⁴
Arruda, Suellen, scqarruda@yahoo.com.br⁵

¹UFPA/campus de Abaetetuba

²UFPA/campus de Abaetetuba

³UFPA/campus de Abaetetuba

⁴UNIFESSPA/campus Santana do Araguaia

⁵UFPA/ Campus de Abaetetuba

Resumo: Este trabalho se propõe apresentar uma análise das leis e decretos que amparam o processo educacional da pessoa com deficiência, especificamente no que se refere ao desenvolvimento da aprendizagem da pessoa surda, dito isto, percebemos a importância que o mesmo traz em apontar que a inclusão é realizada por meio do tripé: Estado, Instituição e família, evidenciando a responsabilidade que cada um e que estas são indissociáveis. Para tanto, como complemento deste processo levanto em consideração a atual conjuntura sanitária que nos encontramos o projeto “Matemática Inclusiva: o uso de recursos digitais no ensino da matemática em LIBRAS” traz alternativas adequadas a mudanças que o processo de ensino e aprendizagem sofreu durante esse período e vêm sofrendo ao longo do tempo, contudo, podemos identificar resistência quanto a isso.

Palavras-chave: Inclusão, Matemática, Surdez, LIBRAS, Aprendizagem.

1. INTRODUÇÃO

A inclusão e o processo educacional da pessoa surda se tornaram temas bastante debatido nos últimos anos, seja por meio de palestras, ações não governamentais, pesquisas científicas, artigos acadêmicos e pela mídia; percebe-se também que a procura por cursos de capacitação nesta área teve um aumento considerável em relação à última década, tendo em vista o aumento da oferta de vagas para tradutores/interpretes da língua de sinais para eventos oficiais e dentro do espaço escolar público e privado.

Exemplo disso, temos o Prolibras que por meio do decreto 5.626 de 2005 promoveu o exame nacional que visou a certificação de profissionais que já atuavam na área, mas não possuíam formação acadêmica regularizada, dentro do exposto, o mesmo teve sua concretização entre os anos de 2005 à 2015, possibilitando o ingresso destes nos espaços escolares de forma a contribuir para o processo educacional de crianças e jovens nos espaços educacionais brasileiros, conseguindo viabilizar o processo inclusivo referente a demanda da falta de tradutores/interpretes da língua de sinais que auxiliam na comunicação entre surdos e ouvintes nos espaços supracitados.

Contudo, embora exista um aumento por parte dos professores em querer desempenhar com seriedade sua formação continuada na área da educação especial, especificamente se tratando do ensino para alunos surdos. De acordo com CARVALHO, SENA & MELO-2018, PAG 01, “o Ensino da Língua de Sinais torna-se um desafio para

a qualificação dos docentes que não estão habilitados à formação bilíngue e tem que deparar-se com os estudantes surdos integrados as salas regulares”.

Nesse contexto, verificou-se a falta de profissionais em áreas específicas da educação, como exemplo a Matemática, pois estes mesmos profissionais geralmente param na formação básica e acabam não se aprofundando no referido tema, dessa maneira, não exercendo a função de tradutores/interpretes da língua de sinais no espaço escolar.

A área da Matemática por si só já se apresenta como complexa, gerando inúmeras dificuldades de aprendizagem para os alunos que muitas vezes não possuem o conhecimento básico para que consiga avançar de forma satisfatória para as series seguintes de seu processo estudantil, inclusive a maioria dos alunos que completa o Ensino Básico não possuem conhecimento matemático adequado, de acordo com a pesquisa realizada pelo Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB) no ano de 2019 e publicado na revista Exame em fevereiro de 2021, 95% dos alunos formados no Ensino Médio não conseguem resolver problemas utilizando probabilidade ou com teorema de Pitágoras fazendo surgir forte rejeição da referida disciplina por parte destes alunos, devido à diversas barreiras de aprendizagem criadas durante a construção do seu conhecimento. Assim, Booth e Ainscow (2002, p. 22),

[...] o estabelecimento físico, as culturas, as políticas, o currículo, o método de ensino, o lugar em que os alunos se sentam e a forma de interação são alguns exemplos de barreiras que podem dificultar a vida escolar de qualquer aluno, não só dos que têm alguma deficiência, transtorno global do desenvolvimento, altas habilidades ou superdotação. A minimização dessas barreiras, conforme apontam os autores, implica a mobilização de recursos - físicos, humanos, políticos, etc – nas escolas e comunidades.

Tendo em vista as dificuldades dos professores em manter seu processo de formação na área da educação especial, tanto de maneira prática como pedagógica e as diversas barreiras de aprendizagem desenvolvidas pelos alunos durante seu processo de formação, principalmente no que se refere a Matemática, inserir a aprendizagem da língua de sinais nesse contexto se torna uma tarefa bastante desafiadora, reflexo disso é a escassez de publicações acadêmicas, conteúdos educacionais divulgados em mídias digitais e até mesmo no espaço escolar.

2. A LEGALIZAÇÃO DO PROCESSO EDUCACIONAL

2.1. Salamanca

Em se tratando do ingresso da pessoa com deficiência no ambiente escolar, entendemos que deve ser levado em conta toda complexidade que circunda tal processo que surge desde a aceitação dentro do ceio familiar em um primeiro momento desde o preconceito social desenvolvido pela falta de conhecimento, até o medo de expor seu filho em um ambiente possivelmente hostil, causando a preocupação da mesma se aquele ambiente estará preparado para receber a criança com todas as suas particularidades. Para tanto, o Decreto de Salamanca traz consigo como esse processo deve acontecer e responsabiliza todas as entidades e autarquias apontando o papel de cada uma dentro deste cenário.

Dessa maneira, reiteramos o papel da família no processo de busca e cumprimento dos direitos adquiridos ao longo da história visando a garantia da inserção da criança com deficiência no ambiente escolar de acordo com as leis que o amparam. Com isso, ao se tratar especificamente da pessoa surda, vimos que esse é o passo de fundamental importância para que haja a inclusão, pois a família tem o papel mais importante de todos, é papel da família o incentivo e participação no processo de ensino-aprendizagem do aluno com deficiência, pois é um o elo muito forte, podendo transformar a vida do indivíduo ou fechar as portas para o processo de inclusão tanto na educação como para vida social.

Então, vemos que esse é um grande desafio a ser superado, quando não há essa colaboração o processo de ensino tornar-se extremamente abstruso, isso acontece pelo fato de que para a família se determinado método de ensino ou até mesmo no que o aluno está desenvolvendo para sua inclusão, se na visão familiar o referido método não for relevante, assim não veem motivos para apoiá-lo e incentivá-lo, fazendo com que haja a quebra na continuidade do desenvolvimento dos métodos de inclusão que as instituições oferecem, apresentando a importância da contrapartida da família nesse processo de construção do conhecimento e da quebra das barreiras que impedem a inclusão desse indivíduo no meio escolar.

A declaração de Salamanca fomenta pesadamente sobre esse fato, propõe a criação de projetos de conscientização familiar de seus diretos sociais no papel da inclusão de uma pessoa com necessidades especiais. Não adianta somente as instituições se adequarem ao aluno e suas necessidades, fazendo a alteração no seu modo de ensino para que haja de fato a inclusão, se a família não colaborar, a inclusão não se concretiza de maneira efetiva e rápida, se não houver a união de ambas as partes, ou seja, trabalho em conjunto.

Vale ressaltar que a estruturação do espaço escolar se torna chave fundamental para o andamento da acessibilidade neste ambiente, de maneira que a construção de rampas, cartazes indicadores em língua de sinais e fixação de piso

tátil são exemplos da estruturação física necessária para promover a acessibilidade de pessoas com deficiência de maneira geral.

Dentro desse viés, destacamos de igual forma a relevância da instituição, dentro do seu corpo docente, possuir profissionais aptos à receber este público, com isso, é evidente a necessidade em possibilitar por meio de políticas públicas maneiras de oferecer projetos de formação continuada a estes, trazendo com segurança e certeza uma educação igualitária que se tornará mais próxima da realidade vivenciada não só pela família da pessoa com deficiência, mas também pela mesma que estará inserida neste meio.

Nesse contexto, cabe ressaltar a grande importância do Estado em proporcionar e garantir insumos e tudo que é necessário para a reestruturação física promovendo reformas no prédio da instituição de ensino adaptando-a de acordo com as necessidades e peculiaridade de cada aluno. Além disso, oferecer capacitação, treinamento técnico e recursos necessários para a adequação dos profissionais que atuarão direta e indiretamente com estes alunos.

2.2. Lei nº 10.436

Observamos que no Brasil ainda existem falhas na adaptação profissional em relação ao processo de inclusão escolar, para isso podemos destacar a falta de capacitação para estes profissionais, por consequência disso, os alunos surdos sofrem pela escassez de tradutores/interpretes de língua de sinais certificados e pedagogicamente municiados de conteúdos e conhecimento prático, para tanto, foi promulgada a lei 10.436, de 24 de Abril de 2002, que prevê o cumprimento de regras adaptativas, visando a inserção e permanência de pessoas com deficiência auditiva e portadores de surdez, estabelecendo a Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) e reconhecendo-a como meio de comunicação expressivo e válido legalmente. Sendo um grande avanço para o referido processo inclusivo. É indubitável que a Libras possui notável valor por fazer parte da cultura surda estabelecida no Brasil, promovendo a criação de pontes de comunicação entre a comunidade ouvinte e comunidade surda e sendo conhecida como segunda língua oficial do Brasil.

3. MATEMÁTICA INCLUSIVA

Tendo em vista tudo que até aqui foi debatido e levando em consideração a conjuntura política, histórica e educacional e todas as peculiaridades que envolvem a inclusão do aluno surdo no ambiente escolar e as dificuldades de aprendizagem e barreiras em relação ao ensino da matemática, considerando também que a Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) promove a criação de pontes de comunicação entre a comunidade surda e ouvinte, observando o contexto das condições sanitárias que nos encontramos, verificando que as mídias digitais serviram como facilitador de convívio humano e meios para oportunizar o desenvolvimento educacional, vimos o esforço de professores em se reinventar e elaborar estratégias didáticas que permitissem o acesso a educação de maneira satisfatória à esses alunos.

No contexto pandêmico vivenciado, o ensino através das mídias digitais viabilizou a continuidade da aprendizagem, embora o estudante estivesse inserido neste emaranhado de dificuldades do desenvolvimento pedagógico, a mesma serviu como ferramenta fundamental amparando-o e proporcionando meios educacionais que até o momento eram intangíveis. Logo, como contribuição para a solução deste cenário buscando viabilizar a aprendizagem do aluno surdo sobre o conteúdo matemático, desenvolvemos o projeto “Matemática Inclusiva: o uso de recursos digitais no ensino da matemática em LIBRAS” que visa a produção de conteúdos matemáticos para as mídias digitais sendo este voltado ao ensino de alunos surdos.

Dentro do que foi discutido a respeito do ensino e aprendizagem da pessoa surda, todo o processo de criação dos vídeos aconteceu de forma a proporcionar a maior acessibilidade possível do aluno ao referido conteúdo, por isso, todos os vídeos foram concebidos em LIBRAS, contando com tradução em legenda e narração para a língua portuguesa, observe nas FIGURAS 1 e 2:

Figura 1



Vídeos de representação de sólidos

Figura 2



Aplicações matemáticas em LIBRAS

Dentro dos conteúdos matemáticos trabalhados nos vídeos que estão representados nas figuras acima, abordamos inicialmente a representação de sólidos geométricos e fórmulas dentro da disciplina de Geometria espacial, nesse contexto, no primeiro vídeo associamos como seria a representação destes sólidos na Língua Brasileira de Sinais em espaços públicos, a partir do processo de produção do material de acessibilidade partimos para a apresentação das fórmulas de área e volume destes sólidos e junto à isso uma breve atividade fazendo uso da mesma. Logo, o já supracitado material utilizou de recursos visuais tais como: desenhos dos sólidos geométricos em quadro branco que foram abordados, o uso de legenda em cores específicas para facilitar a visualização, camisas padronizadas de maneira que não atrapalhassem a visibilidade dos sinais em LIBRAS, de acordo com a NBR 15.290, que cita:

Na janela com intérprete da LIBRAS: a) os contrastes devem ser nítidos, quer em cores, quer em preto e branco; b) deve haver contraste entre o pano de fundo e os elementos do intérprete; c) o foco deve abranger toda a movimentação e gesticulação do intérprete; d) a iluminação adequada deve evitar o aparecimento de sombras nos olhos e/ou seu ofuscamento (ABNT, 2005, p.13).

Para tanto, o presente trabalho preocupou-se em proporcionar à pessoa, seja esta surda ou ouvinte, as condições necessárias para que sua aprendizagem ocorra de maneira a garantir as melhores experiências dentro do cenário proposto, assegurando a infraestrutura necessária desde a iluminação até as cores selecionadas tanto para a legenda quanto para a vestimenta das pessoas presentes nos vídeos. Assim, os vídeos fornecem todas as condições básicas a minimizar os obstáculos enfrentados rotineiramente pelo público alvo durante seu processo de construção do conhecimento.

4. CONCLUSÕES

Após analisar toda a construção da aquisição de direitos através da promulgação de leis e decretos que responsabilizaram os autores do processo de inclusão da pessoa com deficiência mais especificamente da pessoa surda no ambiente escolar e a importância de regulamentar e instruir como deve acontecer esse processo do início ao fim, entendendo toda a complexidade e as particularidades que envolvem o referido tema, verificamos a importância do projeto “Matemática Inclusiva: o uso de recursos digitais no ensino da matemática em LIBRAS” de forma que o aluno surdo tenha acesso ao conteúdo matemático de maneira alternativa e pautado à tudo que foi exposto, além da família, do Estado e da escola como instituição acolhedora, ambiente estruturado e adequado para a construção do conhecimento matemático com acessibilidade e equidade.

Porém, em contraponto a tudo que foi exposto até o momento, foi assinado em 30 de setembro de 2020, pelo presidente da república, o decreto nº 10.502 decidindo que escolas especiais para alunos da Educação Básica que possuem algum tipo de deficiência, forneçam os meios adequados para o ensino, assim como a capacitação profissional adequada e também a escolha da Libras como língua materna, ou seja, primeira língua.

A fragilidade desse decreto é que em consideração a inclusão, ele está retrocedendo no que refere à educação inclusiva pautada e reafirmada nos decretos e leis anteriormente expostos, pois o mesmo impõe a segregação de alunos que possuem algum tipo de deficiência, como consequência não o preparando para o meio social adequadamente. Para que a inclusão ocorra de fato, é necessário que o aluno seja inserido em um meio regular de ensino como qualquer outro aluno, claro que levando em conta os devidos cuidados que devem ocorrer nesse processo e, a partir disso, é possível que aconteça a inclusão.

5. REFERÊNCIAS

OLIVA, D. V. Barreiras e recursos à aprendizagem e à participação de alunos em situação de incluso. Scielo Brasil, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/0103-656420140099>. Acesso em: 24/02/2022.

Exame. 95% dos alunos saem do ensino médio sem conhecimento adequado em matemática. Exame, 2021. Disponível em: <https://exame.com/brasil/95-dos-alunos-saem-do-ensino-medio-sem-conhecimento-adequado-em-matematica/>. Acesso em: 23/02/2022.

BRASIL. Lei nº 10.502, de 30 de Setembro de 2020. Institui a Política Nacional de Educação Especial: Equitativa, Inclusiva e com Aprendizado ao Longo da Vida. Diário Oficial da União, Brasília, DF, Publicado em: 01/10/2020. Seção: 1, Página: 6.

CRISTIANO, A. Prolibras. Libras.com.br, 2017. Disponível em: <https://www.libras.com.br/prolibras> . Acesso em: 20/02/2022.

DECLARAÇÃO DE SALAMANCA. In: **Conferência Mundial de Educação Especial**. 1994. Portal do MEC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf> . Acesso em: 20/02/2022.

CARVALHO, L. S. F. B.; SENA, F.S.; MELO, M. A. T. Os desafios na qualificação docente para o ensino da Língua brasileira de sinais. 5º Congresso Nacional de Educação. 2018.

BRASIL. Lei nº 10.436, de 24 de Abril de 2002. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais - Libras e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF, Publicado em: 25/04/2002. Página: 23.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 15290: Acessibilidade em comunicação na televisão: ABNT NBR 15290:2005. Rio de Janeiro-RJ, p. 13. 2005.



DEFICIÊNCIA VISUAL E A UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS ADAPTADOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Pinheiro, Alexandre, alexandre.pinheiro@abaetetuba.ufpa.br¹
Carvalho, Aline, alineribeirocarvalho10@gmail.com²
Lima, Reinaldo, reinaldo.lima@unifesspa.edu.br³
Arruda, Suellen, scqarruda@yahoo.com.br⁴

¹UFPA
²UFPA
³UNIFESSPA
⁴UFPA

Resumo: O referido trabalho aborda metodologias aplicadas ao processo de ensino dos alunos com deficiência visual, pois, neste processo de inclusão escolar é notório a existência de grandes dificuldades enfrentadas tanto pelos alunos quanto pelos professores. Com isso, objetivamos apresentar uma proposta de recurso didático adaptado e de baixo custo para o ensino de Geometria voltados para alunos com deficiência visual da cidade de Abaetetuba/PA da rede pública de ensino. É válido ressaltar, que acreditamos que o presente projeto intitulado, "Deficiência Visual e a Utilização de Recursos Didáticos adaptados para o Ensino de Geometria" possa vir a contribuir no processo de ensino dos estudantes com deficiência visual, pois, através das pesquisas foi possível observar que o uso de recursos adaptados influencia positivamente no processo educacional desse alunado. Concluímos que os materiais adaptados como: Plano Cartesiano e Circunferência, facilitam significativamente aos estudantes com deficiência visual a assimilarem os conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Inclusão, Recurso didático, Deficiência Visual

INTRODUÇÃO

A inclusão é um tema que atualmente está em constante discussão na sociedade, principalmente no que tange ao processo educacional dos alunos com deficiência visual. É válido dizer que algumas ações sobre o referido tema já foram colocadas em práticas no Brasil, como por exemplo a Lei nº 13.146/2015 que é instituída a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Contudo, ao se falar em Educação Inclusiva, tem-se que reconhecer que ainda falta muito para ser vencido.

Apesar de todo o avanço, o Brasil ainda é um país com bastante desigualdade social, que ocasiona uma exclusão do público de alunos com deficiência, e podemos dizer que a ferramenta mais eficiente que pode ajudar a mudar esse cenário é uma educação de qualidade para todos. E desde a constituição de 1988, essa educação de qualidade é dever do estado juntamente com as escolas.

Com isso, o presente trabalho vem com objetivo de propor recursos didáticos adaptados para o ensino de Geometria aos alunos com deficiência visual da cidade de Abaetetuba/PA da rede pública, com intuito de incluir esse alunado no processo educacional do ensino da matemática. Os materiais táteis complementam o processo de ensino dos alunos com deficiência visual, ocasionando assim com que todos os alunos sejam sujeitos participativos e aprendam conforme a didática dada em sala de aula, priorizando o entendimento e o desenvolvimento desse alunado.

Deficiência Visual e a Importância de Recursos Didáticos Adaptados Para o Ensino de Geometria.

A inclusão é uma temática que atualmente vem trazendo muita discussão na sociedade, isso ocorre, pois, ela tem sido um dos grandes desafios nas instituições de ensino da atualidade, por conta de diversos fatores de ordem estrutural das escolas, como bens materiais, econômicos, ou até mesmo na falta de formação dos profissionais docentes. Uma das grandes conquistas que se refere a educação inclusiva é a Lei nº 13.146/2015 que é instituída a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência), cujo intuito é a assegurar e a promover condições de igualdade, o exercício dos direitos e das liberdades fundamentais da pessoa com deficiência, visando à sua inclusão social e cidadania. Com isso, se torna obrigatório que as escolas recebam esses alunos, porém, ao se falar em educação inclusiva se torna imprescindível praticas pedagógicas de inclusão que visem atender esse público.

Para entendermos a educação inclusiva e uma escola de fato inclusiva é necessário sabermos que independente das limitações de cada aluno, seja a sua condição física, intelectual, auditiva, visual, de gênero, entre outras, é preciso garantirmos o acesso e sua permanência de qualidade perante ao sistema educacional, e vários autores relatam um pouco sobre as dificuldades enfrentadas por esse alunado.

Alves e Duarte (2005), descrevem algumas barreiras enfrentadas pelos professores para a concretização da integração dos alunos cegos e com baixa visão, que é a falta de equipamentos apropriados para o ensino e a falta de qualificação desses profissionais para trabalhar com esse público.

Além disso, (SILVA, 2011) relata em suas pesquisas que é necessário a construção de novas práticas pedagógicas, pois, a inclusão de alunos com deficiência visual necessita de novos métodos que gerem conhecimentos e conteúdo que possam contribuir com o processo de inclusão na escola.

Já Lorenzato (2006, p.34), vem com uma temática que visa contribuir para essa inclusão acontecer, ele destaca a importância do uso de materiais didáticos adaptados e sua influência na vida do aluno:

Com o auxílio do material didático, o professor pode, se empregá-lo corretamente, conseguir uma aprendizagem com compreensão, que tenha significado para o aluno, diminuindo, assim, o risco de serem criadas ou reforçadas falsas crenças referentes à matemática, como a de ser ela uma disciplina “só para poucos privilegiados”, “pronta”, “muito difícil” e outras semelhantes

Portanto se torna necessário mudanças estruturais nas escolas a fim de dar comodidade para os alunos deficientes, é necessário formações continuadas para professores e apoio técnico, cujo foco é uma melhor preparação para lidar com os alunos com deficiência visual.

Diante disso, o presente projeto visa a construção de propostas em práticas de Educação Matemática Inclusiva voltadas para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas e materiais didáticos adaptados para o ensino de Geometria a estudantes com deficiência visual, de modo a contribuir efetivamente com os professores de Matemática quanto às estratégias metodológicas e avaliativas, em relação ao ensino de Geometria, que possibilite o desenvolvimento acadêmico e social dos alunos deficientes visuais das escolas de ensino básico da rede pública de ensino do município de Abaetetuba/PA.

O Ensino da Matemática, Para Alunos com Deficiência Visual do Ensino Médio

O Método de aprendizagem proposto é a utilização de recursos didáticos adaptados para estudantes com deficiência visual da rede pública de ensino, no qual a utilização do tato é necessária para a realização da atividade, os materiais foram pensados de forma a contribuir com o ensino da Geometria.

O objetivo é que o material seja um subsidio para o ensino Geometria, que a partir dos materiais confeccionados o aluno consiga compreender o assunto e o professor tenha um meio de fácil acesso para ensinar ao estudante com deficiência visual um pouco do que é a geometria. A avaliação da aprendizagem se dá por um processo, no qual primeiramente é valido o professor explicar cada passo dos materiais, posteriori inicia-se o processo de ensino do que pode ser trabalho nos materiais, logo após o professor propõe uma atividade para o aluno realizar e assim avalia o aluno em questão.

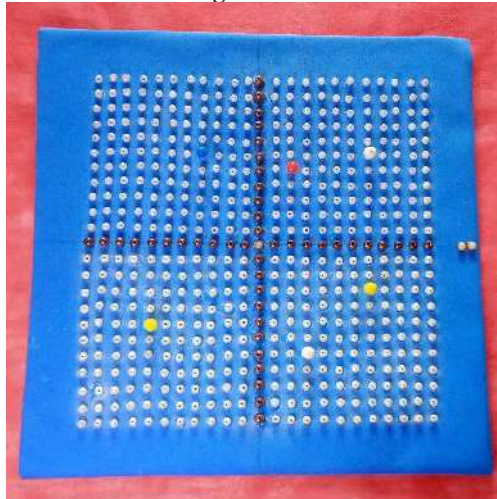
Plano Cartesiano

Materiais necessários para a confecção: Papelão, Miçangas, E.V.A, Cola, Régua, Tachinhas ou Percevejos, Ligas.

PÔSTERES

O plano cartesiano abaixo possui uma diversidade quanto ao ensino de Geometria, nele é possível abordar tópicos como: Coordenadas no Plano, Posições Relativas entre duas retas, Ponto Médio, Segmento de Reta entre outros. O Material adaptado para o ensino de Geometria para alunos com deficiência visual, traz como foco a utilização de recursos de baixo custo para sua elaboração. O Plano foi pensado e articulado com intuito de melhorar o ensino e aprendizagem dos alunos com deficiência visual.

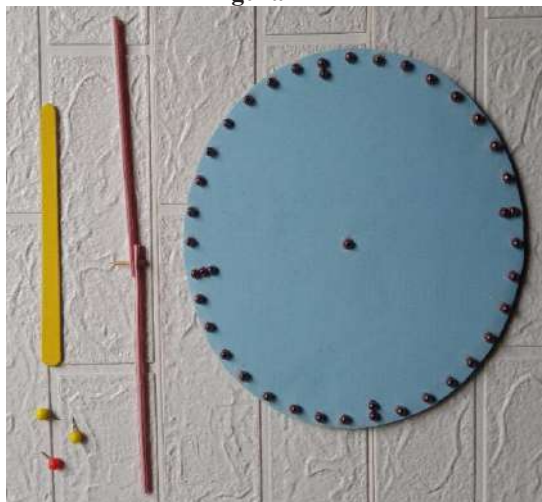
Figura 1



Circunferência

A Circunferência nesse momento permite a abordagem dos seguintes tópicos: Posições Relativas entre Retas e Circunferência, Tipos de Ângulos e suas classificações. Assim, com o auxílio desse material confeccionado os alunos com deficiência visual vão adquirir habilidades de assimilar os conteúdos propostos com maior facilidade.

Figura 2



CONCLUSÕES

Destarte, com toda as informações adquiridas na pesquisa, foi possível perceber que apesar da inclusão ter evoluído bastante nas escolas regulares, ainda se torna necessário muitos aperfeiçoamentos na educação inclusiva. Se torna evidentemente necessário que o Estado melhore a infraestrutura, capacitação da equipe docente e disponibilize materiais pedagógicos adequados que sejam suficientes para a inclusão dos alunos com deficiência visual, para que assim seja possível possibilitar de fato, sua inclusão em classes regulares, para que com autonomia o estudante passe a ser independente e capaz de se relacionar, conviver e exercer o seu direito de ir e vir como qualquer cidadão comum.

Dessa forma, os recursos didáticos adaptados aqui supracitados possibilitam ao professor uma proposta de ensinar geometria por meio de atividades práticas, onde tanto os alunos com deficiência visual, quanto os ditos “normais”, teriam a possibilidade de aprender a matemática através de recursos concretos, visto que uma das vantagens dos recursos didáticos adaptados é a possibilidade de concretizar as ideias matemáticas, acarretando assim a uma possibilidade metodológica de realizar a inclusão dentro da sala de aula de forma simultânea.

Já no ensino da Matemática os recursos didáticos contribuem diretamente para o estudante ter uma percepção dos assuntos propostos, como: coordenadas, segmentos de retas, ponto médio, classificação dos triângulos, dentre outros, ou seja, os recursos permitem por meio do tato essa exploração da geometria, possibilitando ao estudante com deficiência visual o entendimento dos conteúdos propostos.

REFERÊNCIAS

AINSCOW, M.; FERREIRA, W. **Compreendendo a educação inclusiva: algumas reflexões sobre experiências internacionais**. In: RODRIGUES, David. *Perspectivas sobre a inclusão: da educação à sociedade*. Porto: Porto Editora, 2003

CERTEZA, L. M. **Educação inclusiva: processo em construção. Ciranda da Inclusão (a revista do educador)**. Prol editora gráfica, São Paulo, setembro, 2010

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SÁ, E. D. de; CAMPOS, I. M. de; SILVA, M. B. C. **Atendimento Educacional Especializado: deficiência visual**. Brasília: SEESP/SEED/MEC/, 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aec_dv.pdf>. Acesso em: 15 de jan. 2022.

SILVA, Afonsa Janaína; DUARTE Edison; ALMEIDA, J. J. G. **Campeonato Escolar e Deficiência visual: o discurso dos professores de Educação Física**. Revista Movimento, v. 17, n. 2, p.38-55, Porto Alegre, abr./jun. 2011.



REPRODUÇÃO COMPUTACIONAL COM PYTHON DE UMA CATENÁRIA DADOS O COMPRIMENTO DO FIO E DOIS PONTOS

Begot, Luciano, lucianobegot@gmail.com¹
Vaz, Cristina, cvaz@ufpa.br²

¹UFPA – Universidade Federal do Pará

² UFPA – Universidade Federal do Pará

Resumo: Neste trabalho desenvolvemos a solução analítica e reprodução computacional utilizando a linguagem de programação Python do problema da catenária, a curva formada por um cabo flexível inextensível, suspenso em dois pontos A e B e sujeito ao seu próprio peso. O problema é amplamente abordado na engenharia e em livros de equações diferenciais ordinárias. Neste texto será abordada não só a solução da equação diferencial que descreve a catenária, mas também como a partir dos pontos A e B sobre os quais ela está suspensa e o comprimento do cabo podemos reproduzir computacionalmente qualquer catenária dada. A reprodução computacional se dá através da linguagem Python e da biblioteca VPython.

Palavras-chave: Catenária, Equação, Diferencial, Computacional, Python.

INTRODUÇÃO

O problema abordado neste trabalho é o da determinação da curva formada por um cabo flexível inextensível, suspenso em dois pontos A e B , e sujeito a seu próprio peso. Flexível significa que a tensão no cabo é sempre no sentido da tangente.

Segundo Figueiredo(1997), esse problema foi proposto pela primeira vez por Leonardo da Vinci, e resolvido incorretamente por Galileu, que “mostrou” que a curva obtida deveria ser uma parábola.

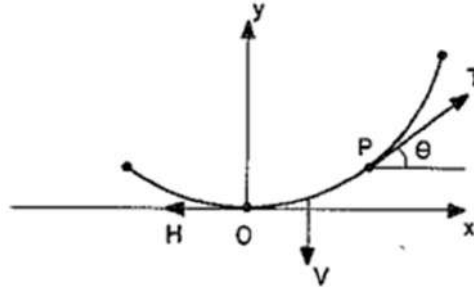
Em 1690, James Bernoulli chamou a atenção sobre esse problema, e um ano depois ele era resolvido por Leibniz, Huyghens e Johan Bernoulli, irmão de James. Foi Leibniz que deu o nome de catenária à curva.

Apesar de ser um problema comumente encontrado em livros de equações diferenciais a nível de graduação, os livros apenas abordam a solução da equação diferencial que descreve a curva. Neste trabalho estendemos o problema a encontrar a curva exata que descreve uma catenária suspensa sobre pontos A e B dados, com um comprimento L dado.

Além disso, trabalharemos com a biblioteca Visual Python (VPython), da linguagem de programação Python. O VPython funciona como uma extensão do Python que permite o usuário trabalhar com facilidade com imagens 2D e 3D. Isto torna fácil a criação e visualização de situações reais. Para Scherer e col. (2000): “a simplicidade do VPython o tornou uma ferramenta para a ilustração de situações físicas e matemáticas simples e acessível para estudantes”.

1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CATENÁRIA E SUA SOLUÇÃO

Figura 1. Fonte: FIGUEIREDO(1997).



Consideramos um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto mais baixo da curva e eixo y coincidente com a vertical. Vamos considerar o equilíbrio do trecho OP do cabo mostrado na figura acima.

Chamaremos de H a tensão do cabo em seu ponto mais baixo, de T a tensão no ponto $P = (x, y)$ e V é o peso do trecho OP do cabo, tendo $V = \omega s$ onde ω é o peso por unidade de comprimento e s é o comprimento do arco OP . Como o sistema está em equilíbrio temos $H + T + V = 0$.

Decompondo esta equação do equilíbrio sobre os dois eixos, obtemos:

$$\begin{aligned} H &= T \cdot \cos(\theta) \\ V &= T \cdot \text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Então:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\omega}{H} s \quad (1)$$

Como ω e H são constantes, tomamos $\frac{\omega}{H} = k$, para facilitar a notação. Observe também que $\text{tg}(\theta) = y'$. Logo, derivando a equação (1):

$$y'' = k \frac{ds}{dx}$$

Como s é o comprimento da curva até o ponto P temos:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Assim, reescrevemos a equação como:

$$y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$$

Para a solução desta EDO, devemos utilizar uma redução de ordem. Introduzimos a variável $p = y'$, obtemos a equação separável de primeira ordem:

$$p' = k\sqrt{1 + p^2} \Rightarrow \frac{p'}{\sqrt{1 + p^2}} = k$$

Resolvendo a equação obtemos a seguinte família de soluções:

$$-\ln(\sqrt{p^2 + 1} - p) = kx + \text{const.}$$

Como $p(0) = y'(0) = 0$, esta constante deve ser zero. Logo, temos a equação:

$$\sqrt{(y')^2 + 1} - y' = e^{-kx}$$

Utilizando as propriedades das funções hiperbólicas, obtemos que as soluções do problema devem ser da forma:

$$y(x) = k^{-1} \cosh(kx) + \text{const.}$$

Como $y(0) = 0$, conclui-se que esta constante é $-k^{-1}$. Logo, a solução é:

$$y(x) = k^{-1} \cosh(kx) - k^{-1}$$

2. CONSTRUÇÃO DA CATENÁRIA DADOS O COMPRIMENTO DO FIO E DOIS PONTOS

Primeiramente, começamos por generalizar a posição do centro do sistema de coordenadas, já que a fórmula anterior assume que o ponto mais baixo da curva estará na origem do sistema de coordenadas. Para facilidade de notação tomamos $k^{-1} = a$. Assim, a equação da catenária será da forma:

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - a$$

Supomos que o ponto mais baixo desta curva tenha coordenadas (x_0, y_0) . Se deslocarmos esta função verticalmente em y_0 unidades e horizontalmente em x_0 unidades teremos:

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x + x_0}{a}\right) - a - y_0$$

Com esse deslocamento, garantimos que o centro do sistema de coordenadas esteja no ponto mais baixo da curva. Mais uma vez, para facilidade de notação tomamos $x_0 = -b$ e $a + y_0 = -c$. Assim, temos a seguinte função:

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x - b}{a}\right) + c$$

Assim, dados o comprimento L da corda e os pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) onde ela está fixada, a função deve satisfazer:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

E

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = a \left[\sinh\left(\frac{x_2 - b}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - b}{a}\right) \right]$$

Tomamos agora $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. Devemos ter $L^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2$ para que o cabo esteja de fato pendurado entre os pontos, e não esticado.

Agora, note que

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = a \left[\cosh\left(\frac{x_2 - b}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_1 - b}{a}\right) \right]$$

Tomamos também $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $A = \frac{\Delta x}{2a}$ e $B = \frac{\bar{x} - b}{a}$. Assim, L e Dy se tornam:

$$\begin{aligned} L &= 2a \cdot \cosh\left(\frac{x_2 + x_1 - 2b}{2a}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{a}\right) = 2a \cdot \cosh(B) \cdot \sinh(A) \\ \Delta y &= 2a \cdot \sinh(B) \cdot \sinh(A) \end{aligned}$$

Assim,

$$L^2 - \Delta y^2 = 4a^2 \sinh^2(A)$$

Seja $r = \frac{\sqrt{L^2 - \Delta y^2}}{\Delta x}$. Assim, a expressão acima se torna

$$rA = \sinh(A)$$

Isto pode ser resolvido numericamente para A , restando substituir isto em $A = \frac{\Delta x}{2a}$ para encontrar o valor da constante a .

Agora, note que

$$\frac{\Delta y}{L} = \tanh(B) \Rightarrow B = \tanh^{-1}\left(\frac{\Delta y}{L}\right) \Rightarrow b = \bar{x} - a \tanh^{-1}\left(\frac{\Delta y}{L}\right)$$

Por fim, podemos facilmente determinar c pois:

$$f(x_1) = y_1 \Rightarrow a \cosh\left(\frac{x_1 - b}{a}\right) + c = y_1 \Rightarrow c = y_1 - a \cosh\left(\frac{x_1 - b}{a}\right)$$

Assim, todos os parâmetros de uma catenária com as condições dadas podem ser calculados e esta pode ser reproduzida computacionalmente.

3. REPRODUÇÃO COMPUTACIONAL COM PYTHON

De posse dos meios encontrados na sessão anterior para calcular cada uma das constantes, iniciamos a reprodução computacional da catenária nas condições dadas. Utilizando funções básicas da linguagem Python, calculamos cada uma das constantes.

Para plotar a curva, plotamos inicialmente o ponto $A = (x_A, y_A)$, assumindo que a coordenada x de A é menor do que a de $B = (x_B, y_B)$. A partir disto, utilizamos o VPython e a função $y(x)$ encontrada para plotar o conjunto de pontos que forma a curva da catenária.

Seguem abaixo alguns exemplos de catenárias criadas com o software desenvolvido:

Figura 2. Catenária com pontos $A = (0,10)$, $B = (3,3)$ e $L = 30$. Fonte: Autoral.

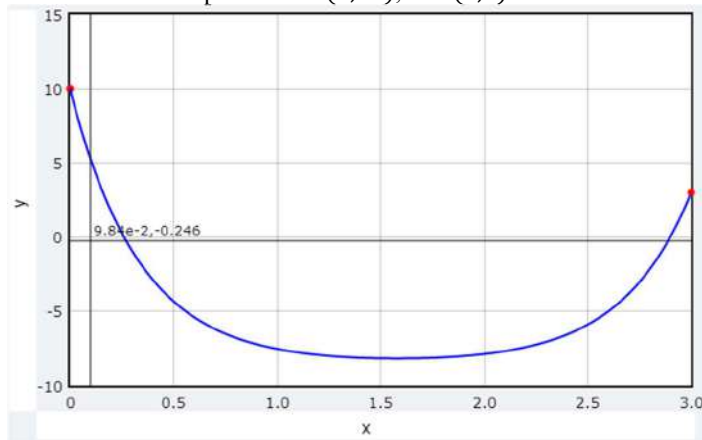


Figura 3. Catenária com pontos $A = (0,10)$, $B = (3,3)$ e $L = 15$. Fonte: Autoral.

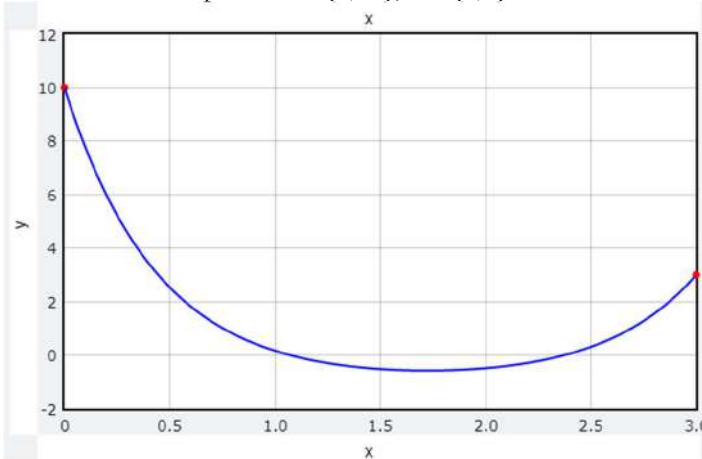
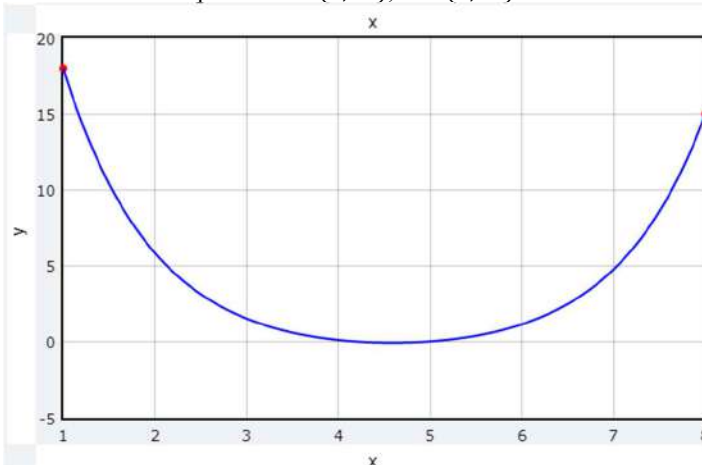


Figura 4. Catenária com pontos $A = (1,18)$, $B = (8,15)$ e $L = 35$. Fonte: Autoral.



CONCLUSÕES

Desenvolvemos uma abordagem diferente da comumente vista em livros de equações diferenciais ordinárias a nível de graduação, com o adicional da representação gráfica computacional. Assim foi possível entender em detalhes como construir uma catenária, dadas as condições com que esta ocorre e saber como estas condições interagem com a equação diferencial normalmente proposta.

Por fim, a utilização da linguagem Python, e mais especificamente a biblioteca VPython, permite não só o exercício da programação na representação de situações físico-matemáticas como também torna mais palpável e intuitivo o entendimento da curva estudada.

REFERÊNCIAS

SCHERER, D.; DUBOIS, P.; SHERWOOD, B. VPython: 3D Interactive Scientific Graphics for Students. Warner Hall: Carnegie Mellon University. 2000.

FIGUEIREDO, D. Equações diferenciais aplicadas. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE AUTOVALORES

Silva, Ângelo Felipe Machado, a.felipesilva712@gmail.com¹
Arruda, Suellen Cristina Queiroz, sqarruda@ufpa.com.br²

¹Universidade Federal do Pará – Campus do Baixo Tocantins

²Universidade Federal do Pará – Campus do Baixo Tocantins

Resumo: *As Equações Diferenciais é uma importante área de pesquisa na matemática tanto pelo seu rigor matemático, quanto por sua multiplicidade de aplicações em diversos campos científicos, como a Física, Biologia e Engenharias. Em todas essas áreas do conhecimento, nos deparamos com fenômenos modelados a partir de equações diferenciais, tais como, o movimento de fluidos, propagação e detecção de ondas sísmicas e balanço de droga no organismo. No presente trabalho, investigamos a existência de solução para problemas de autovalores na reta com valores de contorno. O objetivo consiste em encontrar todos os valores para os quais a solução do problema é não-trivial, chamados de autovalores, e as autofunções associadas a esses autovalores. Tal problema relaciona conceitos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral, além disso, está incluso em uma grande classe de problemas de valores de contorno chamada de problemas de Sturm-Liouville, a qual possui propriedades relevantes para o seu estudo.*

Palavras-chave: *equações diferenciais, problemas de valores de contorno, autovalores e autofunções, problemas de Sturm-Liouville.*

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII solucionou diversos problemas da época, fomentando o surgimento e avanço de novos estudos. Rompendo nesse período, os estudos das Equações Diferenciais, a princípio, para solucionar problemas práticos físicos, expressaram sua relevância às diversas áreas do conhecimento, seja por apresentar uma matemática rigorosa, seja por sua multiplicidade de aplicações. Para Zill e Cullen (2001), as equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas tanto da ciência, quanto da engenharia e, salienta que por esse motivo o estudante de ciências exatas deve estudá-las.

Nas diversas áreas da ciência, como a Física, Biologia, Engenharias e outras, nos deparamos com fenômenos descritos ou modelados por meio de equações diferenciais, como o movimento de fluidos, propagação e detecção de ondas sísmicas, dinâmica de desenvolvimento de tumores e balanço de droga no organismo. Essa rica diversidade de aplicações despertaram a atenção de respeitados matemáticos no passado e, ainda tem estimulado a curiosidade de muitos outros atualmente. Além disso, Boyce e DiPrima (2015) salientam que as equações diferenciais continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica com muitas questões em aberto, e ressaltam que os modelos mais simples podem modelar um fenômeno físico importante.

Dentre os problemas estudados nas equações diferenciais, destacamos o problema de valores de contorno de Sturm-Liouville, que se trata de uma grande e importante classe de problemas da matemática. Esta classe possui resultados úteis para o estudo de equações diferenciais aplicadas a valores de contorno. Portanto, abordaremos no presente trabalho um problema incluído na referida classe conhecido como problema do autovalor envolvendo o laplaciano na reta. Estudaremos esse problema a fim de apresentar sua solução e explicitar as características herdadas dessa classe.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

Para compreendermos a resolução do problema, é de suma importância o conhecimento prévio de alguns conceitos da Álgebra Linear e de Equações Diferenciais. Usamos como referência o livro do Boyce e DiPrima

(2015), no entanto, ao decorrer do trabalho nos embasamos também em outras obras que foram importantes para o desenvolvimento do mesmo, como a de Zill e Cullen (2001).

Definição 1: Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é dada na forma

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), \quad (2.1)$$

onde p, q, f são funções contínuas em \mathbb{R} definidas em $\alpha < t < \beta$.

A equação (2.1) é dita homogênea se $r(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Caso contrário, é dita não-homogênea. Qualquer função $y = \phi(t)$ que satisfaça (2.1) é dita solução da equação.

Vamos analisar o caso em que as funções $p(t), q(t)$ são constantes e $r(t) = 0$. Seja a equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad (2.2)$$

onde a, b e c são constantes dadas. Supondo que $y = e^{rt}$ é uma solução de (2.2), podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$a(r^2 e^{rt}) + b(re^{rt}) + c(e^{rt}) = 0 \implies e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, dividindo o resultado acima por e^{rt} , se obtém

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.3)$$

Essa equação é chamada de equação característica ou equação auxiliar. Sua importância está no fato de que se r for raiz desta equação, pode-se concluir que $y = e^{rt}$ é uma solução para a equação diferencial (2.2).

Considerando r_1 e r_2 raízes reais da equação característica, então $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ serão soluções para (2.3). Assim, notamos que a equação (2.3) é uma equação do segundo grau com coeficientes reais e, portanto, podemos considerar três casos para a solução geral da equação (2.2).

1º Caso: Se r_1 e r_2 são reais e distintas, então a solução geral se dá na forma

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

2º Caso: Se r_1 e r_2 são reais e iguais, então a solução geral será

$$y = c_1 t e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \text{ com } r_1 = r_2 = -b/2a.$$

3º Caso: Se r_1 e r_2 são complexas e conjugadas, ou seja, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t).$$

Os três casos acima são importantes para a análise dos valores de λ a fim de verificar se ele é um autovalor do problema em questão.

3. ANÁLISE DO PROBLEMA

Em aplicações que envolvem equações diferenciais, é comum estabelecer dois pontos diferentes para a variável dependente y ou para suas derivadas, estes pontos pré-definidos são chamados de valores de contorno ou de fronteira. Os problemas de valores de contorno possuem uma semelhança, no aspecto das suas soluções, com as equações algébricas lineares podendo ter uma única solução, não ter soluções ou ainda, ter uma infinidade de soluções.

Os problemas de valores de contorno chamados problemas de Sturm-Liouville se apresentam da seguinte forma

$$\begin{cases} [p(t)y'(t)]' - q(t)y(t) + \lambda r(t)y(t) = 0 & \text{em } [\alpha, \beta] \\ a_1 y(\alpha) + a_2 y'(\alpha) = 0 \\ b_1 y(\beta) + b_2 y'(\beta) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Essa classe de problemas dispõe de propriedades fundamentais que são essenciais para a solução do problema de autovalor na reta, mencionadas nos teoremas abaixo.

Teorema 1: Todos os autovalores do problema (3.1) de Sturm-Liouville são reais.

Teorema 2: Os autovalores do problema (3.1) de Sturm-Liouville são todos simples ou não degenerados. Além disso, os autovalores formam uma sequência infinita e podem ser ordenados crescentemente, de modo

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

com $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

3.1. Problema do Autovalor na Reta

Considere o problema de autovalor na reta

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, \pi] \quad (3.2)$$

Os valores de λ para os quais existem soluções não-triviais do problema (3.2) são chamados de autovalores e as soluções não-triviais são as autofunções.

Consideremos o problema de encontrar todos os seus autovalores e as autofunções associadas a esses autovalores. Para resolvermos, vamos analisar os valores de λ em três casos: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

1º Caso ($\lambda < 0$): Neste caso, seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, a solução geral de (3.2) é dada por

$$y(t) = c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \sinh(\mu t).$$

Para satisfazer a primeira condição de contorno $y(0) = 0$, é necessário tomar $c_1 = 0$. Da segunda condição de contorno, temos

$$y(\pi) = c_2 \sinh(\mu\pi) = 0,$$

o que implica em $c_2 = 0$. Logo, o problema (3.2) não possui soluções não-triviais e, conseqüentemente, não há existência de autovalores negativos.

2º Caso ($\lambda = 0$): Neste segundo caso, observa-se que o problema é reescrito da forma

$$y'' = 0$$

e suas raízes são reais e iguais. Desse modo, a solução geral é dada por

$$y = c_1 t + c_2.$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se $y(0) = c_2 = 0$ e $y(\pi) = c_1 \pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Logo, para $\lambda = 0$ o problema (3.2) só admite a solução trivial, ou seja, não existem autovalores.

3º Caso ($\lambda > 0$): Neste caso, obtém-se a equação característica $r^2 + \lambda = 0$ e suas raízes são

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Como as raízes da equação característica são complexas conjugadas, a solução geral será

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

E, pelas condições de contorno, obtemos

$$y(0) = c_1 = 0 \quad \text{e} \quad y(\pi) = c_2 \sin(\mu\pi) = 0.$$

Como o interesse é encontrar soluções não-triviais, tomemos $c_2 \neq 0$, assim, teremos

$$\operatorname{sen}(\mu\pi) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda = k^2, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os autovalores do problema (3.2) são os quadrados de inteiros, isto é,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \dots, \lambda_n = n^2, \dots, \quad (3.3)$$

e as autofunções associadas aos autovalores de (3.3) são

$$y_1(t) = \operatorname{sen}(t), y_2(t) = \operatorname{sen}(2t), \dots, y_n(t) = \operatorname{sen}(nt), \dots,$$

Desde que a constante c_2 não está determinada, segue que, os múltiplos dessas funções também são autofunções para o problema (3.2).

4. CONCLUSÕES

Em várias áreas da matemática faz-se necessário o conhecimento das equações diferenciais. Para um estudante desejoso ou que estar inclinado a seguir seus estudos na área de Equações Diferenciais Parciais (EDP), julga-se significativo o conhecimento da classe de problemas aqui abordada, possibilitando familiarização com assuntos mais avançados da matemática. Além disso, o trabalho proporcionou o estudo das equações diferenciais e seus métodos de resolução, bem como conhecer a história de alguns célebres matemáticos precursores da teoria. E ainda, impulsionou no aprofundamento teórico de assuntos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral.

Vimos que a solução do problema proposto é uma sequência infinita crescente de senos e que todos os seus autovalores são valores reais e distintos, características herdadas dos problemas de Sturm-Liouville. Mais ainda, verificamos que a existência de soluções não triviais ocorre somente para autovalores positivos.

Cabe informar que, o desenvolvimento desse trabalho é resultado do projeto de Iniciação Científica intitulado “Introdução ao Estudo de EDP na Região Tocantina”, sob orientação da Prof.^a Dr.^a Suellen Cristina Queiroz Arruda, possibilitando aprofundamento teórico em equações diferenciais de modo a realizar pesquisas nas áreas da Matemática Pura e Aplicada, além de preparar os discentes para um possível ingresso em cursos de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais, volume 1. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro: Impa, 1997.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. Um Curso de Álgebra Linear. 2 ed. São Paulo: edusp, 2018.

MEDEIROS, Elisa Ferreira. Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível. 2016. 56 f. Trabalho de conclusão de Curso (graduação) – Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, FURG, Rio Grande, 2016.

SILVA, Carlos Antonio Pereira da. O problema de Sturm-Liouville e aplicações. 2011. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.



O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA: ENTENDIMENTO SOBRE AS CURVAS

Lopes Assunção, Lucas, lucasassuncao001@gmail.com
Cruz dos Prazeres, Jose Anderson, andersoncruzprazeres2000@gmail.com

Discente FAMAT/PIBID/UFPA
Discente FAMAT/PIBID/UFPA

Resumo: *A finalidade deste trabalho é exemplificar o conceito e aplicação da braquistócrona, abordando sua história e curiosidades que se interligam com a tautócrona e a curva cicloide, isto é, citando cada uma delas com o intuito de evidenciar a resolução nos seus problemas propostos. A resolução se identifica por meio das figuras, ilustrações e tabelas demonstrativas. Com o objetivo final de associar os três termos trabalhados, visando o melhor entendimento do público sobre o tema apresentado.*

Palavras-chave: Braquistócrona. Cicloide. Tautócrona

INTRODUÇÃO

Inicialmente, vamos a um fato curioso: se perguntarmos para qualquer pessoa, qual o caminho mais rápido de um ponto A ao ponto B em um plano vertical, onde haja uma aceleração constante, instintivamente, caso a pessoa não conheça sobre o conceito da braquistócrona, ela dirá que será uma reta, pois deduzirá que o caminho mais curto também será o mais rápido, afinal é o que “faz mais sentido”, no entanto, ela estará equivocada.

A relação do ponto A com o ponto B sob influência da gravidade, faz com que o caminho mais rápido seja uma curva (cicloide), quando se considera um plano vertical, pois o seu impulso acaba por ser maior do que o da reta.

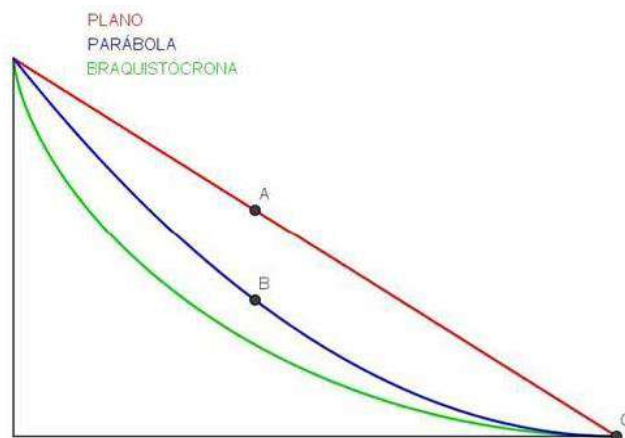
Neste trabalho, evidenciamos o problema da braquistócrona e como ele pode ser resolvido. Falamos, também, sobre a curva cicloide e qual a sua relação com a braquistócrona, assim como o problema da tautócrona. Tudo isso vinculado ao ensino de uma forma mais dinâmica e exemplificadora por meio de ilustrações.

O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

O problema da Braquistócrona surgiu em (1669), quando foi proposto por Jean Bernoulli, este publicou o problema na revista *Acta Eruditorum*, esse problema chamou atenção dos matemáticos e físicos daquele período que ficaram curiosos em resolvê-la, então revista *Acta* foi responsável por enviar o problema aos maiores matemáticos da época, a solução foi encontrada por vários deles inclusive pelo Isaac Newton, nesta solução todos indicaram que o caminho mais rápido seria uma curva que era a cicloide, denominada também como braquistócrona.

A palavra braquistócrona deriva das palavras gregas *brachistos*, que significa menor, e *chronos*, que significa tempo. O problema da braquistócrona consiste em determinar a curva que une dois pontos dados a diferentes distâncias na horizontal, e no mesmo plano vertical, pela qual uma partícula, esfera ou bola se desloca, por meio do seu próprio peso sobre efeito gravitacional, começando o seu movimento no ponto superior, descendo o mais rapidamente possível até ao ponto inferior.

Figura 1. Comparação do tempo de descida das curvas



Fonte: Simulação elaborada por meio do Geogebra

Para medir o tempo em que as 3 partículas se deslocam do ponto inicial ao ponto final, foi usado um cronômetro para fazer várias medidas do tempo de descida das esferas, conforme ilustrado nas várias curvas na Figura 1 para, com isso, estimar o tempo de percurso ótimo. Calculou-se além do tempo de descida o desvio padrão pela seguinte fórmula:

$$Dp = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n}}$$

sendo Dp o desvio padrão, t_i : o valor individual do tempo, n : o número de vezes que o tempo foi coletado, e \bar{t} : a média dos intervalos de tempo, dada por:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

O resumo das medidas obtidas está apresentado na Tabela 1.

Tabela 1. Tempo estimado da descida das esferas em diferentes percursos

Curva	Tempo Estimado (S)	Desvio Padrão
Reta	0,30 s	0,06
Parábola	0,23 s	0,013
Braquistócrona	0,20 s	0,010

Fonte: Os autores

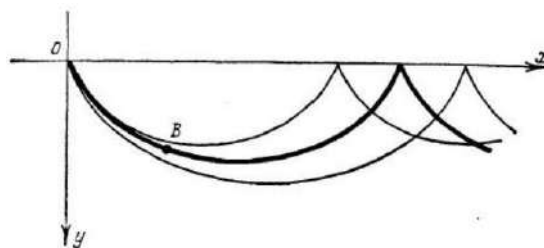
Agora, aplicaremos uma condição que irá revelar, na teoria, que a cicloide (braquistócrona) é a curva que minimiza o tempo de descida da partícula entre dois pontos.

O feixe de cicloides $x = C_1 (t - \text{sen}(t))$ e $y = C_1 (1 - \text{cos}(t))$ com centro em $(0, 0)$ forma um campo central que inclui o extremal:

$$x = \alpha (t - \text{sen}(t)) \text{ e } y = \alpha (1 - \text{cos}(t))$$

Onde α é determinado pela condição de que a cicloide passa pelo segundo ponto de fronteira $B (x_1, y_1)$, então $x_1 < 2\pi\alpha$, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2. Feixe de cicloides



Fonte: Elsgoltz (1696)

Temos também que

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} e$$

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

para qualquer y' . Assim, pelas condições suficientes, para $x_1 < 2\pi\alpha$, o funcional assume o mínimo na cicloide.

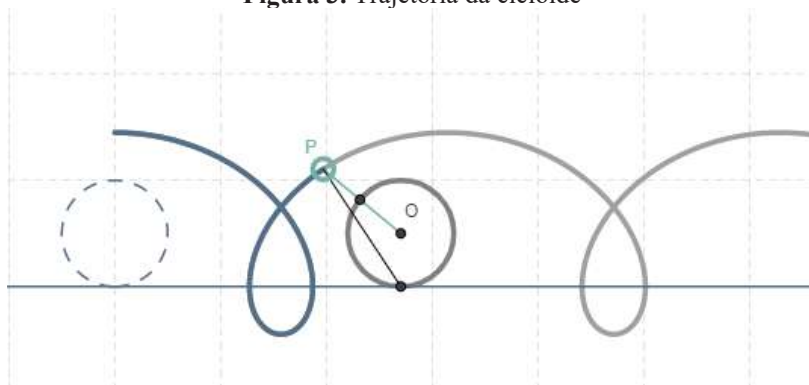
$$x = \alpha(t - \text{sen}(t)) \text{ e } y = \alpha(1 - \text{cos}(t))$$

Desta forma temos a comprovação teórica de que a solução da Braquistócrona é realmente a cicloide, como foi demonstrado.

CURVA CICLOIDE

A curva cicloide é a trajetória definida por um ponto P em uma circunferência que inscrita sobre um plano, é transladada paralelamente a um eixo referencial fixo. Uma cicloide invertida é a solução para o problema da braquistócrona é através dela que se obtém o caminho mais rápido de um ponto ao outro.

Figura 3. Trajetória da cicloide



Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/parametrizacao-cicloide/>

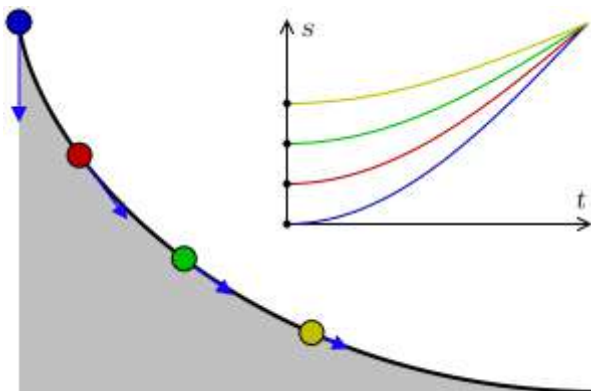
Se a distância de P ao centro O é igual ao raio da circunferência temos uma cicloide. Caso seja menor, temos uma cicloide encurtada e, se é maior, temos uma cicloide alargada.

O PROBLEMA DA TAUTÓCRONA

Um problema que intrigou os matemáticos do século XVII foi o problema da tautócrona, palavra que tem origem no grego: *tauto* que significa “mesmo” e *chronos* que significa “tempo”, ou seja, tautócrona literalmente significa “no mesmo tempo”. O problema tautocrônico, foi resolvido por Christiaan Huygens em 1659. Ele provou geometricamente que essa curva se tratava de uma cicloide. Este consistia em determinar a curva sobre a qual um objeto (esfera) escorregará de um ponto qualquer até o fundo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja o ponto

de partida. Exemplo um ponto A em uma altura e um ponto B em outra, sendo altura de B inferior de A , ambos as esferas são soltas ao mesmo tempo de seus pontos, e ambas chegam ao mesmo tempo em seu destino final.

Figura 4. Esferas em pontos diferentes de partida, mas ambas chegam juntas ao final



Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone> R

Na Figura 4 podemos analisar um esquema com 4 bolinhas (azul, vermelha, verde, amarelo), respectivamente, se deslocando sobre uma tautócrona, lançadas de pontos diferentes, no entanto, atingindo o ponto final juntas. O gráfico no detalhe da Figura 4 mostra a posição em função do tempo, se observarmos a bolinha azul ela é que está mais distante, mas chega junto com as demais devido a sua maior aceleração durante o percurso.

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos o conceito e aplicação da braquistócrona, abordando sua história e curiosidades e sua ligação com a tautócrona e a curva cicloide, envolvemos o leitor sobre suas histórias. A braquistócrona (curva que une dois pontos dados a diferentes distâncias), cicloide (curva definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta) e a tautócrona (curva no qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo, independentemente de seu ponto de partida). Ao longo do texto foi transmitido a problemática delas e o desenvolvimento, tentando solucioná-las de forma simples e compreensível para que o leitor entenda sem nenhuma dificuldade.

REFERÊNCIAS

De Andrade M. A; Ferreira Filho L. G.: **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, 2309 (2015)

Oliveira R. V; Da silva M. G.: **Experiências em Ensino de Ciências** V.15, No.3 (2020)

Tagliolato, Ana Luísa Sader: **Braquistócrona** - Rio Claro, 2015 54 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas 2015

BUSTILLOS, O. V.; SASSINE, A. **A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona.**

São Paulo: Scor Tecci, 2011.

Vieira C. G; Gonçalves Rosa R. J; de Freitas W. D.: **O Problema da Braquistócrona: uma proposta para o ensino** Abakós, Belo Horizonte, v. 4, n. 2, p. 94-104, maio 2016



NEUROCIÊNCIA E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

TAVARES, Simone Cristina da Costa, sim0ne_tavares@yahoo.com.br¹

VALE, Jesiane Calderaro Costa, jesianecalderaro@gmail.com²

¹Engenheira de Telecomunicações, Licenciada em Matemática, Especialista em Docência no Ensino Superior, Mestre em Engenharia Elétrica na área de Telecomunicações, Doutoranda em Engenharia Elétrica na área de Telecomunicações na Universidade Federal do Pará.

²Psicóloga, Neuropsicóloga, Especialista em Saúde Mental, Especialista em Psicologia Hospitalar, Mestre em Psicologia Clínica e Social, Doutora em História Social, Pesquisadora no GP Militares, Política e Fronteiras na Amazônia -UFPA/CNPQ.

Resumo: Este artigo objetiva apresentar aproximações teóricas entre a neurociência e a aprendizagem matemática. Trata-se de um estudo bibliográfico, no qual tecemos discussões teóricas a respeito da motivação e do tempo oportuno para a aprendizagem do educando, de acordo com seu desenvolvimento cognitivo. A escolha do tema em questão foi motivada no desejo de querermos desmistificar a matemática como uma disciplina pouco compreensível, complexa, e como a principal causa de reprovações escolares. Historicamente, muitos alunos não conseguem assimilar o conteúdo da matemática e se sentem incompetentes para a absorção da matéria, exatamente, por isso defende-se a importância da interdisciplinaridade no aprendizado da matemática. Sendo ela uma ciência elementar em toda a existência humana; mesmo o indivíduo não escolarizado faz uso no seu cotidiano de elementos cabíveis à matemática, acreditamos assim, com base nos referenciais teóricos estudados, a importância do ensino-aprendizagem da matemática com o suporte da neurociência.

Palavras-chave: Matemática, Neurociência, desenvolvimento cognitivo, docência, aprendizagem.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a importância do ensino da matemática consubstanciado ao conhecimento da neurociência para esse aprendizado, tendo por certo que o fenômeno ensino-aprendizagem perpassa por enfoques que envolvem uma perspectiva interdisciplinar.

A escolha do tema em questão foi motivada no desejo de querermos desmistificar a matemática como uma disciplina de ensino pouco compreensível, e até mesmo complexo, cujo codinome recebido há décadas de “vilã” das repetências e reprovações escolares. Tocamos no assunto, que muitas vezes somente ocorre até o período do ensino infantil, que é a aula lúdica e que ela acaba sendo perdida, à medida que o conteúdo da disciplina vai se apresentando mais complexo e, acreditamos, que com isso perde-se também o interesse, pois o ensino torna-se menos atrativo.

A matemática faz parte do cotidiano de todas as pessoas, porém muitas vezes isso acontece de forma despercebida. A usamos para uma diversidade de situações, seja para termos o conhecimento de uma área não definida, para uma amostra de uma determinada pesquisa, que é algo complexo; seja para uma comparação de médias em análise de variância como um recurso estatístico, ou simplesmente para aferirmos a nossa massa em uma balança.

A neurociência cognitiva é um campo interdisciplinar, que envolve conhecimentos da genética, da biofísica, da neurociência computacional, entre outras, que investiga potenciais substratos neurais para processos mentais. Dentro

dessa abordagem se desenvolvem as pesquisas sobre cognição numérica, isto é, as bases cognitivas e neurais dos números. Por conta disso, apresentamos reflexões neste trabalho, com base na neurociência, para que o docente se aproprie e faça uso em sua aula de matemática. Sabemos, que essa é uma tarefa árdua, pois é de conhecimento a individualidade de cada aluno, os fatores idiossincráticos, que interferem no processo de aprendizagem.

Para tanto, utilizamos a metodologia de pesquisa bibliográfica como norteadora do trabalho por termos na literatura um aparato de trabalhos correlatos, que discorrem sobre o assunto, onde reunimos de forma clara e objetiva, com a finalidade de tornar a aprendizagem da matemática uma possibilidade ao alcance de todos. Dessa forma, dividimos o artigo em 4 seções. Na primeira seção temos a introdução onde trata-se de explicações preliminares acerca do assunto, escolha da temática, motivações e objetivos do artigo; na segunda seção, revelamos breves considerações sobre o desenvolvimento neurocientífico cognitivo, suas implicações nos processos educacionais, no aprendizado de forma genérica; na terceira seção apresentamos reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem da Matemática relacionando-os com a Neurociência e, na última seção, concluímos o assunto em questão.

2.O DESENVOLVIMENTO NEUROCIENTÍFICO COGNITIVO

Um saber mínimo de matemática é muito relevante no dia a dia de qualquer pessoa, porém, para muitos durante anos, a matemática é vista como uma matéria de difícil entendimento, isso devido a uma série de fatores, um deles por anos utilizados o qual vem sofrendo constantes mudanças, é o contato com a matemática através de métodos ultrapassados e bastante enfadonhos, causando um bloqueio cognitivo para o aprendizado da Matemática.

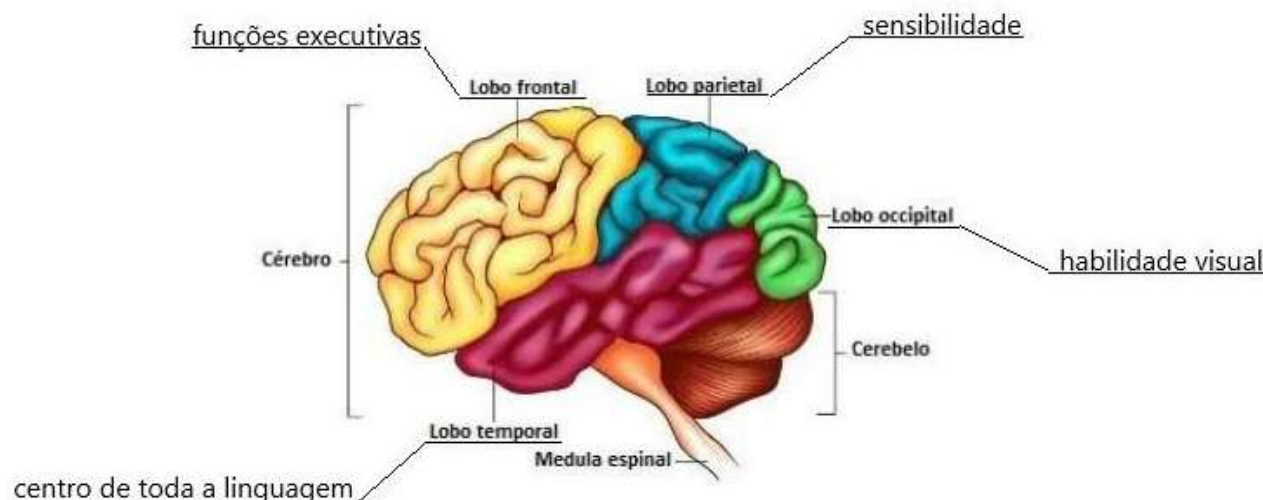
Existem vastas evidências de que as competências numéricas nos primeiros anos de vida são preditivas da aprendizagem matemática nos anos escolares, igualmente, é também nesses primeiros anos que pode ser ocasionado o bloqueio e o trauma ao aprendizado. Nesse caso, muitas crianças e adolescentes, embora possuam uma boa saúde neural, apresentem transtornos de aprendizagem, especificamente, a discalculia, que interfere no aprendizado da matemática. Tal transtorno, devido a falta de conhecimento, é associado à incapacidade de aprender a matemática como uma limitação pessoal e não como algo a ser tratado e superado, causando ao discente uma frustração e abandono à disciplina. Nesses casos, levamos em consideração a necessidade do aluno, o surgimento de diagnósticos, por exemplo, de transtornos específicos de aprendizagem¹; além dos diversos tipos de traumas e cargas emocionais, que produzem certo bloqueio ao discente em obter auxílio para transpor tais dificuldades, e para isso, é preciso identificar o problema/a causa, os pontos fortes e fracos e a partir disso espera-se, que os professores e outros educadores possam trabalhar juntos para estabelecer estratégias que ajudarão o estudante, a aprender a matemática de modo mais eficaz, dirimindo assim, as consequências negativas e proporcionando um aprendizado mais leve e satisfatório.

Para mostrar como a neurociência é importante não somente no aprendizado da matemática, mas na aprendizagem em geral, mostramos na figura 1 como o cérebro humano é dividido e suas particularidades. Ele está relacionado com a memória, inteligência e emoções e está dividido em dois hemisférios, o esquerdo e o direito. Os hemisférios se dividem em quatro lobos cerebrais. Abaixo descrevemos cada uma das divisões dos hemisférios cerebrais.

- Lobo frontal (amarelo): Essa é a parte responsável pelas funções executivas, as quais, segundo Malloy-Diniz *et. al* (2008), onde ocorrem todos os processos que exigem planejamento, organização, sequências, decisão, análise, síntese, atenção executiva (seletiva e sustentada), coordenação de estratégias (eleição de prioridades e ações secundárias), inibição comportamental, memória de trabalho, exigibilidades de interesses, percepção de erros e construção das correções.
- Lobo temporal (vermelho): a região é responsável pela percepção auditiva dos sons e das diferentes estruturas de linguagem fonológica, sendo o centro de toda a linguagem do nosso cérebro;
- Lobo parietal (azul): essa parte está conectada à sensibilidade geral (tátil, propriocepção, dor, etc.), coordenação espacial, integração senso-perceptiva e orientação atencional;
- Lobo occipital (verde): a região occipital está ligada a toda a habilidade visual sendo o centro das percepções visuais para as tarefas do cotidiano.

¹ Pesquisas constataam que 10 em cada 100 pessoas em todo o mundo, tem um transtorno específico de aprendizagem.

Figura 1 - Divisão do cérebro humano.



Fonte: Adaptado. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/biologia/cerebro.htm>. Acesso em: 11 de janeiro de 2022.

Conforme Augusto Buchweitz (2016), no seu artigo intitulado “*Language and reading development in the brain today: neuromarkers and the case for prediction*”, os componentes do circuito da linguagem estão associados a níveis de processos auditivos; os principais centros e processos incluem:

- (1) o córtex auditivo primário, que processa informações auditivas brutas;
- (2) os córtices temporal-posterior e parietal inferior, que processam a organização sistemática dos sons das palavras;
- (3) o córtex temporal medial, associado ao significado das palavras, e
- (4) o córtex frontal inferior, que processa a estrutura da linguagem.

Estudos da neurociência indicam que as conexões cerebrais acontecem a todo momento e se iniciam no 4º período da gestação. O cérebro possui partes específicas para um determinado tipo de aprendizagem e o desenvolvimento dele também acontece de forma gradual. Por exemplo, a região do cérebro chamada temporo-parietal, faz parte do processo da aprendizagem da leitura e está associado ao córtex temporal medial, essa área faz o trabalho de ligação de sons a letras (fonemas) e como eles se correspondem. Entre os 5 a 8 anos de idade, ocorre na criança, a mudança do volume dessa região cerebral, e a falta de aumento do volume, interfere no aprendizado da formação das palavras.

Entretanto, no tocante à matemática, constata-se que, quando raciocinamos sobre alguma questão que a envolve, diferentes áreas do cérebro são acionadas, inclusive, as redes frontais, o lobo temporal medial e, acima de tudo, o hipocampo, são mobilizadas.

A pesquisadora Dra. Analía Arévalo (2021), uma das coordenadoras do curso de Especialização em Neurociências da Escola de Educação Permanente do HCFMUSP esclarece que “A neurociência é muito vasta e abrange desde a área comportamental e reabilitação motora, até a cognição avançada”. Então, dessa forma vemos a importância do bom desenvolvimento cerebral para um saudável aprendizado, seja na educação, seja em outros setores da vida.

3.0 ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E A NEUROCIÊNCIAS

Sabe-se, historicamente, que muitos alunos não conseguem assimilar o conteúdo da matemática, que se sentem “incompetentes” para a absorção da matéria, e alguns são levados a passar de série/ano, como se aprovados tivessem. Todavia, o discente embora tenha sido ‘aprovado’, continua sem o aprendizado do conteúdo necessário e que poderá até ser pré-requisito para outros assuntos mais completos.

No que tange à criança, no mundo contemporâneo, assegura-se que desde a mais tenra idade, a matemática pode ser introduzida de forma gradual no seu repertório de aprendizagem e comportamental, à medida que assimila alguns

conteúdos. Diz-se que a apresentação da referida ciência é realizada paulatinamente, porque leva-se em consideração o estágio do desenvolvimento infantil, ou seja, as informações não devem ser como uma enxurrada conteudista, nem de natureza muito complexa, pelo contrário, devem ser repassadas à criança, conforme a compatibilidade de sua maturação, de seu desenvolvimento intelectual, observando-se inclusive os princípios da neurociência. Em contrapartida existe clara evidência de que o cérebro é plástico suficiente para que sejam justificados esforços de instrução e intervenção permanentes para alunos que enfrentam dificuldades persistentes no que se refere ao aprendizado da matemática.

Constata-se que para alguns alunos, por exemplo, para os que têm discalculia, a matemática é muito desafiadora. Neste caso, o aluno tem dificuldades para entender a quantidade das coisas e, por isso, tem dificuldade de entender os números e o que eles representam; dificuldade para o aprendizado da tabuada (adição, subtração, multiplicação e divisão); para resolver problemas matemáticos; para organizar coisas de maneira lógica e para medir. Quando adultos são observadas outras dificuldades, como para estimar custos ao fazer compras; tem menor habilidade no gerenciamento financeiro; prejuízo na memorização das funções matemáticas; em seguir cronograma; na realização de cálculos mentais sem auxílio da calculadora, do lápis e do papel; dificuldade para estimar com precisão e velocidade ou julgar distâncias, dentre outras.

Com relação à docência, Cosenza & Guerra (2011), asseguram que o educador pode se beneficiar dos conhecimentos neurocientíficos, planejando suas práticas pedagógicas no desenvolvimento de atividades que fortaleçam os circuitos neuronais, permitindo a exploração das potencialidades destes de forma criativa e autônoma. É nesse momento que o conhecimento científico aliado à educação, interfere de maneira positiva e eficaz nos processos de ensino e aprendizagem.

Para Brousseau (2008), a adaptação dos alunos a diferentes situações permite verificar que é inerente ao ser humano a adequação de aprendizagem, ou seja, o mesmo ensino, apesar de único chega de maneira diferente para cada indivíduo. Por isso, é de suma importância que as atividades em sala de aula sejam bem planejadas e busquem na maioria serem realizadas em grupo, para que o aluno verifique os diversos pontos de vista e maneiras que a resolução de uma certa atividade pode ter.

A tarefa de lidar com números exige uma capacidade de abstração, requer uma desenvoltura, e fazer esta abstração ocorrer não é um papel tão fácil. Segundo Dieudonné (1968):

[...] a Matemática tem dividido com a Metafísica o caráter de ser um campo de abstrações, longe da realidade e experiências concretas, o que torna muitas pessoas “obstinadamente rebeldes a todo pensamento abstrato, por isso retrocedem diante do menor raciocínio matemático”. (DIEUDONNÉ, 1968, p. 42).

Nogueira (2017), traduz literalmente as ideias de Piaget *et al.* (1968), onde o docente precisa ter o conhecimento de que o lado emocional e psicológico do aprendiz deverá ser observado antes mesmo do ensino ser recebido, ou seja, é analisar as características psicológicas de cada fase de aprendizagem do ser humano:

[...] Precisamos conhecer o aluno e ter ideia do que fazemos para ensiná-lo antes de abordar os refinamentos técnicos. Por esta razão, o capítulo psicológico é o primeiro e o pedagógico é o último. Entre a forma e a possibilidade de fazer, condicionadas pelo professor e o aluno está a matéria, que é a substância do diálogo. (Piaget *et al.* (1968) *apud* Nogueira (2017).

4. CONCLUSÃO

Assim neste trabalho refletimos sobre a importância do ensino-aprendizagem da matemática com o suporte da neurociência. Damos ênfase a ideias e conteúdos com o objetivo de encorajar o docente em sua prática de ensino junto ao aluno que apresenta dificuldade de aprendizado matemático, bem como em sua missão de desenrolar o *imbróglio* que o ensino da matemática vem sofrendo durante décadas; por outro lado, fomentamos com isso, o resgate da aula de matemática mais atrativa, onde o aluno tenha uma experiência instigante, seja incentivado em sua autonomia para a busca de mais conhecimento sobre o assunto ministrado em sala de aula, e sua aplicabilidade no cotidiano.

Nessa interação constata-se, que não podemos deixar de levar em consideração o estado emocional, a cultura, a comunidade, todos esses elementos têm implicações no comportamento de crianças e adolescentes, e contribuem de maneira positiva ou negativa no aprendizado, uma vez que o problema da matemática também é cultural. Inclusive pode-se notar o quanto ainda é insuficiente o incentivo dado pelas famílias brasileiras em geral, à criança e aos

adolescentes até mesmo no que se refere à educação financeira, à economia e a outros assuntos e situações que envolvem a matemática, assuntos que o acompanharão por toda a sua vida adulta. Compreendemos que em se tratando de docência, não há uma forma única, nem um único modelo de educação a ser seguido, todavia, a vontade, o comprometimento, o conhecimento da disciplina e a empatia são fatores preponderantes em uma formação educacional, seja ela para o público infantil, adolescente ou adulto.

Finalmente, para preenchimento das variadas lacunas no processo ensino-aprendizagem, entendemos que, a prática educacional pode ser muito mais exitosa quando está de mãos atreladas à neurociência. Neste sentido defendemos o processo de ensino-aprendizagem como um processo dinâmico, de relacionamento, de interação entre professor e aluno, em uma comunicação constante que dê conta de identificar e dirimir as dificuldades aparentes e as que por ventura poderão surgir.

REFERÊNCIAS

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

COSENZA, Ramon; GUERRA, Leonor. **Neurociência e Educação: como o cérebro aprende**. Porto Alegre: Artmed. 2011.

DIEUDONNÉ, Jean. **La abstracción en matemáticas y la evolución del algebra**. In: PIAGET, Jean, et al. La enseñanza de las matemáticas. Madri: Aguilar, 1968. Capítulo III.

ESCOLA DE EDUCAÇÃO PERMANENTE DO HOSPITAL DAS CLÍNICAS - Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo. **Os benefícios do estudo da Neurociência**. 27 de janeiro de 2021. Disponível em: <https://eephcfmusp.org.br/portal/online/beneficios-neurociencia/>. Acesso em: 11 de janeiro de 2022.

MALLOY-DINIZ, Leandro Fernandes *et al.* **Neuropsicologia das Funções Executivas e da atenção**. In book: Neuropsicologia: Teoria e Prática 2 ed. pp.115-138. 2 Chapter: Artmed. 2014.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; NOGUEIRA, Vitor Ignatius. **O ensino de matemática no brasil na perspectiva piagetiana: uma primeira aproximação ao estado da arte**. Shème. ISSN: 1984-1655. Volume 9. Número Especial.2017.



CONTEXTO HISTÓRICO E APLICAÇÃO DA CATENÁRIA

Vieira, Lehilson Pantoja, leilsonpantojavieira@gmail.com
Castro, Lucas Bechara de, lucas.bechara.castro@cameta.ufpa.br
Usuariocastro5@gmail.com

Discente FAMAT/PIBID/UFPA

Discente FAMAT/PIBID/UFPA

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre o desenvolvimento histórico da curva catenária, sua construção e propriedades. Destacando a importância da curva catenária em aplicações no cotidiano abordando o contexto histórico da mesma, vendo como a catenária está presente em várias obras, e analisando os motivos pela qual a catenária é utilizada nas construções já que possui uma maior resistência devido sua forma, atribuindo elegância estrutural a qualquer tipo de estrutura

Palavras-chaves: Catenária, Geogebra.

INTRODUÇÃO

Uma curva bastante utilizada em nosso cotidiano, mas ao contrário da parábola, pouco estudada nos livros didáticos é a catenária. Devido sua aparência similar, por vezes foi confundida com a parábola. Entretanto, as duas possuem diferenças sensíveis (LEDA, 2008).

Neste trabalho, abordamos o contexto histórico da catenária segundo Talavera (2008), apresentando alguns matemáticos que a estudaram. Apresentamos, também, a equação da catenária de forma analítica baseado em Mendes (2017). Por fim, ilustramos com uma aplicação da catenária no cotidiano, ratificando assim o quanto é importante seu estudo e como a mesma é bastante usada nas ciências em geral.

A CATENÁRIA

A curva parábola é bastante estudada nos mais variados livros didáticos desde o Ensino Fundamental, pois a sua forma é bastante observada e utilizada em nosso dia a dia, tanto na natureza como nas ciências, como por exemplo, na engenharia, na arquitetura, etc. De acordo com Dante (2009), a parábola é a representação gráfica de uma função quadrática $f(x) = x^2$, cujo foco é $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$, quando centrada na origem, e cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{-1}{4}$.

Segundo Leda Maria (2008), o termo catenária é originado da palavra latina *catena* que significa “cadeia”. A curva é geralmente representada por uma corrente suspensa e foi batizada por Gottfried Wilhelm Leibniz, que sugeriu até que a catenária pudesse ser explorada no cálculo de logaritmos.

A catenária é uma curva de equação transcendente, representada como:

$$y(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

sendo a uma constante, onde seu valor depende dos parâmetros físicos da corrente (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela está fixada.

Segundo Leda Maria (2008), Joham Bernoulli (1667-1748) foi o primeiro a provar rigorosamente que a catenária não é uma parábola. Na Figura 1, ilustramos este fato.

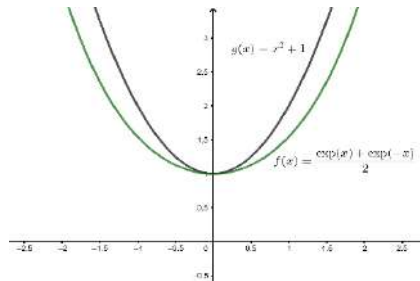
CONTEXTO HISTÓRICO

Segundo Mendes (2017), o estudo da curva hoje chamada de catenária teve início com o matemático italiano, Galileu Galilei. Além de estudar a catenária, Galileu estudou também a curva chamada cicloide, esses estudos, naquela época não demorou tanto para serem revistos e recolocados em discussão pelos matemáticos daquele período.

O francês, Marin Mersene (1588-1648) mantinha correspondência constante com os grandes matemáticos de seu tempo. Em uma espécie de câmara de compensação de ideias, editou vários estudos de estudiosos gregos sobre

temas diversos, de acordo com Mendes (2017). Com suas viagens a Itália, Mersenne, que admirava os trabalhos de Galileu, trouxe suas ideias para Paris para serem estudadas.

Figura 1. Curva catenária e parábola



Fonte: Os autores

Os matemáticos recebiam desafios para serem resolvidos no século XVII, desafios estes, que em sua maioria eram acompanhados de premiações. Foi através desses desafios que o problema da catenária foi reapresentado a sociedade matemática.

Em 1648 Galileu Galilei propôs um problema que em seus estudos ele afirmava ser uma parábola, porém 44 anos mais tarde, cinco matemáticos: Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli, Leibniz, Huygens e Newton, estudaram o problema e o solucionaram simultaneamente. Entretanto, segundo Mendes (2017), só três das cinco soluções estavam corretas: a de Jean Bernoulli, a de Leibniz e a de Huygens.

O matemático holandês Christiaan Huygens (1629-1695), enviou inúmeras cartas a Mersenne, o qual era considerado por Huygens como pai e educador. Provavelmente foi através de Mersenne que Huygens recebeu o desafio da catenária, solucionando-o aos 17 anos de idade.

Em suas viagens políticas, Leibniz conheceu vários matemáticos daquele tempo. Em 1673 foi admitido na Academia de Ciências de Paris onde teve acesso aos trabalhos de Isaac Newton, considerado seu rival na invenção do cálculo. O trabalho desse matemático e de sua brilhante mente pode ser visto em seus registros sobre a curva catenária, publicado em 1661. Essa obra é uma das inúmeras descobertas e contribuições de Leibniz, que até hoje, pela sua genialidade, impressiona todo o mundo.

Os suíços Jacques Bernoulli e Jean Bernoulli, conhecidos como "Os irmãos Bernoulli", colaboraram para a descoberta da catenária. Não se trata apenas de dois irmãos matemáticos, mas sim de uma família que produziu vários matemáticos célebres, como nenhuma na história. Muitos membros dessa família tiveram sucesso em seus estudos desenvolvidos na área da matemática e da física.

Garbi (2006) *apud* Mendes, M. F. (2017), diz que Jean Bernoulli foi o primeiro a determinar a equação da catenária (a curva formada por uma corda suspensa pelas extremidades), mostrando que, ao contrário do que conjecturara Galileu, ela não é uma parábola.

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA CATENÁRIA

Em 1690 no jornal *Acta Eruditorum*, criado por Leibniz, foi lançado o desafio da catenária. Para que tal desafio fosse resolvido foi preciso considerar um fio flexível de densidade igual, fixado em suas extremidades por dois pontos. Essa condição é específica para quando haja apenas atuação da força da gravidade, assim sendo sua carga está uniformemente distribuída ao longo do corpo.

Assim temos que s é o comprimento entre esse ponto e um ponto qualquer (x, y) e W_0 representa a densidade linear do fio. Para obtenção da equação diferencial deve-se levar em consideração que o ponto (x, y) e o ponto mais baixo da curva estão em equilíbrio estático sob a ação de três forças:

T_0 = Tensão no ponto mais baixo

T = Tensão variável em (x, y) que age na direção tangente devido a flexibilidade do fio

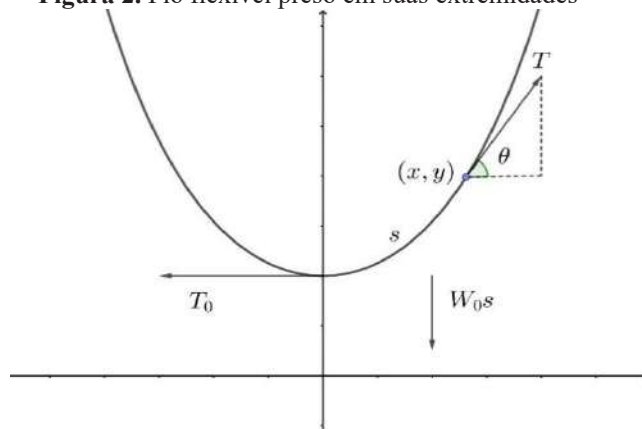
W_0s = Força para baixo, igual ao peso do fio entre esses pontos.

Estabelecendo uma relação de igualdade as componentes horizontais T com T_0 , e a vertical de T com o peso do fio, tem-se:

$$\begin{cases} T \cos \theta = T_0 \\ T \sin \theta = W_0 s \end{cases}$$

Como mostrado na Figura 2.

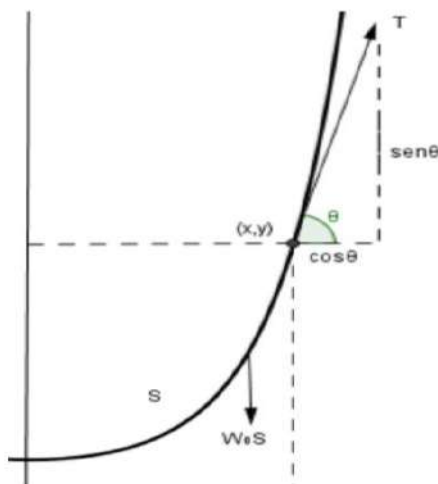
Figura 2. Fio flexível preso em suas extremidades



Fonte: Própria

Por definição, temos que $\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$, substituindo temos: $\tan \vartheta = \frac{W_0 s}{T_0}$ ou $\frac{dy}{dx} = a s$, sendo $a = \frac{W_0}{T_0}$ como mostra a Figura 3.

Figura 3. Análise da tangente



Fonte: Mendes 2017

Calculando a derivada em relação a x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \frac{ds}{dx} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Este é o diferencial de equação da curva catenária. Essa integração pode ser resolvida por integração sucessiva, utilizando-se a variável auxiliar $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2}{dx^2} = a \frac{ds}{dx} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = a \sqrt{1 + p^2}$$

Desagregando as variáveis e integrando em relação a x , temos

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int adx$$

Utiliza-se a substituição trigonométrica $p = tg \phi$ para resolver $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$ e assim, obtêm-se

$$dp = \sec^2 \phi d\phi \text{ e } \sqrt{1+p^2} = \sec \phi$$

$$\int \frac{\sec^2 \phi d\phi}{\sec \phi} = \int adx$$

$$\int \sec \phi d\phi = \int adx$$

Integrando os dois lados da igualdade

$$\ln(\sec \phi + tg \phi) = ax + c_1$$

$$\ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax + c_1$$

Se $x = 0$ e $p = 0$, logo $c_1 = 0$, assim

$$\ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax$$

Resolvendo a equação, temos

$$\ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax$$

$$\sqrt{1+p^2} + p = e^{ax}$$

$$(\sqrt{1+p^2})^2 = (e^{ax} - p)^2$$

$$1 + p^2 = p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax}$$

$$1 = -2pe^{ax} + e^{2ax}$$

$$1 - e^{2ax} = -2pe^{ax}$$

$$p = \frac{1 - e^{2ax}}{-2e^{ax}}$$

$$p = \frac{e^{ax}}{2} - \frac{1}{2e^{ax}}$$

$$p = \frac{(e^{ax} - e^{-ax})}{2}$$

Como $p = \frac{dy}{dx}$, fazendo a integração em relação a x , obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

$$y = \frac{e^{ax}e^{-ax}}{2a} + c_2$$

Inserindo a curva no sistema de coordenadas cartesianas na origem, com $y = \frac{1}{a}$, quando $x = 0$, temos $c_2 = 0$, e assim temos a notação moderna da catenária

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

CATENÁRIA EM APLICAÇÕES

Um dos motivos pela qual a catenária é utilizada nas construções, é que possui uma maior resistência devido sua forma e também ela atribui elegância estrutural a estrutura desenvolvida. Entretanto como exposto nesse trabalho a curva pode ser encontrada em vários outros lugares em nosso cotidiano de maneira menos arquitetônica e simples, que sem nenhuma observação pode passar despercebida em nosso olhar, como uma corrente na calçada de uma rua suspensa formando uma catenária, ilustrado na Figura 4.



Fonte: pt.wikipedia.org

Porém essas aplicações de catenárias são muito importantes, como por exemplo, para o bom funcionamento de uma cidade, como é o caso onde a catenária é encontrada em cabos de transmissão elétrica suspensos entre postes, ilustrado na Figura 5.

Com esses exemplos de aplicações envolvidas em nossas vidas da catenária, percebe-se que a curva não é apenas só uma forma e um estudo relacionado na matemática, mas sim também ela possui aplicações que facilitam muitas vezes sua escolha em projeto pela sua forma geométrica.

Figura 5. Imagem de cabo de transmissão elétrica



Fonte: pt.wikipedia.org

CONCLUSÃO

Como vimos a catenária está presente em várias obras no cotidiano. Um exemplo de catenária pode ser uma corrente suspensa em suas extremidades em uma calçada e um cabo de transmissão elétrica suspensa entre postes.

A realização do estudo da catenária teve como objetivo possibilitar aos leitores uma matemática sobre a curva, mostrando possibilidades de aplicações presentes e observadas tanto na natureza como nas ciências utilizadas para aplicabilidade no dia a dia.

Tendo em vista os estudos presentes nesse trabalho não parece ser uma simples confusão mais um forte argumento para mostrar como os exemplos de aplicação e contextualização da matemática requerem cuidado extremo, transpondo como conhecimento e aplicando como caráter investigativo

O caminho percorrido pelo presente trabalho até a sua conclusão final mostrar como este tema está interligado a tantos outros. Precisamos recorrer a história da matemática e da educação matemática. Pensamos que o envolvimento pessoal para a realização dessa pesquisa pode ser transportado para o ensino de matemática, de modo que por ventura os leitores/alunos possam tratar de temas comuns de sala de aula com um caráter de investigação, assim poderão ver as aplicações práticas, as histórias e as tecnologias como caminho que levam a construção do significado de aprender, revelando como a matemática é bela e sua importância na história e social.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Volume único**. 1ª ed. São Paulo: ÁTICA, 2009.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e catenária: história e aplicações**.2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação de São Paulo. São Paulo, 2008.

MENDES, Marlon Freitas. **A curva catenária como aplicação da função exponencial**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos. Sorocaba, 2017.

VASCONCELOS, Cleverton da Silva. **Uma abordagem de curvas no ensino médio**.2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2013.

Wikipédia - **Catenária**. Disponível em: < [Catenária – Wikipédia, a enciclopédia livre \(wikipedia.org\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Caten%C3%A1ria) >. Acesso em: 28/02/2022.



DA NECESSIDADE DE UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DINÂMICA PARA A DEFINIÇÃO DE DIFERENCIABILIDADE EM FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

Augusto Vaz, Guilherme, guilherme.vaz@ifpb.edu.br¹
Silva, Erique Enrique Gomes da, erique.enrique@academico.ifpb.edu.br¹
Silva, Samuel Melo da, samuel.melo@academico.ifpb.edu.br¹
Pereira, Emanuel Fabiano Menezes, emanoel.pereira@ifsp.edu.br²

¹ Instituto Federal da Paraíba - IFPB

² Instituto Federal de São Paulo - IFSP

Resumo: *O presente trabalho propõe uma interpretação geométrica, com base em uma construção em geometria dinâmica, que resultou da pesquisa bibliográfica em um conjunto de livros de Cálculo; tendo por referência o uso de tecnologia no ensino e as múltiplas representações do conceito de diferenciabilidade. O produto obtido foi um aplicativo matemático, ou objeto de aprendizagem, que permite entender geometricamente a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis, construindo o limite que define tal conceito. Sua dinâmica permite observar os infinitesimais envolvidos, o rápido decaimento do erro cometido, entre outros aspectos dos limites e da diferenciabilidade. A ferramenta tecnológica utilizada foi o GeoGebra Clássico 5. As qualidades do ambiente e da aplicação apresentadas são problematizadas a partir de um levantamento inicial da presença de tais interpretações geométricas nos livros de Cálculo utilizados no IFPB, instituição onde transcorre a pesquisa. A definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis tem significados mais amplos que o coeficiente angular da reta tangente. É preciso analisar a importância da melhor aproximação linear, ver como o erro cometido pelo diferencial tende a zero, podendo ainda se pensar na infinidade de caminhos sob os quais o limite pode ser analisado. Geometricamente, envolve representação em perspectiva e visualização do gráfico em três dimensões. Assim, a transição do conceito de derivada de uma variável para duas variáveis tem diferenças substanciais que demandam construção, representação e visualização adequada da definição em registro geométrico, em conjunto com os registros algébricos e analíticos, conforme a teoria das múltiplas representações semióticas de Duval.*

Palavras-chave: *Funções de várias variáveis, Cálculo diferencial de várias variáveis, Diferenciabilidade, Ensino de Cálculo, GeoGebra.*

INTRODUÇÃO

Neste trabalho partimos da experiência da construção de interpretações geométricas para o conceito de diferenciabilidade no caso de funções de duas variáveis independentes. Tais interpretações são aqui expressas com algumas figuras, extraídas da aplicação dinâmica construída, apresentadas para problematização e reflexão. Todavia, como foi obtido um produto em ambiente de geometria dinâmica - no caso o software livre utilizado foi o GeoGebra Clássico 5 - é possível estudá-las e interpretá-las em movimento, fator que favorece uma compreensão mais apurada do Cálculo Diferencial, que lida com aproximações lineares e limites.

Para o desenvolvimento de tais imagens, seguiu-se a teoria das múltiplas representações semióticas de Duval, descrevendo a ideia conceitual, que passa e transita pelos registros geométrico e algébrico, e destes para o analítico, que

incorpora a noção de limite, indispensável a essa área da Matemática. Também são levados em conta os estudos sobre os benefícios do uso de ferramentas tecnológicas no estudo da geometria e do Cálculo, no caso dos softwares de geometria dinâmica, bem como as análises das dificuldades epistemológicas no estudo dos limites.

A definição de diferenciabilidade para funções de duas ou mais variáveis agrega significados mais amplos que o do coeficiente angular da reta tangente. É preciso analisar a importância da melhor aproximação linear, de que forma o erro cometido pelo diferencial tende a zero, além dos vetores e dos infinitos caminhos do limite envolvido. Geometricamente, envolve representação em perspectiva e visualização do gráfico em três dimensões. Assim, defendemos que a transição do conceito de derivada de uma variável para duas variáveis tem diferenças substanciais que demandam a construção, a representação e a visualização adequada da definição, que muitas vezes são apresentadas de forma isolada, apenas como uma definição formal.

Para defender os aspectos originais do conjunto de interpretações criado, foi feito um levantamento inicial de obras da área, com enfoque no capítulo que trata da diferenciação de funções de várias variáveis. Tal levantamento teve como recorte inicial os livros de Cálculo Diferencial e Integral mais utilizados no Instituto Federal da Paraíba (IFPB), a partir de uma contagem via bibliografia que consta das ementas das disciplinas de Cálculo II e III dos cursos superiores de Engenharias, de Matemática e de Física, oferecidos em todos os *campi* da instituição. A síntese da planilha com os autores é apresentada na metodologia. Logo, nossa metodologia é predominantemente do tipo bibliográfica e a dedução obtida a partir da construção geométrica segue o método lógico-dedutivo.

Várias das obras carecem de qualquer interpretação geométrica para a definição de diferenciabilidade, sendo que alguns dos autores abandonam quase que completamente o uso de figuras. Mesmo os autores que ilustram de alguma forma tal conceito, não utilizam a interpretação geométrica como registro a partir do qual se pode construir a ideia por trás da definição e estabelecer relações concretas de transposição do Cálculo diferencial de uma variável para o de duas variáveis. Nesse sentido, a geometria dinâmica e as ferramentas tecnológicas em geral podem exercer um importante papel, sobretudo por permitir registros mais fidedignos de ambientes 3D, em perspectiva e em movimento.

Além de estabelecer os fatos fundamentais da interpretação criada, mostramos nesse trabalho como obter dela o limite do quociente diferencial, que expressa o fato da melhor aproximação linear, finalizando com algumas conclusões decorrentes desse processo.

REFERENCIAL TEÓRICO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ocupa um importante papel nos cursos de Ciências Exatas e Tecnologias, uma vez que oferece ferramentas fundamentais para a matematização da realidade. Dentre seus conteúdos, o limite aparece nos primeiros semestres dos cursos superiores e é essencial em várias definições importantes, inclusive naquela que nos interessa aqui, a de diferenciabilidade de uma função de várias variáveis. Assim, há de se discutir as dificuldades existentes na apreensão dos conceitos a ela subjacentes, bem como o papel que as ferramentas tecnológicas e a abordagem dinâmica podem desempenhar na superação de tais dificuldades e, principalmente, na própria definição dos conceitos abordados.

O processo de ensino e de aprendizagem dessa disciplina é carregado de desafios, fato comprovado pelos altos índices de reprovação, conforme constatado por Pagani e Allevato (2014), que apresentam em sua pesquisa que um dos motivos para o fracasso é que os conteúdos são apresentados já formalizados e construídos, com pouco espaço para ações de reflexões sobre ele. Nos livros da área de Cálculo (Volume 2), tal fato se manifesta concretamente quando o tratamento da diferenciabilidade começa pela definição formal ou é apresentada após um único exemplo. Por vezes, ela é apresentada após a problematização de que as derivadas parciais não garantem a continuidade - como o fazem GUIDORIZZI (2014) e LEITHOLD (1994). Logo, não é feito um processo que permita construir essa definição a partir das ideias fundamentais de aproximação linear e da geometria espacial e vetorial envolvida. Tal definição é apresentada na forma de um limite, e com frequência não se entende o que ele expressa. O estudo generalizado da Diferenciabilidade é ainda mais rigoroso que os conceitos iniciais do Cálculo, o que, aliado à baixa presença de figuras presentes em alguns dos livros mais recorrentes sobre a área, segundo as análises feitas na atual fase de nossa pesquisa, tornam o processo de ensino-aprendizagem digno das análises e conclusões de Pagani e Allevato.

A fim de transpor a abstração presente no conceito de limite para um contexto concreto, no qual sejam possíveis a visualização e um claro entendimento, Duval (1999) ressalta a importância das múltiplas representações, isto é, trabalhar conceitos abstratos a partir de registros semióticos distintos - escrito, geométrico, algébrico etc. - favorecendo um conhecimento sólido, baseado na aquisição desses registros e na transição entre eles. Nesse sentido, construir geometricamente a situação que o limite visa formalizar constitui passo essencial para a compreensão do tema e da tentativa de superar os obstáculos epistemológicos detectados.

Dessa maneira, vale destacar a importância de construções dinâmicas feitas com softwares. Existem evidências de que a utilização de tecnologias para a representação de problemas geométricos facilita o processo de aprendizagem, pois propicia que o estudante perceba conjecturas e relações matemáticas que não seriam tão facilmente apreendidas devido ao seu alto grau de abstração (SANTOS-TRIGO, 2007). Em especial, o software GeoGebra permite a criação de figuras mais controladas e precisas, da visualização de diferentes formas, em diferentes ângulos, abrindo porta para uma exploração ampla, didática e mais significativa (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015).

Por fim, levando em consideração as análises dos estudiosos supracitados, as dificuldades epistemológicas no ensino de Cálculo, a baixa presença de interpretações geométricas em diversos livros e, em especial, as dificuldades presentes no desenvolvimento dos conceitos de Diferenciabilidade em funções de duas variáveis independentes, pode-se afirmar a importância que uma construção num ambiente de geometria dinâmica, como o GeoGebra, tem no processo de aprendizagem dessa disciplina, atuando como ferramenta fundamental para o entendimento completo do conceito, partindo do caso de duas variáveis em direção a uma generalização significativa em n variáveis.

METODOLOGIA

A metodologia do trabalho é do tipo bibliográfica qualitativa, que permitiu levantar artigos e dissertações que estabelecem a importância de discutir as dificuldades subjacentes à apreensão do conceito de diferenciabilidade e o uso das ferramentas tecnológicas no ensino e na construção da Matemática, sobretudo o software GeoGebra. Nesse sentido, a pesquisa foi exploratória e a coleta se deu entre setembro de 2021 e janeiro de 2022 nos bancos de dados: SciELO, Google Acadêmico e CAPES. Os descritores foram: ensino de Cálculo, ensino de limites, ferramentas tecnológicas no ensino e uso do GeoGebra no ensino. Os critérios de inclusão: dissertações e artigos, selecionados desde que articulados com o tema. Os critérios de exclusão: outros tipos de produção ou não articulados ao tema.

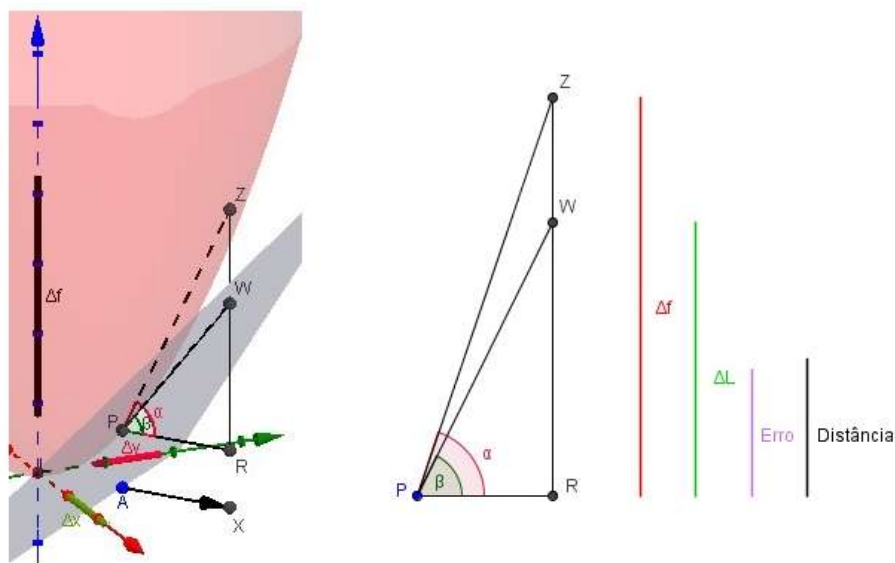
Quanto à investigação em torno aos principais autores utilizados no Instituto Federal da Paraíba, esta foi de tipo quantitativa, conduzida via tabulação de dados, conforme as obras que constam da bibliografia das ementas das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e III dos cursos superiores ofertados pela referida instituição. Predominam nas ementas, em ordem de maior ocorrência, os seguintes autores de Cálculo - Volume 2: LEITHOLD (11); STEWART (8); FLEMMING e GONÇALVES (6); MUNEM e FOULIS (6); GUIDORIZZI (5); SIMMONS (5); THOMAS (5); ANTON, BIVENS e DAVIS (4); e SWOKOWSKI (4) - esse conjunto de autores não consta das referências pois foram verificadas mais de uma edição, incluso de diferentes editoras, conforme tínhamos acesso a elas. Eventualmente, outros autores foram utilizados em comparações e assim fomentar a discussão de resultados, constando esses nas referências ao fim do presente trabalho.

No que tange aos materiais utilizados, convém mencionar a ferramenta tecnológica adotada, o software livre de geometria dinâmica GeoGebra Clássico 5 - disponível em geogebra.org. Com seus recursos, comandos e ambientes 2D e 3D foi possível gerar ilustrações e interpretações, a partir de 3 aplicações do software, a saber: 1 – interpretação em ambiente 3D do diferencial de uma função de duas variáveis; 2 – interpretação de caminhos não retilíneos por onde o triângulo diferencial também é ilustrado de forma dinâmica; e 3 – interpretação em ambiente 2D do triângulo diferencial, mostrando a eficácia da definição quanto a garantir boas aproximações e um rápido decaimento do erro cometido. Enfim, para a construção do limite do quociente diferencial a partir da interação com a interpretação geométrica dinâmica criada, utilizou-se o método lógico-dedutivo e resultados básicos sobre triângulos, tangentes e aproximações, além de noções de limites.

RESULTADOS

À luz da discussão realizada e das referências teóricas adotadas, apresentamos alguns dos resultados que o GeoGebra e a análise das interpretações permitiram alcançar, contribuindo diante da baixa presença de figuras e interpretações desse conceito, detectada no conjunto de autores levantados e consultados na atual fase da pesquisa. Existem autores que oferecem uma interpretação para o plano tangente como uma aproximação linear para Δf . – como ANTON *et al* (2014, p. 941), LEITHOLD (1994, p. 941) e STEWART (2009, p. 853), que constituem exceções dentro da bibliografia analisada na metodologia, já que a maioria dos autores não ilustram bem essa ideia. Mesmo esses três não apresentam o triângulo diferencial como recurso para compreender a definição de diferenciabilidade em funções de duas variáveis e não o relaciona às tangentes, acabam separando os registros, entre definição formal e figura ilustrativa. Nesse sentido, a figura abaixo é um avanço e dela se pode partir para construir ideias essenciais, inclusive o significado da definição.

Figura 1 – Interpretação geométrica do limite que define a diferenciabilidade de uma função.



Acima apresentamos dois *prints*, recortados das aplicações obtidas com a ferramenta tecnológica. Tanto no ambiente 2D, quanto no 3D, é possível aproximar os pontos *A* e *X*, dinamicamente, observando os valores no *frame* à esquerda da tela padrão do software, de onde se mostra uma série de fatos importantes, como: 1 - A variação de *f* e a variação da aproximação linear *L* vão se aproximando; 2 - O erro cometido por tal aproximação tende a zero “antes” ou “mais rápido” que a distância entre *A* e *X*; 3 - O valor aproximado linearmente se torna mais próximo do valor verdadeiro da função nas redondezas do ponto de tangência *P*. A ferramenta também permite visualizar o triângulo diferencial conforme o limite seja reduzido a diferentes tipos de caminhos, como os não-retilíneos. Mencionamos esse fato, pois dessa interpretação decorre um resultado importante: que a diferenciabilidade é mais forte, mais geral, do que as derivadas direcionais. Enfim, obtidos tais recursos com apoio da tecnologia, há inúmeras possibilidades de trabalho investigativo, em diversos registros, mas vamos destacar o uso dos ângulos e de suas tangentes para construir a definição de diferenciabilidade. Passamos a descrever esse processo.

O objetivo da diferenciabilidade é garantir a existência de uma aproximação linear para a variação de uma função, que no caso é representada geometricamente pelo plano tangente. Assim, intuitivamente o registro geométrico nos leva a pensar que: quanto mais próximo o ponto *X* estiver do ponto *A* – fato que também pode ser enunciado como o módulo do vetor tender a zero – mais próximos estarão os pontos *Z* e *W* sobre a reta *RZ*. A visão coplanar da situação, oferecida ao centro da figura 1, permite identificar claramente que o limite desejado fará ΔL se aproximar de Δf , fato equivalente a afirmar que o erro $E = \Delta f - \Delta L$ tenderá a zero.

Os segmentos coloridos, à esquerda na figura 1, permitem visualizar dinamicamente ou apresentados em uma sequência de imagens geradas com *prints*, a ideia de que *E* deve tender a zero rapidamente. Já à direita da mesma figura, o triângulo retângulo *ZPR* representa a variação sofrida pela função *f* em relação à distância entre os pontos *A* e *X* do domínio, enquanto o triângulo retângulo *WPR* representa a variação sofrida pela aproximação linear *L* em relação à mesma distância. Podemos explicitar o fato que tais triângulos tendem a se sobrepor, conforme $d(A, X)$ tende à zero. Geometricamente, podemos pensar que os ângulos α e β tendem à mesma medida, logo, em termos de aproximações, temos que $\tan \alpha - \tan \beta \approx 0$, ou

$$\frac{ZR}{PR} - \frac{WR}{PR} \approx 0$$

$$\frac{\Delta f}{d(A, X)} - \frac{\Delta L}{d(A, X)} \approx 0$$

$$\frac{f(X) - f(A) - f_x(A) \cdot (x - a) - f_y(A) \cdot (y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \approx 0$$

Onde $A = (a, b)$ e, como é conhecido, as derivadas parciais calculadas em A são os coeficientes do plano tangente. Nota-se, na última aproximação, que obtemos o quociente que consta da definição dada por alguns autores – ver FLEMMING e GONÇALVES (2007, p. 106) e SALLUM *et al* (2009, p. 17), por exemplo – todavia nenhum deles ofereceu qualquer interpretação geométrica para esse caso ou trabalhou a multiplicidade de registros que a aplicação da ferramenta dinâmica permite. Outros autores definem a ideia a partir da existência da aproximação linear e de um erro que tende a zero. Bem, o quociente obtido de nossa construção é a interpretação dessa função erro que deve tender a zero rapidamente, para o caso de uma função de duas variáveis - ver, a título de exemplo, LIMA (2014, p. 125).

CONCLUSÕES

O relevante do presente trabalho, no que tange a proposta do uso do objeto de aprendizagem dinâmico no software escolhido, vai além do fato constatado de que há uma falta de ilustrações e interpretações geométricas pertinentes no estudo da diferenciabilidade em funções de várias variáveis, pois mostra-se que essa defasagem nos materiais pode ser suprida com o trabalho em ambientes de geometria dinâmica. As análises nos permitem constatar que entre os autores consultados até o momento não é comum partir do registro em interpretação geométrica para explicar e construir qual o limite que deve ser estudado na diferenciabilidade e porque o mesmo deve tender para zero. Também é importante que as figuras apresentem o triângulo diferencial, que relacione as tangentes, como aqui foi feito e como é feito pela totalidade desses autores na derivada de um função $y = f(x)$. As dificuldades em torno da abstração dos limites e da visualização de situações espaciais tornam essa multiplicidade de registros um imperativo ainda maior no estudo das funções de várias variáveis. Partir da manipulação entre diferentes registros, sobretudo a passagem do geométrico para o algébrico e deste para o limite que figura na definição, está de acordo com a teoria semiótica de Duval e pretende contribuir à superação das dificuldades detectadas nos estudos apresentados. Mostramos aqui como uma ferramenta tecnológica pode ter um papel importante a desempenhar nessa manipulação e criação de registros, sobretudo em ambientes 3D.

REFERÊNCIAS

- AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. **A Utilização do GeoGebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler**. Rio Claro (SP): BOLEMA, v. 29, n. 52, pp. 637-657, agosto de 2015.
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**; v. 2. 10a. ed. São Paulo: Bookman, 2014.
- DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, 1999.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo B**. 2a. ed. São Paulo: Pearson, 2007.
- GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. v. 2. 5a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**; v. 2. 3ª ed. Editora Harbra, São Paulo, 1994.
- LIMA, E.L. **Curso de Análise**; v. 2. Projeto Euclides. 1a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. **Ensino e aprendizagem de Cálculo diferencial e integral: um mapeamento das teses e dissertações produzidas no Brasil**. VIDYA, v. 34, n. 2, pp. 14-28, 2014.
- SALLUM, E.M.; MURAKAMI, L.S.I.; SILVA, J.P. **Cálculo Diferencial Geométrico no Rⁿ**. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo (IME-USP). São Paulo, 2009.
- SANTOS-TRIGO, M. **Mathematical Problem Solving: An Evolving Research and Practice Domain**. ZDM, Heidelberg, v. 39, n. 5-6, pp. 523-536, julho de 2007.
- STEWART, J. **Cálculo**; v. 2. Trad. 6a. ed. americana. São Paulo: Cengage Learning, 2009.



O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA EM ANIMAÇÃO NO GEOGEBRA

Azevedo, Ytalo, ytaloazevedo@gmail.com¹
Pinheiro, Leonan, leonan.pinheiro@icen.ufpa.br²
Neri, Edilson, edilson_neri@yahoo.com.br³

¹Universidade Federal do Pará, Graduando
²Universidade Federal do Pará, Graduando filiação
³Universidade Federal do Pará, Mestre em Ensino

Resumo: O propósito desse artigo é apresentar a solução do problema da Braquistócrona, porém com o auxílio do Geogebra. Esse problema é comumente apresentado por fórmulas escritas manualmente, porém recorreremos ao Geogebra para apresentar uma solução mais didática de forma visual, pois com as várias ferramentas que o software proporciona foi possível o estudo desse problema, além da resolução em forma de animação utilizando a ferramenta controle deslizante apresentada no Geogebra.

Palavras-chave: Braquistócrona, Animação, Geogebra, Reconstrução.

1. INTRODUÇÃO

A palavra Braquistócrona deriva-se de duas palavras gregas, *Brachistos* que significa menor, e *Chronos* que significa tempo. Seu problema foi proposto pelo matemático suíço Johann Bernoulli que publicou aos leitores da revista científica *Acta Eruditorum* em 1696, com a seguinte afirmação: “Eu, Johann Bernoulli, dirijo-me aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente para as pessoas inteligentes do que um problema honesto e desafiador, cuja solução possível conferirá fama e permanecerá como um monumento duradouro. Seguindo o exemplo de Pascal, Fermat, etc., espero conquistar a gratidão de toda a comunidade científica, colocando diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e a força de seu intelecto. Se alguém me comunicar a solução do problema proposto, declará-lo-ei publicamente digno de louvor”, assim enunciou o problema: Dados dois pontos A e B em um plano vertical, qual é a curva traçada por um ponto sobre o qual atua apenas a gravidade, que começa em A e atinge B no menor tempo?

Na época vários matemáticos se debruçaram em busca de solucioná-lo e o matemático que propôs deu um tempo de seis meses para as soluções, mas até então nenhum havia conseguido a solução até que 29 de janeiro de 1697 Isaac Newton se deparou com o desafio, quando chegou na casa da Moeda Real, em uma carta de Johann Bernoulli, então Newton ficou acordado a noite toda para resolver e enviou a solução de maneira anônima, mas Bernoulli ao ler a solução reconheceu imediatamente seu autor, dizendo que “reconhece-se um leão pela marca de sua garra”. Ao fim, cinco matemáticos responderam ao problema.

Apresentado esse breve histórico sobre o problema e como foi resolvido, sabe-se que as soluções eram todas feitas de maneira manual. Então, como estamos cada vez mais avançando com tecnologias digitais na matemática e podemos visualizar a solução dos problemas matemáticos que só tinham uma solução algébrica através de softwares matemáticos que nos proporcionam inserir a parte algébrica para que visualizemos de maneira gráfica.

2. OBJETIVOS

Esse trabalho tem por objetivo mostrar como construir a curva braquistócrona no software Geogebra mostrando o passo a passo de sua solução e também a relação entre conteúdos focando no ensino e aprendizagem dos leitores.

O software nos permite estudar objetos matemáticos diversos utilizando conceitos algébricos e geométricos de maneira dinâmica e intuitiva auxiliando os alunos na aprendizagem de conteúdos matemáticos de modo a participar ativamente da aula.

3. DEMONSTRAÇÃO

3.1. Cicloide

Para entendermos a solução da Braquistócrona não podemos deixar de falar da cicloide, que por definição é a curva traçada por uma partícula qualquer, fixa numa circunferência que rola sem deslizar, ao longo de uma reta, que é uma curva com propriedades geométricas particulares que intrigou a comunidade científica de matemáticos na altura em que foi descoberta, suscitando várias disputas entre os seus elementos. Quando se descobriu a curva cicloide foi possível dar resposta a outros dois problemas da física, nomeadamente, o da curva braquistócrona que é o nosso objeto de estudo e o da curva tautócrona.

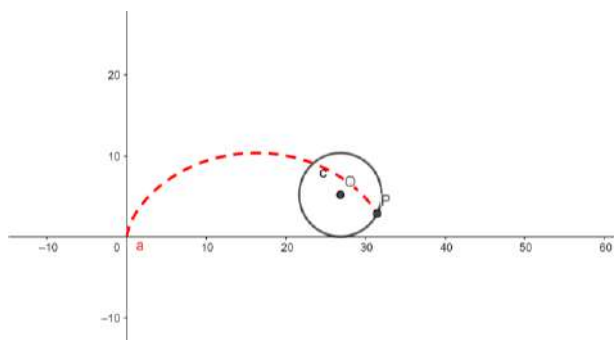


Figura 1: Curva Cicloide

Por definição, a curva braquistócrona é o caminho que une dois pontos da mesma de maneira rápida, ainda que não seja o mais curto. Desse modo, ao soltarmos uma partícula de um ponto A numa curva Braquistócrona, esta chega a um ponto B da mesma de modo mais rápido do que se segue qualquer outro caminho, mesmo que este seja retilíneo, visto que no plano é o menor caminho entre duas partículas.

3.1. Resolução

A solução do nosso problema foi de maneira manual e passada pro software GeoGebra. A construção pode ser acessada através do link seguinte: <https://www.geogebra.org/m/z8u7cjqv>

Primeiramente, foi feita a parametrização da cicloide que é a curva que soluciona o nosso problema para buscarmos então as equações que definem a braquistócrona.

Os cálculos foram feitos levando em consideração os seguintes resultados: a variação da energia cinética que em física sabe-se que é igual ao trabalho realizado pela força resultante e o comprimento do arco que a partícula percorre, no caso a nossa curva cicloide.

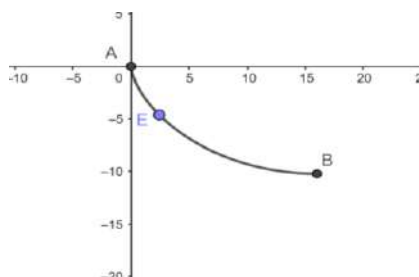
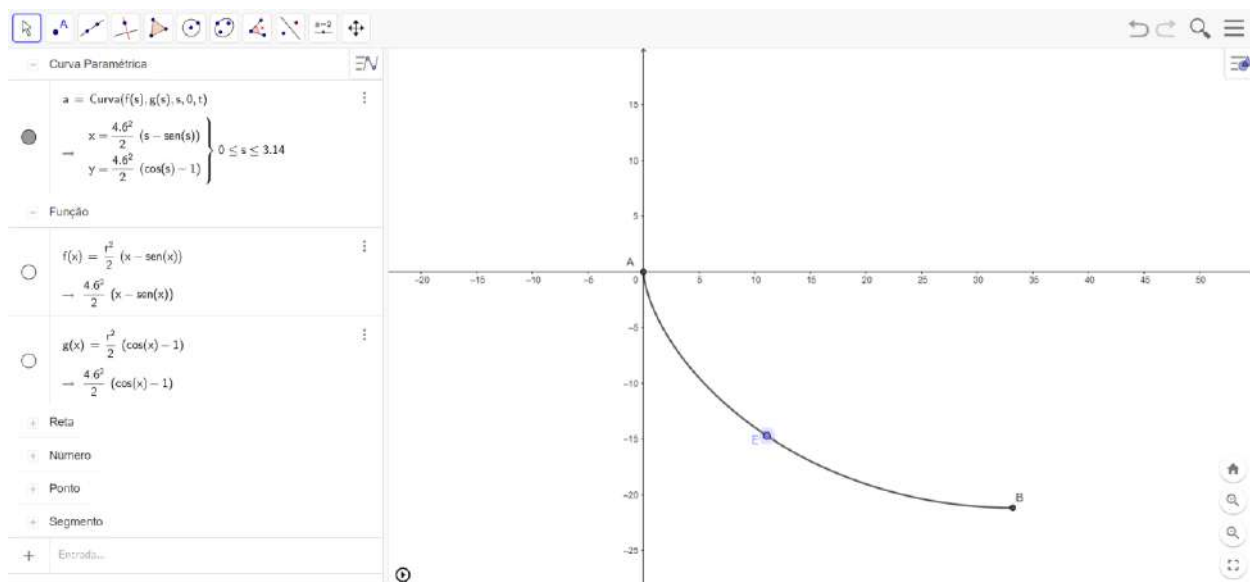


Figura 2: Braquistócrona

Temos que x e y são as equações paramétricas cujo gráfico é a cicloide mostrado na figura 2 pela curva de maneira que foi invertida em y :

$$x = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \text{sen}\theta) \text{ e } y = r^2/2 (1 - \text{cos}\theta)$$

Assim, vamos ao passo a passo no geogebra. Trouxe uma imagem da tela do software para facilitar a visualização.



Inicialmente, clicamos na ‘Entrada’ para escrever as funções $f(x)$ e $g(x)$ que são a paramétricas da cicloide, lembrando que ao colocar a equação y ao invés de ser $y = r^2/2 (1 - \text{cos}\theta)$ será $y = r^2/2 (\text{cos}\theta - 1)$, visto que precisamos que a cicloide seja invertida de modo a ser solução do problema, tal escolha é conveniente, pois, nesse caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo.

Assim, após definirmos as funções vamos escrever o comando ‘curva’ o qual precisa de duas funções, uma variável, valor inicial e valor final. As funções já definimos como $f(x)$ e $g(x)$, a variável chamamos de s , o valor inicial será a origem, no caso o ponto $(0,0)$ do plano cartesiano, e o valor final será t que definimos como um controle deslizante de modo que mostra o comprimento da curva que a partícula percorre. Depois que geramos a curva definimos um ponto E sobre ela que será nossa partícula que sai de do ponto A até B .

Enfim, após esses passos podemos reproduzir e ver a partícula saindo de A até B que fisicamente estaria sendo puxado pela força da gravidade.

4. CONCLUSÕES

Esse trabalho procurou mostrar por meio de um passo a passo, a solução do problema da curva Braquistócrona, assim possibilidades e uma proposta de abordagem de um tópico matemático abordado no Ensino Médio com vistas à interdisciplinaridade de diversos conceitos e áreas envolvidas, evidenciando a importância do uso de um recurso computacional no ensino e aprendizagem da Matemática.

Ao realizar o estudo do problema da braquistócrona procuramos destacar a pesquisa sobre o contexto histórico ligado à gênese e ao desenvolvimento do objeto matemático, a questão do ponto de vista dinâmico envolvendo a construção da curva e os conceitos matemáticos que podem ser explorados como geometria plana, analítica bem como alguns tópicos envolvendo trigonometria e também houve a necessidade de utilizar cálculo diferencial para solução algébrica.

Em todas as etapas envolvidas, o Geogebra exerceu um papel imprescindível, pois além de se constituir como um recurso computacional auxiliar no ensino e aprendizagem, o mesmo permite ao aluno explorar, intuir, conjecturar, interagir com o objeto matemático de estudo de modo dinâmico, além de auxiliar na validação das hipóteses e conjecturas formuladas pelos estudantes bem como os resultados encontrados no contexto histórico. O

Geogebra foi extremamente útil na simulação do experimento realizado sobre a braquistócrona demonstrando sua grande gama de recursos, o que se pode inferir sua significativa contribuição na construção do conhecimento científico.

5. REFERÊNCIAS

VENCESLAU, Allisson Wesley do Nascimento. Curvas Parametrizadas, Ciclóides ,Experimentos e Aplicações. 2015. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós Graduação em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

FIRMINO, Elias Gabriel et al. Ciclóide: uma abordagem sobre as propriedades tautócronas e braquistócronas. Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática, Centro Universitário de Franca, v. 1, n. 1, p. 1-40, 2019.

BÉRTI, Gustavo Camargo. CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE E GEOGEBRA: uma proposta destinada ao ensino médio. 2015. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.



A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM 3D COMO FERRAMENTA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neri Júnior, Edilson dos Passos, edilson_neri@yahoo.com¹
Da Silva, Railane Caroline, railanecaroline01@gmail.com²

¹Universidade Federal do Pará, Mestrado em Ensino, edilson_neri@yahoo.com.br.

²Universidade Federal do Pará, Graduanda em Matemática, railanecaroline01@gmail.com.

Resumo: *Este trabalho apresenta um pouco do que foi desenvolvido remotamente no Projeto LABINFRA, na Monitoria do Laboratório de Ensino de Matemática, utilizando-se das novas tecnologias que temos a nossa disposição, que já se tornaram essenciais no contexto deste período pandêmico da COVID-19 e que felizmente, continuarão recorrentes para os períodos posteriores. O objetivo que se busca aqui, é revelar as dificuldades presentes no atual cenário educacional, e apresentar as diversas aplicações realizadas com a tecnologia, em especial, a Modelagem 3D, como possíveis soluções ou estratégias a serem utilizadas na disciplina de matemática, refletindo acerca de que todo o desenvolvido até agora, venha a trazer contribuições consideráveis dentro da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (UFPA) e que se torne um exemplo de sucesso a ser seguido futuramente por outros educadores.*

Palavras-chave: *Modelagem 3D, TIC'S, Educação Matemática, Tecnologia, Ensino.*

INTRODUÇÃO

Através da pandemia de covid 19 conseguiu-se perceber explicitamente que, o ensino de matemática no Brasil é cercado por diversas limitações, tendo como consequências diretas no processo de aprendizagem e da aquisição de conhecimento, desta maneira, Giancaterino (2009, p.17) afirma que:

O processo de ensino e aprendizagem é uma construção continua e notável, onde requerem de nós, professores independentemente de sua cátedra, constante adaptação para que possamos retirar dos processos o melhor e aproveitar todas as suas etapas, respeitando evidentemente sempre o grau de dificuldade de cada educando.

O pensamento do educador corrobora para observar que, a educação matemática nos tempos atuais, necessita de diferentes abordagens para a construção da capacidade de aprendizado da disciplina, de uma forma correta, simples e descomplicada ao aluno. Pode-se citar como uma dessas alternativas, é recorrer ao uso das tecnologias da informação e da comunicação (TIC'S), tratando de auxiliar, principalmente, nos conceitos que por muitas vezes podem ser vistos como difíceis e complexos em sala de aula, assim, o processo deixa de ser sistemático, se desenvolvendo de forma interativa e prazerosa aos alunos, pensamento este, que se assemelha bastante com o de LIMA, C., & NEGRELLI, L. (2018) "criar objetos fazendo uso de um recurso como a impressora 3D pode caracterizar uma expressão artística, além de demandar e revelar conhecimentos técnicos e conceituais. Pensar isso no contexto do ensino de matemática demandou a busca pelo que se poderia ter sido, ou estar sendo, pesquisado a respeito, no campo da Educação Matemática". O uso da modelagem 3D é muito comum na atualidade, vemos muito do favorecimento desta com

relação a engenharia, a medicina, esta última por exemplo, apoiando a ciência em muitos aspectos, como pode ser visto na impressora 3D, que de acordo com o blog TELEIMAGEM, “foi criada no final do século XX, pelo engenheiro Chuck Hull, no estado da Califórnia”, que veio com vários intuitos, dentre eles o de imprimir partes do corpo humano e delas se tornarem próteses para os pacientes.

Além disso, segundo TUKURU, 2008. p. 185-196:

Aplicações médicas são consideradas algumas das mais relevantes utilizações de tecnologias 3D de simulação física e virtual (TUKURU, 2008. p. 185-196).

Sabendo do desenvolvimento da aplicação da modelagem 3D com relação a diversas áreas, como a medicina, houve a discussão sobre a possibilidade de sua utilização na área da matemática, sendo o objeto de estudo deste trabalho juntamente com os resultados de algumas experiências coletadas, chegou-se à compreensão de sua importância incorporada ao ensino-aprendizagem, sendo essa uma estratégia inovadora na educação, ao trazer conhecimentos teóricos e práticos ao aluno, fomentando a busca por estabelecer novas atividades relevantes à matemática com o apoio de tecnologias 3D.

Metodologia

O presente estudo consiste em uma pesquisa conforme os objetivos foram previamente definidos dentro do projeto do Laboratório de Ensino de Matemática, os modelos foram pensados com temas para a educação básica e apresentados de maneira remota devido às circunstâncias vivenciadas, contudo, com o intuito de serem utilizadas presencialmente no espaço do laboratório da Escola de Aplicação da UFPA, que conta com uma impressora 3D, para isso foi adotada a estratégia da busca e análise das inúmeras opções de softwares existentes que abordam a modelagem 3D, tais como o Blender, SketchUp, FreeCad, OpenSCAD, entre outros. Para tanto decidimos trabalhar com o software OpenSCAD, por se tratar de um software livre para criar modelos CAD 3D sólidos, como consta na página sobre o modelador na internet, tais como, modelos de superfícies, tridimensionais, polígonos complexos, assim, o uso de tecnologias 3D na aprendizagem da matemática corrobora com o pensamento destacado por ROCHA, Leonaldo Viegas da (2018.103 p.), ao afirmar que “a impressão 3D pode ser utilizada em todas as etapas da educação, contribuindo com tarefas específicas em cada momento, desde o ensino básico até a universidade no desenvolvimento de linhas de pesquisas mais complexas.”

Resultados e Discussão

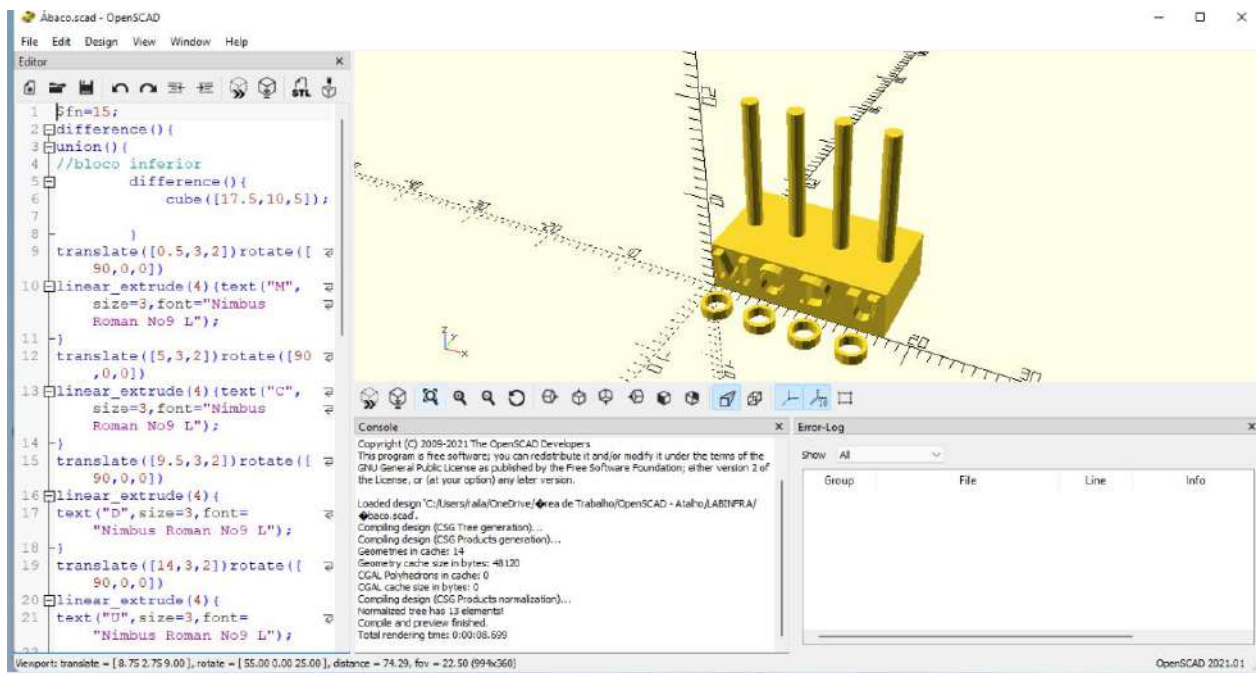
Com base nos levantamentos realizados durante a vigência da bolsa, foi possível constatar a gama de possibilidades que podem ser abordadas com o auxílio da modelagem 3D, assim, a análise trouxe a necessidade de uma importante busca em identificar, considerar e construir as atividades de cunho relevante dentro do software OpenSCAD, através de discussões em grupo para selecionar os conteúdos, em seguida o cronograma de execução, para enfim chegar em seu modelo pronto para uso dentro da educação básica, de modo que as suas potencialidades, despertem através das novas metodologias, a criatividade e o interesse em detrimento de contribuir no processo de ensino aprendizagem, como visto por Aguiar (2016, p. 36) “a impressão 3D, usada como ferramenta de aprendizagem, ajuda o aluno a pensar diferente, ver o mundo de outra maneira. Ajuda a formar ambientes que dão o estímulo adequado a estudantes que se apresentam indiferentes na escola, pois possibilita que eles aprendam por conta própria mediante exploração.”

Projetos com o recurso da modelagem 3D

De acordo com Blikstein (2013) “o grande diferencial dos objetos desenvolvidos mediante a impressora 3D está na qualidade, podendo usá-los para testes reais e funcionais”, portanto, percebe-se a utilização da modelagem 3D tem diversas áreas de aplicação, sendo bastante procurada ultimamente pelo mercado gamer, cinema e programadores, com o objetivo de apresentar e criar objetos sólidos na impressora 3D, assim, a seguir temos a confecção de alguns dos materiais desenvolvidos ao longo do projeto.

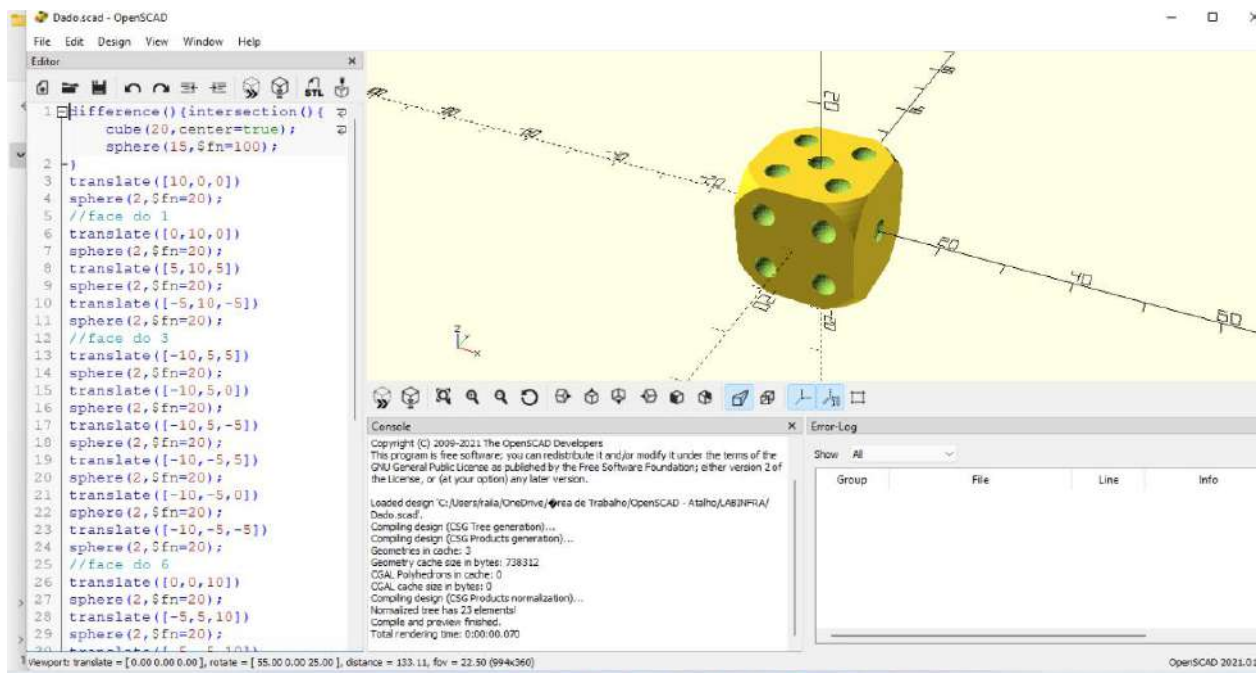
Figura 1

PÔSTERES



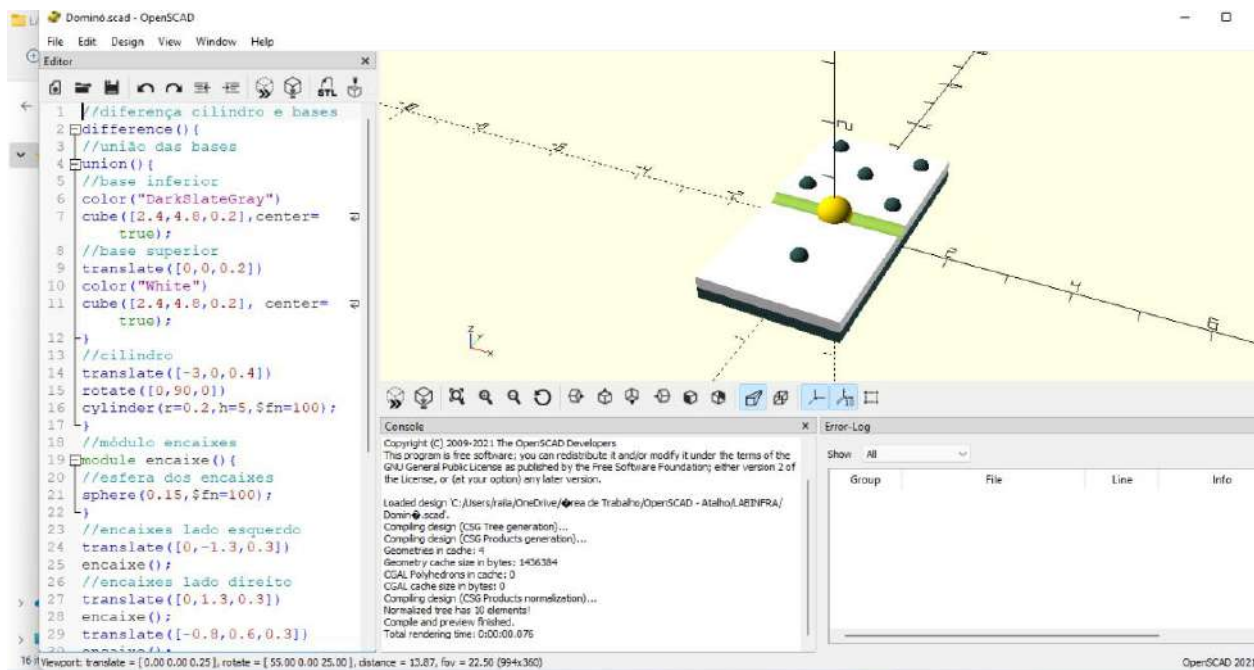
Fonte: Autor

Figura 2



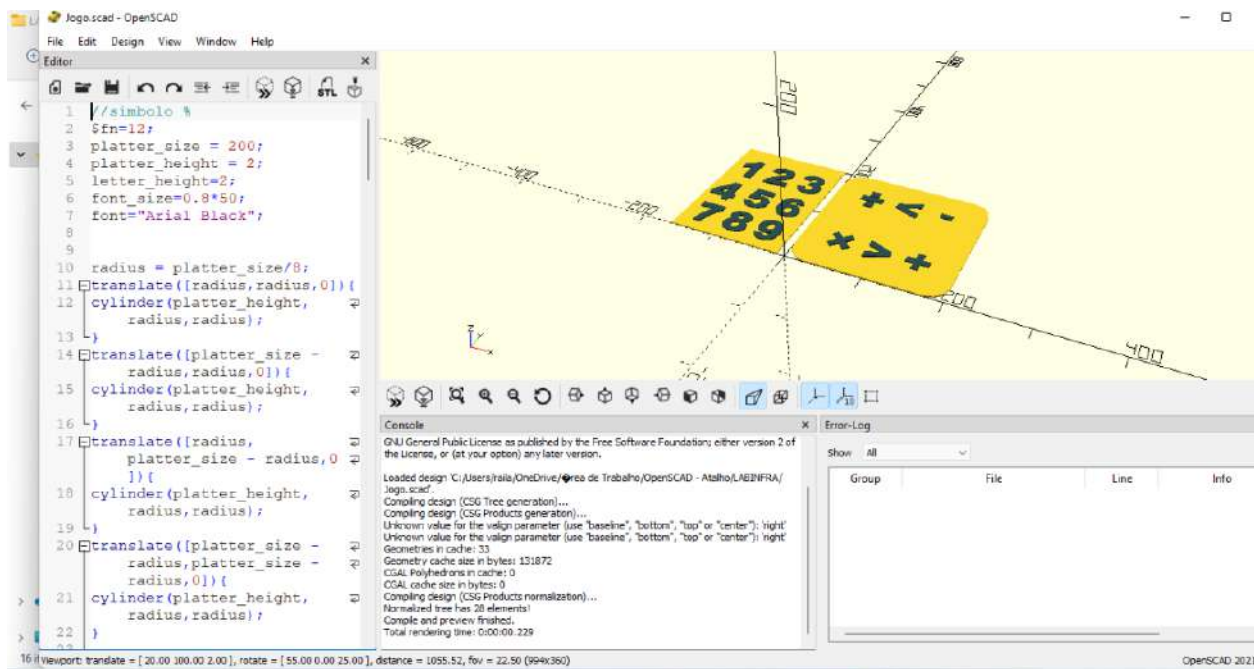
Fonte: Autor

Figura 3



Fonte: Autor

Figura 4



Fonte: Autor

CONCLUSÕES

Através da pandemia por COVID-19, a educação readaptou as suas práticas educativas em sala de aula, para uma intervenção mais adaptada à nova realidade do mundo *online*. Assim, com base nos expostos anteriores, conclui-se que, as funcionalidades da modelagem 3D na educação tendem a trazer vários ganhos, ao ser inserida no ensino de matemática, devido ao fato de integrar uma metodologia pedagógica ativa que proporciona o aluno uma nova forma

de visualização e interação com os materiais didáticos, sendo uma mudança produtiva, para o desenvolvimento de diversas habilidades benéficas ao processo de ensino-aprendizagem, com base em todos os argumentos e fundamentações teóricas expostas anteriormente, por fim, trazemos o pensamento de Silva, Siple e Figueiredo (2017, p.1), “... é fundamental entender que a visualização de um objeto matemático e a sua manipulação tátil podem desempenhar um papel importante na elaboração de processos mentais mais eficientes [...]”.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, L. de. C. Um processo para utilizar a tecnologia de impressão 3D na construção de instrumentos didáticos para o ensino de Ciências. 2016. 226 p. Dissertação de Mestrado (Ensino de Ciências) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/.../aguiar_ldcd_me_bauru.pdf?. Acesso em: 22 fev.2022.
- BLIKSTEIN, P. **Digital fabrication and ‘making’ in education** : the democratization Of invention. Stanford: Stanford University, 2013.
- Descubra 5 benefícios da impressora 3d na medicina. **Teleimagem**, 19 de nov. de 2018. Disponível em: <https://teleimagem.com.br/descubra-5-beneficios-da-impressora-3d-na-medicina/>>. Acesso em: 05 fev. 2022.
- GIANCATERINO, Roberto. A matemática sem rituais. RJ: Wak, 2009.
- LIMA, C.; NEGRELLI, L.. ARTE E IMPRESSORA 3D NO ENSINO DE MATEMÁTICA. **EPTEM - Encontro Paranaense de Tecnologia em Educação Matemática**, Brasil, nov. 2018. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPTEM/I_EPTEM/paper/view/891>. Data de acesso: 22 Fev. 2022.
- ROCHA, Leonaldo Viegas da. **Uma aplicação da tecnologia de impressão 3D no ensino da matemática: construindo instrumentos didáticos para a sala de aula**. 2018. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional , Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2018.
- SILVA, S. M. D.; SIPLE, I. Z.; FIGUEIREDO, E. B. d. Uso da impressora 3d no ensino de matemática. **Anais do 26º Seminário de Iniciação Científica-Universidade do Estado de Santa catarina**, Joinville, 2016. Disponível em: . Acesso em: 09 fev. 2022.
- TEODORO, João Vitor; LOPES, José Marcos. **Evolução e perspectivas da tecnologia em sala de aula e na formação docente**. In: *Revista Educação e Fronteiras On-Line*, Dourados/MS, v.3, n.8, p.91- 104, mai./ago. 2013. Disponível em: Acesso em: 07 fev. 2022.
- TUKURU N.; et al. **Rapid Prototype technique in Medical Field**. Periódico Research J. Pharm. And Tech.; 1; 4; Oct-Dec, 2008.



RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA NUMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Dias, Alyne, alynerosaadias@gmail.com¹

Silva, Paulo, pvilhena@ufpa.br²

¹Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará

²Doutor em Educação Matemática, é professor da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará

Resumo: *O presente trabalho faz parte de uma pesquisa de doutorado em andamento que visa apresentar um novo modo de ver a matemática no ensino da física a partir da perspectiva pragmática do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, o qual direciona sua segunda filosofia à linguagem e seus diversos usos. Nossas reflexões, por meio dessa filosofia, se voltam à matemática e à física enquanto jogos de linguagem que se entrelaçam, bem como trazemos o conceito ver-como, enquanto uma metáfora que pode possibilitar ao professor em ver a matemática e estabelecer conexões com a física, livre de dogmatismo e referencialismo.*

Palavras-chave: *filosofia da linguagem, Wittgenstein, matemática, ensino de física, ver-como*

INTRODUÇÃO

O presente artigo traz reflexões acerca do ensino de física com olhar voltado ao uso da Matemática neste contexto. Tal proposta se justifica pelo fato de percebermos por meio da fala de professores de física bem como em leituras que trazem a relação entre essas duas disciplinas, que é quase unânime relatos de que as dificuldades na aprendizagem de física é devido a não compreensão de Matemática e a ela é atribuída alguma referência. As literaturas que tratam da inserção da matemática no ensino de física mostram que a matemática desempenha o papel ora de ferramenta, ora de descrição dos fatos empíricos, ora como pré-requisito para a compreensão da física ou ainda como linguagem da física. A maioria dessas concepções se amparam em correntes filosóficas tradicionais e referenciais e estas servem de base para a construção de documentos que regem o ensino, os livros didáticos e conseqüentemente, são levadas à sala de aula por meio das falas e das ações docentes, pois os mesmos reproduzem o que concebem sobre a matemática neste contexto. Nesta perspectiva, não temos a intenção de excluir esses modos de conceber a matemática, mas apresentar um novo modo de ver, livre de dogmatismo e referencialismo. Para tanto, nos apoiamos na perspectiva filosófica do austríaco Ludwig Wittgenstein em seu segundo momento filosófico por meio dos conceitos de jogos de linguagem e *ver-como*. Apresentamos, portanto, um ensaio teórico que possibilitará fazer reflexões de como o professor pode ver a matemática no contexto do ensino da física. Assim, matemática e física são configuradas neste trabalho enquanto jogos de linguagem e o *ver-como* enquanto uma habilidade do professor ao estabelecer elos da matemática no ensino de física.

UM OLHAR SOBRE O QUE DIZEM AS LITERATURAS

Historicamente, no período da Idade Média, momento em que a lógica tinha o papel de garantir a exatidão do pensar teórico (VARGAS, 1996), acontece a inserção da matemática no contexto das ciências empíricas e esta inserção passa a ser denominada como *matematização da natureza*, a qual teria o papel de moldar a forma da ciência da natureza. A universalidade atribuída pelos homens à matemática levou a crer que a essência da matemática estaria em descrever os fatos do mundo. Foi, com a Geometria Analítica de Descartes (1637) e o cálculo diferencial e integral de Newton e Leibniz que foi possível analisar os fenômenos físicos matematicamente, inclusive Newton, mostra através de sua obra *Princípios matemáticos da filosofia natural* que “qualquer fenômeno físico observado empiricamente corresponde exatamente a um modelo matemático deduzido de axiomas pré-estabelecidos como verdadeiros” (VARGAS, 1996, p. 256).

Acredita-se, portanto, que os fatos deveriam ser organizados matematicamente para que estes fossem compreendidos. Por meio de D'Alembert foi aceito definitivamente o processo de *matematização da natureza*: "Atingira-se assim o cume da crença dominante desde Galileu e Descartes, de que o mundo era uma máquina regida pela racionalidade matemática" (VARGAS, 1996, p. 257); e com Lagrange, Laplace e Legendre, a matemática consolidou-se como instrumento para análise dos fenômenos naturais, como é usada hoje e, foi por meio das equações da mecânica analítica de Lagrange e Laplace que a física foi toda matematizada.

Diante disso, não há como negar a importância da matemática na constituição dos conceitos físicos. No entanto, o modo de ver a matemática no contexto do ensino da física pode ser um dos fatores que contribuirão para a aprendizagem da física. E algumas literaturas que trazem a relação matemática e ensino da física atribuem à matemática o papel exclusivamente instrumental, ferramental ou acreditam ser a matemática um pré-requisito para a compreensão da física.

Ataíde e Greca (2013) por exemplo, trazem a Matemática como o "esqueleto que sustenta o corpo da Física". Eles consideram que há uma falta de clareza nesta relação e isto leva ao não aprendizado em Física. Esses autores dizem que em uma das literaturas que eles catalogaram em sua pesquisa, os alunos citam que sabem calcular, mas não sabem o significado da Matemática na Física e estes relatos levam eles a dizerem que "os alunos parecem acreditar que a matemática implica apenas em operações específicas com símbolos sem sentido, a aprendizagem de uma forma mecânica" (ATAÍDE; GRECA, 2013, p. 211).

Outra designação dada à matemática no ensino da física está no trabalho de Pietrocola (2002), que traz a matemática enquanto estrutura do conhecimento físico. Assim, a Matemática seria uma estrutura mental que serve para expressar a Ciência, enquanto critério de cientificidade na Física, ao mesmo tempo que enfatiza que muitos pesquisadores consideram a Matemática uma linguagem responsável pelo fracasso no ensino da Física (PIETROCOLA, 2002).

No ensino da Física, a linguagem matemática é muitas vezes considerada o grande responsável pelo fracasso escolar. É comum professores alegarem que seus alunos não entendem a Física devido à fragilidade de seus conhecimentos matemáticos. Para muitos, uma boa base matemática nos anos que antecedem o ensino da Física é garantia de sucesso no aprendizado (PIETROCOLA, 2002, p. 90).

Outro modo de ver a matemática, está no trabalho de Mannrich (2014), no qual é vista enquanto linguagem estruturante no ensino da Física. Ele inicia o texto refletindo sobre a concepção que se tem da Matemática nas dificuldades encontradas no ensino da Física:

Esta culpabilidade nos indica uma concepção em que a Matemática possuiria um caráter ferramental, um instrumento "externo" que deve ser adquirido em outro lugar ou momento (aulas de matemática) para ser usado pela Física (MANNRICH, 2014, p. 23).

Essa crítica que Mannrich (2014) faz, ao considerar a Matemática como ferramenta, está vinculada a uma perspectiva referencialista, em que ela estaria exterior à linguagem e que deveria ser aprendida nas aulas de matemática e não nas aulas de física, como se não compusesse a linguagem da Física.

Nenhuma dessas concepções construídas historicamente e apresentadas nesses trabalhos acima citados trazem como subsídio a linguagem na perspectiva pragmática, mas buscam se ancorar em concepção filosófica tradicional, como o empirismo, que concebe a matemática como a descritora dos fatos do mundo, desconsiderando os usos que ela pode ter em cada contexto de aplicação.

MATEMÁTICA E FÍSICA: O ENTRELACAMENTO DE JOGOS DE LINGUAGEM

As perspectivas que depositam na matemática a responsabilidade pelo aprendizado da física, não considerando a importância do significado atribuído a ela em cada contexto, colaboram para haver confusões conceituais no âmbito do ensino e da aprendizagem. Assim, a perspectiva pragmática da filosofia da linguagem de Wittgenstein que trazemos, busca dissolver essas confusões e sugere que tenhamos uma visão panorâmica dos usos que a Matemática pode ter em cada contexto de aplicação.

Wittgenstein, em sua obra *Investigações Filosóficas*, por meio dos aforismos, usa metáforas para melhor elucidar a relação entre jogos e linguagem, nos levando a refletir que assim como os jogos não possuem uma essência, mas são aparentados entre si, mudando uma regra, muda o jogo, assim funciona com a linguagem, mudou o contexto de aplicação, muda o significado da palavra (WITTGENSTEIN, 1999).

Nesse parentesco entre jogo e linguagem, Wittgenstein insere o conceito *jogos de linguagem* e o caracteriza da seguinte forma:

A expressão "jogo de linguagem" deve enfatizar aqui que o falar de uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida.

Ponha diante de si a multiplicidade de jogos de linguagem por estes e outros exemplos:
Dar ordens e agir segundo ordens –
Descrever um objeto segundo a aparência ou por medição –
Produzir um objeto segundo uma descrição (desenho) –
Informar um acontecimento –
Fazer conjecturas sobre um acontecimento –
Propor uma hipótese e prová-la –
Apresentar os resultados de um experimento mediante tabelas e diagramas –
(WITTGENSTEIN, 1999, § 23).

Essa multiplicidade de ferramentas que a linguagem dispõe é que leva a compreender que sua segunda filosofia pode colaborar com a compreensão da inserção da matemática no contexto da física e do ensino da física, trazendo, neste contexto de pesquisa, a matemática e a física enquanto jogo de linguagem que se entrelaçam. A matemática enquanto um jogo de linguagem que possui um conjunto de regras, cujas proposições não descrevem fatos do mundo:

As regras não descrevem, elas orientam, elas constituem sentidos, nos dizem o que podemos ou não podemos dizer. Porém, não podemos verificá-las como verdadeiras ou falsas, pois são proposições necessárias ou gramaticais (TEIXEIRA Jr; SILVEIRA; SILVA, 2021, p. 4).

A Física, por outro lado, é uma ciência empírica cujo jogo de linguagem depende de outras linguagens, dentre elas, a linguagem matemática. Neste contexto de entrelaçamento entre as proposições gramaticais e as proposições empíricas, percebemos que há confusões conceituais quanto aos usos da matemática no ensino da física, porém “a necessidade que elas [proposições gramaticais] exprimem parece *determinar* os fatos [proposições empíricas]” (MORENO, 1993, p.92, grifo nosso). Como forma de esclarecer parte dessas confusões que são construídas em relação à matemática, Gottschalk (2014) traz reflexões acerca dos usos da matemática, como por exemplo, considerá-la descritora dos fatos do mundo (concepção empirista) bem como da matemática enquanto ideia construída na mente do sujeito (concepção idealista/intuicionista), concepções estas que buscam fundamentos últimos fora da linguagem.

O que une estas duas concepções de atividade matemática (a idealista e a empirista) é a crença de que haveria um significado essencial dos entes matemáticos fundamentados numa intuição, ou numa ação empírica, ambas consideradas condições extralinguísticas para a sua aquisição. Em outras palavras, é como se a atividade matemática se referisse a algo existente *a priori* no sujeito ou no mundo externo, e que passa a ser expresso linguisticamente, onde a linguagem matemática teria uma função meramente descritiva ou comunicativa (GOTTSCHALK, 2014, p. 74).

Assim, na matemática enquanto jogo de linguagem, suas palavras adquirem significados em cada contexto e não um significado essencial. Parafraseando Wittgenstein (1999, p. 138), são as regras gramaticais, em uso, ancoradas a uma práxis, que determinam os significados das palavras. Como aplicação dessa multiplicidade de usos da linguagem matemática podemos pensar na matemática no contexto do ensino dela própria no qual busca-se compreender suas regras e segui-las; já as proposições matemáticas no contexto do ensino da física, suas proposições são condições de sentido para as proposições empíricas (Gottschalk, 2006). “O perigo reside em tomá-las por aquilo que elas não são, pretendendo fazer com elas mais do que elas podem permitir” (MORENO, 1993, p.79).

VER COMO NO APRENDIZADO DA FÍSICA: A MATEMÁTICA COMO CONDIÇÃO DE SENTIDO

O conceito de *ver* na concepção filosófica tradicional está relacionado a uma questão visual, ver através dos olhos, da mente, sob uma concepção cognitiva; já na perspectiva filosófica do segundo Wittgenstein, do pragmatismo, o *ver* está relacionado ao uso da linguagem com olhos conceituais, de modo que quando *vê* algo é porque consegue interpretar, entender o conceito.

"É isso pensar? É isso ver?" - Não quer isto dizer tanto quanto "É isso interpretar? É isso ver?" E interpretar é pensar; e causa frequentemente uma mudança de aspecto. Posso dizer que o ver do aspecto é aparentado a um interpretar? - A minha inclinação era realmente para dizer: "É como se visse uma interpretação". Agora, a expressão do ver é aparentada à expressão do interpretar (WITTGENSTEIN, 1999, § 179).

A questão do ver, que ora era tomado enquanto a essência do que é visto, em busca de uma referência, de um objeto que o represente, passa a compreender de dois modos diferentes o verbo *ver*, um exprimindo a percepção da coisa quanto a do aspecto, da semelhança dos objetos, assim a essência passa a ser vista como uma família de semelhança (GIANNOTTI, 1995).

É por meio de metáforas que Wittgenstein traz o conceito *ver-como*, este sendo o ver por meio de conexões, o perceber as alternâncias dos significados das palavras, perceber a alternância da figura. Dentre as várias metáforas utilizadas pelo austríaco para mostrar a aplicação dos conceitos *ver* e *ver-como*, voltemo-nos à figura do Pato-lebre de Jastrow (1901) que por meio dele, propõe-nos a refletir acerca desta nova forma de *ver*.

Figura 1: figura lebre-pato de Joseph Jastrow (1901).



A aplicação do *ver* presente nas *Investigações Filosóficas* no uso da figura pato-lebre busca esclarecer que para *ver* imediatamente a figura como pato é necessário conhecer os conceitos que perpassam essa figura, conseguir descrever suas características, comparar com outros patos, etc, e para *ver* o pato *como* lebre, há de acontecer um espanto (Uma lebre!), fazer conexões entre os conceitos primeiros e o novo conceito, bem como conhecer os conceitos de lebre. “Só podemos ver os aspectos de pato e coelho da figura pato-coelho se estivermos familiarizados com a aparência desses animais” BUDD (1989, p. 82, tradução nossa). No *ver-como* há uma nova percepção, uma mudança de aspecto, seria o *ver* sob outro aspecto conceitual, realizando comparações, mostrando semelhanças.

Porém, notar aspectos requer domínio de técnicas, depende intrinsecamente da vivência visual de quem vê, pois só quem domina a técnica de uso consegue descrever a percepção do que foi visto, se surpreende com o que vê, expressa o seu pensamento, pois o pensar, o ver e o interpretar exigem essa vivência. Conforme Hebeche (2002, p. 94), o *ver-como* é “uma trama de conceitos: imaginar, representar, pensar e querer”, de modo que a revelação se dá nesse dinamismo. Wittgenstein faz uma comparação do notar um aspecto de uma figura ao notar o aspecto de uma palavra, os quais requerem domínio de técnicas de uso (HEBECHÉ, 2002) que levam a semelhanças com outras palavras da linguagem.

O *ver-como* wittgensteiniano abre espaço para olharmos o ensino da física por meio da linguagem matemática, para abrirmos o olhar aos modos como os professores concebem a Matemática no ensino da Física, bem como, que concepções direcionam as práticas dos professores formadores da Física no uso da linguagem matemática, pois segundo Wittgenstein (1999, p. 178, parte II, seção XI): “[...] nós a interpretamos e a vemos como a interpretamos”.

Budd (1989, p. 79, tradução nossa) apresenta alguns tipos de notar aspectos e dentre eles podemos aplicar o “ver algo como se fosse destinado a ser um sinal linguístico para vê-lo como se fosse a ser outro sinal linguístico” ao entrelaçamento dos jogos de linguagem da matemática e física, de modo que passamos a *ver* um sinal linguístico na matemática *como* outro sinal linguístico na física. No entanto, notar aspectos requer habilidades, domínio de técnicas e estas devem ser apresentadas pelo professor para que o aluno *veja* isto *como* aquilo, pois a alternância dos aspectos não são óbvias, visto que a matemática é uma convenção humana

[...] o ver-como depende do domínio de técnicas, que em geral, não são óbvias, mas que precisam ser aprendidas. Uma regra por si só, não comporta suas aplicações, ela não nos diz quando aplicá-las. Em geral, não nos são óbvias novas possibilidades de aplicação de uma regra que dominamos em determinado contexto (SILVA; SILVEIRA, 2014, p. 29).

Para exemplificar a aplicação do *ver-como*, enquanto domínio de técnicas da linguagem matemática no ensino da física, apresentamos a seguinte situação: ao ensinar funções polinomiais do primeiro grau, trazemos uma função polinomial do primeiro grau afim, como por exemplo, $f(x) = 2 - 3 \cdot x$, que aplicado ao contexto do ensino de matemática, o sinal negativo (-) nos dá condições de classificá-la como uma função decrescente, visto que o sinal do seu coeficiente angular nos permite classificá-la assim, por convenção matemática; já no contexto do ensino da física, este mesmo exemplo, pode descrever o movimento de um corpo em observação, cujo deslocamento pode ser descrito como $s(t) = 2 - 3t$, neste contexto o sinal negativo (-) convencional na matemática possui outro significado no contexto da física, significa que o corpo está percorrendo o sentido contrário ao sentido estipulado como positivo para o movimento.

Outra aplicação sobre o uso da linguagem matemática no ensino da física, pode ser visto quando se ensina derivada, por exemplo, $\frac{dy}{dx} = k$, sendo k uma constante. Este conceito, no contexto do ensino da Matemática tem o caráter normativo, e dele algumas regras são possíveis, estabelecendo uma relação entre variáveis y e x de uma função e no contexto do ensino da física pode ser ensinado pelo professor de modo que o aluno *veja* a derivada *como* a taxa de variação entre duas grandezas físicas, estas acompanhadas por unidade de medida. Um exemplo dessa aplicação

pode ser a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo resultando na aceleração de um corpo, $\frac{dv}{dt} = a$, sendo a a aceleração constante de um corpo em movimento.

Uma aplicação que também pode ser mostrada no contexto da física é o movimento de um corpo caindo na vertical e as forças atuantes nesse corpo, no qual o professor pode conectar os conhecimentos matemáticos do modo: veja uma equação como igualdade das forças atuantes no corpo. Sobre este exemplo, se aplicado no ensino superior, diríamos que as forças atuantes no corpo serão a força peso que atua no sentido da aceleração de gravidade e a força de resistência do ar que atua no sentido oposto a gravitação. No ensino médio, a força de resistência do ar é desprezível. Assim, a relação matemática que daria sentido a esse fenômeno seria escrito por uma igualdade matemática do tipo $F_r = P - F_{ar}$, e nela o professor mostraria a matemática estabelecendo elos entre essas linguagens até que o aluno perceba a mudança de aspecto, o significado no jogo de linguagem da matemática e no jogo de linguagem da física. Desta forma, a equação da força resultante seria mostrada como $m \cdot a = m \cdot g - \mu \cdot v$ e dela, veja a como $\frac{dv}{dt}$, assim, $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - \mu \cdot v$. Neste exemplo, percebemos que um mesmo objeto pode ser visto sob diferentes aspectos e estes dependem do contexto em que se encontram, são jogos de linguagens diferentes, mas que se entrelaçam.

CONCLUSÕES

Nosso olhar acerca da matemática no ensino da Física, nesta perspectiva filosófica a partir do conceito de *ver como*, leva-nos a discutir e tentar compreender que concepção o professor formador de Física tem da Matemática no ensino da física e em que concepção está subsidiada sua atividade de ensino. Do nosso ponto de vista, cabe ao professor, notar os aspectos e mostrar aos alunos que a cada contexto de uso apresentam-se aspectos diferentes. Deste modo, consideramos que professores de física que adotam a perspectiva pragmática da linguagem, por meio do *ver-como*, pode contribuir para que seu ensino não seja dogmático, ao mesmo tempo que leva aos alunos uma visão panorâmica dos diversos usos da linguagem.

REFERÊNCIAS

- ATAÍDE; GRECA, 2013. Estudo exploratório sobre as relações entre conhecimento conceitual, domínio de técnicas matemáticas e resolução de problemas em estudantes de licenciatura em Física. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. vol. 12, n. 1, p.209-233, 2013.
- BUDD, M. Wittgenstein's Philosophy of Psychology. 1st Edition. Routledge: London and New York, 1991.
- GIANNOTTI, J.A. Apresentação do mundo: considerações sobre o pensamento de Ludwig Wittgenstein. São Paulo: companhia das Letras, 1995.
- GOTTSCHALK, C. M. Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar. Internacional Studies on Law and Education. Universidade do Porto, Set-dez, 2014.
- GOTTSCHALK, C.M. C. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido et al. (org.) Colóquio Wittgenstein, Fortaleza: Edições UFC, p.73-93, 2006.
- HEBECHE, L. O mundo da consciência: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.
- MANNRICH, Linguagem Matemática, Física e Ensino: como licenciandos discutem essa relação. 258 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis, SC, 2014.
- MORENO, A. R. Wittgenstein: através das imagens. Editora da Unicamp, Campinas-SP, 1993.
- PIETROCOLA, M. A Matemática como estruturante do conhecimento físico. Cad. Cat. Ens. Fís., vol. 19: p.89-109. Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, 2002.
- SILVA, P. V, SILVEIRA, M. R. A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática. BoEM, Joinville, v.2. n.3, p.17-34,ago./dez. 2014
- TEIXEIRA Jr., V. P; SILVEIRA, M. R. S ; SILVA, P. V.O ensino e a aprendizagem da matemática: entre o gramatical e o empírico. Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las ciencias, 16(3), pp. DOI, Universodade Distrital Francisco José de Carlos, 2021.
- VARGAS, M. História da matematização da natureza. Instituto de Estudos Avançados, Universidade de São Paulo, v. 10, n. 28, p. 249-276, 1996.
- WITTGESNTEIN, L. Investigações Filosóficas. Editora Nova Cultura Ltda, São Paulo, 1999. (Col. Os Pensadores).



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTERDISCIPLINARES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I E II PRESENTES NO EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Corrêa Leão, Amanda Suellen Sena, ascorrea@ufpa.br¹
Pires, Felipe Quaresma, felipeqp1508@gmail.com²
Ramos Junior, Wallace Coelho, wallace.junior@icen.ufpa.br³

¹Docente da Universidade Federal do Pará

²Discente da Universidade Federal do Pará

³Discente da Universidade Federal do Pará

Resumo: Os estudos do Cálculo Diferencial e Integral I e II revelam-se como fundamentais, não somente para Matemática, mas também para diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, na Física com as taxas de variação (velocidade, aceleração, etc) e na Economia na determinação do lucro máximo. Diante disso, o propósito deste projeto é apresentar estratégias para resoluções de problemas de Cálculo Diferencial e Integral I e II presentes em algumas edições do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), destacando o caráter interdisciplinar da teoria.

Palavras-chave: ENADE, Cálculo Diferencial e Integral, Interdisciplinaridade.

INTRODUÇÃO

Criado em 14 de abril de 2004 o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) é uma prova realizada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) que, em conjunto com a Avaliação de cursos de graduação e a Avaliação institucional, integra o Sistema Nacional de Avaliação Superior (SINAES). Essa peça avaliativa busca mensurar a qualidade de educação dos cursos de ensino superior (graduação) no Estado brasileiro. Realiza-se todos os anos, contudo é organizado em caráter de ciclos de avaliações, ocasionando na realização avaliativa de cada curso de três em três anos. As notas do desempenho dos cursos de graduações variam entre 1 a 5, sendo considerado 1 a 2 insatisfatórias e a partir de 3 satisfatórias de acordo com a expectativa do Ministério da Educação (MEC).

O caderno de questões desse exame para o curso de Licenciatura em Matemática contém 38 itens e é organizado em duas partes: formação geral (10 problemas) e componentes específicos (28 problemas), havendo duas questões discursivas em cada uma das parcelas e as demais objetivas. Além disso, ao final da prova tem-se o questionário de percepção da prova, que busca fornecer dados estatísticos sobre a qualidade e adequação da prova para o estudante.

Desse modo, compreendendo a notável relevância nacional do ENADE, destaca-se a presença contínua do Cálculo Diferencial e Integral nas diferentes edições desse exame voltado para o curso de Licenciatura em Matemática. Isso se justifica pelo fato desse campo matemático englobar uma diversidade de resultados fundamentais que não se limitam apenas a Matemática, mas também a outras esferas de conhecimento, como as ciências da natureza, humanas e sociais. Nessa perspectiva, exibir aplicações de questões de outras áreas ou ramos científicos presentes nas aplicações anteriores desse teste corrobora para ressaltar a importância da interdisciplinaridade nesse âmbito do saber.

1. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E SUA INTERDISCIPLINARIDADE

Importantes avanços da matemática ocorreram no século XVII, com o surgimento de novas áreas de pesquisas, tendo como sujeito principal a edificação do Cálculo Diferencial e Integral, tendo Isaac Newton e Gottfried Leibniz como pioneiros. Segundo Melchior e Soares (2013) esse campo da matemática engloba o estudo dos movimentos e das variações, bem como determinar soluções para problemas de áreas e tangências. A partir da compreensão da aplicabilidade do cálculo em diferentes âmbitos científicos e pela sua grande riqueza teórica matemática, houve um crescimento exponencial de pesquisas voltadas a essa temática, tornando-a um dos pilares fundamentais da matemática contemporânea.

Um dos principais atrativos do cálculo é sua vasta aplicação nas diversas áreas científicas, o que possibilita a sua interdisciplinaridade. De acordo com Favarão e Araújo (2004), “a interdisciplinaridade corresponde a uma consciência da realidade, a um novo modo de pensar, que resulta num ato de troca, de reciprocidade e integração entre diferentes áreas de conhecimento, visando tanto à produção de novos conhecimentos, como a resolução de problemas, de modo global e abrangente”. Desse modo, percebe-se a essencialidade de impulsionar essa característica no ensino do cálculo para combater as dificuldades apresentadas pelos alunos no interpretar de situações-problemas contextualizadas, tal informação é fornecida pelo Relatório de Curso de Matemática (Licenciatura) da Universidade Federal do Pará, campus Belém, redigido pelo INEP em 2015.

2. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENADE

Diante da importância do Cálculo Diferencial e Integral à matemática destaca-se, dentre os componentes específicos do ENADE, sua presença contínua no exame. Por exemplo, a edição de 2011 teve 4 questões da temática, 5 em 2014, 4 em 2017 e em 2021 houve 2 itens. Nesse sentido, aborda-se quatro situações-problemas do Cálculo Diferencial e Integral I e II presentes em algumas das edições citadas anteriormente, buscando evidenciar as aplicações em diferentes contextos e ressaltando seu caráter interdisciplinar.

A questão abaixo refere-se a aplicação do Cálculo Diferencial e Integral presente na economia, onde busca-se determinar o montante do capital de uma empresa, o qual é obtido pelo cálculo de uma determinada integral.

Questão 9 (ENADE/2014) - No contexto de investimento e formação de capital, se $M(t)$ representa o montante do capital de uma empresa existente em cada instante t e $I(t)$ representa a taxa de investimento líquido por um período de tempo, então

$$M = \int_a^b I(t) dt$$

Fornece o montante acumulado no período $a \leq t \leq b$.

Considere que a função $I(t) = t \ln(t)$ definida para $t \geq 1$, representa a taxa de investimento líquido, em milhares de reais, de uma empresa de cosméticos.

Nesse caso, utilizando $\ln(3) \cong 1,1$, o valor do montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ é igual a

- a) R\$ 1 100,00 b) R\$ 2 100,00 c) R\$ 2 950,00 d) R\$ 3 750,00 e) R\$ 4 950,00.

Comentário da resolução: Nota-se que a situação-problema consiste em determinar o valor de uma integral definida. Estamos diante de uma integral, na qual no integrando contém um produto de funções, e observarmos que ao multiplicar a derivada de um dos fatores ($\ln(t)$) por uma primitiva do outro fator (t) obtemos uma nova função na qual possui primitiva imediata. Desse modo, podemos utilizar o método de integração por partes para solucionarmos o problema, o qual afirma que se f e g são funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

É comum fazermos a substituição $u = f(x)$ e $v = g(x)$, obtendo a fórmula

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Ao lembrar disso, o aluno estará apto para resolução da situação-problema e poderá determinar o montante M acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ de da empresa de cosméticos, que consiste em resolver a integral

$$\int_1^3 t \ln(t) dt.$$

Desse modo, tomando $f(t) = t$ e $g(t) = \ln(t)$ na fórmula de integração por partes e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, o discente encontrará

$$\int_1^3 t \ln(t) dt = 2,95.$$

Como a taxa de investimento é medida em milhares, resulta que o montante M acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ da empresa de cosméticos foi de R\$ 2.950,00.

O item abaixo presente no ENADE 2017 trata-se de área de regiões limitadas, assunto de geometria que pode ser respondida com auxílio do Cálculo Diferencial e Integral.

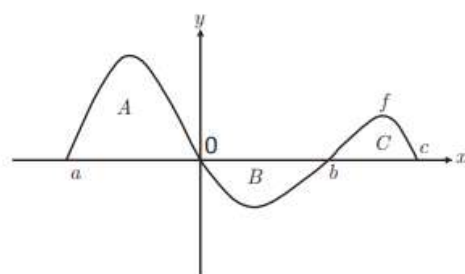
Questão 9 (ENADE 2017) Considere $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $b \in (a, c)$ conforme ilustra o gráfico abaixo.

Represente por:

A a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [a, 0]\}$;

B a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [0, b]\}$;

C a área da região limitada pela reta de equação $y = 0$ e pela curva $\{(x, f(x)); x \in [b, c]\}$;



Sabendo que $A = 5$, $B = 3$ e $C = 2$, avalie-se as afirmações a seguir.

I. $\int_a^0 f(x) dx = 5$

II. $\int_0^b f(x) dx = 3$

III. $\int_a^c f(x) dx = 4$

É correto o que se afirma em

- a) I, apenas b) II, apenas c) I e II, apenas d) II e III, apenas e) I, II e III.

Comentário da resolução: Veja que o item aborda sobre o cálculo de áreas de regiões limitadas. Lembramos que a área $A(x)$ de uma região que está compreendida em um intervalo fechado $[a, b]$ é dado por

$$A(x) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Ou seja, quando a função assume valores não-negativos, a área é dada por

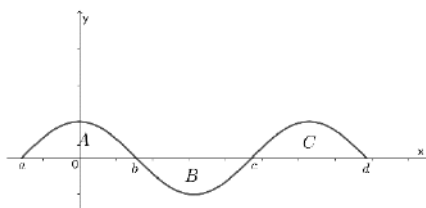
$$A(x) = \int_a^b f(x) dx$$

e quando a função assume valores negativos, a área é obtida por

$$A(x) = - \int_a^b f(x) dx.$$

No caso em que a função alterna de sinal dentro de um intervalo, como na figura abaixo

Figura 1 – Regiões de integração



Fonte: Software Geogebra.

podemos determinar a área $A(x)$ da seguinte forma

$$\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx = \int_a^d |f(x)|dx.$$

Logo, no enunciado da questão acima, vemos que a função é não negativa no intervalo $[a, 0]$, de onde conclui-se que o item I é verdadeiro. Para o intervalo $[0, b]$ a função é negativa, e assim, a área terá como resultado o valor oposto da integral, o que caracteriza o item II como falsa. Com argumento análogo para o item I, conclui-se que III é verdadeiro. Portanto a alternativa correta é dado pelo item c).

A próxima questão está presente no contexto da economia, onde analistas financeiros recorrem a modelagem matemática para fazer previsões de arrecadações.

Questão 17 (ENADE 2011) Os analistas financeiros de uma empresa chegaram a um modelo matemático que permite calcular a arrecadação mensal da empresa ao longo de 24 meses, por meio da função

$$A(x) = \frac{x^3}{3} - 11x^2 + 117x + 124,$$

Em que $0 \leq x \leq 24$ é o tempo, em meses, e a arrecadação $A(x)$ é dada em milhões de reais.

A arrecadação da empresa começou a decrescer e, depois, retomou o crescimento, respectivamente, a partir dos meses

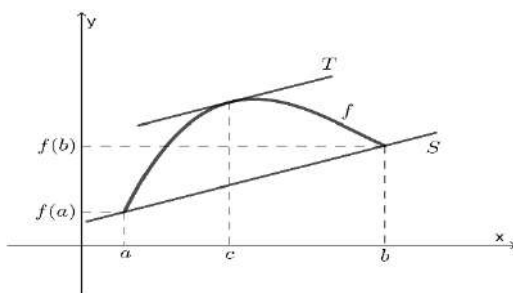
- a) $x = 0$ e $x = 11$ b) $x = 4$ e $x = 7$ c) $x = 8$ e $x = 16$ d) $x = 9$ e $x = 13$ e) $x = 11$ e $x = 22$.

Comentário da resolução: Observa-se que a questão trata-se de intervalos de crescimentos e decrescimentos, um dos principais atrativos que o estudo de derivadas oferecem. Este tipo de problema pode ser resolvido ao derivar-se a função $A(x)$ e estudar o sinal da função resultante, $A'(x)$. No intervalo em que a função $A'(x)$ é positiva, $A(x)$ tem um comportamento de crescimento, enquanto que no intervalo em que $A'(x)$ é negativa a função $A(x)$ é decrescente. Ao realizar os devidos procedimentos para o cálculo da derivada, o discente encontrará 9 e 13 como raízes de $A'(x)$ e, ao identificar que a concavidade da função $A'(x)$ é voltada para cima, concluirá que no intervalo $(-\infty, 9)$ a função $A(x)$ é crescente, em $(9, 13)$ decresce, voltando a ter crescimento em $(9, +\infty)$. Portanto, a alternativa correta para a questão acima é a letra d).

O item adiante apresenta uma aplicação de um importante teorema matemático, o Teorema do Valor Médio (TVM). Ele afirma que se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua em seu domínio derivável em (a, b) , então existirá $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Figura 2 – Interpretação geométrica do TVM



Fonte: Software Geogebra

Questão 16 (ENADE 2014) Considere uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em todo o seu domínio, com $f'(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $f(1) = 1$, então, pelo Teorema do Valor Médio, o valor máximo de $f(3)$ é igual a

- a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11.

Comentário da resolução: Ao verificar que o enunciado da questão respeita as hipóteses do Teorema do Valor Médio e perceber que sabemos o valor de $f(1)$ e queremos algo que nos forneça informações sobre $f(3)$, o discente poderá utilizar-se do TVM para o intervalo $[1, 3]$. Dessa forma, existe $c \in (1, 3)$ tal que

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c).$$

A outra hipótese do enunciado diz que $f'(x) \leq x$, para todo x do domínio. Em particular,

$$\frac{f(3) - 1}{2} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) \leq c \leq 3.$$

Desse modo, concluímos que o valor máximo que $f(3)$ pode assumir está presente no item c).

CONCLUSÕES

Diante dos fatos, concluiu-se que apesar da presença contínua do Cálculo Diferencial e Integral ao longo da formação acadêmica, o ENADE evidencia desafios a serem combatidos para resolução de problemas na forma aplicada dos conteúdos ministrados nesse âmbito. Ademais, o uso da interdisciplinaridade como estratégia metodológica é uma possibilidade para contornar tais dificuldades existentes na aprendizagem da disciplina observadas pelo baixo rendimento no teste. Por fim, tem-se como essencial trabalhar com aplicações do Cálculo Diferencial e Integral em outras áreas do conhecimento ao longo da formação acadêmica, visando uma aprendizagem mais ampla da teoria.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2011): Matemática. SINAES, Brasília: 2011.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014): Matemática. SINAES, Brasília: 2014.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014): Relatório de Curso de Matemática (Licenciatura) – Universidade Federal do Pará. SINAES, Brasília: 2015.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2017): Matemática. SINAES, Brasília: 2017.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). [S. l.]. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enade>. Acesso em: 28/02/2022.

FAVARÃO, N. R. L.; ARAÚJO, C. S. A. Importância da Interdisciplinaridade e no Ensino Superior. EDUCERE. Umuarama, v.4, n.2, p.103-115, jul./dez., 2004. Disponível em: <https://adventista.edu.br/imagens/asped/files/import%C3%Aancia%20da%20interdisciplinaridade%20no%20ensino%20superior.pdf>. Acesso em: 28/02/2022.

MELCHORS, Angeline. História do cálculo diferencial e integral. Maiêutica-Ensino de Física e Matemática, v. 1, n. 1, 2013. Disponível em: http://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/556. Acesso em: 28/02/2022.



A LEI DE SNELL E O PRINCÍPIO DE FERMAT

Boaventura Carneiro, Anita, anita.boaventura@hotmail.com¹
Batisaco Lírio Nunes, Davi, davi0512bl@gmail.com²
Maria Dias de Ávila Rodrigues, Luciana, luavila@unb.br³

¹Estudante de Matemática Licenciatura na Universidade de Brasília
²Estudante de Matemática Licenciatura na Universidade de Brasília
³Professora Doutora da Universidade de Brasília
^{1,2,3} Bolsistas PET/MEC/FNDE

Resumo: Neste trabalho, estudamos o Princípio de Fermat que diz que a luz viaja de um ponto ao outro buscando o caminho que leva menos tempo. Faremos duas demonstrações desse princípio, uma utilizando noções de Cálculo e outra utilizando a Lei de Snell. E seguida mostraremos a Lei de Snell, a segunda lei da refração, utilizando o Princípio de Huygens.

Palavras-chave: Lei de Snell, Princípio de Fermat

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos os resultados da pesquisa de iniciação científica realizada no PET Matemática da Universidade de Brasília - UnB.

Ao longo da história, muitos cientistas e filósofos tentaram entender o fenômeno da refração, mas sem sucesso. Em 1621, o cientista holandês Snell se tornou o primeiro a encontrar a Lei da Refração e, embora sua descoberta não tenha se tornado pública em vida, o fenômeno leva seu nome.

A Lei de Snell diz que a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é constante, ou seja, temos que $\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta_1)} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta_2)} = \frac{v_1}{v_2}$, sendo α_1 e α_2 os ângulos de incidência, β_1 e β_2 os ângulos de refração, v_1 a velocidade do feixe no meio 1 e v_2 a velocidade do feixe no meio 2. Esta função pode ser demonstrada a partir do princípio de Huygens e pode ser encontrada ao estudar e demonstrar o princípio de Fermat, que nos diz que a luz viaja de um ponto A, até um ponto B, pelo caminho que leva menos tempo.

A seguir, estudaremos a demonstração do Princípio de Fermat e da Lei de Snell.

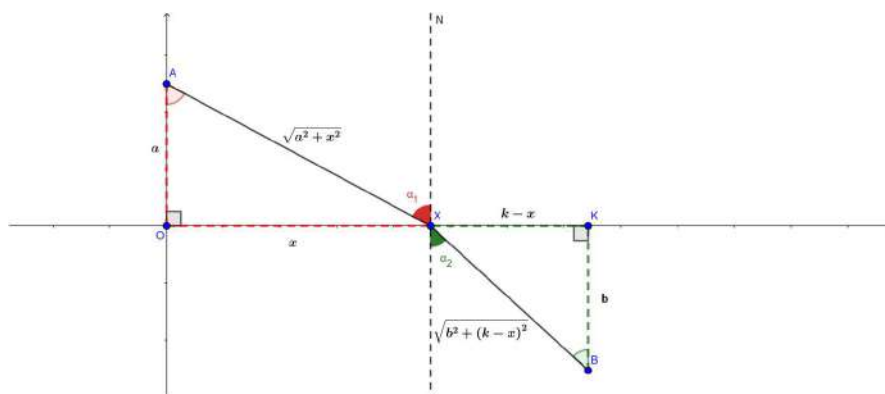
1. PRINCÍPIO DE FERMAT

Durante a busca por uma explicação da lei da refração da luz, o cientista francês Fermat propôs um princípio que transformava este problema óptico em um problema de extremos. O princípio nos diz que a luz viaja de um ponto ao outro buscando o caminho que leva menos tempo. Isso nos leva a formulação e solução de um problema de mínimo, cuja resolução e otimização resulta na demonstração da Lei de Snell, validando a segunda lei da refração. Mais especificamente, devemos encontrar o mínimo da função

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(k-x)^2}}{v_2},$$

onde T representa o tempo que o feixe de luz leva para ir de A até B . Descreveremos a seguir como obtivemos T .

Figura 1: Modelagem para a função T



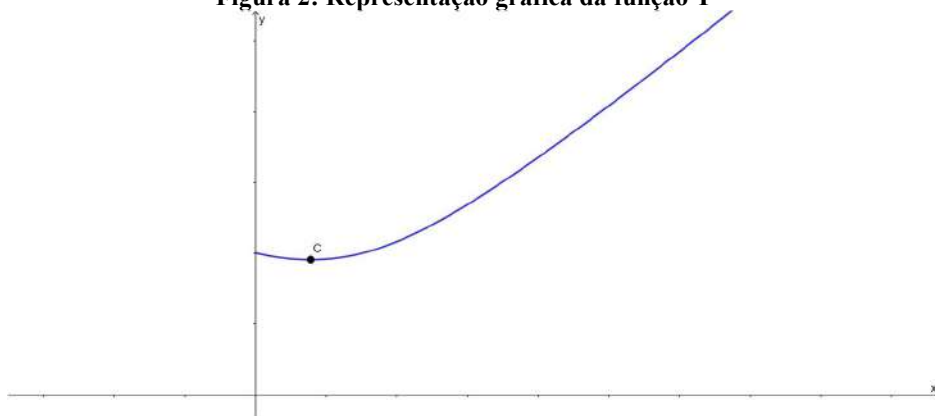
Considere que A e B sejam pontos arbitrários que estão nos meios 1 e 2, respectivamente. Os meios são limitados pelo eixo x e a luz viaja neles com velocidade v_1 e v_2 , nessa ordem. O feixe de luz AXB encontra o limitante no ponto X e refrata. Sejam α_1 e α_2 são os ângulos de incidência e refração, respectivamente.

Se A está localizado em $(0, a)$, B em $(0, b)$ e chamarmos de x o tamanho de $|OX|$, conseguimos montar os triângulos retângulos destacados na Figura 1 e encontrar suas hipotenusas.

Para encontrar o tempo que a luz leva para viajar por AXB , vamos separar AXB em duas partes, AX e XB e encontrar quanto tempo a luz leva para percorrer essas partes. Para isso, basta dividir $\sqrt{a^2 + x^2}$ por v_1 obtemos o tempo que a luz leva para percorrer AX . Seguindo a mesma ideia, $\frac{\sqrt{b^2 + (k-x)^2}}{v_2}$ retorna o tempo que a luz leva para viajar por XB e a soma disso é o tempo total gasto pela luz para percorrer AXB , ou seja, $T(x)$.

Mas estamos de fato buscando um mínimo? O que nos garante que T realmente possui um valor mínimo? Para responder essas perguntas, considere a imagem:

Figura 2: Representação gráfica da função T



Esse é o gráfico de T e observamos que T tem um mínimo global, que é o ponto marcado como c . Queremos encontrar c . Então:

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{k-x}{\sqrt{b^2 + (k-x)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{k-x}{\sqrt{b^2 + (k-x)^2}} = 0$$

Observe que: $x = |OX|$, $\sqrt{a^2 + x^2} = |AX|$, $k-x = |XK|$, $\sqrt{b^2 + (k-x)^2} = |XB|$. Substituindo, temos que:

$$\frac{|OX|}{v_1 \cdot |AX|} - \frac{|XK|}{v_2 \cdot |XB|} = 0$$

Note que:

$$\frac{|OX|}{|AX|} = \sin(\alpha_1) \text{ e } \frac{|XK|}{|XB|} = \sin(\alpha_2)$$

Portanto:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} - \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2} = 0 \Rightarrow \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2}$$

Ou seja, o ponto que minimiza o tempo que a luz leva para viajar de A até B é o ponto em que a Lei de Snell é válida.

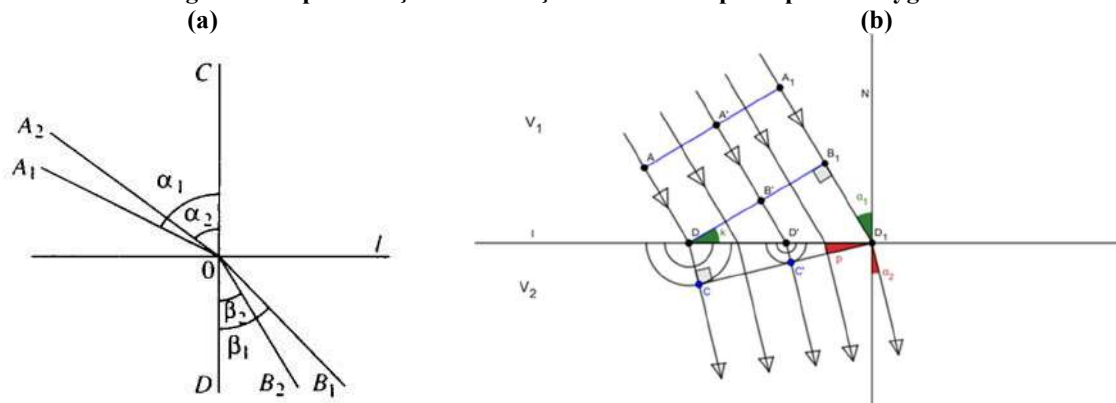
2.LEI DE SNELL

Queremos agora demonstrar a Lei de Snell a partir do princípio de Huygens. Mas antes precisamos definir Frente de Onda. Uma frente de onda é a região do espaço que reúne todos os pontos da onda que estão no mesmo estado de vibração. De todas as suas propriedades enunciaremos duas. A primeira diz que os feixes de luz são perpendiculares à frente de onda. A segunda é o chamado princípio de Huygens que afirma que cada ponto de uma frente de onda se torna uma fonte secundária e, com isso, obtemos uma família de frentes de onda. Sabe-se também que a nova frente de onda é a superfície tangente a todas as frentes de onda secundárias.

Agora vamos usar o Princípio de Huygens para deduzir a Lei de Snell.

Inicialmente, vamos considerar raios paralelos de luz vindos de cima que se propagam através de dois meios homogêneos e vamos supor que l é um plano horizontal que divide esses dois meios. Denotaremos a velocidade no meio superior como v_1 e a velocidade no meio inferior como v_2 .

Figura 3: Representação da Refração da Luz e do princípio de Huygens



Na figura 3b, considere α_1 o ângulo que o feixe de luz forma com a reta normal N , ele é chamado ângulo de incidência e α_2 , o ângulo formado entre o feixe refratado e N , é chamado ângulo de refração.

Vamos analisar a frente de onda $A_1A'A$. Ela está se movendo com velocidade v_1 e no instante t ela alcança a fronteira l no ponto D . A frente de onda continua a se mover e alcança o ponto D_1 no instante

$$t_1 = t + \frac{|B_1D_1|}{v_1} = t + \frac{|DD_1| \sin \alpha_1}{v_1}.$$

Para chegar nesse resultado, usamos a fórmula da velocidade: $\Delta v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, então

$$\Delta v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow t_1 - t = \frac{\Delta S}{v_1} \Rightarrow t_1 = t + \frac{\Delta S}{v_1}.$$

Também podemos observar que no intervalo $t_1 - t$, o deslocamento é $\Delta S = |B_1D_1|$. Logo, encontramos a primeira parte, vamos chamar de equação (1)

$$t_1 = t + \frac{|B_1D_1|}{v_1}$$

Para a segunda parte da fórmula, vamos considerar o triângulo DB_1D_1 . Sabemos que o ângulo de incidência é α_1 , por isso temos que o ângulo B_1D_1D é igual a $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$. Então, $k = \alpha_1$. Agora podemos analisar o $\sin \alpha_1$. Pela figura 3b,

temos $\sin \alpha_1 = \frac{|B_1D_1|}{|DD_1|} \Rightarrow |B_1D_1| = |DD_1| \sin \alpha_1$. Substituindo na equação (1), temos a equação (2)

$$t_1 = t + \frac{|DD_1| \sin \alpha_1}{v_1}.$$

Essa frente de onda alcança o ponto D' , que é um ponto intermediário entre D e D' , no instante t' . Analogamente ao processo realizado para encontrar a equação (2), obtemos $t' = t + \frac{|DD'| \sin \alpha_1}{v_1}$.

Verificaremos agora o que acontece no segundo meio. Pelo princípio de Huygens, os pontos D e D' são fontes de luz. Vamos analisar as ondas esféricas originadas nesses pontos. No instante t_1 , a onda com origem em D tem raio r_1 . Se observamos a figura 3b, vemos que $r_1 = |CD|$. Sabendo que $\Delta v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta S = \Delta v \Delta t$ e considerando $\Delta v = v_2, \Delta t = t_1 - t$ e $\Delta S = |CD| = r_1$ temos

$$r_1 = v_2 (t_1 - t).$$

Substituindo $t_1 - t$, encontramos

$$r_1 = v_2 (t_1 - t) = |DD_1| \sin(\alpha_1) \frac{v_2}{v_1}.$$

No instante t_1 , a onda que tem origem em D' tem raio igual a r' . Para encontrar sua fórmula faremos o mesmo processo, utilizando $\Delta t = t_1 - t'$ e $\Delta S = |C'D'| = r'$. Logo, temos a equação (3)

$$r' = v_2 (t_1 - t').$$

Podemos encontrar uma fórmula para $t_1 - t'$.

$$t_1 - t' = \frac{(|DD_1| - |DD'|) \sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{|D'D_1| \sin(\alpha_1)}{v_1}.$$

Substituindo na equação (3), temos

$$r' = v_2 (t_1 - t') = v_2 \frac{|D'D_1| \sin(\alpha_1)}{v_1} \Rightarrow r' = |D'D_1| \sin(\alpha_1) \frac{v_2}{v_1}.$$

Agora, vamos observar os triângulos DD_1C e $D'D_1C'$. Pela figura 3b, concluímos que os ângulos DD_1C e $D'D_1C'$ são iguais a α_2 . A partir disso, podemos verificar que as tangentes D_1C e D_1C' das esferas coincidem. Isso significa que todas as ondas secundárias são tangentes à linha CD_1 no instante t_1 , isso é uma das partes do Princípio de Huygens. Essa linha forma um ângulo α_2 com o plano l .

Para concluir que $p = \alpha_2$, vamos chamar o ângulo entre eles de x . Note que $x + \alpha_2 = \pi$, pela propriedade citada acima. Note que $p + x = \pi$, logo $p = \alpha_2$.

Com os triângulos DD_1C e $D'D_1C'$ conseguimos encontrar duas fórmulas para $\sin(\alpha_2)$.

$$\sin(\alpha_2) = \frac{|CD|}{|DD_1|} = \frac{r_1}{|DD_1|} \text{ e } \sin(\alpha_2) = \frac{|C'D'|}{|D'D_1|} = \frac{r'}{|D'D_1|}.$$

Voltando para as equações de r' e r_1 conseguimos isolar $\sin(\alpha_1) \frac{v_2}{v_1}$:

$$\frac{r'}{|D'D_1|} = \sin(\alpha_1) \frac{v_2}{v_1} \text{ e } \frac{r_1}{|DD_1|} = \sin(\alpha_1) \frac{v_2}{v_1}.$$

Igualando as duas equações, temos

$$\sin(\alpha_2) = \sin(\alpha_1) \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2},$$

Obtendo, assim, a Lei de Snell.

CONCLUSÃO

Vemos que apesar do objetivo inicial do Princípio de Fermat ter sido explicar a lei de Snell, ele se sustenta na 2ª lei da refração. Além disso, a Lei de Snell, demonstrada a partir das ideias de Huygens e resultados simples da física traz validade para o princípio de Fermat.

REFERÊNCIAS

V. M. TIKHOMIROV- Stories About Maxima and Minima-American Mathematical Society, Mathematical World Volume 1, p. 19-26, 1991;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Frente_de_onda

<https://courses.lumenlearning.com/boundless-physics/chapter/diffraction/>

BRITANNICA, The Editors of Encyclopaedia; Snell's Law; Encyclopedia Britannica; 29 de abril de 2021, <https://www.britannica.com/science/Snells-law>. Acesso em: 23 de julho de 2021



COMPARAÇÃO ENTRE UM MODELO ARIMA E UM MODELO ARIMA-RNA NA MODELAGEM DO FENÔMENO DA PROPAGAÇÃO ELETROMAGNÉTICA APLICADA EM TELECOMUNICAÇÕES

de C. Barbosa, Breno, brenocastro2607@gmail.com¹
L. Fraiha Lopes, Ramz, ramzfraiha@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará (UFPA) / Salinópolis

²Universidade Federal do Pará (UFPA) / Salinópolis

Resumo: Este trabalho mostra a comparação entre um modelo ARIMA e um modelo ARIMA-RNA aplicado a um problema de modelagem da propagação eletromagnética em telecomunicações. Estudou-se o comportamento de um sinal da faixa de 850 MHz reservado a serviços de telefonia celular dentro de um bairro no centro de Salinópolis, Pará, Brasil. Os resultados mostram que, no ambiente restrito de um bairro com condições topográficas e ambientais homogêneas o modelo ARIMA traz um melhor custo-benefício de aplicação, considerando o critério de privilegiar um modelo mais simples a um mais complexo para modelar um determinado fenômeno.

Palavras-chave: Séries Temporais, Modelos ARIMA, Telecomunicações

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a comparação entre dois modelos autorregressivos, sendo um linear e um misto. O modelo puramente linear é do tipo ARIMA (Autorregressivo Integrado de Médias Móveis – *Autoregressive Integrated Moving Average*) e é mostrado em seção específica. Este tipo de modelo é conhecido também como modelo de Box-Jenkins (BOX-JENKINS, 2008), juntamente com outros modelos similares. O modelo híbrido é uma combinação do modelo ARIMA com uma rede neural artificial (RNA). Combinações de modelos ARIMA com outros métodos se justificam quando há a intenção de aproveitar as qualidades de modelagem linear dos modelos ARIMA e as qualidades de modelagem de não-linearidades de outras metodologias. Alguns trabalhos que abordaram o uso de modelos híbridos ARIMA-RNA são (ZHANG, 2003), (WEI, 2016), (FRAIHA LOPES, 2020) e (FRAIHA LOPES, 2020).

Serviços de telecomunicação ainda configuram um dos principais gargalos dentro do município de Salinópolis. Cobertura de sinal de telefonia celular em determinadas operadoras ainda é bastante deficitário. Desta forma há oportunidade e necessidade para estudar, modelar e propor soluções de melhorias para este serviço dentro do município.

Este trabalho analisou o comportamento de sinal de uma operadora que fornece um bom serviço de cobertura. Esta análise foi realizada através da métrica de intensidade de sinal recebido, como função da distância ao transmissor (Tx). Seja, portanto, x a distância em relação a Tx . A intensidade de sinal recebido na posição do receptor (Rx) pode ser chamada de I_{Rx} e, então

$$I_{Rx} = f(x). \quad (1)$$

A variável I_s é, basicamente, o sinal que se recebe em aparelhos celulares, ilustrados simploriamente pelas “barrinhas de sinal”. Naturalmente, em uma avaliação criteriosa, há que se utilizar aparelhos e/ou *softwares* específicos

para registrar a intensidade de sinal recebido em valores numéricos, preferencialmente com uma série de amostras a cada ponto medido.

Este trabalho, em conjunto com (BARBOSA, 2021), mostram os primeiros resultados do estudo da cobertura de sinal de telefonia celular no município de Salinópolis. O trabalho (BARBOSA, 2021) mostrou os resultados somente do modelo híbrido aplicado a este mesmo cenário. Contudo, uma comparação entre os modelos linear e híbrido é válida neste contexto a título de verificação da hipótese de que um modelo mais simples (com menor capacidade de modelar o fenômeno como um todo) é capaz de trazer bons resultados se aplicado a um cenário reduzido. Quando se está a modelar um fenômeno qualquer, busca-se sempre uma boa relação de compromisso entre precisão do modelo e custo de implementação (custo computacional, custo financeiro para aquisição de dados ou de *hardware*).

As próximas seções deste trabalho versam sobre a coleta e o tratamento dos dados, os modelos aqui comparados o resultado das comparações e as conclusões deste estudo.

2. MODELO ARIMA E ARIMA-RNA

Modelos do tipo ARIMA (BOX-JENKINS, 2008) são modelos baseados na teoria de séries temporais e também são conhecidos como (um dos) modelos de Box-Jenkins. Sua principal característica é a dependência que um termo atual, i.e., no tempo t tem em relação a termos passados 1 até $t - 1$. A sigla ARIMA corresponde a “autorregressivo integrado de médias móveis”. O termo “integrado” refere-se ao que, em séries temporais, se chama de integração. Uma série não estacionária (BOX-JENKINS, 2008) pode ser diferenciada (BOX-JENKINS, 2008) e então modelada por um modelo ARMA (autorregressivo de médias móveis). Em seguida, ao resultado do modelo ARMA é “adicionado” à(s) diferença(s) inicialmente realizada(s), obtendo um modelo ARIMA. Por exemplo, um modelo ARMA é da forma

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (2)$$

com \tilde{Z}_j , $j = 1, 2, \dots, t - p$ sendo as estimativas dos termos da série Z até o tempo $t - p$ e a_k , $k = 1, 2, \dots, t - q$ a estimativa dos ruídos (informações aleatórias incapazes de serem modeladas por modelos ARIMA e afins) até o tempo $t - q$. Se diz que este é um modelo $ARMA(p, q)$. No caso de um modelo ARIMA, adiciona-se a quantidade de diferenças (BOX-JENKINS, 2008) tomadas na série original, antes da etapa de ajuste ao modelo. Um modelo ARIMA, portanto, é descrito como tendo ordem (p, d, q) , com d sendo a número indicativo de quantas diferenças na série original foram tomadas antes de partir ao ajuste de um modelo ARMA.

Isto posto, nota-se que modelos ARIMA conseguem ajustar fenômenos lineares, ou com tendência linear (BOX-JENKINS, 2008) com todas as vantagens de terem, analiticamente demonstradas, fórmulas para a obtenção de valores de autocorrelação e autocorrelação parcial. Vantagens como essas são desejadas no processo de modelagem, pois conferem robustez ao modelo e dão salvaguarda aos resultados encontrados. Para aproveitar estas características dos modelos ARIMA em fenômenos não-lineares opta-se por uma hibridização de modelos ARIMA e outras metodologias de ajuste, como as redes neurais, os algoritmos genéticos, dentre outras. Ainda que alguma destas outras metodologias não tenham as mesmas qualidades estatísticas dos modelos ARIMA, o fato de auxiliarem na modelagem de fenômenos não lineares são suficientes para a escolha como formas de hibridizar um modelo ARIMA. Neste trabalho, escolheu-se uma rede neural artificial. A arquitetura da rede para este trabalho é exibida na seção de resultados.

Essencialmente, a RNA tem a função de modelar os resíduos do modelo ARIMA, i.e., a diferença entre os dados originais e os dados estimados. Sejam então Z a série correspondente a um conjunto de dados original e \tilde{Z} a série correspondente à estimativa de Z . Nos resíduos estarão tanto informações ditas como ruídos, quanto informações não-lineares, mas que ainda podem ser modeladas por outra metodologia. Seja então L a parte linear dos dados analisados e N a parte não linear destes dados. Diz-se que

$$Z = L + N. \quad (3)$$

Segundo (3), o modelo ARIMA é capaz de ajustar L e a RNA é capaz de ajustar N . Nota-se, também, que $N = Z - L$, o que equivale aos resíduos das estimativas \tilde{Z} de Z .

3. COLETA E TRATAMENTO DE DADOS

3.1. Coleta de Dados

A coleta de dados para este trabalho se deu em uma única campanha de medições realizada em um bairro na região central de Salinópolis, conforme mostrado na Figura 1.

FIGURA 1 – Cenário de medições. Ruas em azul foram medidas para este trabalho e ruas em vermelho delimitam a área total da primeira etapa de medições (BARBOSA, 2021), (GOOGLE EARTH, 2021).



Foi utilizado, como Rx , um aparelho celular Samsung J5 Prime[®] com a versão mais recente do sistema operacional Android[®] disponível para este aparelho. O aplicativo Network Cell Info[®] [8] permitiu a captura dos dados e gerou um arquivo em formato .csv para posterior manipulação e cálculos com o uso do software MATLAB[®] (MATLAB, 2017). Foram coletados dados de I_{Rx} de uma operadora.

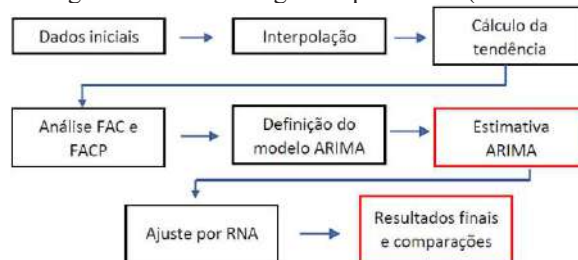
A campanha de medições foi realizada em um dia com tempo claro, com o Rx a aproximadamente 1,5 m de altura em relação ao solo e com tempo de medição de 2 minutos em todos os pontos medidos. Três ruas principais do bairro foram as principais localidades dos pontos de medição. Cada uma das ruas compreende um conjunto de dados. Pode-se chamá-los de DO_1 , DO_2 e DO_3 respectivamente. Cada um dos pontos medidos estava a uma distância aproximada de 50 m do outro. Isto é válido em todos os conjuntos DO_j , $j = 1,2,3$. Por exemplo, no conjunto DO_1 foram medidos 10 pontos, de modo que $DO_1 = \{do_1, do_2, do_3, \dots, do_{10}\}$. Procedimento análogo pode ser aplicado e DO_2 e DO_3 . A terminologia “do” refere-se aos pontos originais, antes de qualquer tratamento dos dados.

3.2. Tratamento dos Dados

A primeira etapa do tratamento dos dados consiste em organizar os pontos medidos com base na distância crescente a Tx . Ou seja, o ponto mais próximo a Tx torna-se o primeiro ponto de cada um dos conjuntos originais DO_j , $j = 1,2,3$, originando os conjuntos D_j , $j = 1,2,3$. Em outras palavras, tem-se que, por exemplo, $D_1 = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_{10}\}$, com d_1 sendo o ponto do_k , $k = 1, \dots, 10$ mais próximo a Tx . Esta etapa é necessária para que a representação de $I_s = f(x)$ indique uma função com tendência decrescente, o que representa melhor o fenômeno da propagação eletromagnética (decrece à medida que a distância de Rx a Tx aumenta).

As etapas de tratamento e cálculos de todo o estudo é mostrada na Figura 2.

FIGURA 2 – Fluxograma da metodologia. Inspirado em (FRAIHA LOPES, 2020)



Destaca-se que a comparação mostrada neste trabalho é dos dados das etapas indicadas pelos retângulos em vermelho. Os resultados do modelo híbrido como alternativa a modelos usuais da literatura de propagação eletromagnética já foram mostrados em [4]. Aqui, reforça-se, a intenção é comparar um modelo mais complexo e robusto com um modelo mais simples em um ambiente mais restrito e homogêneo.

Os conjuntos D_j são considerados os conjuntos de dados brutos. Após o ordenamento em ordem crescente de distância a Tx , há uma etapa de interpolação. A interpolação adotada é uma interpolação cúbica por partes com preservação de forma (SPPCI – *shape-preserving piecewise cubic interpolation*). Optou-se por uma interpolação para acrescer a quantidade de amostras dos conjuntos D_j para 200 amostras. Isto uniformiza a quantidade de elementos (amostras) em cada conjunto de dados (série) e facilita a etapa de modelagem linear com o modelo ARIMA. Os cálculos, e análises, de tendência da série e das funções de autocorrelação parcial (FACP) e autocorrelação (FAC) são passos usuais para um ajuste básico de modelos ARIMA (BOX-JENKINS, 2008). Em seguida, a partir dos resíduos das estimativas ARIMA, é realizado o ajuste com a RNA e tem-se o modelo híbrido.

4. RESULTADOS

4.1. Modelo ARIMA

O modelo ARIMA ajustado para os dados deste trabalho foi um modelo ARIMA (4,0,0) mostrado na equação (4).

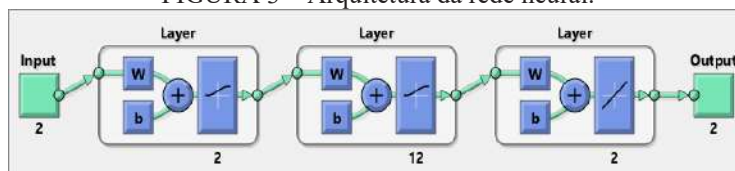
$$Z_h = \phi_1 Z_{h-1} + \phi_2 Z_{h-2} + \phi_3 Z_{h-3} + \phi_4 Z_{h-3} + c, \tag{4}$$

com $\phi_1 = 3,35$, $\phi_2 = -4,13$, $\phi_3 = 2,18$, $\phi_4 = -0,41$ e $c = 0$.

4.2. Modelo Híbrido

O modelo híbrido é composto do modelo exposto em (4) e de uma rede neural do tipo *feed-forward* conforme exposta na Figura 3.

FIGURA 3 – Arquitetura da rede neural.



4.3. Comparações

Os resultados das comparações são visualizados nas Figuras 4a, 4b e 4c. Na Tabela 1 são mostrados os resultados das comparações considerando como métrica de comparação a raiz do erro quadrático médio (ERMS) em relação aos dados coletados.

FIGURA 4a – Conjunto de treino (conjunto 1)

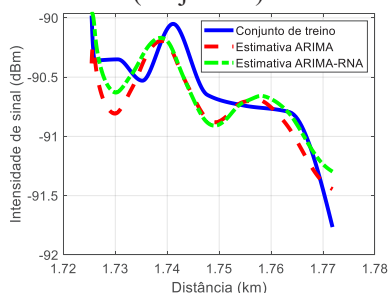


FIGURA 4b – Primeiro conjunto de comparação (conjunto 2)

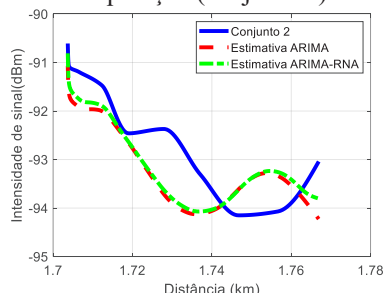


FIGURA 4c – Segundo conjunto de comparação (conjunto 3)

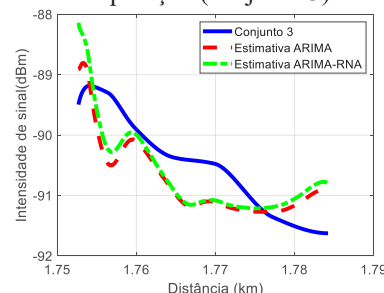


Tabela 1. Erros RMS do modelo linear e do modelo híbrido.

Conjunto de dados	ERMS ARIMA	ERMS ARTIMA-RNA
Conjunto 1 (treino)	0.2119	0.1880
Conjunto 2	0.7244	0.6496
Conjunto 3	0.5561	0.6163

5. CONCLUSÕES

Dos resultados expostos, conclui-se que ambos os modelos atingem resultados semelhantes. Logo, o modelo mais simples pode ser aplicado sem prejuízo de eficiência no cenário considerado. Outro ponto importante a ser destacado é a baixa amplitude dos valores dos dados coletados. Ainda que a perspectiva dos gráficos indique uma tendência decrescente notável, a amplitude dos valores diz o contrário. Isto pode ter contribuído para os resultados praticamente iguais entre o modelo ARIMA e o ARIMA-RNA. Trabalhos como (FRAIHA LOPES, 2020) e (FRAIHA LOPES, 2020) já mostram que em situações menos convenientes, o modelo ARIMA já não produz resultados satisfatórios, evidenciando um complemento a partir de outra metodologia, como as RNAs.

6. REFERÊNCIAS

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 4th ed. New Jersey, USA: John Wiley and Sons 2008.

ZHANG, G.P.; et. Al. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, 50 (2003), pp. 159-175.

WEI W.; JIANG J.; LIANG, H.; GAO, L.; LIANG B.; HUANG J.; et. al. Application of a Combined Model with Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) and Generalized Regression Neural Network (GRNN) in Forecasting Hepatitis Incidence in Heng County, China. *PLoS ONE*, vol. 11, no. 6, 2016.

FRAIHA LOPES, R. L.; FRAIHA S. G. C.; GOMES, H. S.; LIMA, V. D.; CAVALCANTE G. P. S. Application of Hybrid ARIMA and Artificial Neural Network Modelling for Electromagnetic Propagation: An Alternative to the Least Squares Method and ITU Recommendation P.1546-5 for Amazon Urbanized Cities, *International Journal of Antennas and Propagation*, Hindawi, 2020.

FRAIHA LOPES, R. L.; FRAIHA S. G. C.; GOMES, H. S.; LIMA, V. D.; CAVALCANTE G. P. S. Hybrid ARIMA and Neural Network Modelling Applied to Telecommunications in Urban Environments in the Amazon Region, *International Journal of Antennas and Propagation*, Hindawi, 2020.

BARBOSA, B. de C.; FRAIHA LOPES, R. L. Hybrid ARIMA and Artificial Neural Network Modelling Applied for Electromagnetic Propagation: A Coastal City Scenario. In: 2021 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2021, Fortaleza. 2021 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2021. p. 1.

GOOGLE EARTH PRO, version 7.3.3.778, 2020.

TRANÇAS, NÓS E PROTETORES DE PARA-BRISA

Tomás, Caio, caiotomas6@gmail.com¹

¹Estudante do bacharelado em Matemática da Universidade de Brasília

Resumo: O objetivo deste trabalho é fornecer uma brevíssima introdução à Teoria dos Nós e à Teoria das Tranças através de um problema motivador: "de quais maneiras podemos enrolar um protetor de para-brisa?". Buscamos definir claramente as perguntas que queremos responder e, no processo de respondê-las, introduzimos os conceitos de tranças e nós que se fazem necessários para tal. Definimos também o linking number, invariante topológico muito útil para resolução de certos problemas. Ao final, frisamos a importância da técnica de utilizar invariantes para solucionar problemas.

Palavras-chave: tranças; nós; linking number; invariantes; topologia.

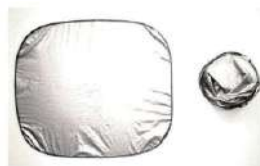
INTRODUÇÃO

O presente trabalho é resultado de um projeto do PIBIC – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – realizado pelo autor de Agosto de 2019 a Setembro de 2020, sob orientação da Prof^a Dr^a Sheila Campos Chagas da Universidade de Brasília. O foco reside em introduzir a teoria matemática que modela as tranças e os nós através de uma situação-problema motivadora. Ao final, discorre-se brevemente acerca de uma técnica que pode ser muito frutífera para lidar com problemas dessa área: considerar invariantes.

1. PROTETORES DE PARA-BRISA

Todos nós, em algum momento das nossas vidas, vimos um protetor de para-brisa como o da figura abaixo.

Figura 1



Analisando mais de perto a estrutura desse protetor, podemos perceber que a estrutura responsável por sua forma é um arame metálico que percorre o perímetro do protetor, formando um *loop* contínuo. É importante notar que esse arame é **torcionalmente rígido**: podemos dobrá-lo ao longo de seu comprimento, mas não torcê-lo sem deformar o protetor. Isso será fundamental para a nossa análise. Ademais, quando aberto, o arame tem a forma

aproximada de uma circunferência, sem torções no arame e, quando fechado, ele deve ser enrolado em várias circunferências/*loops* menores, mas sempre sem provocar torções no arame. Duas coisas nos interessam:

1. Com o protetor na sua posição fechada "normal" (ou "natural"), quantos *loops* faz o arame do bordo e por quê?
2. Quais as outras posições fechadas que o protetor pode assumir, em termos da quantidade de *loops* que o arame do bordo faz?

A primeira pergunta pode parecer, *a priori*, sem sentido. Como assim uma posição "natural"? O motivo dessa terminologia é simples: quando tentamos fechar o protetor, ele parece preferir ser dobrado de uma maneira específica, quase como uma folha de papel que já foi dobrada antes "prefere" ser dobrada novamente da mesma forma. Essa pergunta tem uma resposta experimental: aqueles que já puderam mexer com um protetor desses sabem que o arame faz 3 *loops* na posição "natural". A segunda pergunta nada mais é do que o papel do matemático: como as maneiras de dobrar o protetor se generalizam? Se a posição fechada natural é com 3 *loops*, podemos ter 4, 5, ... *loops* também? Ou apenas uma quantidade ímpar de *loops*? Ou algum outro padrão diferente? Veremos que a resposta é deveras interessante. Para começar a responder as perguntas, precisamos tornar mais preciso o que "Quando fechado, esse arame deve ser enrolado em várias circunferências/*loops* menores, mas sempre sem provocar torções no arame" quer dizer. Para precisar a descrição do arame, estamos pensando nele como uma fita com uma espessura bem pequena (Figura 2). As circunferências sólidas são as circunferências de fronteira da fita e a pontilhada percorre o centro da fita.

Figura 2



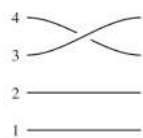
Pensando de maneira informal, o que acontece com o arame do bordo do protetor é parecido com o que acontece com um pedaço de linha quando o enrolamos em um carretel e depois amarramos as pontas da linha (parecido, mas não igual: não podemos quebrar o arame e juntar suas pontas depois). Essa é a imagem que temos em mente, mas com um porém para termos maior generalidade: precisamos permitir que essa linha passe por debaixo dos *loops* que já estiverem no carretel. É neste ponto que as tranças entram em jogo!

2. O BÁSICO DE TRANÇAS E NÓS

2.1 Tranças e como representá-las

As tranças estão presentes em várias situações do cotidiano: em forma de decoração nos cabelos, em cordas e até mesmo pães têm forma trançada. Matematicamente, podemos representar as tranças da seguinte maneira.

Figura 3



Cada fio da trança é representado por um número. Para representar os cruzamentos, usaremos σ_i para dizer que o fio de número i passa por cima do fio de número $i + 1$. Na Figura 3, temos a trança σ_3 . Para representar o cruzamento "inverso", da fita i passando por baixo da fita $i + 1$, usamos σ_i^{-1} . Quando numeramos os fios da

trança, induzimos uma permutação dos números. Dito de outro modo, podemos olhar para a permutação que uma dada trança induz nos números que representam os seus fios. No exemplo da Figura 3, temos a permutação (34), que nada mais significa do que dizer "3 vai para 4 e 4 vai para 3". Como cada cruzamento ocorre apenas entre dois fios, temos que uma trança que induz a permutação (123) pode ser escrita, em termos das permutações, como (13)(12). Utilizaremos isto no que segue.

2.2 Olhando para o protetor usando tranças

A partir da maneira pela qual estamos pensando no protetor e seu arame, podemos ver que o seguinte é verdade:

Lema 1. Com o protetor fechado, o centro da fita é uma trança fechada de um componente, ou seja, um nó.

Supondo então que a nossa trança fechada de um componente (o nosso nó) foi construída a partir de uma trança de m cordas e com n cruzamentos, segue que m e n precisam ter paridades diferentes, pois como nossa trança fechada tem apenas um componente, sua permutação associada tem a forma

$$(i_1 i_2 \cdots i_m) = (i_1 i_m)(i_1 i_{m-1}) \cdots (i_1 i_2),$$

um produto de $m - 1 = n$ transposições, com $i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$ para cada j e $i_j \neq i_k$ se $j \neq k$. Logo, vale:

Lema 2. Se a fita é fechada em m loops e o centro da fita tem n cruzamentos, então m e n têm paridades opostas.

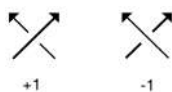
Agora, vamos considerar as duas circunferências de fronteira da fita. Aqui entram em jogo os *links* e o *linking number*! Nessa análise, o que nos interessa é o fato do *linking number* ser um **invariante topológico**.

3. O LINKING NUMBER E AS REPOSTAS ÀS PERGUNTAS

3.2. A definição de *linking number*

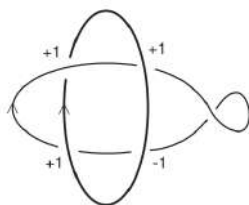
O *linking number*, ou número de enlaçamento, de um *link* K é definido da seguinte forma: sejam M e N dois componentes desse *link*, cada um com uma dada orientação. Em cada cruzamento entre os dois componentes, uma das duas situações ilustradas abaixo ocorre.

Figura 4



Adicionaremos $+ 1$ para o *linking number* se a seta "por cima" está à direita da seta "por baixo" e $- 1$ caso contrário. Podemos chamar tais cruzamentos de "destro" e "canhoto", respectivamente. Pode ser um pouco difícil determinar qual o tipo de cruzamento a partir do diagrama; uma dica é notar que para cruzamentos destros, podemos girar a seta inferior no sentido horário de forma que as duas setas coincidam; analogamente, para cruzamentos canhotos podemos girar a seta inferior no sentido anti-horário de forma que as duas setas coincidam. O *linking number* então nada mais é do que a soma de todos esses ± 1 , dividida por 2. É importante notar que não levamos em conta os auto cruzamentos de M e N para o cálculo do *linking number*. Para exemplificar, vamos calcular o *linking number* do seguinte *link*.

Figura 5



O *linking number* da Figura 4 é igual a $(+ 1 + 1 + 1 - 1)/2 = 1$. Note que se revertermos a orientação de apenas um dos dois componentes, o *linking number* terá o seu sinal trocado (e se trocarmos a orientação de ambos o sinal não muda). Para mostrar que ele é um invariante topológico, precisamos mostrar que se dois *links* são "equivalentes", o *linking number* de ambos é igual. Para tanto, basta mostrar que os três movimentos de Reidemeister, Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , não alteram o *linking number*, pois dizer que dois *links* são equivalentes é dizer que um pode ser obtido do outro a partir de uma sequência finita de movimentos de Reidemeister, ilustrados abaixo.

Figura 6

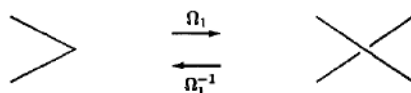
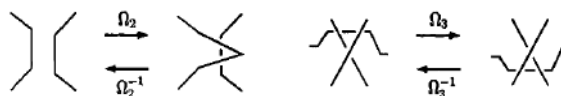


Figura 7



Podemos ver que Ω_1 apenas introduz auto cruzamentos, então claramente ele não altera o *linking number*. Para os outros dois movimentos, vemos que eles não alteram o *linking number* observando as seguintes figuras.

Figura 8

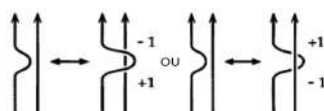
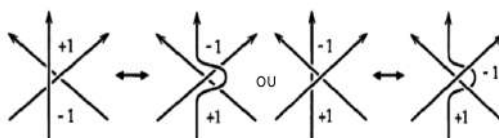


Figura 9



Com isso, temos que o *linking number*, da forma que definimos, é um invariante (topológico) de *links* orientados (se quiséssemos, poderíamos definir o *linking number* como o módulo da soma e, dessa maneira, ele seria um invariante de *links* não orientados).

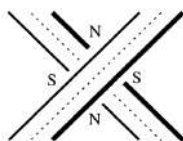
3.1. Olhando para o protetor usando o *linking number*

Feita a devida introdução ao *linking number*, vemos sem muita dificuldade que, com o protetor aberto, o *linking number* das circunferências de fronteira é 0. Como esse valor não muda quando dobramos o protetor (justamente pelo fato de esse número ser um invariante topológico), segue que

Lema 3. Com o protetor fechado, o *linking number* das circunferências de fronteira é 0.

Pensemos então no protetor fechado. Como a fita não tem torções, os únicos cruzamentos entre as circunferências de fronteira ocorrem próximos dos n auto cruzamentos do centro (veja figura abaixo).

Figura 10



O centro da fita já serviu seu propósito: podemos ignorá-lo agora; no lugar dos n auto cruzamentos do centro, há 4 novos cruzamentos envolvendo as circunferências de fronteira. Estamos interessados no *linking number* das circunferências de fronteira, então vamos ignorar os auto cruzamentos. Assim, temos $2n$ cruzamentos, arranjados em n pares, entre as circunferências de fronteira. Para computar o *linking number*, note que se as circunferências de fronteira têm a mesma orientação então em cada um dos n pares de cruzamentos o *linking number* é acrescido de $+ 2$; se têm orientações opostas, de $- 2$. Logo, cada um desses n pares de cruzamentos contribui com 1 ou $- 1$ para o *linking number*. Note que 1 e $- 1$ são ambos ímpares, e somar n ímpares nos dá um número com a mesma paridade de n . Pelo Lema 3, o *linking number* é 0; logo, n deve ser par. Portanto, pelo Lema 2, m deve ser ímpar e demonstramos o seguinte teorema, que responde à segunda pergunta:

Teorema. O arame do protetor fechado deve ser enrolado em um número ímpar de loops.

CONCLUSÕES: UM VISLUMBRE DA TEORIA DOS INVARIANTES

A resposta à segunda pergunta ilustra um método muito poderoso para resolver problemas em Topologia e, em particular, problemas de nós e tranças: utilizar invariantes. De fato, esse método não se restringe apenas à Topologia: em Geometria Euclidiana, por exemplo, utilizamos com frequência o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é invariante (e igual a 2π radianos); outro exemplo é a solução do 3º problema de Hilbert, que perguntava se dois poliedros de mesmo volume são equidecomponíveis: Max Dehn, aluno de Hilbert, respondeu ao problema definindo um invariante, que hoje leva o seu nome (aos curiosos, a resposta é **não**).

Por fim, observamos que as figuras foram retiradas das referências.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, C. The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots, W.H. Freeman and Company, 1994.
- CLAY, M., MARGALIT, D. Office Hours With a Geometric Group Theorist, Princeton University Press, 2017.
- FEIST, C., NAIMI, R. Topology explains why automobile sunshades fold oddly, College Math J. 40, 2 (2009), 93-98.
- KURPITA, B., MURASUGI, K. A Study of Braids, Kluwer Academic Publisher, 1999.



SUPERFÍCIES MÍNIMAS E PELÍCULAS DE SABÃO

Soares, Fabiane, fabii.soares.19@gmail.com¹

Silva, Adam, adamsilva@ufpa.br²

¹Faculdade de Matemática, UFPA – Universidade Federal do Pará

²Faculdade de Matemática, UFPA – Universidade Federal do Pará

Resumo: Em Geometria Diferencial, superfícies mínimas são superfícies regulares com curvatura média nula em todos os seus pontos. Estas admitem diversas aplicações, bem como uma intensa ligação com as propriedades das películas de sabão. Diante disso, o objetivo desse trabalho é entender a conexão entre tais películas e as superfícies mínimas, a partir de conceitos físicos e químicos básicos.

Palavras-chave: Superfícies mínimas, películas de sabão, curvatura média, tensão superficial, surfactantes

INTRODUÇÃO

O estudo das superfícies é uma das partes mais importantes da Geometria Diferencial. As *superfícies mínimas*, objeto de estudo deste trabalho, possuem variadas aplicabilidades na física, engenharia e na indústria de um modo geral. A palavra mínima, neste caso, está relacionada com o seguinte problema proposto por Lagrange [4] em 1760: *Dada uma curva fechada C (sem auto interseções), achar a superfície de área mínima que tem essa curva como fronteira*. Lagrange apresentou esse problema sucintamente, como um mero exemplo de um método por ele desenvolvido para achar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades geométricas. Esses métodos constituem hoje o chamado Cálculo das Variações.

Segundo [2], no tempo de Lagrange as relações entre superfícies mínimas e películas de sabão não estavam esclarecidas e a definição de curvatura média não era conhecida. O próprio Lagrange não deu exemplo desse tipo de superfície, exceto o exemplo trivial do *plano*. Só dezesseis anos depois de Lagrange ter proposto o problema, Meusnier [5] descobriu duas superfícies mínimas não triviais, o *catenóide* e o *helicóide*, ao adicionar propriedades que simplificavam o problema. Em 1835, Scherk [8] obteve um novo exemplo que ficou conhecido como *superfície de Scherk*. Ele também provou que o *catenóide* e o *helicóide* são apenas dois elementos de uma família de superfícies mínimas, chamada de *família associada ao catenóide*. Para concluir essa apresentação de exemplos, temos a chamada *superfície de Enneper*, descoberta em 1864, e a *superfície Costa*, descoberta em 1982 pelo brasileiro Celso Costa.

As superfícies mínimas estão intimamente relacionadas às películas obtidas mergulhando-se uma moldura de arame em uma solução de água e sabão, devido às suas propriedades físico-químicas. As experiências do físico belga J. Plateau com películas de líquido sob a ação da tensão superficial (entre 1843 e 1869) mostraram fisicamente a existência de superfícies mínimas para qualquer contorno “razoável”. Tornou-se então um desafio para os matemáticos obter uma prova dos resultados experimentais de Plateau, e a questão inicialmente proposta por Lagrange, veio a ser conhecida como o *Problema de Plateau*. Uma versão do problema foi resolvida simultaneamente por Douglas e Radó em 1930. Outras generalizações do problema têm inspirado a criação de entidades matemáticas que incluem objetos semelhantes às películas de sabão.

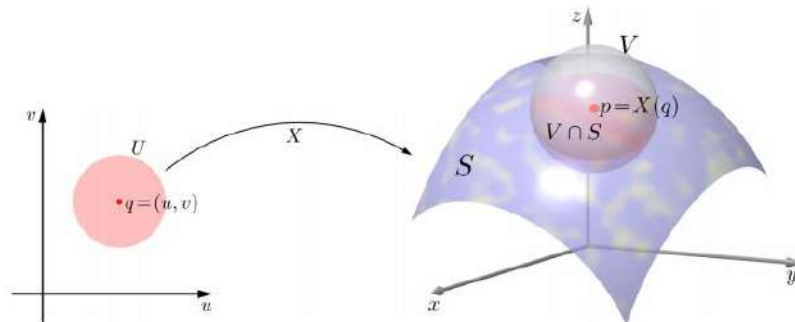
1. TEORIA DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Primeiramente, vejamos de forma breve um pouco da teoria necessária para compreender as superfícies mínimas, introduzindo alguns conceitos básicos de Geometria Diferencial.

Definição 1. Uma *superfície regular* S é um subconjunto do \mathbb{R}^3 tal que para todo ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X: U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U em \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que X é diferenciável, X é homeomorfismo e sua diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

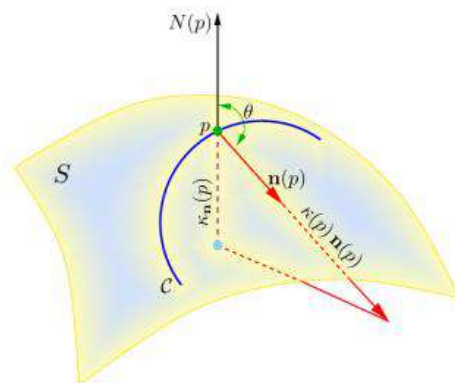
Neste caso, chamamos X de uma *parametrização de S* e a vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada de *vizinhança coordenada*.

Figura 1: Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$.



Definição 2. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a *curvatura normal* de $C \subset S$ em p . Em outras palavras, k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p , com um sinal dado pela orientação N de S em p .

Figura 2: k_n é a projeção do vetor kn sobre a normal N da superfície em p .



A proposição a seguir nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em p .

Proposição 1 (Meusnier). Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente, têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.

No ponto p temos infinitos vetores tangentes que definem infinitas direções. Para cada uma dessas direções, temos uma curvatura normal associada. Em especial temos que:

Definição 3. O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 são chamados *curvaturas principais em p* ; as direções correspondentes são chamadas *direções principais em p* .

A partir das curvaturas principais, podemos definir as chamadas curvatura gaussiana e curvatura média. Estas são muito importantes, pois definem o comportamento local de uma superfície.

Definição 4. Seja K a curvatura gaussiana de S em p e H a Curvatura média de S em p . Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 em p , podemos escrever:

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

A curvatura média de S em p também pode ser dada pela seguinte igualdade:

$$H = \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}{2}$$

em que R_1 e R_2 são os raios de curvatura principais em p .

Tendo esses conceitos anteriores, podemos finalmente definir o conceito principal do trabalho.

Definição 5: Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é *mínima* se a sua curvatura média é identicamente nula.

Para explicar a razão de usarmos a palavra mínima para tais superfícies precisamos introduzir a noção de variação. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado D tal que $D \subset U$ e uma função diferenciável $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, onde \bar{D} é a união do domínio D e sua fronteira ∂D . A variação normal de $X(D)$, determinada por h , é a aplicação diferenciável:

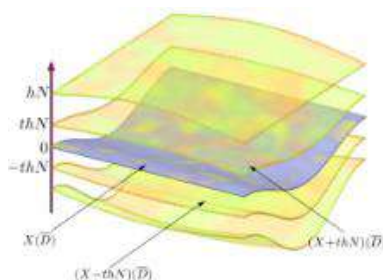
$$\varphi: \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por,

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v)$$

onde $(u, v) \in \bar{D}$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Figura 3: A variação normal de $X(D)$



Com isso, podemos enunciar o teorema a seguir:

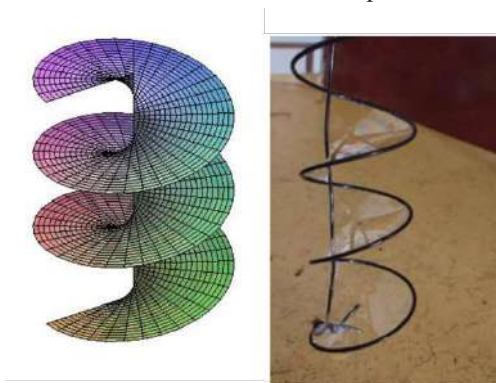
Teorema 1. Sejam $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e D um domínio limitado tal que $D \subset U$. Então X é mínima em D se e somente se $A'(0) = 0$ para toda variação normal de $X(D)$.

Este resultado garante que qualquer região limitada $X(D)$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $X(D)$. Como esse ponto crítico pode ser de mínimo, isso justifica o nome dado a essas superfícies. Assim, toda superfície de área mínima dentre todas as superfícies com um mesmo contorno é uma superfície mínima pela definição dada, apesar da recíproca não ser verdadeira.

2. PELÍCULAS DE SABÃO E SUPERFÍCIES MÍNIMAS.

Películas de sabão são finas camadas de líquido cercadas de ar e podem ser usadas como modelos para superfícies mínimas. Podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de água e sabão e retirando-a em seguida com cuidado.

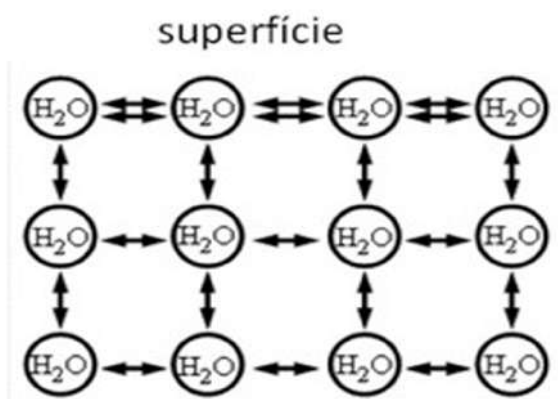
Figura 4: Helicóide e seu modelo em película de sabão



Para compreender a relação de películas de sabão com superfícies mínimas é interessante primeiro entender certos conceitos físicos e químicos referentes a estas películas. O principal conceito a ser entendido é o da tensão superficial. Esta, é um efeito que ocorre na superfície de líquidos, como a água, formando uma fina película. As forças de coesão

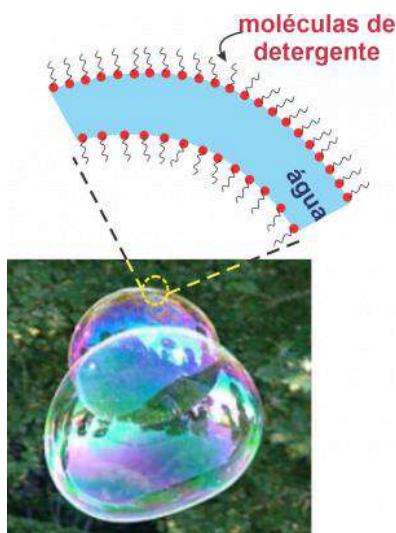
entre as moléculas do líquido são responsáveis por esse fenômeno: No interior do líquido, cada molécula está sendo constantemente atraída pelas moléculas vizinhas, igualmente, em todas as direções. Já em relação àquelas da camada superficial, como de um lado elas estão expostas ao ar, possuem menos moléculas semelhantes ao redor para formar ligações e, dessa forma, são mais coesas com as que lhe estão diretamente associadas. A coesão mais forte entre as moléculas na interface faz com que a superfície do líquido venha se comportar como uma membrana elástica e também explica a tendência de um líquido de tomar a forma que o dê a menor área superficial possível.

Figura 5: Moléculas de um líquido.



A tensão superficial da água é muito grande, por isso é difícil aumentar sua superfície para gerar uma bolha grande ou uma película fina. Ao ser adicionado à água, o detergente ou o sabão reduz a tensão superficial e permite a formação das películas. Substâncias como o detergente são chamadas de surfactantes. As moléculas desses compostos têm uma parte hidrofílica, que atrai moléculas de água, e outra parte hidrofóbica, que as repele. Estas partículas estabilizam as películas, pois criam uma repulsão entre ambas as superfícies destas, prevenindo que estas se afinem e consequentemente estorem.

Figura 6: Moléculas surfactantes



Utilizamos a letra grega γ para representar a tensão superficial. A tensão superficial tem a dimensão de força por unidade de comprimento, que é equivalente a energia por unidade de área. A tensão superficial está relacionada com a diferença de pressão entre os dois lados de uma interface pela equação de Young-Laplace:

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

em que R_1 e R_2 são os raios de curvatura principais da interface.

Em películas de sabão ideais a diferença de pressão é nula, pois estão em equilíbrio sob a ação da tensão superficial. Da definição de curvatura média e raio de curvatura temos

$$H = \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}{2}$$

logo

$$\Delta P = 0 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}{2} = 0 \Rightarrow \gamma \cdot H = 0 \Rightarrow H = 0$$

Daí, de acordo com a definição estudada conclui-se que as películas de sabão que são superfícies regulares são superfícies mínimas.

CONCLUSÃO

Mediante o exposto, concluímos que as películas de sabão se comportam como membranas elásticas e possuem a tendência de tomar a forma que tenha a menor área superficial possível, devido ao efeito da tensão superficial e das moléculas surfactantes. Dessa forma, as películas de sabão são modelos para superfícies mínimas. Esta conexão tem importância histórica e contribuiu para o desenvolvimento da Geometria diferencial e da teoria das superfícies mínimas.

REFERÊNCIAS

- [1] Do Carmo, Manfredo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3ª edição. SBM, 2008.
- [2] Do Carmo, Manfredo. *Superfícies Mínimas*. 2ª edição. IMPA, 1987.
- [3] *Estranhas superfícies mínimas*. Sala de demonstrações de física – UFMG. Disponível em: <http://demonstracoes.fisica.ufmg.br/artigos/ver/97/23.-Estranhas-superfícies-mínimas>
- [4] Lagrange, Joseph-Louis. *Essai D'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Miscellanea Taurinensia Tome II (1760-1761), 172-195.
- [5] Meusnier, Jean Baptiste. *Memoire sur la courbure des surfaces*. Mémoires de Savants Étrangers 10 (1785), 477-510.
- [6] *Propriedades da água*. Conselho Nacional da água. Disponível em: <https://conselhonacionaldaagua.weebly.com/propriedades-da-aacutegua.html>
- [7] Pugh, Robert J. "Soap bubbles and thin films". *Bubble and Foam Chemistry*. Cambridge, 2016. pg 84–111.
- [8] Scherk, Heinrich. *Bemerkung über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*, J. r. angew. Math., 12 (1835), 185-208.
- [9] Teneblat, Ketí. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blücher, 2008



ESTÁGIO SUPERVISIONADO COMO PAPEL PRIMORDIAL NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Santos, Jéssica de Sousa, jssifpi@gmail.com¹
Silva, Rosimeyre Vieira da, rosimeyrevieira@ifpi.edu.br²

¹INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI
²UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI

Resumo: *O presente estudo situa-se no âmbito das pesquisas que visam compreender o estágio supervisionado a partir do diário pedagógico, tendo o como um instrumento de interpretação da experiência e da vivência da prática docente capaz de oferecer subsídios para entender o trabalho docente e os processos reflexivos desencadeados nos momentos formativos e de desenvolvimento profissional. Os diários foram elaborados como parte das atividades da disciplina Prática Profissional II do curso de Licenciatura em Matemática. Os relatos presentes nos diários pedagógicos são oriundos dos momentos formativos desenvolvidos no contexto das aulas da referida disciplina e das vivências construídas durante o estágio supervisionado em escolas públicas de Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano. Essas considerações nos permitem compreender que o percurso formativo de cada docente é singular, marcado por elementos e momentos que contribuem para definir sua forma de ser e agir como docente. Entendemos, desse modo, que, para refletir criticamente o estagiário encontra no diário um instrumento ideal descrever, informar, confrontar e reconstruir suas ações. Assim, advoga-se a utilização dos diários como meio e produto da reflexão que se potencializa por meio de ações formativas críticas.*

Palavras-chave: *diário pedagógico, reflexão, prática pedagógica, estágio supervisionado.*

INTRODUÇÃO

No contexto contemporâneo as discussões sobre a formação de professores envolvem temas diversos e que não estão apenas restritos ao fazer pedagógico, estas discussões envolvem análises e reflexões sobre o desempenho e conhecimento específico da profissão, e no caso da formação de professores de Matemática não é diferente.

Ao longo do curso de formação inicial estuda-se sobre conhecimentos e saberes necessários à atuação docente, mas quase sempre os conteúdos de estudos nas diversas disciplinas desconsideram as especificidades de alguns níveis e modalidades de ensino. No caso específico da Educação de Jovens e Adultos (EJA) quase sempre as discussões e reflexões ficam restritas a uma disciplina ministrada no VI módulo do curso de Licenciatura em Matemática.

Assim quando tem-se contato com a realidade escolar através de situações formativas que possibilitam conhecer a realidade educacional para além da teoria, estas nos dão condições de melhor compreender a teoria e de refletir sobre a formação e atuação do professor.

Assim, presente estudo situa-se no âmbito das pesquisas contemporâneas, mais especificamente dentre os estudos que se enquadram no paradigma do pensamento do professor, revelando a importância de se investigar o saber desenvolvido pelos profissionais em suas práticas.

O paradigma do pensamento vem se constituindo em uma das correntes que têm se dedicado a analisar o pensamento prático profissional dos professores. Neste conceito estão contidos um repertório de conhecimentos e significados decorrentes da experiência e vivência particular e ao mesmo tempo coletiva com o qual o profissional vai interagindo como consequência do processo formativo e da prática docente desenvolvida.

A realidade do ensino de Matemática no atual contexto encontra-se envolvida por profundos dilemas como: associar a teoria e a prática no trabalho com os conteúdos matemáticos, envolver os alunos e despertar o interesse pela ciência da matemática, encontrar metodologias que inovem o ensino da matemática, etc. Esses e outros desafios nos direcionam a procurar formas de elucidar reflexões desencadeadas no ambiente escolar capaz de promover conhecimentos para fundamentar a prática docente. Ao analisarmos a trajetória profissional do professor de Matemática estaremos também construindo e compreendendo a nossa própria trajetória, que no momento se encontra em fase inicial. Nestes termos, entende-se o diário pedagógico como um instrumento de interpretação da experiência e da vivência da prática docente capaz de oferecer subsídios para compreender o trabalho docente e os processos reflexivos desencadeados no processo formativo e de desenvolvimento profissional.

Reflexão a Partir de Desafios e Perspectivas na Prática Docente

Em meio à complexidade que envolve a formação de docentes nesta última década, tem sido discutida uma nova abordagem de formação de professores, “que propicia a superação da racionalidade técnica com vistas a uma concepção prática centrada no saber profissional, tomando como base o conceito de reflexão” (SCHÖN, 2000, p. 83). Destacamos aqui a importância da análise e da reflexão sobre a experiência concreta da vida, como um processo de reconstituição e de reconstrução da experiência.

A prática docente como ação constituída de significados diversos, e construída por sujeitos históricos e socialmente localizados desenvolve-se num contexto permeado por condicionantes, por isso torna-se fundamental buscar compreensão sobre o fazer docente, pois esta compreensão pode potencializar as ações para transformar o meio no qual o docente e o aluno estão inseridos em termos objetivos e subjetivos.

Compreendemos que na formação inicial, no processo de aprender a ser professor torna-se necessário romper com o modelo imposto de professor transmissor do conhecimento para rumar por novos caminhos que supere a lógica positivista no trabalho docente. Assim, o momento do estágio supervisionado, se constitui em rica oportunidade para o exercício da reflexão sobre a articulação teoria e prática na formação e no fazer docente. Seguindo esta perspectiva de análise, destacamos o pensamento de Freire ao afirmar que “a prática de pensar a prática é a melhor maneira de aprender a pensar certo. O pensamento que ilumina a prática é por ela iluminado tal como a prática que ilumina o pensamento é por ele iluminado.” (FREIRE, 2001, p. 260). A reflexão sobre a prática se constitui em necessidade e possibilidade para encontrar alternativas para os dilemas e desafios que ela apresenta.

Diante desses pressupostos, discutir sobre a reflexão na prática docente envolve, antes de tudo, a valorização da ação desenvolvida pelo professor na sala de aula, como fonte de reflexão e alternativa rica para a formação permanente desse profissional, e o interesse em produzir conhecimentos que possam favorecer a melhoria e o fortalecimento da prática docente no contexto da formação de professores.

O Encontro com os Diários

Os diários foram elaborados como parte das atividades da disciplina Prática Profissional II do curso de Licenciatura em Matemática. Os relatos presentes nos diários pedagógicos são oriundos dos momentos formativos desenvolvidos no contexto das aulas da referida disciplina e das vivências construídas durante o estágio supervisionado em escolas públicas de Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano.

O encontro com os diários foram oportunizados nos primeiros momentos do desenvolvimento da disciplina, de início pareceu estranho compreender o registro narrativo como possibilidade de construção da identidade e formação profissional era ainda pouco explorado, tratando-se de um grande desafio.

De acordo com Zabalza (1994) a utilização dos diários se apresenta como condição necessária ao ensino, atividade carregada de dilemas e conflitos. Segundo este autor as referências explícitas quanto ao uso do diário são pouco frequentes e, quando se faz remissão, não vem acompanhada de esclarecimentos a respeito do tipo de uso que se faz dele. Acredita-se que as narrativas da prática revelam a dimensão reflexiva desencadeada na e a partir da prática, pois na relação ensinar-aprender e a influência da escrita dos diários explicitam limites e possibilidades do trabalho docente constituindo-se em situações formativas a partir da reflexão crítica.

Neste sentido, o relato a seguir da estagiária demonstra a riqueza dos diários ao fazê-la refletir sobre o episódio:

Hoje vejo que não há ninguém no fundão a não ser eu, todos estão mais a frente, principalmente aqueles que costumam ficar atrás, a maioria copia atentamente enquanto um pequeno grupo fica com conversas paralelas e risadas. O professor explica o trabalho é uma pesquisa referente a alguns produtos como geladeira, fogão, devem pesquisar o preço à vista, a prazo. Alguns alunos já dizem: – Professor mais você não disse de qual modelo é a geladeira, quantas bocas é o fogão, qual a marca. Isso mostra que estão prestando atenção na aula, tem curiosidade, ainda que alguns fiquem com gracinhas, mas é normal uma

brincadeira de vez enquanto para descontrair. Com esse trabalho o professor quer mostrar que a matemática está presente em nossa vida, das mais variadas formas e em locais que nem mesmo tenhamos nos dado conta, além de aprenderem mais sobre taxas, juros. Se portam de maneira desinquieta que o professor chega a fazer algo que não tem costume, não grita, não bate na mesa, apenas escreve no quadro: SILÊNCIO! e senta-se para que caleem-se. E ele possa explicar, com isso o silêncio é estabelecido, ele retoma a explicação do trabalho e todos já estão prestando atenção. (ESTAGIÁRIA DE MATEMÁTICA)

Entendemos dessa forma que os conhecimentos, saberes e experiências do professor são constituídos a partir de suas aprendizagens construídas ao longo de sua história escolar e profissional e que se trata de um processo contínuo e inconcluso, no qual as dimensões subjetivas e socioculturais influenciam o modo de ser e de agir de cada docente. Enfim, partimos do pressuposto que o diário da prática caracteriza-se por ser um instrumento fomentador de reflexões e de transformação, visto que, através dele, a estagiária teve a oportunidade de narrar a ação docente, assim como de refletir acerca da ação do professor na prática docente, vislumbrando desenvolver sua prática docente no futuro de forma consciente e significativa.

Desvelando a Prática Docente: Estágio Curricular como Lócus

A transitoriedade, a incerteza, o improvável e as mudanças são termos cada vez mais presentes na caracterização da educação contemporânea. Considerando esse cenário, na perspectiva de educar para uma cidadania global, temos a necessidade de ensinar “[...] a viver na mudança e não querer controlá-la [...]” (MORAES, 2003, p. 225).

Em relação à educação em todos os níveis e etapas e nos cursos de formação de professores, este contexto apresenta-se permeado por desafios das mais diferentes ordens que envolvem desde situações relacionadas à missão de formar cidadãos éticos envolvidos com a transformação social àquelas relacionadas à construção de novas propostas metodológicas necessárias à produção do conhecimento que atenda às exigências dos novos paradigmas da ciência.

Urge debater novas exigências ou possíveis modificações nos processos de ensinar e aprender, o que supõe conceber que o contexto exige, dentre outras competências e saberes, conviver com novas tecnologias e saber manuseá-las em benefício próprio, mas respeitando o outro, desenvolver consciência de fraternidade e solidariedade, bem como compreender que a evolução individual está relacionada com a coletiva.

É um contexto complexo no qual a figura do professor se destaca pelo seu papel na sistematização de novas práticas educativas. O processo de ensino não pode ser concebido como transmissão de conhecimentos ou uma prática de instrução, mas como um processo de mediação entre o conhecimento prévio do aluno, ainda não elaborado cientificamente e o conhecimento científico no qual a busca do professor por metodologias capazes de auxiliar o processo de aprendizagem dos alunos significa exigências impostas pelo contexto atual.

De acordo com Schulman (1986), ensino é um termo polissêmico e ambíguo, pois ao mesmo tempo em que significa um processo envolvendo vários indivíduos em uma sala de aula, também pode designar uma ocupação ou função, no sentido de uma carreira.

Assim, como prática complexa, o ensino é uma ação realizada por seres humanos em um contexto, que dentre suas finalidades, busca modificar os sujeitos envolvidos em razão das ações realizadas. Situamos, assim, novas abordagens do ensino que emergem das investigações sobre o ensino como prática social.

Autores como Contreras (1990) e Pimenta (2005) definem o ensino e a aprendizagem como práticas humanas e sociais que se influenciam mutuamente. Assim, impõe considerar em sua análise a compreensão das estruturas sociais e o seu funcionamento e as relações que com estas a prática de ensinar mantém.

Importa destacar que ensinar como ação intencional, através de uma prática reflexiva, indagadora, problematizadora, na relação entre sujeitos, capaz de gerar e reconstruir conhecimentos significa considerar, também, que o ensino e a aprendizagem ocorrem nos contextos sociais diversos e não se restringem à sala de aula. Neste reconhecimento, Freire (1996, p.154) indaga: “Como ensinar, como formar sem estar aberto ao contorno geográfico, social dos educandos?”. Compreende-se que é nesta concepção que deve estar ancorada a postura e atitude do professor da EJA.

A partir dos diários ficaram perceptíveis as emoções e as mais diferentes situações que a educanda se deparou no decorrer do estágio:

Uma aluna com uma máquina diferente, para que será que serviria tal objeto se ela olhava para o professor durante a aula toda e se mantinha atenta e até copiava usando a tal máquina, fiquei muito curiosa e assim que a aula acabou fui questionar o professor qual a finalidade ou motivo daquele fato. O professor me explicou que se tratava de uma máquina de Braille usada por aquela aluna porque ela é cega, e com a máquina ela pode copiar os assuntos para depois estudar, a princípio senti um misto de surpresa, espanto e admiração por ver uma aluna naquela situação frequentando a sala de aula e mais, demonstrar tamanho interesse, atenção, esforço. Com o passar das aulas pude observar que ela sempre questionava o professor e quando não

entendia algo ele repetia até que ela o compreendesse. Dentre todos os alunos daquela turma ela é destaque, mas não por sua deficiência, que não é motivo para não estar atenta ou mesmo diminuir sua vontade de aprender, seu desejo de entender deste modo se mostrando a mais esforçada, interessada senão a mais dedicada. (ESTAGIÁRIA DE MATEMÁTICA)

A educanda pontua:

Finalizando esse estágio estava cada vez mais maravilhada com aquele exemplo de superação, onde foi perceptível seu nível de percepção auditiva apurada e atenção muito grande. E demonstrou uma aptidão singular com a qual a educanda assimila os conteúdos matemáticos abordados, o que muitas vezes é difícil até mesmo para quem não apresenta nenhum problema de visão. (ESTAGIÁRIA DE MATEMÁTICA)

O professor tem que estar apto à contornar qualquer barreira que venha a surgir em seu percurso, assim torna-se imprescindível que ele coloque em prática não só os conhecimentos específicos ou pedagógicos mas também seu lado humanitário, percebendo as fragilidades do outro e ajudando-o a superar, facilitando para o melhor entendimento.

Os alunos cada um com sua deficiência, mas acima de tudo, com seus conhecimentos, ensinam muito, mostrando que o professor de Matemática nos dias de hoje como qualquer outro tem que estar preparados para tudo principalmente para lidar com os mais diversos tipos de deficiências que podem ser encontradas na sala de aula.

Sabe-se que no estágio, o professor construirá suas competências a partir das relações entre sua pessoa e profissão, relacionando prática-teoria-prática para desenvolver autonomia, responsabilidade, porém, para o desenvolvimento das competências torna-se necessário o contato com diversas situações formativas tanto no aspecto teórico quanto no prático. O estágio curricular se constitui um momento rico para articulação teoria e prática, oportunidade de problematização, pesquisa e aprendizagem profissional e o diário é um instrumento de suma importância para isso.

CONSIDERAÇÕES INCONCLUSIVAS

Acreditamos que as marcas das experiências de formação vivenciadas no percurso do desenvolvimento de formação inicial e pré-profissional influenciam consideravelmente o fazer docente. Partimos do princípio de que os saberes e conhecimentos adquiridos pelos docentes durante o processo de formação, ao longo de sua história de vida pessoal e escolar, direcionam suas percepções, concepções e seus fazeres como regentes no ofício da docência.

Nesse sentido, no contexto de sala de aula, os professores formadores, ao objetivarem desenvolver suas tarefas, devem procurar mobilizar conhecimentos, saberes, competências e habilidades que são adquiridos através de teorias e de práticas.

Essas considerações nos permitem compreender que o percurso formativo de cada docente é singular, marcado por elementos e momentos que contribuem para definir sua forma de ser e agir como docente. Entendemos, desse modo, que, para refletir criticamente o estagiário encontra no diário um instrumento ideal descrever, informar, confrontar e reconstruir suas ações. Assim, advoga-se a utilização dos diários como meio e produto da reflexão que se potencializa por meio de ações formativas críticas.

REFERÊNCIAS

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2001

CONTRERAS, José. *A autonomia dos professores*. São Paulo: Cortez Editora, 1990.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 25ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

MORAES, Maria Cândida. *O paradigma educacional emergente*. 9 ed. Campinas, SP: Papyrus, 2003.

PIMENTA, Selma Garrido. *Saberes pedagógicos e atividade docente*. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

SHULMAN, Lee S. *Paradigms and research programs for the study of teaching*. In: M. C. Wittrock (Ed.). *Handbook of research on teaching*. 3. ed. Nova York: Macmillan, 1996, p. 3-36.

ZABALZA, Miguel A. *Diários de aula: contributo para o estudo dos dilemas práticos dos professores*. Porto: Porto Editora, 1994.



CÓDIGOS E CRIPTOGRAFIA PÓS-QUÂNTICA

Miranda, Marcelo, m192298@dac.unicamp.br¹
Costa, Sueli I. R., sueli@unicamp.br²

¹IMECC - UNICAMP

²IMECC - UNICAMP

Resumo: Com o avanço da tecnologia nos últimos anos e o desenvolvimento e aprimoramento dos chamados computadores quânticos, foram iniciados estudos em uma nova subárea da criptografia denominada criptografia pós-quântica, na qual são analisadas classes de algoritmos criptográficos possivelmente seguros contra ataques de computadores quânticos. Dentre as principais classes destes algoritmos, podemos mencionar os algoritmos baseados em reticulados, os baseados em funções de Hash e os baseados em códigos corretores de erros. Resultados recentes têm sido apresentados em propostas de padronização submetidas ao NIST (National Institute of Standards and Technology) e, neste processo, são analisados especialmente os algoritmos propostos para encriptação e decríptação (Key Encapsulation Mechanisms - KEMs). Abordamos, neste trabalho, os códigos concatenados de Reed-Muller e Reed-Solomon e a forma com que são utilizados na proposta HQC. As perspectivas da pesquisa em andamento no contexto da criptografia baseada em códigos incluem a análise de diversos parâmetros relevantes para estes e outros códigos e a associação destes à criptografia baseada em reticulados.

Palavras-chave: Códigos concatenados, Códigos de Reed-Muller, Códigos de Reed-Solomon, Criptografia pós-quântica, HQC.

INTRODUÇÃO

Em 1996, Peter Shor estabeleceu um algoritmo capaz de resolver parte dos problemas mais clássicos da criptografia em tempo polinomial e em computadores quânticos (que até hoje não foram plenamente desenvolvidos). Isto deu início a um novo ramo da criptografia: a criptografia pós-quântica, que busca construir algoritmos capazes de sobreviver a ataques quânticos e que também podem ser eficientes para os computadores atuais ([1]). Neste trabalho, apresentamos um exemplo de uma das subáreas da criptografia pós-quântica: a baseada em códigos corretores de erros. A proposta de esquema criptográfico HQC ([2]) faz uso dos códigos concatenados de Reed-Muller e Reed-Solomon, como detalhado nas Seções 1. e 2.

1. PRELIMINARES

1.1. Visão Geral

A criptografia baseada em códigos foi inicialmente proposta por 1978 por Robert J. McEliece, via códigos de Goppa. É considerada relativamente segura e relevante dada a sua viabilidade, que aumentou com o advento de computadores mais potentes. Neste tipo de criptografia, os sistemas criptográficos se utilizam de códigos corretores de erros. Criptossistemas baseados em códigos fazem parte dos esquemas propostos e avaliados pelo NIST (EUA) desde 2016. O esquema HQC, que apresentamos na Seção 2., leva em consideração os códigos de Reed-Muller, Reed-Solomon e códigos concatenados provenientes dos dois códigos anteriores; todos serão introduzidos a seguir. As principais referências para as Subseções 1.2., 1.3. e 1.4. são [3], [4] e [2], respectivamente.

1.2. Códigos de Reed-Muller

Os códigos de Reed-Muller (RM) são alguns dos mais antigos, mais simples e mais utilizados códigos para confiabilidade da informação. Foram introduzidos por David Muller em 1954; logo depois, Irving Reed desenvolveu um algoritmo de decodificação que abrangia tais códigos.

As palavras de um código RM podem ser vistas como vetores de avaliação de polinômios multivariados sobre \mathbb{F}_2 . O processo de codificação em códigos RM leva os bits de informação guardados nos coeficientes do polinômio.

Sejam $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_m]$ um anel de polinômios com m variáveis, $f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_m]$ polinômio e $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{F}_2^m$ vetor binário.

Definição 1. Definimos $Eval_z(f)$ como sendo $Eval_z(f) = f(z)$. Já $Eval(f)$ é obtido a partir de uma ordenação natural do conjunto $\{Eval_z(f) / z \in \mathbb{F}_2^m\}$.

Definição 2. O código de Reed-Muller binário de r -ésima ordem $RM(r, m)$ é definido como sendo o conjunto, em $\mathbb{F}_2^{2^m}$, de vetores binários

$$\{Eval(f) / f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_m], \deg(f) \leq r\}.$$

Proposição 3 ([3]). $RM(r, m)$ é um código linear com comprimento $n = 2^m$ e dimensão $k = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$. Além disso, definindo $[m] := \{1, \dots, m\}$, os vetores de avaliação $\{Eval(\prod_{i \in A} x_i) / A \subseteq [m], |A| \leq r\} \subseteq \mathbb{F}_2^{2^m}$ associados aos monômios da base dos polinômios de m variáveis em \mathbb{F}_2 formam uma matriz geradora de $RM(r, m)$.

Em relação ao criptosistema HQC, tomamos códigos binários de Reed-Muller de r -ésima ordem $RM(r, m)$ com comprimento $n = 2^m$, dimensão $k = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$ e distância mínima $d_{min} = 2^{m-r}$.

1.3. Códigos de Reed-Solomon

Os códigos de Reed-Solomon (RS) foram introduzidos por Irvin Reed e Gustave Solomon na década de 1960 e são alguns dos mais conhecidos códigos BCH ([5]).

Seja \mathbb{F} corpo com $q = p^r$ elementos, p primo. Se $n = q - 1$, então vale que \mathbb{F} contém um elemento primitivo α . A partir deste elemento, podemos determinar um polinômio dado por

$$g(x) = \prod_{d=1}^n (x - \alpha^d). \quad (1)$$

Definição 4. O código C , de comprimento n , dimensão k sobre \mathbb{F} e gerado pelo polinômio $g(x)$ dado em (1), é chamado de código de Reed-Solomon. Denotamos tal código por $RS[n, k, d]$.

Proposição 5 ([4]). A distância mínima do código $RS[n, k, d]$ é d . Além disso, vale que $k = n + 1 - d$.

No sistema criptográfico HQC, que será apresentado logo mais, são considerados códigos RS (denotados por $RS[n, k, d_{min}]$) com comprimento $n = q - 1$, número de dígitos de checagem de paridade $n - k = 2\delta$, sendo δ a capacidade de correção do código e k o número de bits, e distância mínima $d_{min} = 2\delta + 1$, cuja existência é demonstrada em [6]. Daí, são construídos diversos códigos RS a serem utilizados nos algoritmos do esquema.

1.4. Códigos Concatenados

Se um código linear C , de comprimento n , dimensão k e distância mínima d tem matriz geradora $G \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$, então podemos escrever $C = \{mG / m \in \mathbb{F}_2^k\}$. Desta forma, por meio de G , um código C pode ser visto como a imagem de uma transformação linear $T: \mathbb{F}_2^k \rightarrow \mathbb{F}_2^n$.

Definição 6. Um código concatenado consiste num código externo $[n_e, k_e, d_e]$ em \mathbb{F}_q e um código interno $[n_i, k_i, d_i]$ em \mathbb{F}_2 , com $q = 2^{k_i}$. Usamos uma bijeção entre elementos de \mathbb{F}_q e as palavras do código interno e , com isto, obtemos a transformação

$$\gamma: \mathbb{F}_q^{n_e} \rightarrow \mathbb{F}_2^N,$$

sendo $N = n_e n_i$. O código externo é transformado num código binário de parâmetros $N = n_e n_i$, $K = k_e k_i$ e $D \geq d_e d_i$.

2. EXEMPLO DO USO DE CÓDIGOS EM CRIPTOGRAFIA PÓS-QUÂNTICA: O ESQUEMA CRIPTOGRÁFICO HQC

O HQC (Hamming Quase-Cíclico) se apresenta como um eficiente esquema de encriptação e proposta para o NIST (National Institute of Standards and Technology) ([7]) na categoria "esquema de criptografia pós-quântica com chave pública", baseado na teoria de códigos corretores de erros.

No caso do HQC, é tomado um código de Reed-Solomon com $k = 32$ em \mathbb{F}_{256} ($k_i = 8$) como código externo. Já o código interno considerado no esquema é o código de Reed-Muller $RM(1, 7) = [128, 8, 64]$ duplicado 3 ou 5 vezes. Daí, é estabelecido um algoritmo de decodificação baseado em códigos concatenados de Reed-Muller e Reed-Solomon.

2.1. Uso de códigos de Reed-Solomon no HQC

Considere o polinômio $g(x)$, tal qual representado em (1) e seguindo os parâmetros dados anteriormente para os códigos RS presentes no esquema HQC, mencionados na Subseção 1.3. Representando a palavra-código por $c(x) = b(x) + x^{n-k}u(x)$, em que

$u(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_{k-1}x^{k-1}$ é o polinômio correspondente à mensagem $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ e $b(x)$ caracteriza o resto da divisão do polinômio $x^{n-k}u(x)$ por $g(x)$, podemos sintetizar a codificação na forma sistemática em três passos:

1. Multiplicar a mensagem $u(x)$ por x^{n-k} ;
2. Calcular o resto $b(x)$ da divisão de $x^{n-k}u(x)$ pelo polinômio gerador $g(x)$;
3. Utilizar os polinômios $b(x)$ e $x^{n-k}u(x)$ para obter o polinômio-código (ou palavra-código) $c(x) = b(x) + x^{n-k}u(x)$.

A decodificação pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Cálculo das síndromes: a determinação das 2δ síndromes é realizada por meio do polinômio recebido;
2. Cálculo do polinômio de localização de erros $\sigma(x)$;
3. Determinação dos números de localização de erro;
4. Cálculo do polinômio $Z(x)$ (definido em [2]) para posterior cálculo dos valores de erro;
5. Correção dos erros no polinômio recebido.

2.2. Uso de códigos de Reed-Muller no HQC

Com relação à decodificação do código interno de Reed-Muller e a codificação e decodificação dos códigos de Reed-Muller envolvidos no esquema HQC, que possuem parâmetros expressos na Subseção 1.2., são empregados processos semelhantes aos descritos na Subseção 2.1.

PERSPECTIVAS DE PESQUISA

Dentre as perspectivas da pesquisa em andamento, destacamos particularmente a análise de parâmetros de códigos que são relevantes para a proposição de esquemas criptográficos baseados em códigos e também estudamos os baseados em reticulados. Neste último caso, consideraremos reticulados obtidos a partir de códigos e através de diversas formas, como por exemplo as Construções A e D.

REFERÊNCIAS

- [1] D. R. Stinson, M. B. Paterson, *Cryptography - Theory and Practice*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2019.
- [2] “HQC (Hamming Quasi-Cyclic Specification)”, https://pqc-hqc.org/doc/hqc-specification_2021-06-06.pdf, acessado em 01/02/2022.
- [3] E. Abbe, A. Shpilka, M. Ye, “Reed–Muller codes: Theory and algorithms”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 67, no. 6, pp. 3251–3277, 2020.
- [4] W. C. Huffman, V. Pless, *Fundamentals of error-correcting codes*, Cambridge University Press, 2010.
- [5] A. Hefez, M. L. Villela, *Códigos Corretores de Erros*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [6] S. Lin, D. J. Costello, *Error control coding*, vol. 2, Prentice Hall New York, 2001.
- [7] “National Institute of Standards and Technology”, <https://www.nist.gov/>, acessado em 25/02/2022.



MATEMÁTICA E TIPOS SANGUÍNEOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERDISCIPLINAR

Barros, Marlon, marlonbarros009@gmail.com¹
Silva, Elias, elias.sobrinho.silva@itec.ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo: *A interdisciplinaridade apresenta-se, hodiernamente, como uma importante questão de pesquisa nas relações de ensino e aprendizagem, podendo ser uma alternativa para amenizar determinadas fragilidades presentes no cenário educacional. Nesta perspectiva, este trabalho teve o objetivo de elaborar e aplicar uma sequência didática interdisciplinar para o ensino de conceitos da matemática relacionados ao conteúdo de tipos sanguíneos nas turmas de segundo ano do ensino médio de uma escola pública em Belém do Pará. Os resultados obtidos apontam, por parte dos alunos, uma melhora na compreensão dos conceitos matemáticos relacionados aos conceitos da biologia e o aumento do interesse em participar das aulas a partir da proposta apresentada, explicitando a necessidade de mais pesquisas que analisem, incentivem e ou compartilhem resultados e experiências relacionados a interdisciplinaridade na educação básica.*

Palavras-chave: *Interdisciplinaridade, sequência didática, matemática, tipos sanguíneos.*

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história, novos saberes surgiram a partir da integração entre a matemática e a biologia, explicitando como a integração entre estes conhecimentos pode ser importante para o desenvolvimento científico e para as questões relativas ao ensino-aprendizagem destas áreas (SILVA JUNIOR, 2008). Entretanto, a integração entre estas áreas, principalmente nos ambientes escolares, é pouco explorada, resultando em uma aprendizagem que não associa, adequadamente, diferentes tipos de conhecimentos (SAMPAIO; SILVA, 2012). Nessa perspectiva, a construção de materiais didáticos e outros trabalhos que visem incentivar práticas interdisciplinares é de suma importância para a ampliação destas práticas nos ambientes de ensino-aprendizagem, dando significado aos conceitos matemáticos presentes na biologia e aplicando conhecimentos adquiridos na matemática em diferentes situações.

A interdisciplinaridade é um termo utilizado para caracterizar a colaboração existente entre disciplinas de diferentes áreas ou entre setores heterogêneos de uma mesma área, caracterizando-se por buscar um enriquecimento mútuo do conhecimento (FAZENDA, 2011). Nessa perspectiva, podemos compreender a interdisciplinaridade como uma relação entre dois conhecimentos distintos que favorece a construção de novos saberes e ou ampliação de saberes existentes. Além disso, as práticas interdisciplinares podem apresentar diversas vantagens para a formação do cidadão como, por exemplo, oportunizar uma melhor formação geral e profissional, incentivar a pesquisa e exploração, facilitar a visualização de diversas relações e transformações presentes no mundo e superar a dicotomia ensino-pesquisa (FAZENDA, 2011).

Logo, a interdisciplinaridade pode oportunizar experiências de aprendizagens enriquecedoras. Entretanto, a aplicação de uma prática interdisciplinar é complexa, exigindo uma série de processos e uma preparação por parte do docente. Neste sentido, os cursos de formação inicial (licenciaturas) podem ser pontos estratégicos para reflexões que façam com que o futuro professor adquira conhecimentos e experiências relacionadas as práticas

interdisciplinares, estando apto a promover mudanças significativas no cenário educacional e a interagir com especialistas de outras áreas (PIERSON; NEVES, 2011). Portanto, a elaboração de trabalhos associados a interdisciplinariedade é importante para enriquecer a formação inicial e continuada dos professores de matemática e outras áreas, possibilitando experiências e informações que favoreçam diferentes abordagens na educação básica.

Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP, 2019), o Brasil obteve um baixo desempenho em matemática, leitura e ciências no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), explicitando uma fragilidade no processo educacional do país. Nesse sentido, a interdisciplinariedade pode ser uma das alternativas para o melhoramento e aprimoramento do processo educacional, ressignificando os conteúdos aprendidos ao longo da educação básica e aprimorando a formação dos alunos, explicitando a importância de pesquisas que visem explorar essa temática a fim de possibilitar uma visualização acerca das potencialidades desta temática para as relações de ensino e aprendizagem de matemática e de outras áreas.

2. OBJETIVO

Aplicar uma sequência didática interdisciplinar para o ensino de matemática integrado ao conteúdo de sistema ABO e fator RH nas turmas de segundo ano de uma escola pública em Belém do Pará.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a construção da sequência didática interdisciplinar, foram escolhidos os conteúdos de sistema ABO e fator RH pois, como explicitado por Vilicinski (2017), estes conteúdos são de grande interesse por parte dos alunos por estarem diretamente ligados ao cotidiano destes e é possível trabalhar importantes conteúdos matemáticos a partir destes dois conteúdos da biologia como, por exemplo, probabilidade e a teoria dos conjuntos. Além disso, a relação entre o sistema ABO, fator RH e a matemática está, atualmente, sendo bastante explorada em vestibulares como, por exemplo, na edição de 2020 do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), representando a possibilidade de uma preparação diferenciada para a realização destes vestibulares.

A sequência didática interdisciplinar considera que os discentes já tiveram contato o conteúdo de tipos sanguíneos, que é apresentado em genética, podendo ser utilizada no ensino fundamental e no ensino médio e limitando-se, somente, a relação entre o conteúdos de sistema ABO e fator RH com o conhecimento matemático envolvido em ambos. A sequência foi dividida em duas etapas que ocorrerão em dois encontros de 45 minutos cada.

A primeira etapa consiste em uma abordagem de conceitos da estatística e da teoria dos conjuntos: O dados sobre os tipos sanguíneos dos alunos serão recolhidos através de um formulário e, a partir destes dados, uma tabela será criada para o ensino e aplicação de conceitos da estatística. Além disso, os dados serão utilizados para estabelecer relações com os conceitos da teoria dos conjuntos, explorando o diagrama de Venn e, caso a turma seja do ensino médio, relacionando-o com uma abordagem apresentada na edição de 2020 do Exame Nacional do Ensino Médio.

A segunda etapa consiste na abordagem de conceitos envolvendo a probabilidade: O conceito de probabilidade será desenvolvido a partir de situações envolvendo tipos sanguíneos. Para tal, inicialmente, os cruzamentos genéticos seriam revisados e, em seguida, o conceito de probabilidade seria trabalhado a partir de exemplos que envolvam o sistema ABO e o fator RH e, em seguida, os princípios aditivos e multiplicativos seriam explorados. Ao fim, o conceito de probabilidade condicional também seria trabalhado com a apresentação de exemplos envolvendo o sistema ABO em conjunto com o fator RH.

Ao final da aplicação de cada etapa, uma atividade avaliativa foi passada aos alunos com a finalidade de analisar a aprendizagem destes em relação a proposta apresentada. Esta atividade foi criada em formato de jogo de perguntas e respostas no software wordwall e o link para o jogo foi repassado aos alunos no final da aula. Além disso, um questionário foi repassado aos alunos a fim de recolher informações sobre a opinião destes quanto a abordagem apresentada.

4. RESULTADOS OBTIDOS

A sequência didática interdisciplinar foi aplicada nas turmas de segundo ano do ensino médio da escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Lauro Sodré. Os resultados obtidos apontam, por parte dos alunos, maior interesse e facilidade na compreensão de conceitos da matemática a partir da proposta apresentada. Além disso, os alunos obtiveram um aproveitamento significativo no desenvolvimento das atividades propostas. Estes resultados explicitam a necessidade de mais estudos que visem analisar e explorar, de maneira aprofundada, as potencialidades da abordagem de conteúdos da matemática integrados a outras áreas.

5. CONCLUSÕES

Conclui-se que a interdisciplinaridade é muito importante para as realações de ensino-aprendizagem da atualidade, podendo ter a possibilidade de auxiliar na construção de uma melhor aprendizagem. Nesse sentido, a construção de pesquisas e materiais didáticos como, por exemplo, sequências didáticas interdisciplinares e apostilas pode ser de suma importância para incetivar e oportunizar experiências de integração entre diferentes áreas.

Pode-se concluir, também, que o conteúdo de tipos sanguíneos pode facilitar a aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos e esta relação, se utilizada adequadamente, pode contribuir, efetivamente, para uma aprendizagem que enriqueça os dois conhecimentos.

Espera-se que esta investigação contribua para reflexões sobre a importância da interdisciplinariedade na educação básica. Além disso, espera-se que esta proposta possa ser utilizada por outros professores ou futuros professores a fim de enriquecer o processo educacional e enriquecer a formação docente.

REFERÊNCIAS

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**, efetividade ou ideologia. 6. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2011.

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEXEIRA (INEP). **Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil**. 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206

PIERSON, A.; NEVES, M. R. **Interdisciplinaridade na formação de professores de ciências: conhecendo obstáculos**. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, [S. l.], v. 1, n. 2, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4168>. Acesso em: 2 jun. 2022.

SAMPAIO, C. F.; SILVA, A. G. D. Uma introdução à biomatemática: a importância da transdisciplinaridade entre biologia e matemática. In: **VI Colóquio Internacional "Educação e Contemporaneidade"**, São Cristóvão: [s.n.]. 2012.

SILVA JÚNIOR, G. B. **Biologia e matemática: Diálogos possíveis no ensino médio**. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática. 2008.

VILICZINSKI, A. C. M. **Aplicação da Biomatemática na abordagem dos tipos sanguíneos dos estudantes da escola de Ensino Médio Governador Celso Ramos**. Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina – TCC (Especialização). 2017.



FUNÇÕES RECURSIVAS: A MATEMÁTICA DA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO APLICADA AO ENSINO MÉDIO

PINHEIRO, Ronaldo, rndpinheiro@yahoo.com.br

Resumo: com a matemática das funções recursivas aplicadas à ciência da computação, abordamos a recursividade também nas perspectivas de arte matemática, construções geométricas e imagens recursivas. Propomos que é possível trabalhar alguns conceitos de ciência da computação, visto que, já temos alunos com noções de programação, o que está longe da realidade de muitos. Alguns exemplos acompanham com o código em Python. Conteúdos mais rebuscados podem ser inseridos num contexto palpável para nossos alunos.

Palavras-chave: Funções recursivas. Ciência da computação. Educação matemática. Arte-matemática.

INTRODUÇÃO

Junto às funções recursivas na ciência da computação, utilizaremos: relações, funções, recursividade, noção de programação em Python (linguagem amplamente difundida), construções em Geogebra e imagens recursivas.

Iniciaremos com os conceitos de relações, funções, recursividade e funções recursivas. No segundo tópico falamos quando uma recursividade é função ou não, para isso, usamos as funções: Fibonacci, aproximação da raiz quadrada de dois (usando o método de Newton, estudado na graduação), função 91 de McCarthy e a conjectura de Collatz. No terceiro, as aplicações de funções recursivas: Triângulo de pascal e função Ackermann.

No quarto temos a recursividade com o Geogebra: figuras planas e figuras envolvendo geometria dinâmica, e editores de imagens para o efeito recursivo. Assim, ampliamos o repertório de ensino, que, pela BNCC, não deve ser apenas na dimensão do conhecimento, mas o desenvolvimento pleno: pessoal, social, emocional, físico e cultural.

Há escolas com sala Maker e/ou laboratório de robótica, longe da realidade da maioria, mas é um início. As propostas desse trabalho estão alinhadas com as novas metodologias de ensino, o uso delas tem como base o conceito da metodologia STEAM (traduzindo do inglês: Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática).

1. FUNÇÕES RECURSIVAS

Uma função recursiva é uma função que se refere a si própria. A ideia consiste em utilizar as saídas da própria função como novas entradas.

1.1 Relações e funções

O produto cartesiano $A \times B$ entre os conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) , onde a é um elemento do conjunto A ($a \in A$) e b é um elemento do conjunto B ($b \in B$).

Exemplo 1.1: O produto cartesiano dos conjuntos $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$. O conjunto A tem 2 elementos, o B tem 3 e $A \times B$ tem 6 elementos.

Uma relação $R: A \rightarrow B$ é qualquer subconjunto de $A \times B$. Se $(a, b) \in R$, escrevemos $R(a) = b$ ou $a \rightarrow b$.

Exemplo 1.2: Como $A \times B$, no exemplo 1.1, tem 6 elementos, então $A \times B$ tem 2^6 subconjuntos e, portanto, existem 64 relações entre os conjuntos A e B . As relações triviais são o conjunto nulo $R_1 = \emptyset$ e o próprio produto cartesiano $R_2 = A \times B$. Vejamos outras relações: $R_3 = \{(a, 1), (b, 2)\}$ e $R_4 = \{(a, 3), (b, 1)\}$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma relação de A em B , tal que a cada um dos elementos de A está associado um único elemento de B . No exemplo acima R_3 e R_4 são funções. O domínio $D(f)$ da função $f: A \rightarrow B$ é o conjunto A , o contradomínio $CD(f)$ é o conjunto B e a imagem é o conjunto formado pelos elementos de B que estão associados a algum elemento de A . Denotamos por $Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ com } (x, y) \in f\}$ a imagem de f .

1.2 Recursividade

A recursão está presente em diversas áreas: Arte, Linguística, música, computação e matemática, nesta última, objeto desse trabalho, pode ser usada para definir, por exemplo, seqüências e funções.

Na computação, um algoritmo recursivo é o processo pelo qual passa certo procedimento quando um dos passos envolve a repetição do passo anterior. Para a recursão funcionar, a parte que falta resolver deve se parecer com o problema original, mas sendo ligeiramente menor ou mais simples do que o problema original.

Segundo ROSEN (2010, p. 294), “às vezes é difícil definir um objeto explicitamente. entretanto, pode ser fácil defini-lo em termos de si próprio”. Ou seja, recursivamente, seria incluir o item que está sendo definido como parte da definição. Para ajudar a entender o conceito de recursão consideremos a clássica recursão de Fibonacci: $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 8, f(6) = 13, \dots$, em que o primeiro e o segundo termos são iguais a 1 e, a partir do terceiro, cada termo é obtido pela soma dos dois anteriores ($1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3, \dots$).

A sequência de Fibonacci escrita como função recursiva:
$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2), n = 2, 3, 4, \dots \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

O código em Python da recursão de Fibonacci:

```
def f(n):
    if n==0 or n==1:
        return 1
    else:
        return f(n-1) + f(n-2)
```

2. É UMA FUNÇÃO?

Mas se no processo de modelagem construímos uma relação, desejamos saber se realmente foi obtida uma função por ser um fator importante na pesquisa.

2.1 Função de Fibonacci

A recursividade (no tópico 1.2) é uma função:
$$f(n) = \begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2), n = 2, 3, 4, \dots \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Parece ser obviamente uma função, pois cada valor depende dos dois valores anteriores. Uma possibilidade é mostrar por indução que a recursividade é crescente e por tanto gera uma função. Outra possibilidade é observar que esta recursividade é do tipo linear e, portanto, é da forma $f(n) = r^n$

Substituindo na recursividade, temos $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$, que dividindo ambos por r^{n-2} resulta $r^2 - r - 1 = 0$, a qual gera as soluções $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como $f(n)$ é combinação linear de r_1^n e r_2^n : $f(n) = \dots$

A partir das condições iniciais temos o sistema de equações
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}^0 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}^0 = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}^1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}^1 = 1 \end{cases}$$

resolvendo este sistema temos,
$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

e substituindo em $f(n)$ resulta, $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

2.2 Aproximação da raiz quadrada de 2

Observe a seguinte função:
$$f(n) = f(n-1) - \frac{f(n-1)^2 - 2}{2f(n-1)}$$

os primeiros valores gerados pela recorrência:

$f(0) = 2$ $f(1) = 1,5$ $f(2) = 1,4166666666666666$ $f(3) = 1,41421568627450$

Observa-se que é uma função por ser um caso do método de Newton para calcular os zeros de um polinômio $p(x)$, com recorrência: $f(x) = \frac{p(x)}{p'(x)}$, a qual converge para a raiz do polinômio. No nosso caso $f(n)$ e

$f(x_n) = f^2(n) - 2$. Logo, $p'(x) = f(x)$. Portanto f é uma função.

Para se chegar à função acima, pode-se partir de: $\sqrt{2}$, e obtemos a função $f(x) = \frac{f(x)^2 + 2}{2f(x)}$

2.3 Função 91 de McCarthy

John McCarthy criou a função conhecido com seu nome, definida por
$$M(n) = \begin{cases} M(n-11) & \text{if } n > 100 \\ n & \text{if } n \leq 100 \end{cases}$$

É uma função, consideremos o caso:

- se $n = 100$, temos que $M(n) = 90$
 - se $n = 99$, temos que $M(n) = 91$
- 111, logo $M(n+1) = 100$ neste intervalo a função é constante, e igual a 91, isto é, $M(n) = 91$ $90 \leq n \leq 100$.

este procedimento pode ser aplicado para números negativos, portanto, $M(n)$ é uma função.

O código em Python

```
def M91(n):
    if n > 100:
        return n-10
    else:
        return M91(M91(n+11))
```

2.4 Conjetura de Collatz (Problema 3n+1)

É simples, porém, difícil de ser provada como verdadeira ou não, para alguns esse é o problema mais simples ainda em aberto. Em ROSEN (2010), encontramos: Seja $C(n)$ a recursividade que leva um número par n para $n/2$ e um número ímpar n para $3n+1$, para todos os números inteiros positivos n , vamos chegar ao inteiro 1.

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n+1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Por exemplo, se $n = 16$, encontramos $C(16) = 8, C(8) = 4, C(4) = 2$ e $C(2) = 1$. Se n é par $C(n) = C(n/2)$, logo $C(16) = C(8) = C(4) = C(2) = C(1) = 1$. Ou seja, a conjectura chega a 1 quando “encontra” qualquer potência de base 2. Mas, se $n = 27$, temos 111 passos para chegarmos em 1.

O recorde em 2020, de David Barina, é para 2^{68} (aproximadamente 2,95 bilhões).

Em Python

```
def collatz (n):
    if n == 1:
        return n
    if n % 2 == 0:
        collatz (n/2)
    else:
        collatz (3*n+1)
```

3. APLICAÇÕES DE FUNÇÕES RECURSIVAS

As funções recursivas têm amplas aplicações, apresentaremos algumas das aplicações das funções recursivas.

3.1 Triângulo de Pascal

Dada função $f(m, n)$, definida recursivamente por: $f(m, n) = \begin{cases} f(m-1, n) + f(m-1, n-1), & \text{se } m > 1 \text{ e } n > 1 \\ 1, & \text{se } m = 1 \text{ ou } n = 1 \end{cases}$

Segue alguns valores da função f ,

- $f(0,0) = 1$
- $f(1,0) = 1, f(1,1) = 1$
- $f(2,0) = 1, f(2,1) = f(1,0) + f(1,1) = 1 + 1 = 2, f(2,2) = 1$

as próximas linhas continuam sendo geradas recursivamente. Observe que a função recursiva está de acordo com a relação de Stifel (ou relação de Pascal). Os valores do triângulo de Pascal têm a aplicação prática de ser os coeficientes do polinômio $(a + b)^n$ mediante a fórmula: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Do binômio de Newton conhecemos que: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Portanto, podemos concluir que $f(m, n) = \frac{(a+b)^n}{n!}$, relacionamos assim a função recursiva do triângulo de Pascal com a teoria combinatória, duas áreas que aparentemente não tinham conexão.

3.2 Função de Ackermann

Originalmente tem 3 argumentos, porém Rózsa Peter e Raphael Robinson a reduziram e hoje é definida com dois argumentos (também chamada de Função Ackermann-Peter) da seguinte forma:

$$A(m, n) = \begin{cases} A(m-1, 1), & \text{se } m = 0, \\ A(m, A(m-1, n)), & \text{se } m > 0, \end{cases}$$

alguns valores de $A(m, n)$ podem ser calculados facilmente:

- se $m = 0$, então $A(0, n) = n + 1$ para $n \geq 0$, por exemplo $A(0, 234) = 235$
- se $m = 1$, $A(1, 0) = A(0, 1) = 2$
 $A(1, 1) = A(0, A(1, 0)) = A(0, 2) = 3$

por indução matemática concluímos que $A(1, n) = n + 2$

- se $m = 2$, $A(2, 0) = A(1, 1) = 3$
 $A(2, 1) = A(1, A(2, 0)) = A(1, 3) = 5$

por indução matemática se conclui que $A(2, n) = 2^{n+3} - 3$

- se $m = 3$, $A(3, 0) = A(2, 1) = 5$
 $A(3, 1) = A(2, A(3, 0)) = A(2, 5) = 17$

por indução matemática se conclui que $A(3, n) = 2^{2^{n+3}} - 3$.

Interessante, enquanto $A(0, n)$, $A(1, n)$ e $A(2, n)$ crescem linearmente, $A(3, n)$ cresce exponencialmente.

- Se $m = 4$, $A(4, 0) = A(3, 1) = 17$
 $A(4, 1) = A(3, A(4, 0)) = A(3, 17) = 2^{2^{20}} - 3$
 $A(4, 2) = A(3, A(4, 1)) = A(3, 2^{2^{20}} - 3) = 2^{2^{2^{20} - 3}} - 3$

por indução matemática se conclui que $A(4, n) = 2^{2^{2^{n+3}}} - 3$, com $n + 3$ níveis nas potências de 2.

Então $A(4, n)$ cresce mais rápido que qualquer função exponencial, por isso essa função é muito usada em computação, principalmente para analisar o desempenho dos compiladores no uso da recursividade. Se calculamos $A(4, 4)$ usando todos os níveis de recursividade até chegar a $A(0, p) = p + 1$, a quantidade de recursões não é suportada pelos compiladores. A solução é salvar os valores calculados para serem usados nos próximos níveis.

4. RECURSIVIDADE USANDO O GEOGEBRA E OUTROS RECURSOS TECNOLÓGICOS

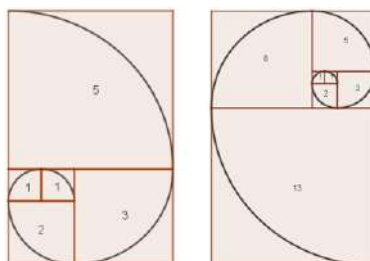
Na educação básica temos diversos conteúdos com a ideia de recursividade, por exemplo: Sequências, Progressões, Funções recursivas, Matemática financeira e Arte (imagens recursivas). E se relacionam de forma interessante.

4.1 Proposta de utilização do Geogebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, criado na Universidade Salzburg – Áustria, 2001, de distribuição livre e multiplataforma. Utilizado em quase todo o planeta, pois é para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar; em uma única interface gráfica (GUI).

Espiral de Fibonacci: os dois quadrados menores têm lados medindo 1 u.c., o lado do terceiro mede 2 u.c. ($1 + 1$, a soma dos dois primeiros), o quarto quadrado de lado 3 u. c. ($1 + 2$, a soma do segundo com o terceiro). Segue a recursividade, a medida do lado de um quadrado é a soma dos lados dos quadrados anteriores.

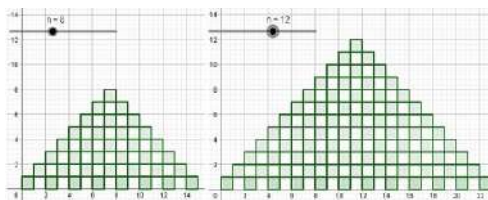
Figura: espiral de Fibonacci com 5 iterações e com 7 iterações.



Fonte: próprio autor.

Números triangulares: é uma figuras dinâmica, a sequência de números triangulares com quadrados, modifica-se no botão ‘controle deslizante’. Para $n = 0$ não nada, para $n = 1$, temos 1 quadrado; para $n = 2$, temos 3 quadrados, e assim segue a sequência, até $n = 20$. Recorrência definida por: $T_n = T_{n-1} + n$. Sendo $T_1 = 1$.

Figura 1: Números triangulares no Geogebra de forma dinâmica.



Fonte: próprio autor.

Imagens Recursivas (efeito Droste): Arte tecnológica com estrutura recursiva.

Relacionamos arte e matemática usando editor de imagem; abaixo, usei o Microsoft Paint. Exemplo com a obra *Deus Pai*, de Girolamo Santacroce, 1530, Nápoles, Itália. Fotografia feita no MASP –SP, com redução recursiva de $1/3$ e cada imagem tem $(2/3)^2 = 4/9$ da área da figura imediatamente maior.

Figura 2: Imagens obtidas com 4 e 8 iterações



Fonte: próprio autor.

CONCLUSÕES

Assim, mostramos a relação da matemática com a tecnologia e com a arte, ampliando as possibilidades de desenvolvimento pleno, o que está presente na BNCC, o ensino não deve ser apenas na dimensão do conhecimento, mas o desenvolvimento pessoal, social, emocional, físico e cultural.

Então, com as aulas de Robótica e Programação, salas “Maker” e laboratórios de tecnologia, devemos usar a programação como ferramenta na sala de aula. O aluno vai modelar programas para resoluções de problemas. Logo temos a missão de nos preparar para receber os “novos” alunos que já têm essa bagagem de conhecimento.

O conjunto de novas metodologias STEAM combina em um único ambiente (escolar) áreas que por muito tempo foram distantes, mas que agora é imprescindível que trabalhem juntas: Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática. Com o objetivo de preparar para o mercado de trabalho e os desafios como cidadão.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2018. Disponível em: <basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em 20 mar.2021.
 LAGES, Elon; et all. **A Matemática do Ensino Médio**, 4 vols., 9 ed. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
 ROSEN, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações**, Tradução: Helena Castro e João Guilherme Giudice, 6ª ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: McGraw-Hill, 2010.



INTRODUÇÃO A DINÂMICA E MODELAGEM NO ESTUDO DE FENÔMENOS EPIDEMIOLÓGICOS.

Viana Brito, Sandro Willian, sandro.brito@cameta.ufpa.br¹
¹Universidade Federal do Pará

Resumo: Neste trabalho apresentamos um estudo do modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis – Infectados – Recuperados) proposto em 1927 por McKendrick e Kernack a fim de prevê a evolução de uma doença contagiosa de acordo com a interação dos indivíduos de uma população em um determinado período de tempo. Exibimos um estudo qualitativo sobre a aplicação de Sistemas Dinâmicos (caso contínuo) no contexto da epidemiologia e fenômenos infecciosos, introduzindo conceitos de EDO'S (Equações Diferenciais Ordinárias) e modelagem matemática. Nesse sentido, objetivamos compreender o comportamento assintótico e a evolução de tais fenômenos e, portanto, apresentar tal estudo como uma proposta fidedigna a realidade.

Palavras-chave: Epidemiologia, Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais Ordinárias, Modelo SIR.

INTRODUÇÃO

A história humana foi marcada por diversas epidemias aos quais estudos apontam que o número de mortes provocado pelas maiores epidemias é impreciso, mas quando comparados a qualquer guerra, o número de mortes é muito maior. Exemplo disso se encontra dentro da nossa realidade atual com a pandemia do Covid-19. Nesse sentido, o estudo da Epidemiologia se propõe a estudar tais fenômenos e suas consequências para população humana, fornecendo subsídios para criar ações voltadas para a prevenção e o controle da doença. Assim, se faz necessário compreender a proliferação das doenças infecciosas do ponto de vista dos Sistemas dinâmicos (sistemas que evoluem com o tempo), surgindo então a Epidemiologia Matemática, que visa ajudar a traçar políticas de controle dessas doenças e melhor utilização dos recursos destinados para tal. Um desses modelos é o SIR.

SISTEMA DINÂMICO

Começamos a definir um Sistema Dinâmico, considerando W um subconjunto aberto do R^n e $f: W \subset R^n \rightarrow R^n$, e considerando a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, ao qual está associada a um campo vetorial definida por f e reciprocamente o campo vetorial f está associado a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$. As soluções dessa equação $u: I \subset R \rightarrow W$, tais que $\dot{u}(t) = f(u(t))$, para todo $t \in I$, são chamadas de curvas integrais de f . Após isso, podemos definir outro conceito fluxo como uma aplicação $\phi: I \times W \rightarrow W$, então de outra forma podemos dizer que o fluxo de uma equação diferencial é para cada $y \in W$ a solução de $\dot{x} = f(x)$, onde $u(0) = y$ é definida em um intervalo maximal I_t , a partir disso podemos começar a definir uma órbita como a imagem de ϕ e o conjunto de órbitas associadas ao campo vetorial f de espaço de fase. Assim também iremos observar pontos de equilíbrios (Importantíssimo para nossos estudos posteriores sobre o modelo SIR), que são pontos onde nosso campo

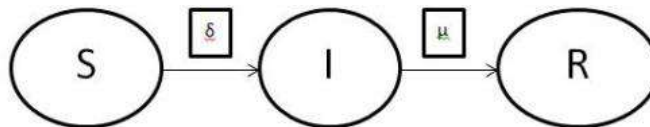
vetorial permanece fixo mesmo com a mudança da variável t , podendo ser clasificados como estáveis ou instáveis de acordo com a convergencias das trajetórias para o ponto de equilibrio \bar{x} .

MODELO SIR

O SIR é um modelo matemático proposto em 1927 por McKendrick e Kernack, é um modelo compartimental, onde a população é dividida em classes disjuntas, denotadas por:

- a) Suscetíveis, (t), que representam a classe dos indivíduos saudáveis, ou seja, aqueles indivíduos que estão expostos a uma eventual infecção.
- b) Infectados, (t), que representam a classe dos indivíduos que estão infectados e que são possíveis causadores de novas infecções, ou seja, indivíduos infecciosos.
- c) Recuperados, (t), que representam os indivíduos recuperados da doenças, passando assim a se tornarem imune a uma nova infecção.

Fluxograma do modelo SIR



Apartir do fluxograma iremos definir nosso modelo com os seguintes taxas não negativss δ e μ que são, respectivamente, a taxa de infecção e a taxa de recuperação, onde o parâmetro m nos fornece a taxa de natalidade. Assim podemos assumir que os novos nascimentos serão suscetíveis a infecção, desta forma denotamos por mT o número total de nascimentos. Afim de tornar o modelo mais fiel a realidade, também iremos considerar que individuos irão falecer por influencia da doença ou não, assim iremos definir por mS , mI e mR a mortalidade respectivamente nas clases de Suscetíveis, Infectados e Recuperados.

Depois de observar nosso Sistema de EDO'S, objetivamos:

- a) Entender como se comportam globalmente as soluções do nosso modelo.
- b) Conhecer convergência e pontos de estabilidades do modelo.

$$\left\{ \begin{matrix} I \\ I \end{matrix} \right.$$

Observando o Sistema de EDÒ que modela o SIR (simples), discutimos sobre alguns resultados do modelo, ao observar uma taxa de infecção maior que a taxa de recuperação podemos modelar através da equação: —, assim se consegue perceber que quando $R_0 > 1$ teremos inicio de uma epidemia,

caso a epidemia tende se extinguir naturalmente. Ainda no contexto do SIR observamos tal com dinâmica vital, onde se é modelado por esse sistema de EDO'S:

$$\left\{ \begin{matrix} I \\ I \end{matrix} \right.$$

E outro resultado se dar através do conceito de ponto de equilíbrio, onde os pontos de equilibrio do sistema são aqueles onde a taxa de crescimentos das populações de suscetíveis e infectados permanece constante. Na linguagem matemática, os pontos de equilibrio do sistema são aqueles onde a derivada se anula.

onde neste modelo com vacinação ao olhar para derivada e), temos que se igualamos a 0,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \\ - \end{array} \right.$$

segundo o conceito de ponto de equilíbrio, temos neste modelo 2 pontos e
 $\left(- , - \left[- \right] \right)$, onde em obtemos um ponto livre de infecção e em um ponto endêmico.
Desta forma, entendemos melhor o comportamento das soluções do modelo, assim como sua estabilidade.

CONCLUSÕES

Portanto, Concluimos que através do estudo do modelo SIR, obtivemos um ponto de partida para muitos modelos epidemiológicos, fornecendo informações fundamentais para o preparo dos sistemas de saúde, assim como uma melhor administração dos recursos destinados ao combate do problema, mostrando assim sua versatilidade e possibilidade de aplicação em diversas doenças, em especial no que se refere a epidemiologia. Dessa forma é importante pontuar que para cada situação é importante adequar o modelo conforme as peculiaridades que cada contexto requer, mostrando assim a necessidade da interdisciplinaridade entre as diversas áreas da ciência.

REFERÊNCIAS

VELEDA FARIAS, A. **Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária.** Dissertação (Bacharelado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – FURG. Rio Grande do Sul, p. 76. 2017.

ALVES PEREIRA, F. **Existência e Estabilidade de órbitas Periódicas da Equação de van der Pol-Mathieu.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia– UFU. Uberlândia, p. 37. 2012.

BASÁÑEZ, M. G.; RODRIGUEZ, D. J. **Dinámica de transmisión y modelos matemáticos em enfermedades transmitidas por vectores.** *Entomotropica*, v. 19(3), p. 113–134, 2004.

MELO, W. d.; PALIS, J. **Introdução aos sistemas dinâmicos**, 1978.

,

,



USO DE HQ's PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

SOUSA, Davison Renan Abreu de, davisonrenanufpa@gmail.com¹

Discente FACMAT\UFPA¹

NASCIMENTO, João Batista do, e-mail: jbn@ufpa.br²

Docente FACMAT\UFPA²

Resumo

Neste trabalho iremos apresentar algumas experiências em uso das histórias em quadrinhos (HQs), dado que, há diversos estudos indicando envolver nessas um quantitativo expressivo de elementos que ajuda na aprendizagem, bem como, há outros indicando que ensino de matemática no Brasil carece muito se enriquecer de tais processos. Assim, relatamos experiências no uso de HQs no ensino de matemática em nível internacional e nacional, destacando atividade realizada em grupo pelo autor como laboratório de disciplina. Sendo que o objetivo global é produzir um material de exposição que seja disseminador e sirva de base para construirmos diversos diálogos.

Palavras-chave: História, Matemática, HQs, Quadrinhos, Educação.

Introdução

Ensinar matemática continua sendo um dos maiores desafios, uma vez que diversos fatores alimentam ideia de que matemática é algo difícil, por vezes desnecessária e negativamente problemática. Segundo D'Ambrosio (1989) o ensino da matemática no Brasil lamentavelmente ainda se fundamenta na habitual aula expositiva, ao qual o professor reproduz para a lousa um resumo daquilo que considera importante e suficiente para que ocorra o processo de ensino, portanto incentivando diversificar formas de ensino.

Tendo este pensamento, fica preponderante tornar ensino de matemático mais prazeroso e interessante, o que tem levado educadores estudar visando usar meios e ferramentas que possam lhe auxiliar, tais como jogos, Softwares, vídeos, etc., e uma dessas que nos chamou atenção pelo imenso potencial de ajudar por estimular na compreensão e resolução de exercícios, além de exercitar a criatividade dos alunos, é o uso de Histórias em Quadrinhos (HQs), também conhecido como gibis. Posto que, o cerne do educacional é ensino básico, sendo esse composto por crianças e adolescentes, de modo geral, os quais se interessam fortemente por histórias em quadrinhos (HQs), posto que, sua leitura é um passatempo bastante comum até mesmo entre jovens e alguns adultos.

Muitos autores já dedicaram suas pesquisas no uso de histórias em quadrinhos (HQs), também conhecidos como gibis, em sala de aula (LUYTEN 1985a, 1985b, 2000; MOYA (1997); VERGUEIRO (2012\4), estudando elementos que ratifique a utilização desse recurso em meios educacional. Havendo diversos indicativos de que HQs ampliam o processo educativo e cognitivo por combinarem a imagem (comunicação visual) com o texto escrito (comunicação verbal). Desta forma, é valioso compreendermos as HQs não apenas uma forma de expressão que crianças encontram com facilidade e utilizam como meio de passatempo. As histórias podem conter elementos significativos que oferecem aos estudantes informações importantes quanto a determinados assuntos, servindo ao educador como ferramenta mediadora do conhecimento.

Assim, este trabalho busca apresentar exemplos do uso de histórias em quadrinhos como meio de ensinar, estimular aprendizagem e disseminar saberes matemáticos, dado que, concordamos com Vergueiro quando diz que “as histórias em quadrinhos vão ao encontro das necessidades do ser humano, na medida em que utilizam fartamente um elemento de comunicação presente, a imagem gráfica”. (VERGUEIRO, 2004, p.8 e 9).

Exemplos de uso da História em Quadrinho

Em nível internacional, há disponível e traduzidas para o português duas obras do professor americano de matemática Larry Gonick envolvendo Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra

Figura 1: Cálculo e Álgebra em quadrinhos. Capa dos livros de Larry Gonick



Fonte: arquivo do autor

No Brasil, a inclusão das HQs como ferramenta educacional percebemos ser ainda bastante tímida. Um produtor de histórias em quadrinhos é Mauricio de Sousa com a sua Turma da Mônica que surge em meados da década de 1970, apesar de não ser necessariamente direcionadas para conteúdo da escolarização formal, há exemplares que abordam temas de matemática.

Figura 2: História da matemática. Gibi a Turma da Mônica de Maurício de Souza



Fonte: Arquivo do autor

Como consta em referência, já identificamos propostas de uso de HQs no ensino de matemática em forma de tese de mestrado e Trabalhos de Conclusão de Curso -TCCs.

Aqui na UFPA, quando da realização da disciplina MTE1006 - LABORATORIO DE ENSINO DE GEOMETRIA PLANA\2018 .4, ministrada pelo docente João Batista do Nascimento, o autor sendo interessado por quadrinho\desenho, foi incentivado produzir um exemplo experimental no tema, quando compomos uma equipe com mais os seguintes: Andrea do Socorro de Souza Moraes – mat. 201809640092, Evelyn Sabrina Silva e Silva – mat. 201809640107, Taynara de Cássia Conceição Corrêa – mat. 201809640108.

Intitulamos esse trabalho por USO DE QUADRINHOS COMO FERRAMENTA DE ENSINO NO LABORATÓRIO DE GEOMETRIA PLANA, quando apresentamos alguns fundamentos da aplicação do gênero histórias em quadrinhos como recurso didático e um exemplo que produzimos envolvendo conceito de geometria plana, disciplina central

PÔSTERES

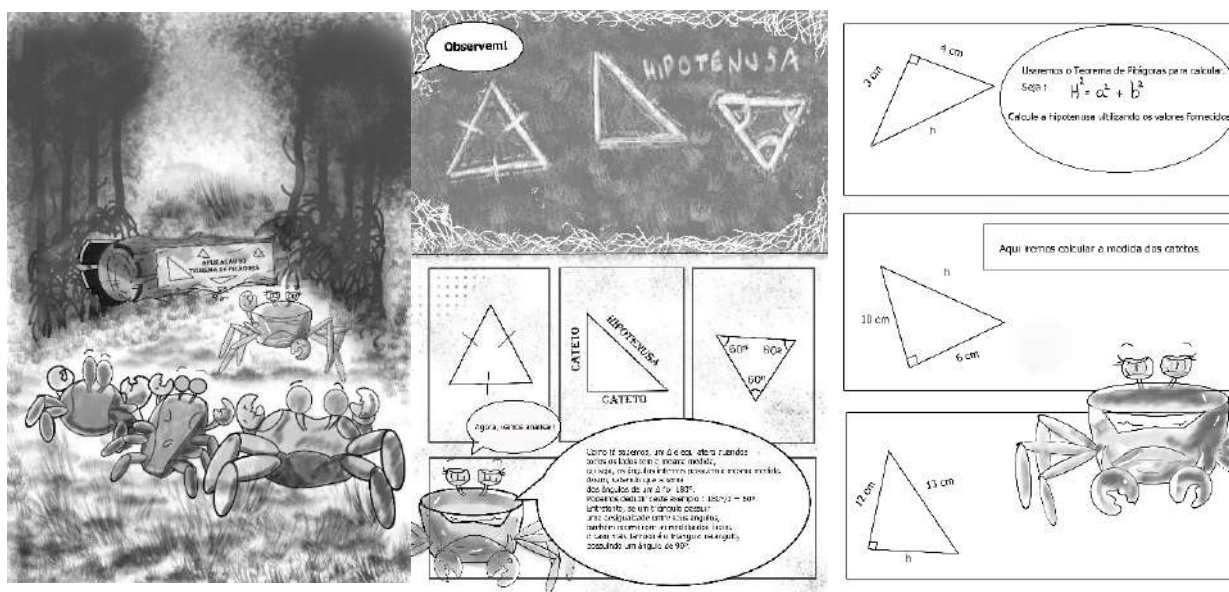
Figura 3: reprodução de página do HQ que produzimos envolvendo caso de Congruência de Triângulos (LAL).



Fonte: Arquivo do autor

Como já foi mencionado anteriormente, como consta em referência, já identificamos propostas de uso de HQs no ensino da matemática em forma de tese de mestrado e Trabalho de Conclusão de Curso – TCC. Assim queremos demonstrar um pequeno exemplo do material que está sendo confeccionado com intuito de aplica-lo nas series do ensino básico, especificamente nas turmas de fundamental II e ensino médio.

Figura 4: reprodução de páginas do HQ em produção, envolvendo a aplicação do teorema de Pitágoras e exercícios.



Fonte: arquivo do autor

Objetivos Gerais

Neste trabalho iremos:

- Apresentar um panorama do uso de HQ
- Exemplificar uso de HQ no ensino de matemática
- Discutir alguns fundamentos da aplicação de HQ
- Dialogar com visitantes da bienal visando aplicar essa temática em situação escolar

Metodologia

Os resultados aqui apresentados se centram mais em pesquisa histórico-biográfica visando promover uma panorâmica expressiva do estado da arte na temática de uso educacional de HQ, destacando e aprofundando em ensino de matemática, nossa vertente principal. Havendo ainda o uso de outros processos de pesquisa pela complexidade que envolve o HQ, tais como: processo de visualização humana, produção textual em quadrinhos, técnica e traços de desenhos etc.

Conclusão

O presente trabalho destaca diversas situações do uso das histórias em quadrinhos (HQs) como recurso didático na sala de aula considerando ser isso uma maneira diferente, possuir alta capacidade de motivar, ser forma divertida de transmitir os assuntos e exercita a criatividade, fatores esses que diversas pesquisas educacionais defendem ser base para melhorar aprendizagem.

Assim, considerando os problemas atuais que envolve ensino de matemática no Brasil, fica plausível enxergar quadrinhos como ferramenta didática com potencial de aplacar um pouco dessa situação, o que torna relevante tudo exposto e, ao mesmo tempo, amplia e diversifica tanto o campo de estudo e formação que fica exigindo um aprofundamento mais cuidadoso, posto que, mesmo em situação mais simples solicita conhecimentos inter(trans)disciplinares.

Finalizando, podemos dizer que as HQs ainda são poucas usadas no ensino da matemática e não podemos dispensar das possibilidades que essas oferecem para adquirir e transmitir conhecimentos, ficando relevante não apenas usar quadrinhos em sala de aula, como também envolver-se com os discente em algum processo de criação dessas, buscando além do conhecimento matemático, servir de base para que os estudantes desenvolvam senso e raciocínio lógico-matemático, expressando tudo isso na produção física de um HQ para socializar.

Referência

ASSIS, E, S. A confecção de histórias em quadrinhos como mecanismo de aprendizagem de geometria. Educação Matemática Pesquisa. V.22, n.2, pp. 441-465, 2019.

CASTIGLIO, S, M. PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS SOBRE MATEMÁTICA NOS CARTUNS. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

CAVALCANTE, L. A. de O. No dia mais claro: um estudo sobre o sentido atribuído às histórias em quadrinhos por professores que ensinam matemática em formação. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

D'AMBROSIO, U. Da realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática. 6. ed. Campinas: Summus/UNICAMP, 1986.

- GONICK, Larry. Álgebra em quadrinhos. Tradução: Castro. H. São Paulo: Blucher, 2020.
- GONICK, Larry. Cálculo em quadrinhos. Tradução: A. Marcelo. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2019.
- JUNIOR, F, P, S, A.; TRINDADE, A, K, B.; OLIVEIRA, L, J, N. Histórias em quadrinhos como ferramenta de contextualização de conceitos matemáticos. *Ensino da Matemática em Debate*. v.6, n.1, p. 34-45, 2019.
- LUYTEN, S. M. B. O que é História em Quadrinhos. São Paulo: Brasiliense, 1985a.
- LUYTEN, S. M. B. HQ como prática pedagógica. In: LUYTEN, S. M. B. (Organizadora). *História em Quadrinhos: Leitura Crítica*. 2a ed. São Paulo: Paulinas, 1985c. p. 84 – 91.
- MORAES, P. HQS E MATEMÁTICA. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- MOYA, Á. de; OLIVEIRA, R. de. História (dos quadrinhos) no Brasil. In: MOYA, Á. de (org.). *Shazam*. São Paulo: Perspectiva, 1977.
- NEVES, S, C. A HISTÓRIA EM QUADRINHOS COMO RECURSO DIDÁTICO EM SALA DE AULA. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Arte Visuais) – Departamento de Artes Visuais, Universidade de Brasília. Palmas, 2012.
- SANTOS, G, O.; SILVA, C, V, S. Aprendizagem matemática baseada em histórias em quadrinhos (HQs) para o ensino médio. In: RIBEIRO, J, C.; SANTOS, C, A. (org.). *Estudos teórico-metodológicos nas ciências exatas, tecnologia e terra 2: Ponta Grossa: Atena, 2020*. p. 189-200.
- VERGUEIRO, W. Uso das HQs no ensino. In: RAMA, Â.; VERGUEIRO, W. (orgs.). *Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula*. 4a. ed. 1a reimpressão. São Paulo: Contexto, 2012, p. 7- 29.



O JOGO DE XADREZ COMO FERRAMENTA DE APLICAÇÕES DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Veiga, Emerson de Sousa, emersonv@ufpa.br¹
Ramos, Augusto Cesar Abreu, augusto.ramos@icen.ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará / Escola de Aplicação da UFPA

²Universidade Federal do Pará

Resumo: *A partir da busca por metodologias diversificadas e inovadoras do ensino da Matemática na Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EAUFPA), nasce a oficina “Aplicações de Conceitos Matemáticos no Jogo de Xadrez”, que ocorreu nos dias 16 e 17 de dezembro de 2021. A oficina foi pautada no esporte Xadrez, explorando a sua ludicidade, junto com a riqueza de conceitos matemáticos associados a este. Conceitos como Geometria, Progressões, Probabilidade, Combinatória e outros foram explorados na oficina, todos esses associados ao jogo de Xadrez de forma concreta. Este trabalho tem o intuito de compartilhar os resultados obtidos a partir da experiência desta oficina e mostrar uma abordagem de como o jogo de Xadrez pode ser utilizado pelos professores de Matemática como ferramenta de aplicação de conteúdos matemáticos.*

Palavras-chave: *Matemática, Xadrez, Aplicação.*

1. INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática não se dá somente através da explanação de conteúdos teóricos e resoluções de exercícios a partir de algoritmos já pré-estabelecidos e repassados em sala de aula. É papel do professor/educador sempre buscar por novas metodologias e práticas pedagógicas que auxiliem no ensino e aprendizagem, estimulando uma experiência de estudo ativa e instigante ao aluno. Dentre as ferramentas que contribuem com metodologias diversificadas no ensino da Matemática destacamos o uso de jogos, que são ferramentas educativas cuja utilização, não só em conjunto com a Matemática, mas também com diversas áreas do conhecimento, é de extrema importância, pois eles agem como facilitadores no aprendizado dos alunos (SAVI e ULBRICHT, 2008). Aqui destacamos, sobretudo, os jogos estratégicos que ajudam no desenvolvimento do raciocínio lógico e no desenvolvimento cognitivo, como é o jogo de Xadrez.

Deste modo, este trabalho se baseia em uma oficina virtual realizada com alunos do ensino fundamental e médio da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EAUFPA), através do projeto “Laboratório de Ensino de Matemática” vigente na escola por meio do Programa Labinfra, onde o jogo de Xadrez foi utilizado como ferramenta principal para aplicação de conceitos matemáticos trabalhados com os alunos através de uma metodologia diferenciada. Além dos alunos participantes da escola, também participaram estudantes de graduação em Licenciatura em Matemática, o que julgamos ser uma boa forma dos graduandos, que serão em grande parte futuros professores/educadores, aprimorarem sua prática docente conhecendo novas metodologias.

2. OBJETIVOS

A oficina tinha como objetivos: realizar uma breve apresentação sobre a história do Xadrez, mostrando sua evolução e variações com o passar do tempo; destacar os principais benefícios que o Xadrez pode trazer aos seus praticantes; ensinar as principais regras do jogo/esporte Xadrez; e utilizar o Xadrez como ferramenta de aplicação de conceitos matemáticos, tais como a Combinatória, Probabilidade, Geometria, Progressões etc., valendo-se da ludicidade do jogo e utilizando-o como metodologia de ensino diversificada para um melhor aproveitamento na aprendizagem de Matemática por parte dos alunos.

3. METODOLOGIA

A oficina foi ministrada em dois dias com alunos do ensino fundamental e médio da EAUFPA, além de alguns alunos da graduação de Licenciatura em Matemática da UFPA, através do aplicativo Google Meet, a fim de minimizar os riscos de contaminação pela Covid-19 e suas variantes, dado o período pandêmico que se estende até o momento que este trabalho é redigido. No primeiro encontro foi apresentado aos alunos um breve apanhado sobre a história do Xadrez, sua origem e variantes, dando enfoque à famosa lenda de Sessa, onde pôde ser realizada uma primeira aplicação de um conceito matemático (o de progressão geométrica) relacionado ao Xadrez. Além disso, foram apresentados os principais benefícios que o Xadrez pode trazer aos seus praticantes, bem como a relação que o jogo possui com as tecnologias atuais. Ainda foram ensinadas as principais regras básicas do jogo para que os alunos pudessem começar a praticar nos diversos sites disponíveis na internet ou de modo presencial. No segundo encontro foram mostradas algumas partidas modelo para que os alunos entendessem algumas ideias estratégicas e táticas do jogo, e concluímos com a intrínseca relação que o Xadrez e a Matemática possuem, mostrando várias aplicações de conteúdos matemáticos relacionados ao jogo. Abaixo descreveremos os principais tópicos abordados durante a oficina.

3.1. A Lenda de Sessa

No conto, o conceito de somatório dos termos de uma progressão geométrica é aplicado às casas do tabuleiro de Xadrez. Segundo a lenda, Sessa recebeu de seu rei a chance de pedir o que desejasse, como prêmio pelo seu trabalho prestado. Assim, Sessa pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos terceira e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a casa de número sessenta e quatro. O cálculo e o número resultante, o qual assombrou o rei e seus súditos, é mostrado na figura abaixo.

Figura 1 - A lenda de Sessa e o cálculo dos grãos de trigo através da soma dos termos da PG



$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} &= \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} \\
 &= 2^{64} - 1 \\
 &= 18.446.744.073.709.551.615
 \end{aligned}$$

Matematicamente, a quantidade de grãos de trigos pedida por Sessa pode ser calculada pela soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 e razão 2. O número resultante é tão grande que, segundo a lenda, a Índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em dois mil séculos a quantidade de trigo que Sessa pediu! Mesmo sendo um cálculo básico, aplicações como essa surgem como importantes ferramentas na aprendizagem e fixação do conteúdo matemático envolvido por parte dos alunos.

3.2. Benefícios do Xadrez

Os jogos são ferramentas que proporcionam a construção de conhecimentos e experiências que influenciam de forma positiva no processo de aprendizagem, auxiliando o pensar, agir e interagir do estudante. De Faria (1995) nos diz que o jogo é necessário ao nosso processo de desenvolvimento, pois exerce uma função vital para a formação do indivíduo, principalmente como uma forma de assimilação da realidade, criando situações imaginárias, nas quais o educando transfere e substitui suas ações cotidianas pelas ações e características do papel assumido no jogo.

Os enxadristas, como são conhecidos os praticantes de Xadrez, desenvolvem um alto poder associativo para a resolução de situações do jogo a partir do raciocínio lógico (BINET, 1894). O Xadrez nos traz desafios e confrontos diretos com outras mentes, fazendo com que os jogadores tenham que raciocinar eventos futuros a partir de detalhes do jogo, planejando seus movimentos a partir dos movimentos alheios em uma dança de arte, prática e ciência.

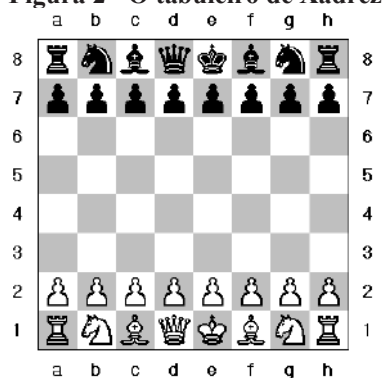
Vygotsky (2008) nos diz que mesmo que os jogos não tenham uma ligação direta com a vida real, estes nos servem como uma ferramenta que funciona como um simulador de eventos importante na resolução de conflitos e solução de problemas. Não obstante a isso, para Piaget (1971) o Xadrez traz a partir de sua análise complexa várias formas de interpretação, como desafios mentais associados de uma atmosfera de raciocínio lógico e movimentos em cadeia que trazem uma beleza artística ímpar ao jogo.

3.3. Conceitos Matemáticos e o Jogo de Xadrez

3.3.1. Plano Cartesiano

O primeiro conceito matemático que podemos observar tendo ligação direta ao jogo de Xadrez é o de Plano Cartesiano, onde localizamos as peças. Por exemplo, uma peça em B2, se considerarmos um plano cartesiano com apenas as semirretas positivas, teríamos a localização dessa peça no plano cartesiano sendo (2,2). Teríamos as coordenadas representadas pelas letras sendo as coordenadas referentes às abscissas e as coordenadas referentes aos números sendo diretamente ligada ao eixo das ordenadas. A partir deste, temos diversos formatos para se trabalhar as movimentações das peças nesse plano, até mesmo considerando as movimentações como funções, por exemplo.

Figura 2 - O tabuleiro de Xadrez



3.3.2. Combinatória e Probabilidade

O estudo das possibilidades se encaixa perfeitamente em um jogo de estratégia, tomando as jogadas possíveis para as peças e quais casas essas poderão abranger. O estudo do princípio fundamental da contagem e outros tópicos da Combinatória pode contribuir para aqueles que anseiam jogar Xadrez, até em alto nível, assim como o Xadrez é um excelente material de pesquisa e aplicações para os matemáticos.

A probabilidade é com certeza um dos conceitos matemáticos mais evidentes em um jogo de Xadrez. Durante um jogo, o jogador tem várias possibilidades de jogadas, mas saber qual seria a melhor jogada, a fim de sair em benefício em relação ao seu adversário, pode fazer toda diferença no final de uma partida. O jogo de Xadrez é movido por probabilidade, onde jogadores tentam por conter os ganhos adversário, prevendo lances e analisando onde as probabilidades de jogo são mais favoráveis.

3.3.3. Outros Conceitos Matemáticos e Curiosidades Sobre o Xadrez

Vários outros conteúdos matemáticos podem ser abordados no jogo de Xadrez como: a aritmética, ao se comparar as peças com seu valor, no controle das casas, nas operações numéricas elementares; da álgebra, no cálculo do desempenho dos jogadores, que corresponde a um sistema de equações com “n” incógnitas; a geometria, o tabuleiro como um plano cartesiano e as verticais, horizontais e diagonais, além dos movimentos geométricos que as peças realizam no tabuleiro. Além desses, podemos destacar ainda aplicações dos conceitos de progressões aritméticas e geométricas, somatórios, geometria plana e entre outros.

Um dado interessante sobre o Xadrez é que, como ele possui um número finito de peças, com um número finito de movimentos em um tabuleiro finito, temos que este é um jogo fechado. Porém, ao calcularmos as possibilidades que existem para os seus 4 primeiros lances, vemos que existem 315 bilhões de maneiras possíveis de se realizar estes movimentos. Após os 10 primeiros lances encontramos mais de 165 quatrilhões de possibilidades. Tomando que uma partida de Xadrez é finalizada, em média, com 40 lances, obtemos 10^{120} jogos possíveis. Este número é conhecido por “número de Shannon”, em homenagem ao matemático Claude Elwood Shannon (1916 - 2001) conhecido como o “pai da teoria da informação”. Um comparativo interessante é que o número de átomos existentes no universo conhecido é estimado em 10^{80} , aproximadamente. Outro dado interessante é que se um computador calculasse um milhão de jogadas por segundo, para calcular todas as probabilidades de jogadas, levaria 10^{90} anos para terminar de calcular. Talvez esta seja uma das várias explicações de porque hoje, 16 séculos depois da criação do Xadrez, ele continua tão popular e ainda jogado por milhões de pessoas ao redor de todo o mundo, além de que dados como esses traz diversas possibilidades ao professor de Matemática para a utilização do jogo de Xadrez em suas aulas como ferramenta metodológica.

3.4. Aplicações Matemáticas no Jogo de Xadrez

Durante a oficina foram apresentadas algumas partidas modelo para que os alunos entendessem melhor a dinâmica do jogo, bem como algumas ideias táticas e estratégias. Ademais, foram trabalhadas diversas aplicações envolvendo o Xadrez e conceitos de Probabilidade, Combinatória, Funções, Plano Cartesiano etc., onde os alunos puderam conhecer uma forma diferente e lúdica de estudar tais conceitos. Esses conceitos foram aplicados em questões retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio, vestibulares afins e outras elaboradas pelo autor, a fim de mostrar como a Matemática aplicada ao Xadrez pode ser cobrada de diferentes formas em exames. Abaixo mostraremos algumas das aplicações trabalhadas durante a oficina.

Figura 3 - Aplicação de probabilidade no jogo de Xadrez

Q3. A figura abaixo nos mostra um tabuleiro de xadrez, também utilizado em outros jogos como damas. Uma maneira de determinar a posição das peças é através de coordenadas. Na figura temos uma rainha posicionada no quadrado e4, ou seja, linha 4 e coluna e.



Cada peça no jogo de xadrez tem características diferentes sobre seu movimento. Os peões, por exemplo, andam apenas uma casa para frente, podendo eliminar o adversário se movimentando para as diagonais. A rainha é uma das peças mais valiosas, pois ela pode se movimentar no sentido horizontal, vertical e nas diagonais por quantas casas desejar. Com a rainha posicionada na casa e4, sendo movimentada uma única vez, aleatoriamente, qual a probabilidade de encerrar seu movimento na casa a8?

- a) 1/10
- b) 1/20
- c) 3/25
- d) 1/27
- e) 4/15

Figura 4 - Aplicação de função no jogo de Xadrez

Q6. Em 1889 uma famosa partida de xadrez foi jogada entre o alemão Emanuel Lasker e o austríaco Johan Bauer. O diagrama a seguir corresponde à posição no 15º lance.



O lance realizado por Lasker foi o incrível $Bxh7+$, onde seguiu-se $Rxh7$, $Dxh5+$, $Rg8$, $Bxg7!$, $Rxg7$, $Dg4+$, $Rh7$, $Tf3$, e as brancas ganharam a partida no 38º lance.

Agora imagine que o tabuleiro corresponde a um plano cartesiano cuja origem $(0, 0)$ corresponde à casa A1, os valores inteiros positivos do eixo das abscissas correspondem às casas horizontais da primeira fileira (A1, B1, C1, D1, E1, F1, G1, H1) e os valores inteiros positivos do eixo das ordenadas correspondem às casas verticais da primeira coluna (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8). Deste modo, qual função descreve o movimento realizado pelo Bispo no 15º lance da partida ilustrada?

- a) $y = 2x - 1$
- b) $y = x + 1$
- c) $y = x - 1$
- d) $y = 2x + 1$
- e) $y = -x + 1$

4. CONCLUSÕES

Através da oficina foi possível mostrar aos alunos que estudar e aprender Matemática não é tarefa enfadonha como muitos imaginam ser. A partir de metodologias diferenciadas, aprender Matemática pode ser, além de divertido, muito significativo na vida do aluno, e a utilização de jogos educativos, como o Xadrez, torna-se uma importante alternativa para este objetivo. Ao final da oficina, foi disponibilizado aos participantes um Quiz para que eles avaliassem a atividade e respondessem algumas questões sobre a oficina. De acordo com os resultados obtidos, além dos dados coletados através do Quiz que apontaram que mais de 90% dos participantes consideram que a abordagem dos conteúdos matemáticos com metodologias e aplicações diversificadas ajudam na compreensão dos conteúdos e de sua importância, defendemos e reforçamos a importância da utilização de jogos educativos na prática do ensino e aprendizagem, oferecendo aos alunos alternativas criativas e inovadoras que propiciem aos mesmos um conhecimento sólido e significativo. Destacamos ainda que a utilização do Xadrez e outros jogos como metodologias diferenciadas no ensino da Matemática na EAUFGPA não se remeterá somente à oficina realizada, mas daremos continuidade a esse trabalho com o intuito de obtermos novos resultados que poderão ser divulgados futuramente.

REFERÊNCIAS

- BINET, A. Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs. Hachette, 1894.
- DA SILVA, A. A., SILVA, M. D. L. D. L. COSTA, M. M., NOGUEIRA, S. A. O Ensino da Matemática através da Ludicidade, 2015.
- DE FARIA, A. R. O desenvolvimento da criança e do adolescente segundo Piaget. Ed. Ática, 3ª edição, 1995.
- PIAGET, J. A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação, 1971.
- SAVI, R, ULBRICHT, V. R. Jogos digitais educacionais benefícios e desafios. UFRGS. Porto Alegre, 2008.
- SHANNON, C. E. XXII. Programming a computer for playing chess. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, v. 41, n. 314, p. 256-275, 1950.
- VYGOTSKY, L. S. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins fontes, 2008.



MATEMÁTICA E LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA: RELATOS DE EXPERIÊNCIAS DE PROFESSORES EM ESCOLAS DE TEMPO INTEGRAL

Santos, Jéssica de Sousa, jssifpi@gmail.com¹
Teixeira, Cícero dos Santos, cicsantos2013@gmail.com²

¹ INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI

² INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI

Resumo: *A presente produção analisa as experiências de professores de Matemática enquanto docentes dos componentes curriculares Matemática e Laboratório de Matemática dessas 02 escolas de Tempo Integral da Rede Pública Municipal de Piripiri. Para sistematização metodológica optou-se por uma pesquisa de abordagem qualitativa, utilizando-se narrativas autobiográficas como método de pesquisa. Para a complementação dos dados da pesquisa, centrada nas Diretrizes Pedagógicas e Organizacionais para a Educação Integral, tinha-se a intenção de conhecer o currículo proposto para formação e saber como era o direcionamento, considerando que o município é pioneiro no estado em implementar esse ensino em tempo integral na rede municipal, visando a aprendizagem e a formação integral dos estudantes, isso torna ainda mais desafiador e notável, tendo em vista que o direcionamento seguido foram a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Currículo do Piauí, além de avaliações externas como SAEB e o SAEPI. A investigação concluiu, a importância das experiências no ensino integral e suas relevâncias para a formação desses educandos a partir dos componentes curriculares Matemática e Laboratório de Matemática como conclusão chega-se ao consenso de que as experiências proporcionadas pela disciplina são bastante significativas, pois os conhecimentos, saberes e experiências vivenciados irão constituídos e aprimorar suas aprendizagens construídas ao longo de sua história escolar e profissional e que se trata de um processo contínuo e inconcluso, no qual as dimensões subjetivas e socioculturais influenciam o modo de ser e de agir de cada um, levando-os a meios de percepção dos conhecimentos de forma bem prática e cotidiana.*

Palavras-chave: *Laboratório de Matemática, ensino, aprendizagem.*

INTRODUÇÃO

Em relação à educação em todos os níveis e etapas e nos cursos de formação de professores, este contexto apresenta-se permeado por desafios das mais diferentes ordens que envolvem desde situações relacionadas à missão de formar cidadãos éticos envolvidos com a transformação social àquelas relacionadas à construção de novas propostas metodológicas necessárias à produção do conhecimento que atenda às exigências dos novos paradigmas da ciência.

Urge debater novas exigências ou possíveis modificações nos processos de ensinar e aprender, o que supõe conceber que o contexto exige, dentre outras competências e saberes, conviver com novas tecnologias e saber manuseá-las em benefício próprio, mas respeitando o outro, desenvolver consciência de fraternidade e solidariedade, bem como compreender que a evolução individual está relacionada com a coletiva.

É um contexto complexo no qual a figura do professor se destaca pelo seu papel na sistematização de novas práticas educativas. O processo de ensino não pode ser concebido como transmissão de conhecimentos ou uma prática de instrução, mas como um processo de mediação entre o conhecimento prévio do aluno, ainda não

elaborado cientificamente e o conhecimento científico, no qual a busca do professor por metodologias capazes de auxiliar o processo de aprendizagem dos alunos significa exigências impostas pelo contexto atual.

Essa pandemia trouxe consigo muitos desafios e muitos contratemplos, um deles foi esse distanciamento e todas essas medidas restritivas que nos forçaram a nos mantermos distantes, nossos estudantes, professores, gestores, a escola como um todo tiveram que muito aprender, se reinventar e ainda assim ficou notável o quanto era difícil e insubstituível a presença de um professor para estar ali acompanhando, tirando dúvidas e ajudando.

Agora já com a maioria das pessoas já vacinadas até mesmo com sua dose de reforço, nosso cenário educacional já começa a voltar para os trilhos, as aulas já voltaram presenciais então pensando nisso e já executando o proposto na meta 6 do Plano Nacional de Educação que pressupõe:

Oferecer educação em tempo integral em, no mínimo 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos(as) aluno(as) da educação básica até 2024.

Para dar início a essa proposta foi quatro escolas: 01 de educação infantil, 01 escola do campo e 02 escolas urbanas dos anos finais do Ensino fundamental. Para a realização desse modelo de ensino em tempo integral foram implementadas para atender a cada um dos tipos de escolas uma base diversificada voltada para a realidade de cada uma levando em consideração seu contexto com suas especificidades.

Um desses campos é o de Laboratório de Matemática que objetiva a o trabalho com os descritores por meio de metodologias diferenciadas como jogos, desafios, investigação e experimentação, ou seja, seu foco é trazer os alunos para próximo a fim de absorverem ainda melhor os conteúdos vistos em sala e traçarem essas relações.

A presente produção analisa as experiências de professores de Matemática enquanto docentes dos componentes curriculares Matemática e Laboratório de Matemática dessas 02 escolas de Tempo Integral da Rede Pública Municipal de Piri-piri.

LABORATÓRIO EM FOCO

A matemática é uma disciplina que é tida por muitos alunos como um grande desafio, chegando a ser temida ou mesmo deixada de lado pelo receio de errar, tudo que não sabemos ou não conhecemos temos a tendência em dizer que não gostamos ou que é ruim, isso é o que mais acontece com a matemática, então esse novo componente curricular de Laboratório de Matemática veio como um forte aliado para mudar esse ponto de vista.

Ele tem o importante papel de trazer estímulos que desenvolvam a atenção, concentração e raciocínio lógico por meio do uso de jogos, brincadeiras e as mais variadas formas de se estudar matemática de uma maneira prática, dando real significado a cada conhecimento.

A transitoriedade, a incerteza, o improvável e as mudanças são termos cada vez mais presentes na caracterização da educação contemporânea. Considerando esse cenário, na perspectiva de educar para uma cidadania global, há a necessidade de ensinar “[...] a viver na mudança e não querer controlá-la [...]” (MORAES, 2003, p. 225).

De acordo com Schulman (1986), ensino é um termo polissêmico e ambíguo, pois ao mesmo tempo em que significa um processo envolvendo vários indivíduos em uma sala de aula, também pode designar uma ocupação ou função, no sentido de uma carreira.

Assim, como prática complexa, o ensino é uma ação realizada por seres humanos em um contexto que, dentre suas finalidades, busca modificar os sujeitos envolvidos em razão das ações realizadas. São situadas, assim, novas abordagens do ensino que emergem das investigações sobre o ensino como prática social.

Autores como Contreras (1990) e Pimenta (2005) definem o ensino e a aprendizagem como práticas humanas e sociais que se influenciam mutuamente. Assim, impõe considerar em sua análise a compreensão das estruturas sociais e o seu funcionamento e as relações que com estes a prática de ensinar mantém.

Importa destacar que ensinar como ação intencional, através de uma prática reflexiva, indagadora, problematizadora, na relação entre sujeitos, capaz de gerar e reconstruir conhecimentos significa considerar, também, que o ensino e a aprendizagem ocorrem nos contextos sociais diversos e não se restringem à sala de aula. Neste reconhecimento, Freire (1996, p.154) indaga: “Como ensinar, como formar sem estar aberto ao contorno geográfico, social dos educandos?”.

Compreende-se que é nesta concepção que deve estar ancorada a postura e a atitude do professor do ensino em tempo integral visto que o tempo que passa com os educandos é bem maior, assim ficando cada vez mais próximos e levados em consideração as dimensões cognitivas, afetivo-sociais e políticas, tendo um olhar para seu lado socioemocional ocasionando a associação entre a formação básica e outros conteúdos e experiências. É

impossível criar uma interação entre o mundo individual do sujeito que aprende a realidade social desconsiderando o contexto, o espaço e o movimento da sociedade.

Convém destacar que, na formação para a cidadania participativa, tão importante quanto a gestão dos alunos em sala é a gestão das ideias dentro do discurso em sala de aula, haja vista que se destaca como finalidade do ensino a promoção do desenvolvimento das capacidades e habilidades de pensamento dos alunos, que somente serão alcançadas se o professor levá-los a agregar o conhecimento teórico-científico às competências cognitivas, conduzindo-os a pensar de forma científica.

PERCURSSO METODOLÓGICO

Partindo do princípio de que, realizar uma pesquisa de abordagem qualitativa, dá ao pesquisador ampla liberdade teórico-metodológica, fez-se a opção pela pesquisa narrativa autobiográfica como método de pesquisa. Situa-se a importância das narrativas autobiográficas, com dados colhidos através da interação entre pesquisador e interlocutores, por ser um método capaz de permitir ao interlocutor tomar consciência de si e de suas ações através da narrativa de suas experiências, de forma escrita ou falada, vividas no contexto de sua formação no Instituto Federal de Educação do Piauí – PI.

A preferência por este tipo de estudo justifica-se também porque o objeto de pesquisa impõe a realização de uma pesquisa em que os dados coletados possam ser analisados, descritos e contextualizados à luz das teorias, buscando compreender o sujeito em seu contexto de formação. Assim, mais do que coletar dados e interpretá-los à luz das narrativas, defende-se que a escolha deste tipo de pesquisa pode também se configurar como uma situação de aprendizagem e produção de conhecimento para os interlocutores da pesquisa.

Nesse sentido, Souza (2006), ao discutir a narrativa de formação, expressa que os balanços das aprendizagens feitas pelos professores e os sentidos da experiência de formação são extraídos dos esquecimentos e podem desencadear processos reflexivos importantes para o desenvolvimento pessoal e profissional.

Para Brito (2010, p.64), a(s) narrativa(s) (auto)biográfica(s):

[...] no âmbito da pesquisa qualitativa em educação, compõem fontes preciosas de produção de dados, cujo diferencial é protagonizar a vivência da escrita como alternativa para a reconstrução dos percursos do sujeito, seja na formação profissional, seja no cotidiano das práticas pedagógicas. Escrever sobre os processos formativos, sobre a ação docente desenvolvida e sobre o ser professor provoca a autorreflexão e o reencontro do sujeito com seus percursos de vida pessoal e profissional.

Concordando com o que foi citado acima, acrescenta-se que cada ser humano percebe a realidade cotidiana de um modo muito particular, os sentidos dados às situações vêm impregnados das crenças, resultados das vivências, valores e cultura do grupo social a que pertence. Assim, falar sobre si, revisitar e refletir sobre a trajetória formativa pressupõe considerar a subjetividade tanto do pesquisador como do interlocutor da pesquisa.

Assim, defende-se que as narrativas autobiográficas estimulam reflexões pessoais e profissionais sobre as práticas desenvolvidas no contexto da formação docente, conduzindo-os à compreensão de sua historicidade, como possibilidade de ressignificação das ações formativas para emancipação e atuação crítica.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, com relatos de experiências enquanto professores da disciplina de Matemática, com carga horária semanal de 5 horas/aulas, e da disciplina de Laboratório de Matemática, com carga horária semanal de 3 horas/aulas.

O contexto vivenciado nos CETIs (Centro de Educação em Tempo Integral), com realidades opostas, no entanto, tem em comum as relações entre as disciplina de Matemática e Laboratório de Matemática, ou seja, a abordagem dos jogos, materiais concretos e dinâmicas como estratégia metodológica.

Neste sentido, relataremos como se vem sendo as aulas de Laboratório de Matemática no CETIs de Ensino Fundamental Anos Finais, na rede Municipal de Piri-piri – PI.

ANÁLISES E DISCUSSÕES

Ao centrar as análises nas Diretrizes Pedagógicas e Organizacionais para a educação Integral, tinha-se a intenção de conhecer o currículo proposto para formação e saber como era o direcionamento, considerando que o município é pioneiro no estado em implementar esse ensino em tempo integral na rede municipal, visando a aprendizagem e a formação integral dos estudantes, isso torna ainda mais desafiador e notável, tendo em vista que o

direcionamento seguido foram a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Currículo do Piauí, além de avaliações externas como SAEB e o SAEPI.

A sequência didática de Laboratório de Matemática fora e é elaborada conforme a disciplina de Matemática, a seguir, algumas aulas de Laboratório.

- ✓ Dominó e bingo da adição, aplicados em Laboratório aulas explanação em aulas de Matemática sobre adição. Essa sequência foi feita com as quatro operações;
- ✓ Dominó e bingo das quatro operações, aplicados após fechamento da sequência didática de Matemática desses conteúdos;
- ✓ Dama e xadrez não há ligação direta com conteúdos da disciplina de Matemática, mas aplicado com objetivo de raciocínio lógico.

Falas ditas por alunos durante as aulas:

“As duas aulas passaram rápido.”

“Revisei o conteúdo de potenciação nessa aula, acho vou bem na prova.”

“Melhor aula, passou rápido”

“Tio, qual vai ser o jogo de hoje”

Os professores sempre procuram fazer o uso de metodologias onde estão presentes materiais como jogos, brincadeiras, materiais concretos que são fortes aliados no processo de ensino aprendizagem e o facilitam, além de prenderem a atenção e concentração. Podemos perceber isso no relato do professor:

“Meus alunos ficaram muito atentos e demonstraram muito interesse e curiosidade em uma aula sobre figuras planas e sólidos geométricos onde após ver a parte teórica fomos para a prática fazendo os desenhos das figuras e percorrendo a escola a procura dos sólidos, pra eles foi algo fascinante perceberem que em um único espaço tinham tantas figuras e sólidos, ele até acharam que a aula passou tão rápido e chegaram a comentar que a melhor aula era a que tinha acabado mais rápido, isso é muito gratificante para mim.”

É notório na fala dele que o objetivo da implementação dessa disciplina está sendo alcançado pois já fica evidente o interesse e a aceitação que os alunos demonstram em se tratando da disciplina especificamente e que já estão deixando aquele pensamento que ela é muito difícil e até mesmo impossível.

Enquanto acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática vivenciamos muitas prática pedagógicas relacionadas ao ensino da matemática, através de participações em eventos científicos, produções de artigos, materiais concretos, jogos e dinâmicas para no ensino divertido e atrativo da Matemática.

Neste sentido, estamos colocando em prática, através da Disciplina de Laboratório de Matemática, o que aprendemos e fizemos na graduação, com aprimoramento e adequações a realidade dos discentes, da instituição e ao ensino integral.

TECENDO ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Acredita-se que as marcas das experiências de formação vivenciadas no percurso do desenvolvimento de formação inicial e durante toda sua vida. Partiu-se do princípio de que os saberes e conhecimentos adquiridos durante o processo de formação, ao longo de sua história de vida pessoal e escolar, direcionam suas percepções, concepções e seus fazeres.

Nesse sentido, no contexto de sala de aula, os professores, ao objetivarem desenvolver suas tarefas, devem procurar mobilizar conhecimentos, saberes, competências e habilidades que são adquiridos através de teorias e de práticas que torna mais fácil e significativo para o aluno.

A produção buscou analisar a importância das experiências no ensino integral e suas relevâncias para a formação desses educandos a partir dos componentes curriculares Matemática e Laboratório de Matemática como conclusão chega-se ao consenso de que as experiências proporcionadas pela disciplina são bastante significativas, pois os conhecimentos, saberes e experiências vivenciados irão constituídos e aprimorar suas aprendizagens construídas ao longo de sua história escolar e profissional e que se trata de um processo contínuo e inconcluso, no qual as dimensões subjetivas e socioculturais influenciam o modo de ser e de agir de cada um, levando-os a meios de percepção dos conhecimentos de forma bem prática e cotidiana, além de mostrar que são extremamente úteis e necessárias à todos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. **Plano Nacional de Educação (PNE)**. Lei Federal n ° 13.005, de 25 de junho de 2014. Brasília: MEC, 2014

BRITO, Antônia. Edna. **Narrativa escrita na interface com a pesquisa e a formação de professores**. In: MORAES, D. Z.; LUGLI, R. S. G. (Org.). *Docência, pesquisa e aprendizagem: (auto) biografias como espaços de formação/investigação*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010. p.53-67.

CONTRERAS, José. **A autonomia dos professores**. São Paulo: Cortez Editora, 1990.

CURRÍCULO DO PIAUÍ: um marco para a educação do nosso estado. Carlos Alberto Pereira da Silva et al. – Teresina: SEDUC, 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 25ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

MORAES, Maria Cândida. **O paradigma educacional emergente**. 9 ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

PIMENTA, Selma Garrido. **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE PIRIPIRI. **Diretrizes pedagógicas e organizacionais para educação integral**. Piripiri, SEDUC, 2019.

SHULMAN, Lee S. **Paradigms and research programs for the study of teaching**. In: M. C. Wittrock (Ed.). *Handbook of research on teaching*. 3. ed. Nova York: Macmillan, 1996, p. 3-36.



GEOMETRIA ESPACIAL: O CÁLCULO DO VOLUME DO CUBO E DA PIRÂMIDE COM O AUXÍLIO DE MATERIAL CONCRETO

Ribeiro, Raylanny Karynny dos Santos¹, e-mail: raylannyribeiro@gmail.com
Santos, Iago Alves dos², e-mail: iagoalvesnd.nd@gmail.com

¹ Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

² Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Resumo: *O ensino da matemática sempre foi um processo no qual o professor tem que se reinventar e isso não é diferente no ensino da geometria no ensino médio, onde a matemática se torna um processo de aprendizagem. Observa-se que os alunos têm dificuldades no entendimento da geometria espacial por conta da visualização dos sólidos geométricos. Este projeto teve por objetivo proporcionar conhecimentos matemáticos de forma diversificada por meio do material concreto. O estudo se deu na escola C. E. Paulo VI, na cidade de São Luís, Maranhão, em uma turma de terceira série do ensino médio, o trabalho foi desenvolvido em forma de sequência didática em quatro etapas, onde tivemos como objetivo obter resultados significativos. A proposta construída buscou estratégias diferenciadas que envolvesse a aplicação prática do conteúdo e o uso dos materiais concretos. Como resultado, constatamos que com a aplicação da sequência didática os alunos conseguiram superar suas dificuldades em relação ao conteúdo abordado, o que nos levou a considerá-la como um instrumento promissor para o ensino da geometria espacial.*

Palavras-chave: *Geometria; Geometria Espacial; Material Concreto; Sequência Didática.*

1. INTRODUÇÃO

Os meios para transmitir educação são constantemente modificados, principalmente quando o conteúdo está relacionado à área da matemática, com o intuito de aprimorar o conhecimento que é difundido nas salas de aula pelos professores, nesse sentido uma das formas mais influentes e mais utilizadas que é conhecida e aplicada, e que passa por constante reformulação, são os meios lúdicos, realizados principalmente por meio de ferramentas que agregam no processo de ensino aprendizagem dos alunos.

A maneira lúdica de difundir conhecimento e aprendizagem sempre esteve presente na vida de todos, seja de forma direta ou indireta, ela é utilizada principalmente pelos professores como ferramenta para agregar conhecimento de maneira mais simplificada para o aluno que encontra dificuldades no processo de aprendizagem do conteúdo abordado em sala de aula.

Essa dificuldade é vista principalmente na área da matemática, especificamente no ensino da geometria espacial. Diversos alunos sentem dificuldade em compreender os sólidos geométricos, principalmente na quando se trata de visualizar ou imaginá-los.

Grande parte dos discentes, principalmente oriundos de instituições públicas, onde a escarcas de recursos de materiais visuais é maior, sentem essas dificuldades, tais como, identificar os elementos de um sólido, cálculo de volumes, áreas etc. Segundo Fiorentini (2004):

[...] Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade (FIORENTINI, 1995, p.62)

Com base nisso, apresentamos uma proposta para o estudo da Geometria Espacial e traçamos como problemas norteadores: *Quais as contribuições de uma prática pedagógica diferenciada no ensino de matemática? Quais os conhecimentos que os alunos já possuem sobre o conteúdo em questão?*

Para responder esses questionamentos, esse projeto buscou apresentar uma proposta pedagógica com a utilização do material concreto em sala de aula, tendo em vista o esforço dos alunos para superar obstáculos, tanto cognitivos quanto emocionais. Diante desse impasse, foram elaboradas ferramentas por meio de uma sequência didática aplicada na terceira série do ensino médio da escola pública C.E Paulo VI, localizada na cidade de São Luís, Maranhão, onde foram aplicadas ferramentas lúdicas no processo de ensino aprendizagem, com o objetivo de facilitar a visualização das dificuldades já citadas suprimindo assim, a carência através do material concreto.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para a apresentação dos dados, quanto aos objetivos, à pesquisa foi descritiva, pois, segundo Gil (2002), tal pesquisa tem por objetivo descrição das características de determinada população ou fenômeno, ou então, o estabelecimento de relação entre as variáveis. Em relação aos procedimentos técnicos, optou-se pela pesquisa de campo, uma vez que, nos proporciona comunicar com a realidade, conforme afirma José Filho (2006, p.64) “o ato de pesquisar traz em si a necessidade do diálogo com a realidade a qual se pretende investigar e com o diferente, um diálogo dotado de crítica, canalizador de momentos criativos”. A pesquisa foi de abordagem quantitativa e qualitativa. Steban (2010, p. 127) diz que, “A pesquisa qualitativa é uma atividade sistemática orientada à compreensão em profundidade de fenômenos educacionais e sociais, [...]”. O uso das duas abordagens se deu em virtude de que foi necessário analisar de forma qualitativa a aprendizagem dos alunos com a utilização da metodologia de ensino através dos materiais manipuláveis, assim como analisar de forma quantitativa os resultados do questionário inicial e o final, dessa forma foi realizada uma comparação do desempenho dos discentes.

Quanto aos sujeitos da pesquisa, houve a participação de vinte e três alunos, matriculados na terceira série do ensino médio, da escola de Rede Pública, C.E. Paulo VI, localizada no Município de São Luís – MA.

3. Descrição e Análise dos Dados

As etapas realizadas foram registradas por meio de fotos, nas quais observou-se total participação dos alunos.

Inicialmente realizamos um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos participantes da aplicação da Sequência Didática, que se deu por meio de um questionário inicial, que continha três situações-problemas sobre o conteúdo proposto. Após a aplicação do questionário, iniciamos à explanação do conteúdo, onde foi realizada uma aula participativa e dialogada, pois acreditamos que, ao possibilitar o aluno a inserção do mesmo nas discussões, estamos valorizando seu conhecimento e seu interesse. Posteriormente, foi entregue aos discentes uma lista de situações-problemas para que eles pudessem praticar o conteúdo estudado.

As questões foram respondidas junto com os alunos, de tal forma que foi possível perceber o interesse deles. No desenvolvimento da terceira etapa, a turma foi dividida em 4 grupos, todos os grupos confeccionaram os sólidos geométricos e apresentaram, cada grupo apresentou o cálculo feito, e quais os procedimentos feitos para realizar o cálculo do volume dos sólidos construídos. Destacamos que a construção desses sólidos através dos materiais concretos, além de proporcionar o entretenimento aos alunos, permitiu notar o progresso no aprendizado dos mesmos enquanto manipulavam os sólidos.

Para encerrar a aplicação da Sequência Didática, foi entregue o questionário final aos discentes, de modo a verificar se houve um avanço na aprendizagem em relação ao cálculo do volume dos sólidos geométricos.

Figura 1 – Aplicação do questionário inicial



Figura 2 - Explicação do cálculo de volume dos sólidos trabalhados





Foi realizado o levantamento da análise do questionário inicial e do questionário final, com o objetivo de verificar se a aplicação da Sequência Didática, que tinha como intuito o ensino do cálculo do volume de sólidos geométricos obteve resultados significativos.

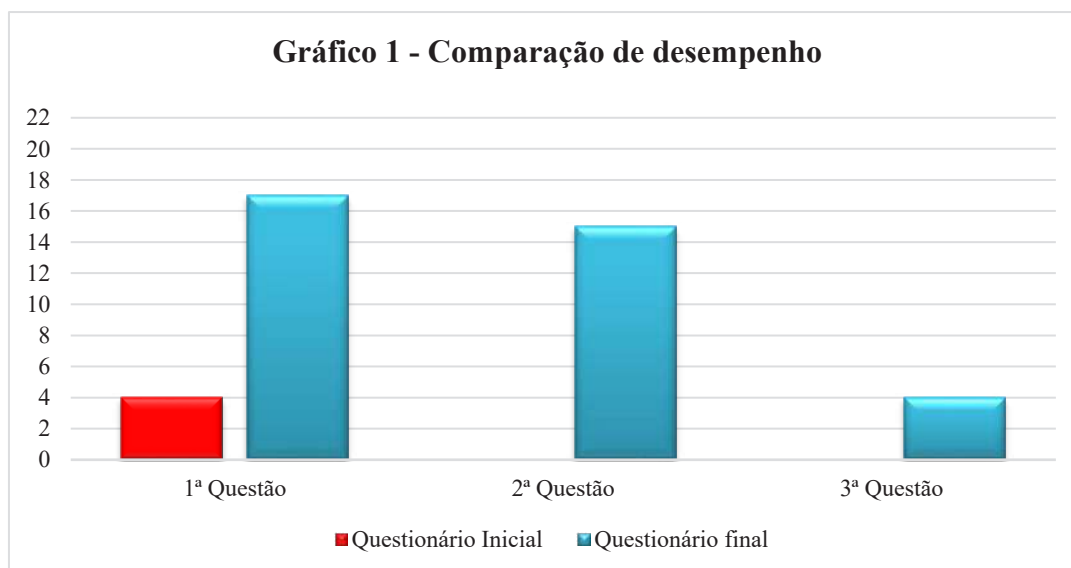
Para isso, trabalhamos da seguinte maneira: no questionário inicial foram elaboradas questões que permitissem aos alunos, transparecer os seus conhecimentos a respeito do cálculo do volume de alguns sólidos geométricos, em particular, o cubo e a pirâmide. No último questionário expomos questões com os mesmos objetivos de cálculo, porém alteramos apenas os valores.

Com isso, serão explanadas, as análises de correção das respostas dos discentes de ambos os questionários. É importante destacar que as questões foram respondidas individualmente com um objetivo e finalidade de buscar nos alunos se, de fato, obteve-se o entendimento do conteúdo abordado na Sequência Didática. Como é visto no quadro a seguir.

Quadro 1 – Quadro de objetivos das questões

Questões	1ª	2ª	3ª
Objetivos	Calcular o volume do cubo	Calcular o volume da pirâmide de base triangular	Calcular o volume da pirâmide de base quadrada

Podemos observar no Gráfico 1 a comparação da quantidade de acertos no questionário inicial e questionário final



Houve uma melhora significativa no questionário inicial em relação ao questionário final, como pôde ser observado no gráfico acima. Analisando detalhadamente, apenas 13,04% dos alunos responderam corretamente a primeira pergunta do questionário inicial, ao passo que nenhum foi capaz de responder as demais. Quantitativamente é um percentual muito baixo, já que o conteúdo foi visto na série anterior.

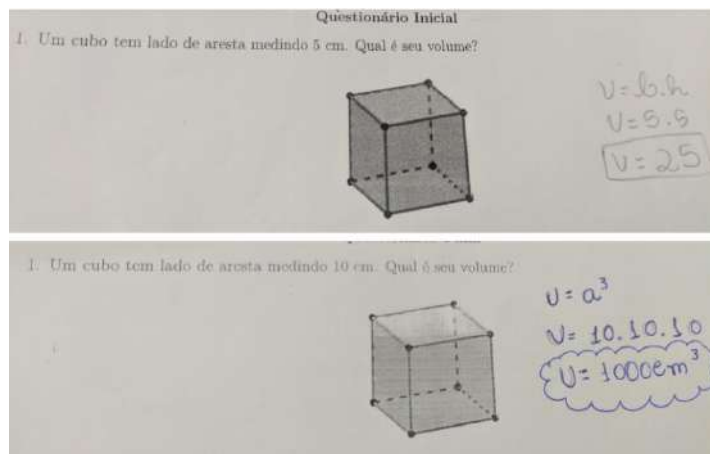
Por outro lado, após a aplicação da sequência didática seguida do questionário final, o percentual de acertos passou para, 73,91% na primeira questão, 65,21% na segunda questão e 17,39% na terceira questão, evidenciando uma assimilação satisfatória do conteúdo ministrado.

PÔSTERES

A seguir, apresentamos as respostas de alguns alunos, referentes aos questionários inicial e final, para que pudesse ser realizada uma breve explanação dos erros e acertos de cada questão proposta, pois segundo Cury (2008), quando o professor analisa as estratégias utilizadas pelo aluno, este tem a possibilidade de entender como se dá apropriação do saber pelos estudantes.

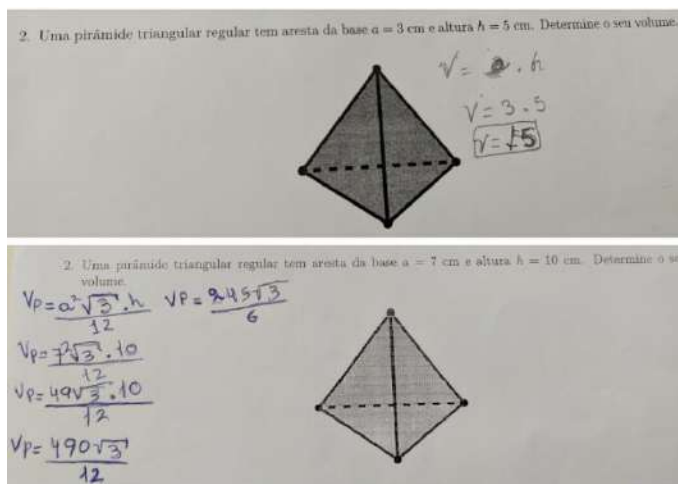
- Análise das questões selecionadas da turma 300, questionário inicial e questionário final:

Figura 5 – Questão 01



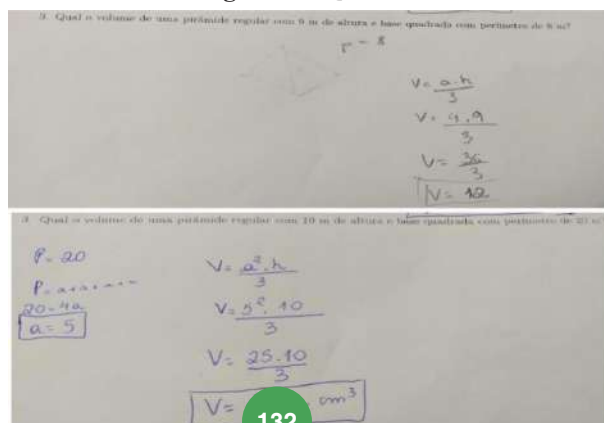
Pela imagem, podemos observar que o aluno não possuía ferramentas para realizar o cálculo de volume do cubo. O discente estava utilizando conhecimentos de geometria plana, o que indica a ausência das noções matemáticas de geometria espacial. Após a aplicação da sequência didática seguida do questionário final, percebeu-se uma evolução significativa nos conceitos geométricos espaciais estudados.

Figura 6 – Questão 02



Conforme a figura acima, é notória a diferença de saberes cognitivos em relação ao estudo de geometria espacial.

Figura 7 – Questão 03



Percebe-se que o aluno se munuiu de conhecimentos geométricos durante a aplicação da sequência didática, o que lhe tornou capaz de realizar o cálculo de volume da forma correta de acordo com o que foi proposto ao final da sequência. Vale ressaltar que o conhecimento construído pelo aluno ao longo do trabalho proposto foi de forma gradual, internalizado com a construção do sólido geométrico (pirâmide triangular regular), concretizando assim suas percepções e significados geométricos. Segundo a imagem, a interpretação geométrica e a utilização dos dados foram aprimoradas, uma vez que, apenas uma fórmula pronta, não garante êxito na realização do cálculo.

Já na figura acima, no questionário inicial o aluno teve dificuldades no cálculo do volume da pirâmide de base quadrada, o mesmo não soube interpretar a parte da questão que se referia ao perímetro da base da pirâmide. Porém, no questionário final o aluno obteve êxito na resolução da questão, pois durante o desenvolvimento da Sequência Didática houve uma breve revisão de alguns conceitos básicos referentes à geometria plana.

Através das análises feitas, podemos afirmar que após a aplicação da Sequência Didática houve uma melhor desenvoltura entre os alunos em relação ao conteúdo de cálculo de volume dos sólidos geométricos (cubo e pirâmide), assim, obtivemos a eficácia na metodologia utilizada. Observou-se que o uso dos materiais manipuláveis possibilitou aos discentes o contato com o objeto geométrico matemático, no qual é grande importância para a união entre teoria e prática. A utilização dos materiais concretos tornou o processo bem mais prático, visual e palpável, assim, o aluno deixou de ser um mero receptor de conteúdo, e passou a ser construtor dos seus conhecimentos matemáticos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento desse projeto foi de grande importância para o processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial por parte dos alunos envolvidos. Dessa forma, possibilitou que os discentes expressassem suas ideias matemáticas de maneira produtiva. A utilização dos materiais concretos como uma intervenção didática foi uma oportunidade para trabalhar de maneira diferenciada o conteúdo de geometria em sala de aula. É importante que os residentes, como futuros profissionais na área da educação, busquem sempre aprimorar suas estratégias e metodologias de ensino, pois é de grande relevância promover o estímulo e o interesse dos alunos pelo aprendizado da matemática.

Com o desenvolvimento do projeto, a percepção de que a execução de atividades interativas entre os alunos de fato facilitou o aumento da participação e interesse nas aulas de matemática, e a facilitação da construção de conteúdos matemáticos. Esse processo demonstrou-se qualitativamente aceitável, visto que os discentes conseguiram concretizar alguns conceitos da geometria por meio do material que foi proposto, o que ajudou em um melhor rendimento por parte deles.

Assim, ter como ferramenta os materiais concretos nas aulas é essencial para um melhor aprendizado, para a interação entre os discentes e um estímulo para o trabalho em equipe. O que pode ser primordial para o desenvolvimento do raciocínio lógico do estudante.

5. REFERÊNCIAS

FIORENTINI, DARIO. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Revista Zetetiké, Campinas - São Paulo, ano 3, n. 4, 1995.

GIL, ANTONIO CARLOS. Como elaborar projetos de pesquisa. Editora Atlas, São Paulo, 4 ed, 2002.

JOSÉ FILHO, M. Pesquisa: contornos no processo educativo. In: JOSÉ FILHO, M. 2006

PONTE, J. P., et al. Didática da Matemática. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário, 1997.

SOUZA, J. V. B.; BARBOSA, J. C. Os manipuláveis e a prática questionadora dos alunos na sala de aula de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. Anais... São Paulo: SBEM, 2010.

STEBAN, M. P.S. Bases conceituais da pesquisa qualitativa. In: ____ Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições, Porto Alegre: AMGH, 2010, p. 122- 144.



MÉTODO DE POLYA: UM PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ribeiro, Raylanny Karynny dos Santos¹, e-mail: raylannyribeiro@gmail.com
Santos, Iago Alves dos², e-mail: iagoalvesnd.nd@gmail.com
Azevedo, Gercyislan Pereira de³, e-mail: gercyislan-pereira14@hotmail.com

¹ Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

² Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

³ Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Resumo: Esta pesquisa tem como objetivo apresentar o Método de Polya, uma proposta de metodologia para o processo ensino-aprendizagem na Matemática, a fim de buscar soluções e favorecer o processo de interpretação na resolução de problemas matemáticos. Optou-se pela pesquisa bibliográfica fundamentada em abordagens que discorrem acerca do tema escolhido, principalmente estudos sobre Polya. A partir do estudo realizado, foi possível concluir que a compreensão do problema é a chave de partida para o processo de Resolução de Problemas, visto que possibilita aos educandos participarem da construção dos conceitos matemáticos, dessa forma, proporcionando a aproximação desses conceitos com o mundo real dos alunos e resultando em uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Método de Polya, Processo de ensino-aprendizagem, Resolução de Problemas Matemáticos.

1. INTRODUÇÃO

É perceptível que há diversidade em uma sala de aula, ou seja, há marcas de várias capacidades cognitivas de entender a Matemática. Essas marcas acabam se tornando ecos, dentre eles os mais marcantes são: essa matéria é difícil, essa prova estava “impossível”, eu não entendo Matemática, esse ano eu reprovei em Matemática. Esses ecos acabam parecendo uma orquestra bem afinada de tanto ser propagado pelos alunos.

“[...] A heterogeneidade percebida na voz do aluno se manifesta quando ele repete o que já ouviu falar da disciplina, mas também produz sentidos seus ao alterar historicamente o discurso pré-construído. [...] manifesta o conjunto de sentidos expressos na voz do professor de Matemática, na voz da comunidade escolar e na voz da mídia. [...] Os ecos dessas diferentes vozes interferem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois o professor e o aluno se filiam ao pré-construído, [...] pois, para o professor, ensinar uma disciplina considerada difícil lhe confere *status* profissional e, para o aluno, estudar uma disciplina difícil lhe causa ojeriza.” (SILVEIRA, 2015, p. 37-38)

Esses pensamentos acabam intervindo no processo ensino-aprendizagem da Matemática, uma vez que educadores matemáticos precisam fazer o aluno pensar e não somente memorizar ou reproduzir. Percebe-se que há necessidade de uma integração entre professor e aluno, a fim de que o professor utilize um método de resolução de problemas, neste caso, para este trabalho, foi abordado o Método de Polya, a fim de que o aluno compreenda o enunciado de tal forma que possa ser capaz de aplicá-lo. Isto é, a Matemática deve ser aprendida e não descoberta. Logo, percebemos que os obstáculos na compreensão dos conteúdos matemáticos se parecem muito mais enigmas do que forma de aprendizagem.

Como podemos ver com SILVEIRA (2015, p.15):

“[...] o papel do professor é fundamental neste processo: depende de como ele ensina seus conteúdos recorrendo a técnicas linguísticas para que o aluno

domine as regras destes jogos, e possa segui-las em situações até inusitadas. Assim, compreender, [...] o domínio de uma técnica, e não relativo a algum tipo de processo mental.”

O professor ao fazer o aluno pensar, impulsionará a integração de três processos: o pensamento independente, introdução do método científico, maturidade intelectual, melhores hábitos de trabalho, flexibilidade de espírito. Logo, essa integração possibilita a prática, e não apenas assistir. Dessa forma o aluno usará a capacidade de pensar. Para que o mesmo possa compreender questões ou problemas matemáticos e sua solução, o professor precisa fazer a classificação dos problemas. Há problemas de rotinas, que exigem aplicação de uma regra, de forma mecânica, e que não exigem criação nem originalidade. Enquanto a os problemas não rotineiros, há o desenvolvimento intelectual e exigem certo grau de vocabulário, questão simples e com clareza, criação e originalidade. (ARAÚJO, 2014)

Diante desse pressuposto, esta pesquisa tem como objetivo apresentar o Método de Polya, uma proposta metodológica ou estratégica para o processo de ensino-aprendizagem na Matemática, a fim de buscar soluções e favorecer o processo de interpretação de regras matemáticas, buscando despertar o interesse dos alunos através da arte de ensinar Matemática, e principalmente, compreendê-la efetivamente.

2. O MÉTODO DE POLYA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A escola sempre foi um ambiente de aprendizado contínuo. E dentro do ambiente escolar, a implementação dos conceitos matemáticos sempre foi predominante, pois precisou formalizar e conduzir de forma que objetiva os seus pensamentos e atitudes, com intuito de universalizar a linguagem matemática e não cair em possíveis erros, uma vez que são proporcionados pela incerteza da linguagem do cotidiano. (SILVEIRA, 2015).

Diante desse pressuposto, que é acompanhado pela constante transformação e mudança que a humanidade passa, faz-se necessário desenvolver métodos e ferramentas capazes de sanar as dificuldades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem e maximizar o processo de concepção matemática na educação básica. E o Método de Polya é umas das aplicações de grande relevância na compreensão e resolução de problemas matemáticos. Este é um processo de resolução de problemas composto de quatro processos que permitem que o aluno aprenda a pensar, isto é, possibilitar que as partes envolvidas pensem no problema de maneira a encontrar a(s) solução(ões), ou seja, a técnica admite que o problema seja resolvido. Logo, é uma ferramenta necessária e eficiente diante de um grande número de problemas, principalmente, aqueles de grandes dificuldades, os quais esse método possibilita “a organização de ideias e à obtenção de solução com a maior precisão, eficiência e melhor compreensão, tornando-se uma clara estratégia de resolução de problemas.” (MOURA, 2015, p.15)

Na educação básica muitos alunos se perdem nos problemas propostos pelos professores. Muitos não conseguem interpretar o problema e acabam não obtendo êxito na resolução da questão. Dessa forma, além do Método de Polya servir como suporte para auxiliar o aluno no processo de ensino-aprendizagem, ele também tem como objetivo introduzir os conceitos matemáticos, e posteriormente, a resolução dos problemas.

Diante da evolução tecnológica e dos desafios encontrados dentro da sala de aula, proveniente dessa transformação, o cenário faz com que professor analise com precisão, esses obstáculos marcantes na aquisição do conhecimento matemático. Embora o Método de Polya não seja um recurso tecnológico, ele serve como uma ferramenta, um método que possibilita a resolução de problemas de forma eficiente (SILVEIRA, 2015). Trazendo, assim, êxito na construção do saber matemático.

O Método de Polya se divide em quatro passos: entender o problema, traçar um plano, executar o plano e examinar a solução. Essas etapas são importantes para novas descobertas e soluções de situações-problemas, pois solução alguma não vem de forma súbita; é preciso que o aluno tenha, no mínimo, uma base de conteúdo.

2.1 Entendendo o Problema

A Heurística consiste no estudo de resolução de problemas, ou seja, é o estudo dos caminhos e meios da descoberta e invenção. É a forma de encontrar maneiras de resolução de problemas. Partindo desse pressuposto, tem-se que o primeiro passo do Método de Polya é entender o problema (ARAÚJO, 2014).

Silveira (2015, p. 91-92) aponta o seguinte:

Para compreender a natureza de um objeto matemático, o aluno tem a necessidade de fazer muitos exercícios até conhecer o objeto em diferentes situações justamente porque existe circularidade entre um ato e outro, de um

exercício a outro. A cada exercício resolvido, o objeto se mostra em uma situação diferente. [...] O ato de fazer e refazer os cálculos ou de resolver listas de exercícios mostra a necessidade do aluno de experimentar o objeto matemático em diferentes situações. [...] O ato de fazer e refazer a mesma tarefa matemática, em diferentes contextos, busca a compreensão da regra que é implícita.

O primeiro passo é de suma importância, pois é necessário fazer a leitura dos dados do problema, a fim de saber o que é solicitado, analisar como chegou ali e quais recursos estão disponíveis, com isso, tem-se um diagnóstico do problema. Para fazer esse diagnóstico é importante fazer as seguintes perguntas: o que é que eu quero? O que eu tenho? Como e onde posso obtê-lo? Deste modo, o aluno se aproximará da solução do problema. (ARAÚJO, 2014)

2.2 Traçando o Plano

Nesta etapa, o aluno irá elaborar um plano no qual ele pode obter a resolução, ou seja, é o processo da utilização da criação e imaginação. Nesse processo, o discente está embasado na tentativa, reformulação ou redução do problema. Ele pode fazer uma conexão com os problemas similares resolvidos anteriormente, para chegar em um fator comum: a resolução do problema.

É notório que quando tem-se um plano é necessário conhecer ou no máximo ter um esboço, seja nos cálculos, computação, construções ou até mesmo na vida. E o caminho para entender o problema é imaginar a ideia de um plano e esta ideia deve emergir gradualmente. E diante das resoluções dos problemas, a melhor coisa que o professor deve fazer é auxiliar o aluno, se necessário. As discussões deverão acontecer a fim de que o aluno assimile o problema, bem como sua solução, colocando em prática suas próprias experiências e dificuldades. Conforme Polya (1985, p. 24):

Nós sabemos, é claro, que é difícil ter uma ideia boa se nós tivermos pouco conhecimento do assunto, impossível se não temos conhecimento. Ideias boas são baseadas na última experiência e anteriormente e conhecimento adquirido. Mera lembrança não é o suficiente para uma boa ideia, mas nós não podemos ter nenhuma ideia sem recordar alguns fatos pertinentes; materiais sozinhos são suficientes para construir uma casa, mas nós podemos construir uma casa sem coletar os materiais necessários. Os materiais necessariamente da resolução de um problema matemático são de fato itens relevantes de nosso conhecimento matemático adquirido, assim como problemas resolvidos anteriormente, ou teoremas anteriormente provados. Assim, é frequentemente adequado iniciar o trabalho com a questão: você conhece algum problema relacionado?

Logo, percebe-se nesta fase, claramente que o autor mostra as tentativas que o aluno deve fazer para encontrar a resolução dos problemas. Traduzindo, esse problema sugere ao aluno que o mesmo recorra a alguns recursos, neste caso, pensar em um problema já resolvido, considerando várias modificações, experimentos com vários problemas auxiliares. Incentivando o aluno a ter suas próprias ideias e iniciativas, isto é, construir uma estratégia de resolução.

2.3 Executando o Plano

Na elaboração de um plano, é preciso imaginar uma ideia de solução. O plano nos proporciona a visualização do esboço de um todo. Sabe-se que os detalhes do plano são comprovados no esboço. Também devemos analisar os detalhes um por um, pacientemente, até tudo esteja perfeitamente claro, de modo que não haja nenhum erro oculto. Neste modelo, o ponto principal é enfatizar a diferença entre ver e provar. (Polya, 1985).

Para Moura (2015, p. 61) esta etapa consiste em: “[...] formalizar a resolução, [visto que], o problema já foi entendido, as experimentações foram feitas, conjecturas foram analisadas, conceitos elaborados ou adquiridos e o plano para resolvê-lo foi sendo construído gradativamente”. Estes passos podem auxiliar na resolução, pois, a cada problema que é dado, há verificações dos anteriores e por consequência, a atenção voltada para a resolução da questão fica um pouco maior. Diante disso, cada plano elaborado de forma inadequada carretará péssima execução.

2.4 Examinando a Resolução

É notório que no mundo escolar, principalmente nas áreas exatas, os alunos, por pressa, quando encontram a solução de um problema, escrevem corretamente a resposta, fecham o livro ou entregam as questões ao professor. Entretanto, ao fazer isso, perdem a melhor e instrutiva fase, que é revisar o problema.

E o papel do professor é de suma importância, pois ele pode fazer com que os alunos possam visualizar que não há qualquer problema que esteja completamente resolvido.

Nesta fase, percebe-se que os passos podem auxiliar na resolução de um problema, pois cada informação é um dado, em que há verificações dos problemas anteriores. Com isso, o aluno irá refletir em outras formas e maneiras de resolver o mesmo problema, analisando as vantagens de cada técnica e de cada resolução.

Polya (2085, p. 27) esclarece que:

O estudante executou seu plano. Ele anotou a solução, verificando cada passo. Assim, ele deve ter boas razões para acreditar que a sua solução está correta. Entretanto, os erros são sempre possíveis, especialmente se o argumento for longo e envolvido. Por isso, as verificações são desejáveis. Especialmente, se há algum procedimento rápido e intuitivo para testar o resultado ou o argumento, este não deve ser negligenciado. Pode verificar o resultado? Pode verificar o argumento?

Logo, compreendemos que a descoberta de uma nova e melhor solução. Isto é, ao aderir o hábito de pesquisar as suas soluções, irá adquirir alguns conhecimentos bem ordenados e o desenvolvimento de sua capacidade cognitiva de resolver problemas.

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE POLYA

Para entendermos melhor esse método, aplicaremos um exemplo: *encontrar o comprimento de um paralelepípedo retangular de altura igual a 30 cm, largura igual a 24 cm.*

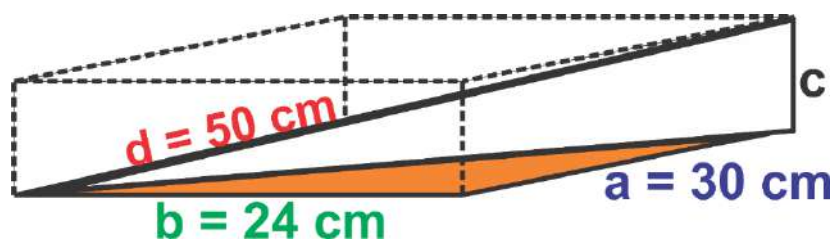


Figura 2: Paralelepípedo Retangular

Entendendo o problema: a princípio, o professor precisa materializar o paralelepípedo retangular para a turma. Posteriormente, desenhar a figura no quadro branco ou em algum programa de computador para melhor visualização. Em seguida estabeleça um diálogo com a turma fazendo algumas perguntas: o que estou procurando? *O comprimento de um paralelepípedo retangular.* Qual a leitura de informação? *Altura igual a 30 cm, largura igual a 24 cm e o comprimento.* Qual a notação da variável utilizaremos? *Será c.* Quais as letras usaremos para diagonal, altura, largura e comprimento? *a, b, c e d.* Qual é a condição relacionando a, b, c e d? *d é a diagonal do paralelepípedo retangular, em que a, b e c são respectivamente altura, largura e comprimento.* Esta condição é suficiente para determinar a variável? *Sim, pois se conhecemos a altura, largura e a diagonal, é o suficiente para determinar o comprimento.*

Traçando um plano: O aluno deve utilizar de suas próprias ideias e experiências e algumas iniciativas. O professor observa atentamente o aluno, caso ele não mostre nenhuma iniciativa, o professor retorne e faça alguns questionamentos: você conhece algum problema relacionado com este? Você sabe algum problema com a mesma variável desse problema? Qual a variável do nosso problema? Você conhece algum problema similar a esse? Por meio dessas perguntas o professor vai estimular o aluno fazer um *flashback* a fim de utilizar essa ferramenta a seu favor. Ao lembrar de algum exercício parecido perguntará ao aluno se ele está apto para resolver esse problema. No problema acima será abordado assunto sobre relações trigonométricas. É possível ver um triângulo retângulo. Isso é o suficiente para provar a ideia da solução em que há um triângulo retângulo. Na figura 2 temos uma diagonal, base e uma altura explícita. Na variável c, comprimento, percebe-se duas diagonais: do paralelepípedo retangular e a diagonal de uma das faces. Também percebe-se que elas formam dois triângulos retângulos. Logo, o aluno perceberá a utilidade do Teorema de Pitágoras neste problema. Agora tem-se um plano.

Executando o Plano: depois de toda elaboração do plano, iremos formalizá-lo. Visto que, por ele, é possível deduzir outra variável auxiliar: *x*, esta variável será perceptível na diagonal menor (da face), neste caso representado pela cor laranja. Logo, usa-se o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + b^2$$

Na diagonal maior, representado pela cor branca (sem a pontilhada). Usa-se novamente o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = c^2 + x^2$$

Agora, o professor mostrará diferença o ver do provar, questionando se é possível igualar as equações. Logo, o professor mostrará que:

$$d^2 = c^2 + x^2 \rightarrow x^2 = d^2 - c^2$$

Substituindo na primeira equação o $x^2 = d^2 - c^2$ a variável auxiliar, teremos:

$$d^2 - c^2 = a^2 + b^2$$

Agora o aluno pode utilizar as ferramentas que tem em mãos e colocá-los em prática. Sabe-se que $d = 50$ cm, $b = 24$ cm, $a = 30$ cm. Desta forma, encontraremos o comprimento. logo, teremos:

$$d^2 - c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 50^2 - c^2 = 30^2 + 24^2 \rightarrow 2500 - c^2 = 900 + 576$$

$2500 - c^2 = 1476 \rightarrow -c^2 = 1476 - 2500 \rightarrow -c^2 = -1024$, multiplicando por (-1) os dois lados teremos:

$$c^2 = 1024 \rightarrow c = \sqrt{1024} \rightarrow c = 32 \text{ cm}$$

Examinando o problema: Antes que o aluno entregue a atividade, pede-se a ele fazer uma verificação na questão, para ver se os dados, os cálculos e os sinais estão corretos, já que a maioria erra nesses quesitos, pois o professor deve ter a compreensão de que o discente ainda não possui domínio completo do conteúdo. O professor deve perguntar ao aluno se ele pode usar esse método em outros exemplos, e posteriormente, usar em outros problemas similares. Ele também pode falar sobre outros conceitos matemáticos pertinentes ao paralelepípedo retangular, pirâmide de base quadrada entre outros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A compreensão do problema é a chave de partida para o processo de resolução e requer do aluno os conhecimentos necessários para isso. Logo em seguida, o mesmo estabelece um plano, contendo hipóteses e variáveis, de acordo com o que a questão propõe. O próximo passo será a execução do plano, que só será eficaz se todo o planejamento desde da sua compreensão até as estratégias a serem seguidas forem realizadas plenamente. Por fim, fazer uma retrospectiva do problema executado é de total importância, pois o mesmo comprovará a veracidade do resultado encontrado.

Logo, para Polya, o problema matemático só existiria se houvesse conhecimentos prévios acerca de um conteúdo relacionado. Além disso, se o problema for matemático, deve-se ter em mente teoremas, proposições e definições já trabalhados, pois a Matemática é estruturada em cima dos mesmos. Contudo, surge um questionamento: e se os alunos não conseguirem relacionar o problema com essas definições e teoremas? Polya mostra em seu livro problemas não-matemáticos, onde não se usa o conhecimento matemático para resolvê-los. Portanto acredita-se que ele faz essa comparação para mostrar que o problema só será matemático quando, para solucioná-lo, será necessário o uso desses conhecimentos matemáticos outrora trabalhados.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. I. S. de. Trabalhando a Resolução e Exploração de Problemas como uma Metodologia de Ensino de Matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 18., 2014, Recife. Anais... Recife: Grupo Lematec - Edumatec/UFPE, 2014. p. 1-9.

MOURA, Fabrício Marom de. **Uma Proposta Didática: A resolução de Problemas através do método de Pólya amparado de Sistemas de ensino**. Editor. 2015. 95f. (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual De Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2015.

POLYA, G. *A New Aspect of Mathematical Method*. 2ª ed. Princeton University Press, 1985.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a educação matemática**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SOARES, M. T. C e PINTO N.B. Metodologia da resolução de Problemas. 24ª Reunião Anual da ANPED, Caxambu, MG, 2001.



O CONCEITO DE FUNÇÃO: DE BERNOULLI A BOUBARKI

Lira, Alailson Silva de, alailson.lira@ifpa.edu.br¹

Brandemberg, João Cláudio, brand@ufpa.br²

¹Instituto Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo:

A palavra “função” tem sua designação apresentada pela primeira vez por meio do manuscrito de Leibniz (1646-1716) no ano de 1676 intitulado “Método da tangente inversa ou sobre funções”. Com isso, o desenvolvimento deste conceito percorre procedimentos de cunho geométricos e algébricos sendo apresentado em diversos momentos da História por vários matemáticos que se debruçaram em ampliar essas ideias até chegar à definição que conhecemos hoje. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar a noção de função a partir de Bernoulli (1667-1748) até Boubarki. Para cumprir com este objetivo, se faz necessário apresentar brevemente a importância das funções no ensino e na História da Matemática. Por fim, podemos destacar que a definição de função passou por diversas conceituações e estabeleceu certos direcionamentos até sua maturação.

Palavras-chave: Função, Euler, matemáticos.

INTRODUÇÃO

A definição de função pode ser considerada como uma das mais importantes da matemática por existir a possibilidade de utilizá-la em várias áreas das ciências, como por exemplo, na química, física e biologia. Além disso, esta pode ser abordada em toda as séries do ensino fundamental a partir de associações, conforme apontado por Santos et al (2004), ou com exemplificações lúdicas consoante mostrado no trabalho de Feiteira e Pires (2010).

A palavra “função” tem sua designação apresentada pela primeira vez através do manuscrito de Leibniz (1646 – 1716), em 1676, intitulado “Método da tangente inversa ou sobre funções”¹. Tal trabalho estava relacionado à designação de um objeto geométrico associado a uma curva², ou seja, as funções até este momento eram somente expressões analíticas de grandezas e variáveis geométricas. Assim:

Com o tempo, à medida que os problemas enfrentados se tornavam mais complicados, a origem geométrica das fórmulas foi-se sobressaindo, e os matemáticos foram concentrando a sua atenção na refinação das técnicas que permitiam a manipulação cada vez mais intrincada dessas fórmulas. A primazia da curva deu lugar à primazia da fórmula (CORREIA, 1999, p. 9)

Ainda de acordo com Correia (1999), a ideia de transição da primazia da curva para a primazia da fórmula iniciou-se em Newton em (1669) no trabalho intitulado “Sobre a análise de equações com um número ilimitado de

¹ Methodus tangentium inversa, seu de functionibus

² Os problemas relacionados a curva estavam ligados a geometria analítica (problemas anteriores ao cálculo). Assim, em um dado problema e, a partir da curva, queríamos encontrar uma tangente ou uma quadratura (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, liv. 228)

termos”³ publicado em 1711, cujo principal objeto de estudo eram fórmulas do tipo $y = f(x)$, introduzidas sem quaisquer tipos de considerações geométricas. Observa-se assim, inicialmente, uma certa “pré-existência” do conceito de função nos trabalhos de Leibniz e Newton. Entretanto, este só foi realmente apresentado no trabalho de Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler. A seguir, apresentamos os conceitos de função de alguns matemáticos a partir dos trabalhos de Lira (2013) e Lira e Brandemberg (2018).

UMA CRONOLOGIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

BERNOULLI [1718]

Chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir dessa grandeza variável e de constantes.

EULER [1748]

Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer dessa quantidade variável e de quantidades constantes.

EULER [1755]

Se algumas quantidades dependem de tal forma de outras quantidades que, se as últimas variam as primeiras também o fazem, então as primeiras quantidades são chamadas funções das últimas. Esta denominação é da mais ampla natureza e compreende cada método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x representa uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x de um modo qualquer ou são por ele determinadas, são chamadas funções dele.

CONDORCET [1765]

Acho que tenho um número de quantidades x, y, z, \dots F , e que para cada valor dado de x, y, z, \dots etc., F tem um ou mais valores determinados que lhe respondem; eu digo que F é uma função de x, y, z

Finalmente, se eu souber que quando x, y, z forem determinados, F também será determinado, embora eu não saiba como expressar F em x, y, z , nem a forma da equação entre F e x, y, z ; saberei que F é uma função de x, y, z .

LAGRANGE [1797]

Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão de cálculo na qual tais quantidades entram de uma maneira qualquer, combinadas ou não com algumas outras quantidades que consideramos como munidas de valores dados e invariáveis, enquanto as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, não consideramos senão as quantidades que supomos variáveis, desconsiderando as constantes com as quais possam estar combinadas.

Designamos em geral pela característica f ou F , colocada a frente de uma variável, toda função dessa variável, ou seja, toda quantidade dependente dessa variável e que varia com ela segundo uma lei dada.

LACROIX [1810]

cada quantidade cujo valor depende de uma ou várias outras quantidades é chamada uma função destas últimas, quer se saiba ou não quais as operações que é necessário utilizar para chegar da última à primeira

CAUCHY [1823]

³ *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*

Nomeamos quantidade variável aquela que consideramos como devendo receber sucessivamente vários valores diferentes uns dos outros...

Quando as quantidades variáveis forem totalmente ligadas entre si, o valor de uma delas sendo dado, pode-se concluir os valores de todas as demais, concebemos usualmente estas diversas quantidades expressas por meio de uma entre elas, que toma então o nome de variável independente; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos de funções dessa variável.

LOBATCHEVSKI [1834]

A concepção geral, demanda que uma função de x seja chamada um número que é dado para cada x e que varia gradualmente junto com x . O valor da função pode ser dado seja por uma expressão analítica ou por uma condição oferecem meios de testar todos os números e selecionar um dentre eles; ou por fim, a dependência pode existir porem permanecer desconhecida.

... o amplo ponto de vista da teoria permite a existência de dependência apenas no sentido de que números, em ligação entre si, sejam considerados como fornecidos juntos.

DIRICHELET [1837]

[...] ... não é necessário que y seja sujeito a mesma regra com relação a x em todo o intervalo. ... de fato, não sequer preciso ser capaz de exprimir o relacionamento através de operações matemáticas.... Não importa se essa [correspondência] é pensada de modo que partes diferentes são dadas por leis distintas ou se essa [correspondência] é designada inteiramente sem lei.... Se uma função é especificada apenas em parte de um intervalo, a maneira de sua continuação para o restante do intervalo é inteiramente arbitraria.

Geometricamente representada, isto é, x e y imaginados como abscissa e ordenada, uma função continua aparece como uma curva conexa, para a qual apenas um ponto corresponde a cada abscissa entre a e b . “

STROKES [1847]

Pelo termo função eu entendo... uma quantidade cujo valor depende de modo qualquer do valor da variável, ou dos valores das várias variáveis da qual se compõe. Assim as funções consideradas não necessitam ser tais que admitam ser expressas por qualquer combinação de símbolos algébricos, mesmo entre limites das variáveis muito próximos.

STROKES [1848]

De fato, parece-me ser da maior importância ... contemplar funções alijadas de todas as ideias de expressão algébrica.

RIEMANN [1851]

Suponhamos que z é uma quantidade variável que pode assumir, gradualmente, todos os valores reais possíveis, então a cada um de seus valores corresponde um valor único da quantidade indeterminada, é chamada uma função de z ...

Obviamente esta definição não estabelece, completamente, nenhuma lei entre os valores isolados da função como também, se esta função houver sido definida para um certo intervalo, a maneira de sua continuação fora do intervalo é completamente arbitraria.

Não faz ... nenhuma diferença, se definimos a dependência da quantidade relativamente a quantidade z como uma dada arbitrariamente, ou como uma determinada por certas operações com quantidades”

BOOLE [1854]

Definição - Qualquer expressão algébrica envolvendo um símbolo x é dita uma função de x , e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$

Segundo os mesmos princípios de notação, se em qualquer função $f(x)$ mudamos x em 1, o resultado será expresso pela forma $f(1)$; se na mesma função mudamos x em 0, o resultado será expresso na forma $f(0)$.”

HANKEL [1870]

Uma função de x é chamada $f(x)$ se a cada valor de x interior a um certo. intervalo é associado um valor univocamente determinado de $f(x)$.

Além disso, não importa de onde e como $f(x)$ é determinado, se por uma operação analítica com quantidades ou de outras formas. O valor de $f(x)$ deve apenas ser univocamente determinada em todos os pontos.

DEDEKIND [1887]

Por uma aplicação de um sistema S entende-se uma lei, segundo a qual cada elemento determinado s de S esta associado um determinado objeto, chamado de imagem de s e simbolizado por $\phi(s)$; dizemos também, que $\phi(s)$ corresponde ao elemento s , que $\phi(s)$ é causado ou gerado pela aplicação ϕ oriunda de s que s é transformado pela aplicação ϕ em $\phi(s)$.

HARDY [1908]

A ideia de uma função. Suponhamos que x e y são duas variáveis reais contínuas, que podemos supor como representadas geometricamente pelas distâncias $AOP = x$, $BOQ = y$ medidas de pontos fixos A_0 , B_0 segundo duas retas ... Vamos supor que as posições dos pontos P e Q não são independentes, porém ligadas por uma relação que podemos imaginar expressa como uma relação entre x e y ... Poderíamos, por exemplo, supor que $y = x...$ ou $x^2 + 1$. Em todos esses casos o valor de x determina o de y .

Nessas circunstâncias y é dito ser uma função de x ... devemos observar que exemplos simples de funções acima mencionadas possuem três características que de modo algum estão envolvidas na ideia geral de uma função, diz:

- (1) y é determinado para cada valor de x ;
- (2) a cada valor de x para o qual y é dado corresponde um e um único valor de y ;
- (3) a relação entre x e y expressa por meio de uma fórmula analítica, da qual o valor de y corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição do último.

De fato, ocorre que essas características particulares são possuídas por muitas das funções mais importantes. Mas ... elas de modo algum são essenciais a uma função. Tudo o que é essencial e que deva haver alguma relação entre x e y tal que a alguns valores de x correspondam de qualquer forma valores de y .

PEANO [1911]

... a função é uma relação especial, pela qual a cada variável corresponda um valor único.

.....

Uma função é uma relação u tal que se dois pares y ; x e z ; x possuem o mesmo segundo elemento, satisfazem a relação u decorre necessariamente que $y=z$ quaisquer que sejam x , y , z .

“

GOURSAT [1923]

A definição moderna da palavra função é devida a Cauchy e a Riemann. Dizemos que y é uma função de x se a um valor de x corresponde um valor de y . Indicamos essa dependência pela igualdade $y = f(x)$. A maioria das funções que estudaremos são definidas analiticamente, ou seja, por indicação de operações que devem ser efetuadas para deduzir o valor de y a partir do de x , porem frequentemente tal circunstância não intervém nos raciocínios

BOURBAKI [1939]

Sejam E e F conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y , ou relação funcional de E em F , se qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F , e um único, que está nessa relação considerada com x .

Damos o nome de função a operação que associa dessa forma a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x ; dizemos que y é o valor da função para o elemento x , e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.

CONCLUSÕES

A partir do exposto, podemos observar a contribuição de diversos matemáticos para o desenvolvimento do conceito de função. Destaca-se, neste contexto, o matemático suíço Leonhard Euler que apresentou duas definições seguidas por outros matemáticos como Lagrange, Dirichelet etc.

Ressalta-se que o referido conceito passou por desenvolvimento tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico. Um dos elementos essenciais que levou aos diversos modos de se conceber as funções foram os trabalhos referentes à Análise, ou seja, o conceito de função está entrelaçado aos estudos históricos da Análise.

REFERÊNCIAS

CORREIA, J. M. T. A Evolução do Conceito de Função na Segunda Metade do Século XVIII. [s.l.] Universidade do Porto, 1999;

FEITEIRA, R.; PIRES, M. O conceito de Função: uma abordagem. Revista de Educação e Matemática nº108, Portugal, p.3-6, maio-junho,2010;

LIRA, A.S. A evolução do conceito de função segundo Guilherme de La Penha.2013.89p. TCC (Licenciatura em Matemática), Centro de Ciências Sociais e Educação, Universidade do Estado do Pará, Belém,2013.

LIRA, A.S; BRANDEMBERG, J.C. O conceito de função: visão e influencia Euleriana. Congresso Pan-Amazônico de Matemática.2018;

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. Tópicos de História da Matemática. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Monica Bertoni dos.et al. A construção do conceito de função no ensino Fundamental. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática,2004.



ANÁLISE DE LIVROS – 4 DÉCADAS DE DIFERENÇA ENTRE DOIS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

FERREIRA, Jonatha Victor Chagas, jonatha.ferreira@aluno.uepa.br¹

LIMA, Wenderson Oliveira de, wenderson.lima@aluno.uepa.br²

¹Universidade do Estado do Pará

²Universidade do Estado do Pará

Resumo: Este trabalho analisa dois livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, o primeiro de 1981 dos autores Antônio Sardella e Edison da Matta, e o segundo de 2018 do autor Luiz Roberto Dante, comparando e discutindo abordagem didática, metodologia e problemas matemáticos nos livros de ambas as épocas, tendo como parâmetros de análise a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para averiguar a parte teórico-metodológica e as questões e exercícios presentes nos livros. Os argumentos de discussão foram embasados nas tendências da educação matemática Resolução de Problemas e História da Matemática, para apontar os problemas didáticos de outrora e a necessidade que se fez de mudanças significativas nos livros atuais.

Palavras-chave: análise, livro didático, BNCC, História da Matemática, Resolução de Problemas.

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem como objetivo analisar e comparar dois livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, o primeiro dos anos 80 e o segundo de tempos atuais, a fim de investigar a evolução de quase quatro décadas na metodologia apresentada aos alunos do ensino regular da escola pública.

Este texto tem como justificativa a discussão acerca da importância de se utilizar competências e habilidades coerentes com a vida cotidiana do aluno, além do uso da História da Matemática juntamente relacionada a Resolução de Problemas, isto é, da origem do conhecimento até os dias atuais, como o conhecimento *era* usado e como *é* usado agora. O propósito de utilizar estas tendências concorda com os parâmetros da BNCC quanto a preparar o estudante para problemas reais, desprendido do “aprender por aprender” algoritmos matemáticos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A análise deste trabalho possibilita se ter uma visão acerca dos métodos didáticos existentes no contexto contemporâneo em comparação aos do passado, “a escrita da história da prática escolar do passado possibilita compreendermos e refletirmos sobre as práticas do presente, as quais, muitas vezes, vão se naturalizando de tal modo que parece que sempre existiram e raramente são questionadas.” (BRIGO, 2010, p. 20, apud VALENTE, 2007).

Referente a metodologia da Resolução de Problemas, é uma resposta ao ensino formalista clássico, que “priorizava a memorização e repetição mecânica de algoritmos e técnicas e os estudantes eram avaliados, preponderantemente, por meio de testes” (MENEHELLI, 2018, p. 213, apud FIORENTINI, 1995), o problema para este método de ensino era de os “estudantes [...] não conseguirem perceber a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola” (MENEHELLI, 2018, p. 214, apud ONUCHIC, 1999, p. 203). A Resolução de Problemas, segundo Meneghelli (2018), ensina os conceitos matemáticos aproximando esses conceitos da realidade dos estudantes. Diferente dos exercícios de repetição, a resolução de problemas aplica

o conhecimento matemático em problemas contextualizados com aquilo que o aluno conhece de mundo “que permite ao estudante desempenhar um papel ativo e significativo em sua aprendizagem.” (MENEGHELLI, 2018 p. 214).

Quanto a História da Matemática, é um recurso que pode ser utilizado para que o estudante possa entender a Matemática “como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.” (CHAQUIAM, 2017, p. 14). Dentro da sala de aula, na “introdução de elementos históricos [...] a descoberta dos conceitos é apresentada em toda a sua extensão e a legitimação para seu uso é baseada nas possibilidades de aumentar o interesse dos alunos e motivá-los para o estudo da Matemática.” (CHAQUIAM, 2017, p. 17, apud SCHUBRING, 1997, p. 157). A história da matemática está atrelada ao porquê de aprender, e o ‘para que serve’ a matemática, “pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, que é possível mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos e que o professor pode construir um olhar crítico sobre o assunto em pauta.” (CHAQUIAM, 2017, p. 14, LOPES e FERREIRA, 2013).

3. METODOLOGIA

Esta pesquisa é do tipo bibliográfica com uma abordagem qualitativa, “A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.” (Gil, 2006, p.50). Já a abordagem qualitativa tem como característica averiguar a qualidade do que se está estudando, nesse caso dois livros didáticos, segundo Gil (2006, p. 175) “não há fórmulas ou receitas predefinidas para orientar os pesquisadores. Assim, a análise dos dados na pesquisa qualitativa passa a depender muito da capacidade e do estilo do pesquisador.”, por tal, fora elaborada pelos autores parâmetros para esta análise, qual será detalhada mais à frente.

O primeiro livro, qual será chamado de **L1**, é o ‘MATEMÁTICA’ dos autores Antônio Sardella e Edison da Matta, publicado em 1981 pela editora Ática – São Paulo. O segundo livro, qual foi denominado **L2**, se chama ‘TELÁRIS – MATEMÁTICA’ do autor Luiz Roberto Dante, 3ª edição, publicado em 2018 também pela editora Ática – São Paulo. Iremos analisar o conteúdo de função do primeiro grau de cada livro, primeiro falando dos aspectos teóricos-metodológicos e em seguida sobre as questões e exercícios.

Os parâmetros de análise que iremos nos basear se refere aos aspectos teóricos-metodológicos e as questões e exercícios, primeiro, em relação aos aspectos teóricos-metodológicos, será dada atenção a contextualização do conteúdo, se o assunto é relacionado com o cotidiano do estudante; se existe interdisciplinaridade; uso de história da matemática e/ou se o conteúdo se limita a ensinar matemática pela matemática. O livro faz articulação entre diferentes representações matemáticas? Existe leituras complementares?

Agora nas questões e exercícios iremos analisar o uso da contextualização, se os autores fizeram uso de problemas envolvendo o cotidiano do aluno; se utilizaram interdisciplinaridade, história da matemática ou somente utilizaram matemática pela matemática. As questões e exercícios incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução? Quais os tipos de questões do livro: aplicação, algorítmica e/ou desafios?

4. ANÁLISE DOS LIVROS

4.1. ANÁLISE DO LIVRO L1: MATEMÁTICA, de Sardella e Matta (1981)

Antes de iniciar esta análise, uma observação é necessária quanto ao Movimento da Matemática Moderna (MMM), este trabalho **não** tem objetivo de discutir o enfraquecimento deste movimento da matemática, ou o seu ‘fracasso’, como criticou o professor norte-americano Morris Kline no livro O Fracasso da Matemática Moderna, publicado no Brasil em 1976. O que nos interessa é que houveram tentativas no passado de se mudar o ensino, no qual se baseia os argumentos a seguir.

O primeiro livro é da década de 80, esta década sucede discussões em congressos dos educadores de matemática sobre a forma de ensinar matemática, “Os congressos brasileiros, realizados na década de 1950, refletiam os anseios dos educadores em relação a mudanças para o ensino da matemática, notadamente em relação à renovação curricular da escola primária e secundária” (SANTOS, 2020, apud PINTO, 2005, p. 3). Entre as décadas de 60 e 80, acontece o Movimento da Matemática Moderna (MMM), com novas discussões acerca do ensinar de forma eficiente, “Em 1959, durante o III Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado no Rio de Janeiro, apareceram as primeiras discussões sobre a modernização. A ideia foi encampada pelo Professor Osvaldo Sangiorgi de São Paulo.” (CLARAS e PINTO, 2008). Sangiorgi comenta sobre os objetivos do MMM, e também em relação ao livro didático,

“Foi modificado – no bom sentido – o panorama geral do ensino brasileiro relativamente ao ensino de Matemática, até então considerada ‘truculenta’ e inacessível à maioria dos alunos, para uma Matemática Moderna, cheia de atrativos, de livros didáticos coloridos e de uma avaliação mais flexível no caráter integrativo preconizado pela lei maior 5692.” (SANTOS, 2020, apud SANGIORGI, 1976, apud BÚRIGO, 1980, p. 223).

Porém, o livro de Sardella e Matta não reflete as discussões de ‘modernizar’ os livros didáticos da época, demonstrando características formalistas na sua abordagem, isto já na década de 80, vinte anos depois da primeira palavra pública de Sangiorgi sobre o assunto, porém não era incomum esta resistência, uma vez que “naquele período nem todos os professores tinham aceitação dessa modificação como mostra o Diário de Notícias- RJ (1968).” (SANTOS, 2020, p. 374), e o livro de Sardella e Matta é um exemplo. O livro possui uma linguagem, como os próprios autores dizem “simples e direta, por vezes coloquial, [...] para, a seguir, explorar exaustivamente essa teoria através de exercícios” (SADELLA e MATTA, 1981, p. 03). De fato, a linguagem é direta e sem contextualização que não seja a matemática pela matemática, os autores conceituam o conteúdo em duas linhas, função linear e em seguida função afim, ambos com exemplos logo em seguida, após isto, ainda na primeira página do capítulo, é proposto um exercício para que o aluno mostre que compreendeu como se lê e como diferenciar a função linear da função afim.

Quanto a articulação entre diferentes representações matemáticas, **L1** se limita a fórmulas, tabelas e gráficos, nada diferente disto é encontrado não só no capítulo 8 sobre função do primeiro grau, mas no livro completo, não foi identificado outros tipos de representações matemáticas além das mencionadas.

Referente a leituras complementares, nada consta. Aliás, após as quatro primeiras páginas de **L1**, cujo objetivo é apresentar a obra, a única dinâmica presente é a de conceito e exercícios logo em seguida, até a última página do livro.

Quanto aos exercícios, não existe qualquer contextualização a não ser de matemática pela matemática, não só do capítulo de função do primeiro grau, mas em todos os exercícios dos 18 capítulos de **L1**, as atividades são do tipo “VAMOS EXERCITAR”, “VERIFIQUE O QUE APRENDEU” e “EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO”. Não há incentivo quanto ao uso de estratégias distintas de resolução, porém, **L1** explora todas as propriedades de uma função de primeiro grau, o capítulo anterior prepara para o conteúdo posterior, que por sua vez trabalha passo a passo a função afim, mostrando como gerar o gráfico a partir das variáveis substituídas na fórmula e qual comportamento do gráfico com a mudança de sinal, definindo a raiz positiva, nula ou negativa, e isto é estudado e aplicado logo em seguida nas questões em todas as etapas, então pode-se considerar que **L1** fornece diferentes estratégias de resolução.

Como já foi discutido anteriormente, **L1** não possui questões de aplicações, isto é, o aprender matemática se limita a utilizar as expressões algébricas tão somente para resolver exercícios escolares. Por outro lado, as questões algorítmicas predominam, o que demonstra o interesse dos autores em ensinar regras de operações matemáticas e nada mais, mesmo assim não existe uma sessão destinada especificamente a desafios. No capítulo de função do primeiro grau, **L1** fornece 50 questões algorítmicas, mas nenhuma de aplicação ou de desafios. Esta foi a análise do primeiro livro, baseada nos parâmetros pré-estabelecidos.

4.2. ANÁLISE DO LIVRO **L2**: TELÁRIS - MATEMÁTICA, de Luiz Roberto Dante

De **L1** até **L2** demos um salto temporal de 37 anos, nesta etapa do trabalho analisaremos três décadas e meia de evolução no livro didático de matemática. O material de Dante foi publicado em 2018, mesmo ano da BNCC, contudo, a habilidade da BNCC utilizada em **L2** é apresentada logo nas primeiras páginas, assim como o objetivo do conhecimento e o capítulo em que será estudado essa habilidade. Assim como em **L1**, o foco da análise será o conteúdo de função do primeiro grau, iniciando com os aspectos teóricos-metodológicos.

O capítulo 04 de **L2** se chama ‘Explorando a ideia de função’. Antes mesmo de entrar no conteúdo de função, o autor destaca suas intenções com este assunto, baseando-se na BNCC, nota-se de primeiro momento o uso de uma paleta de cores atrativas que servem para orientar as informações, detalhe que Sangiorgi mencionou na década de 70. Quanto ao critério de contextualização, **L2** introduz o conteúdo com um problema do cotidiano, dois taxistas conversam sobre valores ganhos em determinadas corridas, utilizando o recurso de HQ, desenhos coloridos e balões de fala, para em seguida realizar perguntas a respeito da situação problema.

L2 não faz uso direto de interdisciplinaridade neste capítulo de função do primeiro grau, contudo, consta conceitos físicos na parte de leitura complementar, relacionando função com escalas termais. Agora quanto a história da matemática, **L2** utiliza este recurso para falar sobre o surgimento de funções, como surgiu e os principais matemáticos a definir os conceitos: Bernoulli, Euler e Dirichlet.

Referente ao contexto de matemática pela matemática, é predominante em **L2**, conceitos, propriedades e exemplos são explorados periodicamente no livro, entretanto, diferente de **L1**, acompanhado de textos explicativos tal como as instruções de um professor, utilizando cores, figuras e desenhos em apoio aos algoritmos.

Assim como em **L1**, o livro de Dante utiliza representações do tipo expressões algébricas e seus respectivos gráficos, mas vai além, e apesar de não fazer demasiado uso de diferentes representações, como ocorre no capítulo seguinte de **L2** no conteúdo de geometria, que utiliza malha quadriculada e o geoplano para estudar semelhança, vistas ortogonais e perspectiva, **L2** utiliza a representação de função com palitos de fósforo e termômetro. Quanto a leituras complementares **L2** cumpre esse critério em uma lauda que fala sobre a graduação do termômetro e escalas termais, isto é, mostrando a função em um conteúdo da Física, além disto, sugere livros que possam complementar o aprendizado.

Em relação a questões e exercícios, **L2** utiliza os tipos “ATIVIDADES”, “EXPLORAR E DESCOBRIR”, “REVISANDO SEUS CONHECIMENTOS”, “TESTES OFICIAIS” que traz questões já aplicadas em vestibulares e concursos, e “VERIFIQUE O QUE ESTUDOU”. Em relação a contextualização, **L2** oferece diversos problemas que envolve o cotidiano. **L2** também utiliza o recurso de questões interdisciplinares, no capítulo de funções existem três, uma com geografia, outra com física e a última sobre biologia.

As questões de matemática pela matemática predominam em **L2**, são as mais variadas questões algorítmicas do tipo lei de formação, ao todo são 51 exercícios cujo objetivo é a aplicação dos algoritmos da função do primeiro grau, entretanto, algumas questões possuem estratégias mais didáticas de fazer isto, por exemplo, ao invés de utilizar variáveis, em dado momento o autor usou uma ‘máquina de calcular’.

Foi identificado algumas questões que incentivam o uso de diferentes estratégias de resolução, do tipo construir gráficos ou tabelas no caberno para se chegar no resultado da questão. Questões sobre história da matemática não foram identificadas.

Quanto os tipos de questões, referente aos desafios, não foi identificado questões do tipo, entretanto, existe as atividades que o autor chama de ‘Bate-papo’, que são questões isoladas dispostas aqui e ali ao longo do capítulo, será considerada equivalente a ‘desafio’ nesta análise.

Em números, **L2** possui 27 questões de aplicação, 51 questões algorítmicas e 4 desafios.

Esta foi a análise do segundo livro, os demais capítulos seguem a mesma lógica deste, os mesmos tipos de recursos, imagens de apoios, tipos de questões, etc. No próximo tópico será discutido e comparado as duas obras.

5. CONCLUSÕES

Conclui-se que **L1** possui o único objetivo de ensinar matemática por ‘a mais b’, isto é, conceituando formalmente as propriedades e explicando assuntos com uma metodologia de “faça assim e assim”, logo em seguida exercitando tudo que foi explicado, sem contexto ou motivos pelo qual se está aprendendo, tal como uma calculadora é programada para ser capaz de resolver contas envolvendo números e variáveis. Não existe sequer comentários a respeito da aplicação do que se está apresentado, todo conteúdo é desconectado de qualquer outra área das ciências, não há sentido àquilo que se aprende, tomado **L1** um livro desnecessário em dias atuais, a não ser que o objetivo seja o estudo complementar para o(a) discente, ou docente, de matemática que busca aprimorar suas habilidades em propriedades e algoritmos a fim de ampliar seus conhecimentos. O principal problema de **L1** pode ser facilmente resolvido com a metodologia de resolução de problemas, que funciona “como uma importante ferramenta que auxilia na construção do conhecimento matemático e que permite ao estudante desempenhar um papel ativo e significativo em sua aprendizagem.” (MENEGUELLI et al. 2018, p. 214), ou mesmo pela história da matemática, “é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática.” (BNCC, 2018, p. 299), ou seja, ir além da fixação do conteúdo, justificando o porquê de aprender.

Em contrapartida, **L2** utiliza diversos recursos didáticos, não se preocupa somente em apresentar conteúdos, mas também a aplica-los, dando sentido àquilo que se aprende e como utilizar fora do contexto escolar. Tais recursos são demasiados importantes na educação, não só para aprender matemática, mas para aplicar esses conhecimentos “historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.” (BNCC, 2018, p. 09), podemos utilizar este mesmo argumento para justificar a necessidade de se modificar um livro didático conteudista de três décadas e meia atrás.

Outra realidade embasava a educação em 1981, o ensino era formalista e os livros refletiam isto. A BNCC é publicada em 2018, porém, seus fundamentos originam da constituição de 1988, cujo preceito visa “pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BNCC, p. 10, apud BRASIL, 1988). Podemos dizer então que os livros de Sardella, Matta, e Dante refletem os esforços

necessários ao desenvolvimento do estudante brasileiro, quais medidas a serem aplicadas para sua formação como ser pensante e crítico, quais modificações se fizeram fundamental em algumas décadas.

Nesta análise vislumbramos duas abordagens diferentes afim de mostrar para o professor e para o estudante de matemática a importância de se utilizar a Resolução de Problemas e a História da Matemática, uma vez que a Resolução nos mostra o ‘como aplicar’ e a história o ‘porque estudar’ a matemática, caso contrário, a aula que seja desprendida desses recursos se torna um amontoado de conteúdo sem aplicação, tal como era na década de 80, o que se contradiz com o objetivo da matemática em estudar todas as coisas existentes e resolver problemas, ao invés de ser uma matéria apenas para fazer contas e decorar fórmulas.

6. REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRIGO, Jussara. **AS FIGURAS GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE HISTÓRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS**. Tese de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica - Centro de Ciências Físicas e Matemática, Programa de pós-graduação em educação científica e tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis 2010.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temático: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **TELÁRIS – MATEMÁTICA**. 3ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2018.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2006

MENEGHELLI, Juliana. et al. **Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. Paraná, 2018.

SARDELLA, Antônio; MATTA, Edison da. **MATEMÁTICA**. São Paulo: Editora Ática, 1981.

SANTOS, Elciane de Jesus. **MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL: UMA RENOVAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA NAS DÉCADAS DE 1960 A 1980**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 370–379, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2846. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2846>. Acesso em: 22 fev. 2022.



O MOTIVO DE ESTUDAR EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Oliveira, Beatriz, biasccp97@gmail.com¹
Brandemberg, João Cláudio, brand@ufpa.br²
¹Universidade Federal do Pará (UFPA)
² Universidade Federal do Pará (UFPA).

Resumo: Quando um estudante se vê diante um novo assunto, fica naturalmente muito intrigado, buscando uma investigação mental em como proceder, executar e transportar o tema para a realidade. O estudo de equações do segundo grau possibilita expressar o pensamento matemático e facilitar a comunicação de resultados. Aprimorar o estudo das equações utilizando como método a História da Matemática ajuda o aluno na abstração dos cálculos, até mesmo no que tange a linguagem, a dinâmica e a criatividade da aula ministrada. Do dia a dia a questões de matemática financeira, movimento de corpos na física, decaimento de substâncias na química, as Equações do Segundo Grau estão presentes e modelam essas vertentes, por isso é necessário um cuidado ao tratá-las dentro das salas de aula; a utilização da História da Álgebra, sendo um dos tópicos dentro da História da Matemática, permite a facilidade do ensino aprendizagem, pois a construção da Matemática se mostra evidente desde os primórdios babilônicos até as pesquisas de pesquisadores atuais da área. Dessa forma o aluno observa o passado e, através dele, pode construir novos métodos e perceber a Matemática como construção humana, ou mais próxima de sua realidade.

Palavras-chave: equações do segundo grau, história da matemática, história da álgebra

INTRODUÇÃO

Esse estudo se baseia na obra principal intitulada “Idioma da Álgebra” (2017) do professor João Cláudio Brandemberg, que traz em seu conteúdo o contexto histórico do desenvolvimento da Álgebra e como trabalhar os conteúdos de Equações do Primeiro e Segundo Grau, dando, este trabalho, um enfoque para as Equações do Segundo Grau.

Segundo a BNCC – Base Nacional Curricular Comum – a primeira competência que deve ser desenvolvida no estudante fala sobre conhecimento, que ele possa não apenas valorizar os conteúdos, como também utilizar os saberes historicamente construídos no seu mundo, onde possa fazer uso para entender e explicar a realidade na qual está inserido. O interesse principal é expor razões pelas quais os alunos devem estudar este conteúdo que está ligado constantemente ao seu cotidiano, mas que muitas vezes passa despercebido.

Usar componentes históricas é justificado pelo fato de compreender o processo de desenvolvimento de um conceito ou fazer comparação de estratégias de resolução de um problema, permite que o aluno possa aplicar estratégias similares ou criar ideias durante a resolução de uma atividade fazendo relações entre os componentes.

Assim, o trabalho busca fazer um apanhado geral sobre a Álgebra na história, as Equações do Segundo Grau na história, o porquê de se estudar Equações do Segundo Grau e uma abordagem para o ensino-aprendizagem delas.

2. UM POUCO DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

A Matemática é a ciência que analisa e sintetiza padrões, sejam eles de origem da natureza, criados pela mente humana ou mesmo por outros padrões. Buscar compreender um padrão e expressar uma generalidade constitui uma poderosa forma de resolver problemas. (Brandemberg 2017, p.15) afirma que a Álgebra é uma necessidade para

realização de problemas que vão além dos aritméticos, pois permite introduzir variáveis na elaboração e resolução e corrobora com a generalização de processos, ou seja, expressando relações gerais.

Para (Brandemberg 2017, p.19), a Álgebra pode ser tomada como uma generalização da Aritmética, ela se preocupa com a noção de variável em suas múltiplas faces: incógnita, parâmetro e variável. Com isso, é importante ter uma visão ampla e não excludente das áreas e atentar para a não mecanização, pois, segundo Marques (2004) a construção da linguagem algébrica vai além de uma ferramenta para resolver problemas e cálculos de forma mecânica, ela deve permitir o desenvolvimento e exercício da capacidade de abstração e generalização.

Nesse sentido, dissociar a álgebra da aritmética faz com que seu ensino perca em parte o significado para o aluno e para um trabalho mais produtivo é necessário trazer uma grande variedade de experiências que propiciem a vivência de situações em que se possa perceber as funções da álgebra, seus usos e papéis atribuídos às letras nesse estudo.

Eves (2011) cita que a Álgebra pode ser percebida em três momentos distintos, três estágios do desenvolvimento da notação em si, sendo eles: **a álgebra retórica** em que as soluções dos problemas são escritas em prosa, sem abreviações ou símbolos, como por exemplo a Álgebra Babilônica; **a álgebra sincopada** onde se adotam abreviações para quantidades e operações que se repetem com frequência, que é o caso d Grécia; e por fim, a álgebra simbólica, que possui resoluções expressas através de símbolos dissociados de significado do que representam.

(Brandemberg 2017, p. 27) e Eves (2011) pontuam um importante feito matemático do século XVI que é a solução algébrica das equações cúbica e quártica no campo da Álgebra com um destaque para o nome de Nicollò Fontana de Brescia (1500-1557), mais conhecido como Tartaglia, professor de cálculo que gostava de participar de disputas matemáticas e se envolveu em uma interessante disputa com Antonio Maria Fiori, no século XVI, que conhecia a solução de equações do tipo $x^3+ax^2=b$.

Já no século XVII, a Álgebra teve um avanço significativo que se traduz no trabalho de René Descartes (1596-1650), Geometria. Em acordo com Eves (2011), a obra era dividida em três partes, sendo a primeira uma explanação de alguns princípios da geometria algébrica; a segunda uma classificação de curvas (atualmente ultrapassada) e um método de construir tangentes a curvas e, por fim, a terceira parte trata da resolução de equações de grau maior que dois. O trabalho de Descartes é destaque por trazer suas equações escritas em uma notação mais atual, como por exemplo a convenção do uso das primeiras letras do alfabeto para indicar constantes e as últimas para variáveis e a notação para potências.

Os autores pioneiros os que mais instituíram a Álgebra Elementar que se constitui na resolução de equações (problemas) na Educação Básica atualmente. Iniciando por Descartes que lançou mão das raízes quadradas de números negativos, as quais denominou raízes imaginárias, estabeleceu-se um novo universo a ser explorado e um dos matemáticos que aceitaram o desafio foi Leonhard Euler (1707 – 1783) que se empenhou a trabalhar esta teoria no século seguinte ao de Descartes. Euler fez avançar a chamada Teoria dos Números Complexos, ainda que outros matemáticos acreditassem que estes tinham um verdadeiro caráter sobrenatural, pois acreditava que embora existissem unicamente na imaginação, por terem ideias do que se tratava, poderiam utilizá-los na resolução de equações e na Matemática. (BRANDEMBERG, 2017, p.29)

Em acordo com (Brandemberg 2017, p.31), Euler acreditava que para desenvolver habilidades matemáticas é necessário conhecer os métodos de resolução de equações, daí surge seu livro *Elements of Algebra* para o ensino da Álgebra que traz um método para resolver equações do segundo grau (bem similar ao que se conhece no Brasil como Fórmula de Baskhara) e um extenso estudo das resoluções algébricas de equações do terceiro e do quarto graus. O papel de Euler no avanço da Álgebra é incalculável e rendeu até mesmo homenagens como a do físico François Arago: “Euler poderia muito bem ser chamado, quase sem metáfora, e certamente sem hipérbole, a encarnação da análise”, como escreve Eves (2011).

3. UM POUCO DA HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Segundo (Brandemberg 2017 p. 16-17) as teorias relacionadas às estruturas algébricas nascem com o intuito de produzir métodos e atender demandas advindas de importantes propriedades do mundo real. Os conceitos dessa área da Matemática estão ligados à evolução da teoria dos números, resolução de equações algébricas e problemas geométricos, assim, o estabelecimento da equivalência entre raciocínios comuns desenvolvidos, por exemplo, em Teoria dos Grupos de Permutação e Teoria dos Números, impulsionou a formulação de conceitos abstratos, como Grupo, Anel e Corpo.

Realizando um recorte da história do desenvolvimento da Álgebra, é possível observar um desenvolvimento de regras para a resolução de problemas dos babilônios por volta de 1600 a.C., onde a educação era amplamente

disseminada na população e o estudante que saía da escola estava preparado para dominar leitura, escrita e aritmética. (KRIWACZEK, SUANO e RIBEIRO, 2018, p. 249).

Em acordo com Nobre (2003) os primeiros indícios históricos que envolvem equações do segundo grau podem ser encontrados em documentos deixados pelos povos egípcios, babilônicos, chineses, gregos, e outros, datando cerca de 2000 anos a.C.

Diofanto de Alexandria é considerado o precursor da Álgebra, afinal, são dele os primeiros registros da utilização de símbolos para a incógnita. Lagrange (2008) (apud Brandemberg, 2017) cita os clássicos problemas de Diofanto: encontrar dois números sabendo sua soma e sua diferença – equação do primeiro grau – e encontrar dois números sabendo sua soma e seu produto – equação do segundo grau.

Trazer consigo conhecimento das técnicas babilônicas de resolução de equações permitiu que Diofanto fizesse uso dessas ferramentas para resolver problemas com igualdades e desigualdades quadráticas. Sua obra contendo 130 problemas algébricos e suas soluções numéricas se tornou conhecida apenas na segunda metade do século XV na Europa quando foi traduzida para o latim.

O uso de letras para representar valores só se inicia com o francês François Viète em 1591 que traz em uma de suas obras um cálculo onde letras representam quantidades e grandezas que se assemelham as noções atuais de Aritmética e Geometria. É apenas a partir de 1940 que o chamado “Cálculo Literal” desenvolvido pelo grupo Bourbaki traz consigo o último estágio dessa representação, consolidando-a e espalhando pelo mundo a ideia de que os elementos essenciais eram os conjuntos, as relações e as estruturas. (BRANDEMBERG, 2017)

Considerado o berço dos números, o Egito tinha uma civilização determinada, ávida por aprender os segredos escondidos em sua terra. Um dos materiais que é alicerce para pesquisa dos historiadores chama-se Papiro de Rhind, um documento encontrado próximo ao templo do faraó Ramsés II e que contém 85 problemas matemáticos que datam 2000 anos a.C.

4. APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Miguel e Miorim (2004) afirmam que a finalidade da educação matemática é que o estudante compreenda e faça uso da Matemática tida como um conjunto de métodos e resultados, além disso, deve ser capaz de construir através do conhecimento matemático “valores e atitudes de natureza diversa, visando à formação integral do ser humano e, particularmente, do cidadão, isto é, do homem público”.

Para atender esse objetivo, é interessante que o professor faça opção por diferentes estratégias úteis que sejam capazes de proporcionar uma melhor compreensão dos conhecimentos a serem passados. Uma dessas estratégias é a abordagem histórica da matemática que “considera a exploração de aspectos resgatados de fontes históricas, que com algumas adaptações pedagógicas se configurem em atividades desenvolvidas”. (BRANDEMBERG, 2017, p.14)

Entrar em uma sala de aula para lecionar um conteúdo de matemática e não ouvir a rainha das perguntas a seguir é quase impossível:

– Para que serve isso?

Não é culpa somente dos alunos acreditarem que aquele conhecimento não é útil, pois olhando para o mundo desse momento é possível perceber que aquele jovem nasceu em uma comunidade moderna, utilizando tecnologias que se renovam quase diariamente e não para se questionar como atingiram aquele ponto de inovações que facilitam a vida.

Em acordo com Santos (2007) cabe aos professores mediar o processo de construção do conhecimento, instigando os estudantes, fazendo-os pensar e buscar soluções criativas, aproximá-los da matemática, apresentando problemas que tenham relação com sua vivência, seu dia a dia, ou seja, dar um contexto do fazer matemático para que exista realmente aprendizagem. Isso pode se dá através da história, pois ao surgir o questionamento é possível mostrar que o que se tem é fruto da criação humana que, através da Matemática, foi capaz de acumular conhecimento do mundo físico, traduzi-lo para sua linguagem e, assim, fazer uso do mesmo para a sociedade.

Nesse instante chegamos à questão norteadora deste trabalho: Por que estudar equações do segundo grau?

As equações do tipo $ax^2+bx+c=0$ são muito utilizadas em diversos campos, seja na física, química, biologia e até mesmo no dia a dia. O aluno sente a necessidade de sentir-se próximo, ter uma afinidade com o que está aprendendo, é importante que compreenda a relevância daquele estudo e como tem ou teve impacto sobre sua vida, pois esse é um ponto relevante para que de fato compreenda o assunto em questão.

As Equações do 2º grau estão inseridas na história e como ainda são utilizadas no contexto da sociedade atual. Os exemplos desse conteúdo matemático na física, química, e até outras disciplinas só mostram a importância que é construir esse conceito de maneira sólida na mente do estudante.

O objetivo previsto pela BNCC é desenvolver competências no estudante que mobilizem conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para desenvolver as demandas complexas da vida cotidiana. Uma das abordagens para alcançar esse fim é utilizar a História da Matemática; mais do que trazer um contexto, a História da Matemática pode e deve ser usada para produzir atividades, o professor deve, antes de tudo, observar a finalidade, onde pretende chegar e o que precisa para atingir. Os textos precisam ter temas e objetivos bem definidos ligados a obtenção do conhecimento direcionado a um determinado conceito.

CONCLUSÕES

O assunto de Equação do 2º grau é visto desde o fundamental (9º ano) até as séries posteriores de ensino e não apenas em Matemática, como foi possível observar no desenvolvimento do capítulo III desse trabalho, onde notou-se como esse conteúdo está ligado a outras disciplinas e ao cotidiano da comunidade. Por mais tradicional que seja a presença desse assunto nas salas de aula é inegável que os professores necessitam trazer um novo olhar, observar de novos ângulos para tornar mais atraente, mais compreensível o estudo em questão.

Enxergar e fazer com que o aluno enxergue por um ângulo diferente essa ou qualquer outra questão possibilita que desenvolvam saberes, percebam relações entre os métodos descritos e construam o conhecimento de sua própria maneira, atingindo uma autonomia que dificilmente é alcançada fazendo apenas uso de métodos tradicionais de ensino, onde o aluno não é agente ativo no processo de aprendizagem, adotando apenas um papel de receptor.

Em acordo com Brandemberg (2017), a linguagem matemática desempenha um papel significativo dentro da própria Matemática, isso significa que ao conhecer o processo histórico de desenvolvimento da Álgebra, nesse caso das Equações de 2º Grau, é possível perceber a simbologia algébrica como linguagem facilitadora da expressão do pensamento matemático e qual a importância que desempenhou e continua desempenhando dentro do contexto atual aplicada à sociedade e a resolver seus problemas.

REFERÊNCIAS

BRANDEMBERG, J. O idioma da Álgebra. Belém: SBEM – PA, 2017.

EVES, H. Introdução à história da matemática/ Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

GIL, K. Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p. 118, 2008.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. História na Educação Matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

NOBRE, S. História da resolução da Equação do 2º grau: Uma abordagem pedagógica. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.

KRIWACZEK, P., SUANO, M., RIBEIRO, V. Babilônia: A Mesopotâmia e o nascimento da civilização. Rio de Janeiro: Zahar, 2018.

MARQUES, 2004. Álgebra: regularidades, generalizações e conexões com a geometria. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8. 2004, Pernambuco. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC69966974768.pdf>> Acesso em: 02 mar. 2021.

ROQUE, T. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, M. Função quadrática e suas aplicações no cotidiano. In: Programa de Desenvolvimento Educacional. Secretaria de Estado da Educação. Governo do Estado do Paraná, 2007. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/620-4.pdf> Acesso em: 06 mar.2021.



UM POUCO DA EVOLUÇÃO EM SÓLIDOS PLATÔNICOS

VELASCO, Brenda Leticia Noronha, email¹: lehvelasco@gmail.com

NASCIMENTO, João Batista do, email²: jbn@ufpa.br

RESUMO: *O presente trabalho irá trazer um histórico em evolução do conceito de Sólidos de Platão desde uma primordial fonte na Grécia Antiga que os definem, seguindo pontuando por diversos séculos até abordagens que estão em materiais atualmente usados em disciplina da nossa graduação e do ensino básico. Assim, abordaremos esse tema destacando aspectos relacionados com várias épocas histórias tentando fazer um diálogo que conecte concepções e pensamentos matemáticos compondo uma evolução significativa do desenvolvimento científico que fica cabível implementar, o todo ou em partes, pelo sistema educacional. Por isso, fornecemos parâmetros para esse tema ser tratado em nível de curiosidade histórica, exposição visual, dinâmica de sensibilização, oficina de construção desses sólidos e em aprofundamentos conceituais compatível com o que ocorre em disciplina Geometria Espacial de curso superior. Assim, usando principalmente a metodologia da pesquisa bibliográfica, objetivamos produzir material expositiva que nos permita mostrarmos um processo do evolutivo desse conteúdo matemático e potencializar tanto fatores da formação docente específica quanto capacitação intelectual em geral.*

Palavras-chave: *Sólidos de Platão, Geometria Espacial, História da Matemática*

¹ Discente FACMAT/UFPA

² Docente FACMAT/UFPA

INTRODUÇÃO HISTÓRICO

Um motivo que levou a escolher esse tema surgiu durante o segundo semestre da minha graduação em matemática\UFPA em um trabalho exploratório em Sólidos de Platão na disciplina de Laboratório de Geometria Espacial ministrada pelo docente João Batista do Nascimento quando ampliamos o estudo em diversos aspectos históricos e trazemos outros personagens envolvidos na evolução e discussão em sólidos, não apenas platônicos, sendo que todos aplicáveis em situações das mais diversas e que vão desde a divulgação científica até processos formais de construção desse conhecimento em situações do ensino da geometria.

Platão, personagem central, nasceu em Atenas no ano de 428 a.C. Por pertencer a uma família importante politicamente em Atenas teve acesso a uma educação especial de acordo com a sua posição na aristocracia ateniense. Após um período fora, Platão retorna a sua cidade natal e funda uma escola de filosofia no jardim de Akademos em que, na sua entrada, ler-se-ia a máxima “*Quem não é geômetra não entre*” uma advertência que deixava claro das habilidades exigidas aos iniciantes, um costume que era presente nos templos antigos. (CORNELLI; COELHO, 2007)

Figura 1: Afresco do italiano Rafael Sanzio (1483-1520 d. C) retratando detentores(as) de saberes e que inclui Platão



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Escola_de_Atenas, acesso mar/2022

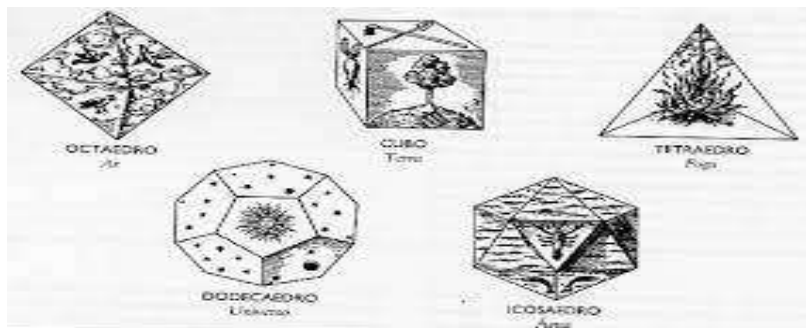
Há diversos indícios de que alguns conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelos egípcios e babilônios sofreram uma evolução conceitual quando entraram em contato com a filosofia grega e dessa forma assumiram um caráter mais formalista a partir de definições, axiomas, postulados e proposições (BICUDO, 1998, p. 307), o tema aqui não é exceção, pois, de acordo com o matemático Proclus Lycaeus (412 -485 d. C) (APUD CORNELLI; COELHO, 2007, p.5), Platão foi responsável por um impulso às ciências matemáticas, principalmente na geometria, deixando uma grande contribuição em escritos, como no caso dos sólidos geométricos, sendo caso mais particular atualmente designado de poliedros de Platão, posto que, o registro escrito mais antigo que sabemos haver sobre esses sólidos é a obra de sua autoria chamada *Timeu* (YAMASAKI; SANTOS, 2021). Uma descrição dos sólidos platônicos é a seguinte:

Em cada caso, elas têm a mesma aparência a partir de qualquer vértice (canto), todas as suas faces são feitas da mesma forma regular, e todas as arestas são idênticas. [...] e têm nomes derivados do seu número de faces. O *tetraedro* é criado a partir de quatro faces; o *octaedro*, a partir de oito; e o *icosaedro*, a partir de vinte [...] continua com o *cubo* comum, com suas seis faces quadradas, e com o *dodecaedro* e suas doze faces pentagonais regulares. (SUTTON, 2015, p.6)

Platão é indicado por diversos historiadores da matemática como um dos primeiros a quem se atribui uma prova da existência de apenas cinco poliedros de um tipo determinado, quais sejam: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, e sendo essa a razão pela qual são denominados de poliedros de Platão. E assim como pitagórico da época que associavam saberes matemáticos com manifestações de interesse humano, Platão concebia que esses sólidos modelavam elementos da natureza, muito em função do misticismo reinante nessa época, buscando explicações e descobertas relacionados ao universo. Assim, os elementos terra, ar, água e fogo eram respectivamente representados pelo cubo, octaedro, icosaedro e tetraedro. Sendo o dodecaedro relacionado ao cosmo. (REIS, 2013)

E o conceito de sólidos platônicos são os que possuem todas suas faces de um mesmo tipo de polígono regular, isto é, faces congruentes entre si, e partindo de cada vértice a mesma quantidade de arestas. (YAMAKASE; SANTOS, 2021)

Figura 2: Sólidos e ilustrações das suas representações atribuídas por Platão



Fonte: <http://geomat-gb.blogspot.com/2010/03/poliedros-regulares.html>, acessado em 23/03/22

As ideias de Platão forneceram base para que outros matemáticos pudessem dar continuidade e evoluir esse pensamento. Como foi o caso do matemático Pappus de Alexandria (290-350 d.C) que estudou Sólidos de Platão e suas projeções em uma superfície esférica. E de acordo com Eves (2004), Johannes Kepler (1571-1630) assumiu que dos cinco sólidos apenas o tetraedro tinha o menor volume para a sua superfície enquanto o icosaedro tinha um maior volume, e esse fato relacionando volume e superfície era explicado com base em características de secura e umidade. Sendo assim representando o fogo, o tetraedro, e a água com o icosaedro. Além disso Kepler propôs também o *estrelamento* dos poliedros um processo que ocorria a partir da extensão das arestas ou planos das faces. (SUTTON, 2015)

Já o matemático suíço Leonhard Euler (17707-1783 d. C) provou que a soma do número de vértices com o número de faces de qualquer poliedro convexo, o que inclui como caso particular os Sólidos de Platão, excede em duas unidades o número de suas arestas (FERREIRA; CORREIA, s.d), resultado esse mais conhecida atualmente por Fórmula de Euler $V + F = A + 2$. E esse resultado permite se fazer uma demonstração do fato que segue.

TEOREMA: HÁ APENAS CINCO SÓLIDOS DE PLATÃO. OU SEJA, HÁ APENAS CINCO POLIEDROS CONVEXOS EM QUE TODAS AS FACES SÃO DO MESMO TIPO DE POLÍGONO REGULAR E EM TODO VÉRTICE CONCORRE A MESMA QUANTIDADE DE ARESTAS.

Vamos supor que em cada vértice de um poliedro convexo se encontram m arestas e que cada face desse poliedro possua n arestas, com $m > 2$ e $n > 2$. Partindo disso temos: $2A = nF = mV \Rightarrow V = \frac{nF}{m}$, e usando a relação de Euler: $A + 2 = F + V$, obtemos: $\frac{nF}{2} + 2 = F + \frac{nF}{m} \Rightarrow mnF + 4m = 2mF + 2nF \Rightarrow 2mF + 2nF - mnF = 4m \Rightarrow F = \frac{4m}{2m+2n-mn} \Rightarrow 2m + 2n - mn > 0 \Rightarrow 2n > m(n - 2)$.

Como $m \geq 3$ Vem: $2n \geq 3(n - 2) \Rightarrow 2n > 3(n - 2) \Rightarrow 2 < n < 6$. Assim, ocorre as seguintes possibilidades de valores: $n = 3, n = 4$ ou $n = 5$.

Para $n = 3 \Rightarrow F = \frac{4m}{6-m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 6$, portanto, $m = 3, m = 4$ ou $m = 5$.

- $m = 3 \Rightarrow F = 4$ (**Tetraedro**);

- $m = 4 \Rightarrow F = 8$ (**Octaedro**)

- $m = 5 \Rightarrow F = 20$ (**Icosaedro**)

Para $n = 4 \Rightarrow F = \frac{4m}{8-2m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < 4 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow F = 6$ (**Hexaedro**)

Para $n = 5 \Rightarrow F = \frac{4m}{10-3m} > 0 \Rightarrow 3 \leq m < \frac{10}{3} \Rightarrow m = 3 \Rightarrow F = 12$ (**Dodecaedro**)

Logo, todas essas combinações possíveis geram exatamente e somente cinco poliedros e fazemos um quadro resumo no que segue.

Figura 4: Quadro resumo dos Sólidos de Platão

Nome	Arestas	Faces	Vértices	m	n
Tetraedro	6	4 (Triângulo)	4	3	3
Hexaedro	12	3 (Quadrado)	8	3	4
Octaedro	12	8 (Triângulo)	6	4	3
Dodecaedro	30	12 (Pentágono)	20	3	5
Icosaedro	30	20 (Triângulo)	12	5	3

Fonte: dos autores

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA

O já exposto nos permitiu organizar um quadro de evolução do tema e envolvendo importantes ideias matemáticas desenvolvidas em torno do tema Sólidos de Platão conectando Grécia Antiga com fatos que são factíveis de apresentarmos em sala de aula dos tempos presentes, portanto, potencializando antes de tudo um encantamento pelo assunto e possibilitando uma construção de síntese que motive reconstruções para outras situações.

OBJETIVOS

Os objetivos, aqui definidos, são:

1. Descrever algumas das principais ideias envolvidas com sólidos de Platão
2. Apresentar alguns personagens da história da matemática envolvidos com a evolução do tema.
3. Expor alguns detalhes possíveis de aplicações em situações de ensino da geometria com alta qualidade.

METODOLOGIA

A principal metodologia utilizada será determinada por consultas bibliográficas e complementaremos com estudos didáticos que permitam sintetizarmos abordagens úteis para aplicação em sala de aula.

CONCLUSÃO

A importância educacional que há em conhecer aspectos evolutivos de qualquer ideia, e não apenas de matemática, justifica todo esforço que se façamos e aproveitar oportunidade em disseminar alguma situação rica em historicidade, dado que, potencializa inclusões de tal tema em sala de aula. Especificamente, no trabalho agora proposto, se fez um material que serve de base e promoção de conhecimentos no tema Sólidos de Platão, posto que, vimos que este conecta saberes e construções de pensamentos matemáticos que transitam da Grécia Antiga aos dias atuais, o que indica caminhos que a escola precisa percorrer para promoção de valores educacionais e científicos. O que torna relevante promover a disseminação de tais saberes tanto para formação docente quanto intelectual.

REFERÊNCIAS

- BICUDO, I.; Platão e a Matemática. Letras clássicas, n. 2, p. 301-315, 1998.
- CADAMURO, S. S., L.; ARAÚJO, N. S. R.; Descobrimos os poliedros de Platão e sua relação com o cotidiano. 2013.
- CORRÊA J. N. P; PEREIRA D.C, Um Estudo sobre o Ensino de Poliedros por Atividades, Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 15, Número 35, p. 228-244, disponível em www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/295/239, acessado em jan\2021
- CORNELLI, G.; COELHO, M. C. M. N.; " Quem não é geômetra não entre!" Geometria, Filosofia e Platonismo. Kriterion: Revista de Filosofia, v. 48, p. 417-435, 2007.
- EVES, H.; Introdução à História da Matemática, 1ª edição, Editora UNICAMP. SP, 2004, 844p
- FERREIRA, B. L.; CORREIA, A. M. A.; Engendramento dos Poliedros Platônicos, Educação Gráfica (UNESP. Bauru) , v. 13, p. 141-162, 2009, disponível em www.educacaografica.inf.br/artigos/engendramento-dos-poliedros-platonicos, acessado em 23\03\2022
- FERREIRA, E. L.C; F.; NETO F. X. F; ISABEL LUGÃO RIOS I. L.; Geometria Básica - vol.2 , CECIERJ, disponível em <https://canal.cecierj.edu.br/recurso/6502> , acessado em jan\2020
- FILHO Z.A.; Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos, RPM 03, disponível em <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/2017-2/rpm3.pdf> , acessado em jan\2021
- KALEFF, A. M.M.R.; SÁ, L. A.; DE TOLEDO, M. I. M.; Criando, Vendo e Entendendo Sólidos de Revolução. Revista Boletim Gepem, Rio de Janeiro-RJ, 2008.
- PANTOJA CORRÊA, J. N.; PEREIRA, D. C. Um Estudo sobre o Ensino de Poliedros por Atividades. **REMATEC**, v. 15, n. 35, p. 228-244, 5 dez. 2020, disponível em www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/295/239 , acesso maio\22
- RADIN L. D.; Abordagens Diversificadas para o Ensino dos Poliedros de Platão, Tese de Mestrado, PROFMAT, UFSM\RS, 2018, disponível em https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/16105/DIS_PPGMRN_2018_RADIN_LEANDRO.pdf?sequence=1&isAllowed=y, acessado em 23\02\2022
- REIS, E. A. et al. Os poliedros de Platão. 2013.
- SUTTON, D.; Os Sólidos Platônicos e Arquimedianos: o pequeno guia do espaço tridimensional. Primeira edição. São Paulo. Ed. É Realizações. 2015.
- TRABATTONI, F.; Platão. Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2012.
- YAMASAKI, A. E.; SANTOS, R. M. O.; Geometria e Poliedros de Platão. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.



ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DE POLIEDROS DURANTE O RENASCIMENTO

Corrêa, João Nazareno Pantoja, joaonpcorrea@hotmail.com¹
Brandemberg, João Cláudio, brand@ufpa.br²

¹ Universidade do Federal do Pará (UFPA)

² Universidade Federal do Pará (UFPA)

Resumo: Neste artigo, tendo em vista a relevância da história dos conteúdos matemáticos no ensino de matemática, buscamos oferecer ao docente de matemática uma literatura que busque suprir a demanda no que se refere ao ensino de Poliedros apresentando os principais estudiosos que contribuíram com seus trabalhos para o seu respectivo desenvolvimento em ordem cronológica juntamente com uma síntese dos seus traços biográficos e suas respectivas contribuições no Renascimento, objetivando mostrar o desenvolvimento do tema no referido período, bem como as influências sofridas da Antiguidade Clássica, mostrando que o conhecimento se desenvolve ao longo do tempo. Optamos por este recorte tendo em vista tratarmos de estudos pouco abordados neste período e pela grande extensão da linha do tempo do desenvolvimento deste tema, que como verificamos no decorrer de nossa pesquisa, se desenvolve desde o período neolítico até a idade contemporânea. Concluímos que o estudo de poliedros sofreu um considerável desenvolvimento no período do Renascimento, e que a concepção histórica dos conteúdos matemáticos pode nos levar a compreensão mais aprofundada de conhecimentos matemáticos, proporcionando a realização de uma melhor abordagem em sala de aula.

Palavras-chave: História; Matemática; Renascimento; Poliedros; Desenvolvimento.

INTRODUÇÃO

Durante as aulas de matemática, é comum o professor ouvir indagações ditas por seus alunos do tipo “quem inventou isso?”, “o que ele estava pensando quando criou?”, “por que resolveu criar?”, entre outras. Todos esses questionamentos quando respondidos de maneira adequada podem, em muitos casos, instigar o discente no sentido da busca do entendimento do conteúdo, bem como o contexto histórico no qual este foi desenvolvido.

O estudo do desenvolvimento da matemática do passado até como atualmente a conhecemos, nos oferece a oportunidade de perceber como a matemática de hoje insere-se na produção cultural humana e alcançar uma compreensão mais significativa de seu papel, como também de seus conceitos e de suas teorias, uma vez que a matemática do passado e a atual fundamentam-se mutuamente. Na História encontramos as explicações e o desenvolvimento conceitual de conceitos, sendo estes objetos ou conteúdos, visando obter elementos que possam diminuir os possíveis obstáculos de aprendizagem, que encontramos no processo de ensino (BRANDEMBERG, 2017, p. 16).

Nesta perspectiva, apresentamos neste artigo parte do desenvolvimento de conteúdos matemáticos que abordam o conteúdo Poliedro, objetivando mostrar o avanço do tema no referido período, bem como as influências sofridas a partir da retomada dos estudos da Antiguidade Clássica. Optamos pelo período do Renascimento tendo em vista tratarmos de estudos pouco abordados e pela grande extensão do desenvolvimento do tema abordado, que como verificamos no decorrer de nossa pesquisa, se desenvolveu desde o período neolítico até como conhecemos agora. Apresentamos também, as biografias sintetizadas dos principais estudiosos que contribuíram para este respectivo

desenvolvimento, procurando construir um texto que demonstre seus estudos sobre poliedros em ordem cronológica seguindo até as considerações finais.

Sobre o estudo de poliedros no Renascimento

O estudo de Poliedros, ocorreu inicialmente na Pré-história, mais precisamente no período Neolítico, se desenvolvendo até a Idade Contemporânea. Historicamente, existem muitos registros da tentativa dos antigos de representação dos poliedros, demonstrando o fascínio que estes tiveram pelas suas formas e o que elas representavam no sentido geométrico e também mitológico (CORRÊA, 2019, p. 70).

Porém, durante a Idade Média não existiram registros de estudo e desenvolvimento de poliedros. A retomada ocorreu apenas no Renascimento a partir do contato com as obras de importantes autores da Antiguidade por meio de vários artistas e matemáticos, os quais produziram obras artísticas e literárias envolvendo poliedros

Em meados do século XV, a sociedade existente na Península Itálica passou por mudanças consideráveis, onde sua posição geográfica favorecia o comércio, bem como uma interação com diferentes pensamentos e conhecimentos. O Renascimento foi um período no qual houve uma grande valorização nas formas diferentes de pensamento, e muitos pensadores foram trazidos para esta Península através da influência de personagens importantes em relação a sociedade bizantina da época.

Esses pensadores certamente trouxeram consigo diversidade de ideias, bem como realizaram a tradução de obras de autores importantes da Antiguidade como de Sócrates, Pitágoras, Platão, Euclides, e escritos de seus discípulos e sucessores. É importante destacar que muitas destas obras já haviam sido traduzidas por tradutores árabes. Nas obras encontraram contribuições significativas para a mudança na forma de pensar, e também muita da extraordinária matemática grega.

Possivelmente, o contato com os poliedros deve ter ocorrido através de obras de Platão e Euclides, principalmente Timeu e os Elementos, entre outras, por intermédio dos textos originais ou traduções que chegaram ao conhecimento dos eruditos dessa época. Assim, o conhecimento dos poliedros regulares, suas propriedades, características e todo o misticismo da Antiguidade que girava em torno destes, com toda certeza foram assuntos explorados profundamente no Renascimento.

Aos pintores do Renascimento não competia a missão de serem eruditos, mas havia a grande necessidade do conhecimento profundo de matemática, principalmente geométrico, uma vez que nem sempre encontravam superfícies planas para realização de suas obras artísticas, tendo assim grandes dificuldades, pois as escolas da época desenvolviam o ensino voltado para o comércio e as obras de Euclides eram estudadas de maneira abstrata nas universidades, desse modo esses artistas buscaram outras fontes de conhecimento para produção de seus trabalhos, como o que existia em obras de outras épocas.

A representação e estudo dos poliedros foram objeto de estudo de vários artistas e matemáticos, os quais destacamos Paolo Uccello (1397-1475), Piero della Francesca (1416-1492), Luca Pacioli (1445-1517), Leonardo da Vinci (1452-1519), Albrecht Dürer (1471-1528) e Wenzel Jamnitzer (1507-1585). O interesse destes artistas se justifica pelo apreço naquele período dos estudos de autores gregos, principalmente a obra de Euclides, os Elementos, bem como o desafio da perspectiva das representações dos poliedros. A seguir apresentaremos de forma sintetizada um pouco da biografia dos respectivos artistas mencionados e suas obras envolvendo poliedros.

Inicialmente, falaremos de Paolo Uccello que foi um matemático e pintor italiano que nasceu em 1397 e faleceu em 1475. E entre 1420 e 1425, desenhou os mosaicos na Catedral de São Marcos (Figura 1), em Veneza, com um poliedro estrelado como motivo principal.

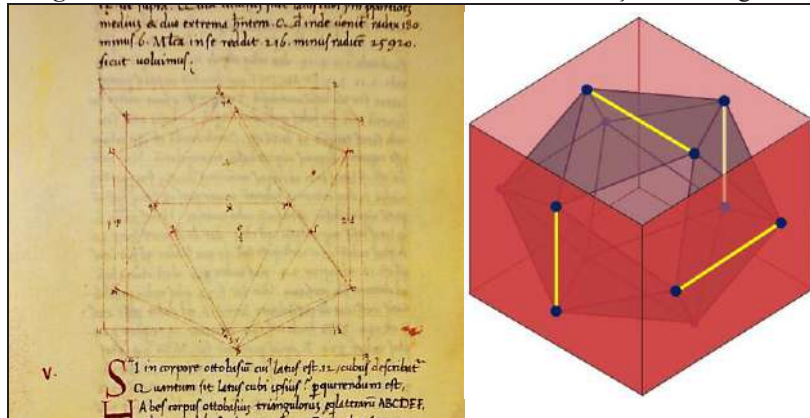
Figura 1: Mosaico da Catedral de São Marcos



Fonte: Hart (2018)

Já Piero della Francesca, nasceu por volta de 1416, em Borgo Santo Sepolcro, em uma província de Arezzo no norte da região da Península Itálica, falecendo nesta mesma cidade em 1492, é considerado um dos mais famosos pintores da renascença, por volta de 1480, foi autor de um tratado sobre os cinco sólidos regulares, denominado *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (Pequeno livro dos cinco corpos regulares), neste tratado os sólidos platônicos são estudados profundamente, como mostra a Figura 2, a qual apresenta um icosaedro inscrito em um cubo que está na página 40 da referida obra, bem como uma construção da ilustração no Geogebra. Piero se tornou o primeiro artista no qual as explorações geométricas envolvem o redescobrimto gradual dos sólidos arquimedianos.

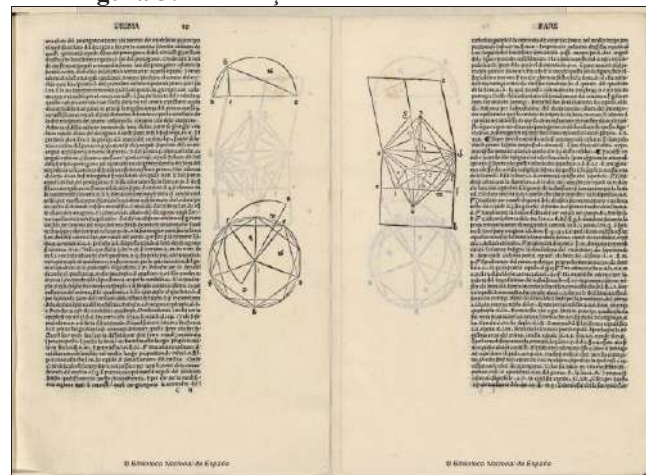
Figura 2: Icosaedro inscrito em um cubo e sua construção no Geogebra



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

O estudo de Piero foi incorporado por Luca Pacioli, que foi um frade franciscano que viveu por volta de 1445 até 1517, em seu sumário de matemática denominado *Summa de Arithmetica, geometria, proportione et proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geometria, Proporção e Proporcional), escrito em Veneza no ano de 1494. Pacioli em 1509, escreveu em Florença um livro chamado *De Divina Proportione* (Sobre a proporção Divina), no qual aparecem ilustrações de poliedros (Figura 3) de autoria de Leonardo da Vinci (1452-1519).

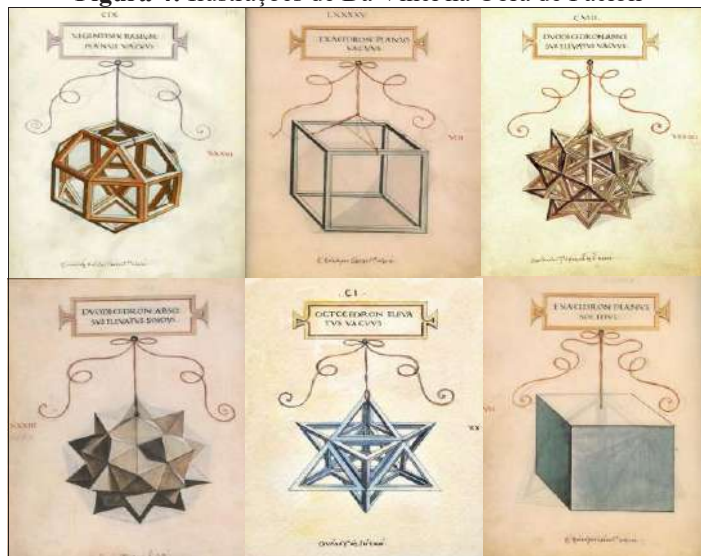
Figura 3: Construção do icosaedro e dodecaedro



Fonte: Pacioli (1509, p. 35-36)

Leonardo Da Vinci, é considerado uma das maiores referências do Renascimento, obteve excelência em tudo o que fez, foi artista, matemático, cientista e engenheiro. Ele dedicou muito de seu tempo a geometria, mais precisamente a figuras geométricas, onde sua obra com maior referência é o “Poliedrico” (Figura 4), as ilustrações feitas para Luca Pacioli, as quais já mencionamos.

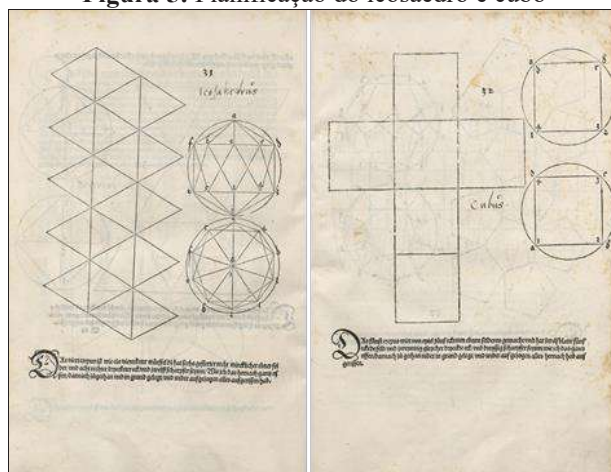
Figura 4: Ilustrações de Da Vinci na Obra de Pacioli



Fonte: Elaborado pelos autores (2022), a partir de Pacioli (1509)

Pacioli, possivelmente foi quem instruiu os estudos mais aprofundados de geometria, e às ligações entre a perspectiva linear e a geometria euclidiana de Albrecht Dürer, que nasceu em 1471 e faleceu em 1528, em Nuremberg na Alemanha (KEMP, 1990, p. 54). Dürer foi um grande gravador, pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte alemão, sendo sua obra *Underweyung der messung* (Medida das Letras) que possui quatro volumes, onde é apresentada no Livro IV (1525), possivelmente pela primeira vez, a ideia de construção de um sólido a partir da planificação (figura 5). Neste livro são encontradas planificações de diversos poliedros regulares e semirregulares, seus trabalhos sofreram a influência também de Piero della Francesca e de Leonardo da Vinci.

Figura 5: Planificação do icosaedro e cubo



Fonte: Dürer (1538, p. 140-141)

Wenzel Jamnitzer foi um dos ourives alemães mais aclamados da Renascença, reverenciado como um gênio semelhante ao seu conterrâneo de Nuremberg, o pintor Albrecht Dürer, de quem possivelmente sofreu fortes influências em seus trabalhos. Jamnitzer realizou muitos estudos científicos para melhorar o seu conhecimento técnico e de sua guilda. Em 1568 publicou *Perspectiva Corporum Regularium* (Perspectiva de sólidos regulares), um livro lembrado por suas gravuras de poliedros (Figura 6). Este livro foi baseado no Timeu de Platão e nos Elementos de Euclides, contendo 120 formas baseadas nos sólidos platônicos.

Figura 6: Planificação do icosaedro e cubo



Fonte: Jamnitzer (1568, p. 34-35)

No final do Renascimento, estrelas e poliedros não convexos adquirem grande popularidade e assim levam possivelmente à retomada dos estudos de poliedros na Idade Moderna por Kepler com a ideia de estrelação, ou seja, a ideia de poliedros estrelados, mostrando que o estudo deste tema continuou posteriormente.

Considerações Finais

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho podemos notar que os conhecimentos matemáticos, exemplificados aqui através do estudo de poliedros no Renascimento, os quais neste período estiveram diretamente ligados com a arte, a qual sofreu grande influência de trabalhos construídos na Antiguidade.

Acreditamos que uma concepção histórica dos conteúdos matemáticos pode nos levar a compreensão mais aprofundada de conhecimentos matemáticos, proporcionando a realização de uma melhor abordagem em sala de aula, bem como uma escolha bibliográfica com maior qualidade a ser explorada.

O conteúdo deste artigo, pode ser utilizado nas aulas de geometria espacial, como forma de introdução ao estudo de poliedros, com o objetivo de mostrar o desenvolvimento do tema, mostrando que o conhecimento se desenvolve ao longo do tempo, como podemos observar com o exemplo da possível origem dos trabalhos envolvendo planificação de sólidos, sendo uma alternativa para o ensino e aprendizagem do referido conteúdo.

Referências

BRANDEMBERG, J. C. História e Ensino de Matemática. **Revista Exitus (online)**; Volume 7, Número 2. p. 16-30. UFOPA, 2017.

CORRÊA, J. N. P. **O Ensino de Poliedros por Atividades**. 2019. 354f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Belém, 2019.

DÜRER, A. **Underveissung der messung**. Warnock Library. Nuremberg, 1538. Disponível em: <<http://www.rarebookroom.org/Control/duruwm/index.html>>. Acesso em: jan. 2022.

DELLA FRANCESCA, P. **Libellus de Quinque Corporibus Regularibus**, 1480.

HART, G.W. **Neolithic Carved Stone Polyhedra**. Disponível em: <<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html>>. Acesso em: jan. 2022.

JAMNITZER, W. **Perspectiva Corporum Regularium**, 1568.

KEMP, M. **The Science of Art**, Yale University Press, 1990. Disponível em: <<https://archive.org/details/scienceofartopti0000kemp/page/n391/mode/2up>>. Acesso em fev. 2022.



APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDOS EM MODELOS POPULACIONAIS

de Araújo Silva, Aryel Kathleen, aryel.kath@gmail.com

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília

Resumo: Nesse trabalho iremos investigar modelos populacionais envolvendo retardamento, como é o caso da Equação de Hutchinson, dada por:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right)$$

onde N é o tamanho da população, $r > 0$ é a taxa de natalidade e $K > 0$ é a capacidade máxima do meio ambiente.

O modelo proposto por Hutchinson é uma reformulação da Equação Logística e foi um dos primeiros modelos a considerar retardamento na equação, onde esse pode ser interpretado como período entre o nascimento e a fase de reprodução.

O comportamento da solução muda drasticamente quando consideramos a reformulação de Hutchinson, passando de um comportamento sem oscilação para um comportamento altamente oscilatório.

Além disso, apresentamos alguns exemplos de populações que possuem comportamento oscilatório, como a população de lemingues e de moscas varejeiras, cujo experimento acarretou na Equação de Blowfly, uma reformulação da equação de Hutchinson, inserindo o retardo no início da equação.

Palavras-chave: Equações diferenciais com retardos, Equação Logística, Equação de Hutchinson, Equação de Blowfly.

INTRODUÇÃO

Em 1798, Thomas Malthus estudou o crescimento populacional, obtendo que este seria exponencial, ou seja, poderia ser descrito por:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

onde N é o tamanho da população e $r > 0$ é a taxa de natalidade.

Anos mais tarde, Pierre Verhulst modificou o modelo proposto por Malthus obtendo a seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

onde N é o tamanho da população, $r > 0$ é a taxa de natalidade e $K > 0$ é a capacidade máxima do meio ambiente.

Esta equação ficou bastante conhecida e é chamada de Equação Logística. Nesse trabalho, investigaremos modelos populacionais que envolvem retardamento, tornando-se assim, como é o caso da *Equação de Hutchinson* e da *Equação de Blowfly*.

RESULTADOS

1. Equação de Hutchinson

George Hutchinson, foi um dos primeiros a introduzir o retardo na equação logística para levar em consideração o período entre o nascimento e atingir a fase de maturação. Por meio deste modelo, ele mostrou que as oscilações que podiam ser observadas eram facilmente explicadas com a presença de um retardo finito em um termo resultante.

Colocando o retardo na equação logística, Hutchinson chegou à seguinte formulação do problema:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right)$$

onde o tamanho da população é descrito por N , a população cresce através de uma taxa de natalidade constante, denominada $r > 0$, a capacidade máxima do meio ambiente é descrita por $K > 0$ e τ é o retardo.

2. Equação de Hutchinson VS. Equação Logística

A principal diferença entre as duas equações é que o comportamento da equação logística não é oscilatório, enquanto o comportamento da equação de Hutchinson é altamente oscilatório.

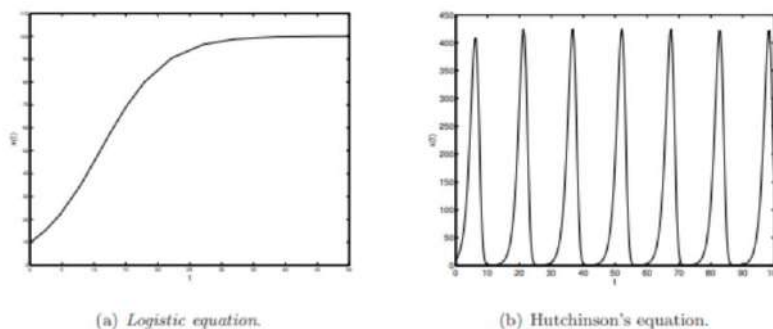


Imagem retirada da tese da Maria Barbarossa, contida nas referências.

Essa diferença ocorre em função do retardo aplicado no modelo proposto por Hutchinson. O retardo é importante porque o processo de reprodução não é instantâneo.

3. Equação de Blowfly

Anos mais tarde, descobriu-se que a formulação apresentada por Hutchinson não era adequada, então o modelo foi reformulado como segue:

$$\frac{dN}{ds} = rN \left(1 - \frac{N(s - \tau)}{K} \right) \exp \left(-\frac{N(s - \tau)}{K} \right) - mN$$

Esta equação é conhecida como *Equação de Blowfly*, obtida através do experimento realizado por Alexander Nicholson com moscas varejeiras.

Nicholson, de maneira independente, controlou a alimentação de moscas varejeiras por cerca de 35 a 40 dias, de modo a entender de forma mais precisa sua dinâmica populacional. Utilizando a Equação de Hutchinson, onde K é o nível de comida disponível e τ a aproximação de tempo para que a larva se torne adulta, foi obtido um

retardo de 9 dias ao se considerar um experimento de 40 dias completos. O retardo atual para o mesmo período possui 14 dias, tal discrepância foi resolvida ao constatar-se uma variação na posição do retardo proposta por Hutchinson.

4. Equação de Blowfly vs. Equação de Hutchinson

A principal diferença entre os dois modelos é a posição do retardo nas equações. Na equação de Hutchinson, o retardo aparece na taxa de mortalidade e portanto, traz a interpretação dada por Hutchinson. Por outro lado, na equação de Blowfly, o retardo aparece na posição correta, sendo interpretado como o tempo entre o nascimento e entrar na fase reprodutiva. Abaixo apresentamos o comportamento da população das moscas varejeiras utilizando a equação de blowfly. Vemos que ela preserva o comportamento oscilatório descrito anteriormente pela equação de Hutchinson.

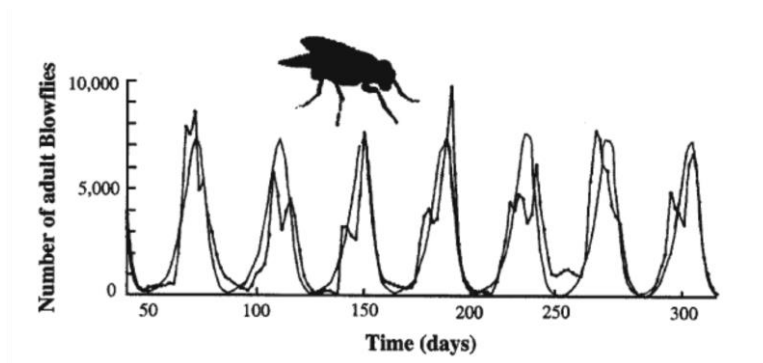


Imagem retirada do livro *Applied Delay Differential Equations*, contida nas referências.

CONCLUSÕES

Os estudos feitos com equações diferenciais com retardo na formulação de modelos populacionais enfatizam a importância de se incluir o retardo de forma a obter uma maior precisão na descrição de determinados fenômenos.

Neste projeto, o foco foi o estudo de retardos constantes, porém há a possibilidade de se trabalhar com retardos dependentes do estado e do tempo, embora estes apresentem uma complexidade maior, em relação ao utilizado. Atualmente existem inúmeras generalizações da equação proposta por Nicholson que consideram o uso de retardos dependentes do estado.

REFERÊNCIAS

- [1] BARBAROSSA, M. On a class of neutral equations with state-dependent delay in population dynamics. Tese (Doutorado em Ciências Naturais) - Technische Universität München Zentrum Mathematik, 2012.
- [2] DOERING, C. I., LOPES, A. O. Equações Diferenciais Ordinárias. IMPA, 2016.
- [3] ERNEUX, T. *Applied Delay Differential Equations*. Springer-Verlag-New York, 2009.



ÁLGBRA ABSTRATA: UM ESTUDO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DOS DISCENTES DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Monteiro, Dieli Baia. (dieli.monteiro@cameta.ufpa.br)¹

Maciel, Elany da Silva. (elanymaciel@ufpa.br)²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo: Neste trabalho apresentamos um resumo do Trabalho de Conclusão de Curso que teve como objetivo evidenciar as contribuições da disciplina de Álgebra Abstrata aos alunos de Licenciatura em Matemática através de atividades propostas, utilizando conteúdos da Educação Básica para introduzir os conceitos da Álgebra Moderna. Com abordagem qualitativa, a coleta de dados se deu por meio de uma pesquisa de campo, desenvolvida em uma turma de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará no Campus Universitário do Tocantins/Cametá. A análise de dados foi realizada mediante diálogos constantes com os participantes da pesquisa e por meio de um questionário.

Palavras-chave: Álgebra Abstrata. Resolução de Problemas. Construção de Conhecimento. Educação Básica. Formação Docente.

INTRODUÇÃO

A Álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surge inicialmente a fim de resolver necessidades práticas, estando presente no dia a dia das pessoas. Dessa forma, Souza (2008) considera fundamental o ensino das estruturas algébricas nos cursos de Licenciatura em Matemática, pois é visto como um alicerce básico para o licenciando. Porém, segundo a autora, torna-se necessário destacar os pontos importantes da disciplina, e não apenas cumprir a ementa e apresentar a teoria de forma vazia e abstrata.

Desse modo, considera-se pertinente o estudo do processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Abstrata ou Álgebra Moderna nos cursos de Licenciatura em Matemática, em particular, da investigação de possíveis indagações que podem surgir na interação dos licenciandos com os conceitos apresentados na disciplina de Álgebra Abstrata. Assim sendo, a presente pesquisa teve a seguinte questão de investigação: quais as contribuições da disciplina de Álgebra Abstrata para a formação docente e como reconhecer os conceitos abstratos nos conteúdos inseridos na Educação Básica?

Para responder a tais inquietações, o objetivo dessa pesquisa foi evidenciar as contribuições da disciplina de Álgebra Abstrata aos alunos de Licenciatura em Matemática através de atividades propostas, utilizando conteúdos da Educação Básica para introduzir os conceitos da Álgebra Moderna.

Para isso, foi necessário uma pesquisa de campo, essa foi desenvolvida em uma turma de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA) no Campus Universitário do Tocantins/Cametá. Para realização do projeto, utilizamos algumas atividades propostas por Ferreira (2017) e também, outras atividades propostas pela autora desta pesquisa. Nessas atividades, foram apresentados exemplos de situações que relacionam conceitos da Álgebra Moderna com conteúdos estudados no Ensino Básico.

1 DOS FUNDAMENTOS HISTÓRICOS PARA A DISCIPLINA DE ÁLGBRA

Historicamente, o desenvolvimento da Álgebra atravessou três fases: a Álgebra Retórica, aquela em que as relações são apresentadas em palavras e caracterizadas pela ausência de símbolo; a Álgebra Sincopada, em que já apresenta alguns símbolos específicos; e, mais tarde, emergiu a Álgebra Simbólica, essa se caracteriza pelos estudos das estruturas matemáticas, e não mais pelos procedimentos para resolver problemas pontuais (Eves, 1995).

Durante os séculos, vários estudiosos e matemáticos contribuíram para a sistematização da Álgebra, dentre eles, Mondini (2013) destaca: Dedekind (1831 - 1916), que, fundamentado pela obra de Galois (1811 - 1832),

desenvolveu pesquisas sobre a teoria dos grupos, os números irracionais e a aritmetização da Análise; Emil Artin (1898 - 1962) que "publicou uma generalização dos teoremas de Wedderburn para anéis satisfazendo condições de cadeia" (Boyer, 2012); Emmy Noether (1882 - 1935), líder de um grupo de algebristas, que juntos, contribuíram com a teoria dos ideais. E, por fim, William R. Hamilton (1805 - 1865), que colaborou para a criação de novas estruturas algébricas, como corpo e anel.

Com o desenvolvimento do processo de sistematização da Álgebra, na passagem do século XIX para o século XX, surgiram as estruturas de corpo, anel, ideal, entre outros, o que representou uma ampliação de concepções dos matemáticos em relação a própria Matemática como ciência. Segundo Eves (2004), a maior parte desse trabalho reflete o espírito de generalização e abstração que prevalece até hoje na Matemática.

Atualmente, entende-se que a Álgebra é uma linguagem básica para investigar os objetos matemáticos e suas relações, generalizando conceitos através da Aritmética e do simbolismo matemático. Ela estuda, além das estruturas matemáticas, as relações existentes entre elas. (Franco, 2011)

2 APLICAÇÕES

Utilizamos como metodologia de ensino para os seminários, a Resolução de Problemas, seguindo a abordagem de *ensinar através da resolução de problemas*. Nesse caso, o objetivo é levar o aluno a produzir um novo conhecimento. Para isso, vamos propor um problema e, durante a resolução desse problema, novos conceitos, conteúdos ou procedimentos vão sendo evidenciados de modo que o aluno possa construir novos conhecimentos.

Abaixo, descrevemos os seminários trabalhados durante as aulas da disciplina de Álgebra Abstrata. Cada seminário teve como objetivo apresentar um novo conceito da Álgebra através dos conteúdos que serão utilizados na resolução da atividade proposta, esses conteúdos pertencem à Educação Básica.

2.1 GRUPOS

O objetivo desse seminário foi introduzir os conceitos de Grupos Finitos, Tábuas de Operação e Ordem de um Grupo. E também, fazer com que os alunos percebessem que é possível definir operações em conjuntos finitos.

Os conteúdos específicos da atividade foi operações definidas em conjuntos finitos e suas propriedades, e os conteúdos a serem introduzidos foi Grupos Finitos e Tábua de Operação de Grupo.

Atividade I

André ouviu um grupo de pessoas que se comunicavam por códigos. Sempre que uma das pessoas pronunciava duas palavras distintas, ou não, de um grupo de palavras, que ele identificou como: água, ar, gelo, vento e terra, os outros respondiam, em coro, uma palavra desse grupo. Ele observou que as respostas não eram aleatórias, isto é, se um par de palavras se repetisse, a resposta também se repetia. De posse de um pedaço de papel e uma caneta, ele construiu uma tabela onde se pode identificar a resposta para cada par de palavras, como podemos ver a seguir:

Figura 1: Tabela

	água	ar	gelo	vento	terra
água	água	ar	gelo	vento	terra
ar	ar	gelo	vento	terra	água
gelo	gelo	vento	terra	água	ar
vento	vento	terra	água	ar	gelo
terra	terra	água	ar	gelo	vento

Fonte: Acervo autor (2022).

Observando a tabela, responda:

1. Para cada par de palavras (distintas ou não), retiradas das cinco palavras citadas, tem-se uma resposta dentre as cinco palavras?
2. Qual a resposta para ((vento, gelo),ar) e para (vento, (gelo, ar))?
3. Existe alguma palavra que quando está em algum par, a resposta é sempre a outra palavra desse par?
4. Para cada palavra dada, existe uma outra palavra que, ao formar par com ela, tem-se como resposta a palavra água? Se existir, determine essa outra palavra para cada uma das cinco palavras.

Forma de resolução do problema

1. Sim. O fato da tabela estar completamente preenchida nos garante que qualquer par de palavras está associada a uma palavra.
2. $((\text{vento}, \text{gelo}), \text{ar}) = (\text{agua}, \text{ar}) = \text{ar}$ e $(\text{vento}, (\text{gelo}, \text{ar})) = (\text{vento}, \text{vento}) = \text{ar}$.
3. Sim, a palavra água. De fato, $(x, \text{agua}) = \text{agua}$, qualquer que seja a palavra x . Analogamente, $(\text{agua}, x) = \text{agua}$, para qualquer palavra x dentre as palavras citadas.
4. Sim.
Para água temos a própria água. De fato, $(\text{agua}, \text{agua}) = \text{agua}$;
para ar temos terra. De fato, $(\text{ar}, \text{terra}) = \text{agua}$; para gelo temos vento. De fato, $(\text{gelo}, \text{vento}) = \text{agua}$;
para vento temos gelo. De fato, $(\text{vento}, \text{gelo}) = \text{agua}$;
para terra temos ar. De fato, $(\text{terra}, \text{ar}) = \text{agua}$.

Formalização

Após a resolução da atividade, podemos citar alguns pontos importantes que foram essenciais para construir o conceito de Grupo finito.

- O item (1) sendo verdadeiro caracteriza a relação estabelecida pela Tabela, como uma operação binária, definida no conjunto $\{\text{água}, \text{ar}, \text{gelo}, \text{vento}, \text{terra}\}$.
- Os dois valores, calculados no item (2), são iguais e isso constitui um caso particular da propriedade associativa.
- O item (3) mostra que a palavra água é o elemento neutro da operação definida na Tabela.
- o item (4) mostra que cada elemento do conjunto $\{\text{água}, \text{ar}, \text{gelo}, \text{vento}, \text{terra}\}$ é inversível, ou seja, possui inverso.

A partir das considerações acima, definimos os conceitos de grupo, grupo finito e tábua de operação.

Definição 1 Um conjunto G com uma operação $*$ em G é um grupo se essa operação satisfaz as seguintes condições:

(i) A operação é associativa, isto é,

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento neutro, isto é, $\exists e \in G$ tal que

$$e * a = a * e = e, \forall a \in G.$$

(iii) Todo elemento possui um elemento simétrico, isto é, $\forall a \in G, \exists a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = e$$

Definição 2 (Grupo Finito) Um grupo G é chamado de grupo finito, quando G contiver um número finito de elementos. Neste caso, a ordem de G , denotada por $|G|$, é o número de elementos de G . Quando G não é um grupo finito, dizemos que G é um grupo de ordem infinita, ou seja, isto ocorre quando o grupo G contém infinitos elementos.

Definição 3 A tábua de um grupo finito $(G, *)$ é a tábua de $*$.

Com base nessas definições, concluí-se que os itens (1), (2), (3) e (4) mostram que o conjunto $\{\text{água}, \text{ar}, \text{gelo}, \text{vento}, \text{terra}\}$, com a operação estabelecida pela tabela é um grupo.

2.2 SUBGRUPOS

O objetivo desse seminário foi introduzir o conceito de Subgrupo. Os conteúdos específicos da atividade foi números inteiros, paridade e suas propriedades. E os conteúdos a ser introduzido foi Subgrupo.

Atividade II

Pedro comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192, em ordem crescente. Vitor arrancou aleatoriamente 25 folhas do caderno e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

Forma de resolução do problema

Observe que, cada folha tem uma página par e uma ímpar. Logo, em 25 folhas, teremos 25 páginas pares e 25 páginas ímpares. Somando as 25 páginas pares obteremos um número par. De fato, a soma de dois números pares é par. Somando as 25 páginas ímpares teremos um número ímpar, pois, a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar. Logo, adicionando soma das páginas pares (número par) com a soma das ímpares (número ímpar) teremos um número ímpar. Portanto, o resultado não pode ser 1990, nem qualquer outro número par.

Formalização

Através da resolução do problema queremos introduzir o conceito de Subgrupos, para isso, podemos observar que a operação de adição no conjunto dos Inteiros é fechada nos números pares e, conseqüentemente, possui a propriedade associativa - herdada da associatividade dos números Inteiros - pois todo número par é um número inteiro. Além disso, os pares possuem elemento neutro na adição. Ainda, se considerarmos também os números pares negativos, cada número par possui um simétrico aditivo. Essas propriedades caracterizam o conjunto dos números pares como um grupo aditivo, contido no grupo dos números inteiros e, com isso, mostramos a definição de Subgrupo.

Definição 4 Seja $(G, *)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:

- H é fechado para a operação $*$. (isto é, se $a, b, c \in H$ então $a * b \in H$)
- $(H, *)$ também é um grupo. (aqui o símbolo $*$ indica a restrição da operação de G aos elementos de H)

2.3 HOMOMORFISMO DE GRUPO

O objetivo desse seminário foi introduzir definição de Homomorfismo de grupos. Os conteúdos específicos da atividade foi Função Polinomial do 1º grau. E os conteúdos a serem introduzidos foi núcleo e imagem do homomorfismo de grupos.

Atividade III

Uma casa de jogos de tabuleiro cobra 2 reais por cada jogo que o cliente jogar, sendo possível jogá-lo mais de uma vez sem custo adicional. Quanto irá pagar alguém que quiser jogar 8 jogos de tabuleiro? E 5 jogos? E 13 jogos?

Forma de resolução do problema

Para resolver este exercício basta observar que o valor de 2 reais varia de acordo com a quantidade de jogos diferentes que forem escolhidos.

$$8 \text{ jogos: } 2 \times 8 = 16$$

$$5 \text{ jogos: } 2 \times 5 = 10$$

$$13 \text{ jogos: } 2 \times 13 = 26$$

Definição 5 Chamamos de homomorfismo de um grupo $(G, *)$ num grupo (H, Δ) a toda aplicação $f : G \rightarrow H$ tal que, para quaisquer $x, y \in G$

$$f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

Se $G = H$ e a operação é a mesma, então f é chamada de homomorfismo de G .

Com base nessa definição, pode-se representar o problema dessa maneira, sejam os grupos $A = (N, +)$ e $B = (2N, +)$, podemos definir a aplicação $f : A \rightarrow B$ dada por $f(x) = 2x$ como um homomorfismo de grupo. De fato, temos que

$$f(5 + 8) = f(13) = 2 \cdot 13 = 26 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = f(5) + f(8).$$

De modo geral,

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in A$.

Logo, $f(x) = 2x$ é um homomorfismo de grupo.

CONCLUSÃO

Iniciamos esta pesquisa com o objetivo de evidenciar as contribuições da disciplina de Álgebra Abstrata aos alunos de Licenciatura em Matemática através de atividades propostas, utilizando conteúdos da Educação Básica para introduzir os conceitos da Álgebra Moderna. Acreditamos que, através dos seminários, os alunos poderiam fazer uma relação dos conceitos estudados na disciplina com conteúdos que eles já haviam visto antes, isso proporcionaria a eles melhor compreensão sobre a Álgebra Abstrata.

Através dos seminários apresentados durante a disciplina, conseguimos obter dados que justificam a utilidade da mesma em um curso de Licenciatura em Matemática. Esses dados foram obtidos pela análise das atividades desenvolvidas, pelas falas dos alunos durante as aulas e também, pelas respostas do questionário. Mediante isso, acreditamos que a Álgebra Abstrata pode trazer contribuições significativas para os discentes em sua futura prática docente.

Por meio dos resultados da pesquisa, consideramos bastante eficaz a forma como trabalhamos a relação dos conceitos da Álgebra Moderna com os conteúdos do ensino básico, pois, isso despertou o entusiasmo dos alunos ao verem, em exemplos práticos, a importância dessa disciplina para a sua formação.

Dessarte, acreditamos que nossa pesquisa seja bastante relevante, pois ela está inserida em um contexto que realmente poderá fazer a diferença no processo de ensino e aprendizagem dos licenciandos em Matemática.

REFERÊNCIAS

B. BOYER, Carl. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

EVES, H. **Introdução a história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Nilton Cezar. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática**. Rio Claro, 2017.

FRANCO, H. J. R. **Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: Identificação e análise**. Juiz de Fora (MG), 2011.

GALDINO, André Luiz. **Álgebra I**. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/635/o/algebra-I-ead-v1.pdf>. Acessado em 16 fev. 2022.

MONDINI, Fabiane. **A presença da álgebra na legislação escolar brasileira**. Rio Claro : [s.n.], 2013.

SOUZA, S.A.O. **O ensino da Álgebra no Curso de Licenciatura em Matemática**. Mestrado em Educação - Centro Universitário Nove de Julho, São Paulo, 2008. Disponível em <http://www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm>. Acessado em 16 fev. 2022.



LIBER ABACI: UM MANUAL DE ARITMÉTICA PRÁTICA E COMERCIAL

Guimarães Filho, José dos Santos, js_guima@hotmail.com¹
Brandemberg, João Cláudio, brand@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará (UFPA)

²Universidade Federal do Pará (UFPA)

Resumo: *O presente trabalho como parte da tese de doutorado, apresenta o contexto em que o Liber Abaci foi escrito, esse livro do século XIII, tem como autor Leonardo Pisano (1180 – 1250), também conhecido como Fibonacci, que o escreveu em 1202 com uma reedição feita pelo próprio autor em 1228. Objetivamos dessa forma apresentar alguns elementos constituintes do contexto em que o livro foi escrito, pois esse teve uma repercussão maior que outros materiais antes dele ou do mesmo período. Para este fim, fizemos uma revisão bibliográfica onde encontramos trabalhos como de Potro (2004, 2009, 2012), Saito (2015), Vasconcelos (1925), Brito (2007) e Schramm (2001), a partir dos quais construímos o presente trabalho. Nele apresentamos os elementos contextuais em que o livro foi escrito para a compreensão da malha histórica medieval e também os elementos aritméticos que compõe o Liber Abaci, mostrando que este atendia as necessidades do século XIII, dentre as quais estão as mercadológicas e de ofícios urbanos.*

Palavras-chave: *contexto medieval, Liber Abaci, aritmética.*

INTRODUÇÃO

Este resumo como parte da tese de doutorado, traz elementos contextuais e de composição do livro intitulado *Liber Abaci*, escrito por Leonardo Pisano (1180 – 1250) ou de Pisa, mas conhecido por Fibonacci, atribuição dada por Guillaume Libre. Temos nesta obra uma grande importância, pois é creditado como livro que introduziu com eficiência os algarismos indo-arábicos na Europa e posteriormente para o mundo, bem como, o sistema numérico e posicional decimal dos indianos.

Desta forma objetivamos apresentar alguns elementos constituintes do contexto em que o livro foi escrito que possibilitou uma repercussão maior que outros materiais antes dele ou de sua mesma época. Para tanto, fizemos uma revisão bibliográfica de livros, artigos, teses e dissertações concernentes a história da idade média, história da matemática medieval, aritmética medieval, aritmética prática e mercantil. Assim, a partir de Potro (2004, 2009, 2012), Saito (2015), Vasconcelos (1925), Brito (2007) e Schramm (2001) tivemos subsídios para construir o presente texto. Apresentando primeiro os elementos contextuais em que o livro foi escrito para a compreensão da malha histórica medieval, posteriormente os elementos que compõem o livro, mostrando que este atendia a necessidade do século XIII.

ELEMENTOS CONTEXTUAIS DA OBRA

Objetivamos nesta seção, trazer elementos historiográficos que possam ajudar na ambientação medieval, na qual, Leonardo Pisano escreveu o *Liber Abaci*. Para este fim, seguimos alguns pressupostos de Saito (2015), assim,

deixamos claro que não pretendemos nesta seção seguir uma linearidade dos fatos, mas propor uma organização historiográfica que permita uma aproximação com o cenário medieval. Nossa preocupação não estará nos fatos em si, no entanto, nos acontecimentos dos fatos ou em suas projeções ou repercussões, para identificar alguns elementos constituintes do contexto do *Liber Abaci*.

Contexto da idade média

O contexto do século XIII advém de um entrelaçamento de acontecimentos, ou seja, das repercussões dos acontecimentos dos fatos ao longo dos séculos, cada fato em um momento e lugar diferente, esses como a propagação de uma onda, podem ser anuladas, reverberadas, refletidas ou propagadas em grandes escalas. Assim, partimos da ruptura do império romano, esses dois hemisférios após o século III, adotaram posicionamentos diferentes ocasionando uma ruptura não apenas no espaço geográfico, mas na cultura, na sociedade, na língua e nas ciências e nas artes, que por consequência leva ao distanciamento de obras importantes anteriores ao século III.

Nessa perspectiva, Brito (2007) destaca que na Europa o clero absorve o papel de conservar, mediar e produzir conhecimentos, pois detinham o poder da leitura e da escrita. Neste momento, o saber ficou em função da aproximação do homem a Deus, do aprofundamento teológico. Fizeram das obras greco-romanas subsídios dos dogmas cristãos, os textos que divergiam destes princípios foram deixados de lado, alegorizados, adaptados ou reduzidos com o intuito de não contradizerem os ideais religiosos.

Nos séculos VI e VII temos a construção de manuais dos saberes já produzidos, reduzidos em sua maioria a traduções de textos, como os feitos por Boécio (480 – 524), os compêndios de teologia, os manuais que tentavam reunir as artes liberais, com vistas a exegese bíblica, textos sobre as artes liberais de Cassiodoro (480 – 575), os livros dos números e as etimologias de Isidoro de Sevilha (550 - 636), manuais de gramática que eram mais usados em situações práticas, percebemos assim, que a matemática da Europa medieval se configurou a partir da releitura de fragmentos da matemática grega (BRITO, 2007).

No oriente, temos o período de sultanato, que não só garantiu a preservação das ciências e das artes instituídas, como a divulgação, o estudo e a construção de novos saberes, os quais se estenderam pelas fronteiras, haja vistas, que não havia uma hegemonia territorial e de governo único na Europa, ou seja, o território europeu não partilhava de uma só cultura, sociedade, economia e liderança, a transformando em um território diversificado. O que permitiu a entrada, em alguns pontos da Europa, de novas literaturas, conhecimentos da língua árabe, estilos artísticos, técnicas para o comércio, para a agricultura e para manufatura, como a agricultura e a irrigação vinda do Egito, assim como, o conhecimento da bússola, do papel e da pólvora vinda da China (VASCONCELOS, 1925).

O fator de reinos multiculturais, até na língua, na Europa, como o da Sicília, que falava Grego, Árabe e Latim, tornaram os eruditos da Sicília tradutores de obras muito importantes entre os quais temos, os escritos de Euclides, Proclo e até de Ptolomeu, traduzidos para o latim por tradutores acadêmicos da universidade de Salerno (SCHRAMM, 2001).

O desenvolvimento do comércio

Essas diversidades na Europa repercutiram em muitos aspectos da vida medieval, no entanto, temos nas atividades comerciais um aspecto que permeou boa parte da idade média e por boa parte da Europa, influenciando áreas como as ciências e as artes. Podemos evidenciar, a partir de Potro (2012), que as transformações do comércio, mesmo que heterogêneas, culminaram em sua profissionalização e na profissionalização de outros trabalhadores, como os cambistas, banqueiros e na organização da sociedade em grupos de ofícios, desse modo, a organização urbana e consequentemente social e econômica sofreram importantes modificações.

Outra modificação ou avanço tecnológico, foi dos navios e dos instrumentos de navegação, que possibilitaram o aumento considerável das rotas de comércio. Estes avanços assistiam o desenvolvimento de serviços de transportes para longas viagens como um ofício complementar, possibilitando nas intermediações do século XIII a separação de algumas funções, dentre as quais, temos os comerciantes fixos, intermediários e transportadores, assim como, o grande comerciante. Alguns serviços urbanos tiveram sua ascendência, como os banqueiros que necessitavam de operações financeiras cada vez mais elaboradas e maiores, pois havia as operações de escambo, depósitos e empréstimos, bem como, movimentos de quantias consideráveis e transferências de dinheiro sem o seu transporte físico. Então, vemos que o crescimento do comércio não só estimulou o desenvolvimento dos banqueiros, como também da circulação monetária e do crédito comercial (POTRO, 2012).

Livros técnicos

Percebemos com esses desenvolvimentos a necessidade de materiais que orientassem os trabalhos exercidos por essas profissões urbanas, mais especificamente livros técnicos, que em geral eram de aritmética, pois a grande parte do ofício destes trabalhadores era constituído de cálculos conhecidos como aritméticos, influenciando na maior circulação desses conhecimentos. Potro (2009) salienta um aspecto importante em relação a esses livros técnicos, quando apresenta que “toda a produção aritmética ocidental dos séculos XIII, XIV e XV parece estar intimamente ligada à “revolução comercial” e como instrumento essencial de apoio às atividades contabilísticas e fiscais (POTRO, 2009, p. 72, tradução nossa), tudo para ter mais eficiência no desenvolvimento de seus serviços.

Neste aspecto, podemos dizer que os italianos, orquestrados por Leonardo Pisano, que se destacou ao escrever o *Liber Abaci* em 1202, trouxe a sistematização de muitos cálculos utilizados pelos ofícios urbanos (POTRO, 2012). Toda essa movimentação leva, ao que Potro (2009) se refere, de alfabetismo de cunho utilitário, prático e profissional que unido a aritmética constituía um conhecimento indispensável para um bom negócio mercantil em qualquer escala, bem como, para a administração empresarial e patrimonial e para outros setores urbanos.

UM LIVRO DE ARITMÉTICA

O *Liber Abaci* escrito por Leonardo Pisano em 1202 e que teve uma reedição em 1228 pelo próprio autor a partir de algumas considerações feitas por Michael Scott, um dos estudiosos da corte de Frederico II, o qual é citado no início da reedição, teve um papel importante na Europa. Uma composição importante desse papel foi a divulgação das cifras indianas e do sistema numérico decimal posicional, mas para o século XIII foi aquela que proporcionou uma organização das técnicas exigidas pelo comércio em suas diversas atividades, bem como, pelos ofícios urbanos.

Ao adentrar no livro, sem precisar ir longe, percebemos que é um livro que trata de cálculos sem a necessidade do ábaco, que julgamos ter sido um grande choque para aquela sociedade, mas também um grande alívio para as atividades urbanas e comerciais, mesmo assim, essa troca de métodos e ferramentas não foram aceitos de imediato, no entanto, endossadas pelo comércio.

A partir da fala inicial de Leonardo Pisano, o Fibonacci, podemos afirmar que este livro se trata de cálculos, ou melhor, da sistematização dos cálculos com a utilização das cifras indianas regidas pelo sistema numérico decimal posicional, pois temos segundo Leonardo Pisano (1857, p. 1) a seguinte declaração: “publiquei a doutrina completa dos números, segundo o jeito dos índios”. Isso mostra, de uma forma bem direta, que Leonardo Pisano considerava seu livro como um livro do ramo da aritmética e pelo seu histórico de familiarização com as atividades comerciais de seu pai, podemos sugerir que o livro além de teórico e sistematizado estava a serviço de uma aritmética prática, influenciado pelos árabes e pelos indianos, porém, ajustado a uma matemática comercial italiana, pois o autor deixa claro o desejo do povo italiano ser instruído acima de todos os outros (LEONARDO PISANO, 1857).

Para além dos indícios de Leonardo Pisano em sua fala inicial, quando adentramos ainda mais no livro, percebemos que se trata de fato de um conjunto de métodos aritméticos, dando exemplos de como se lê os números, sejam esses grandes ou pequenos, com e sem repetição de algarismos com a separação de varas, de três em três cifras, sempre da direita para a esquerda apresentando desta forma a regra de como deve ser lido cada número. Neste início apresenta também o zero, separado das nove cifras indianas, nos dando a possibilidade de sugerir que para o autor, o zero não tinha um valor numérico, não era um número, uma cifra, mas apenas um símbolo, como os símbolos de conjunto vazio, está contido, maior, menor e outros, que para o zero representava a ausência de valoração em uma determinada posição das casas decimais.

A partir da leitura do *Liber Abaci* somos clarificados do teor aritmético que o livro possui, o qual vai sendo composto ao longo dos capítulos por métodos aritméticos, dentre os quais encontramos, fração comum, fração composta, verificação da divisão pela aritmética modular, verificação não somente resíduo nove (prova real “noves fora” da matemática escolar), mas sete, onze e outros que sejam números primos, frações egípcias, método de proporção, método de negociação entre outros, bem como, diversas aplicações para negócios, comércio, conversões monetárias de peso e conteúdo, métodos de permuta, parcerias comerciais e alocação de lucros, combinação de dinheiro, investimento de dinheiro, juros simples e compostos, tudo nas mais variadas situações, todos bem definidos, dando provas da funcionalidade dos métodos com recursos euclidianos.

CONCLUSÕES

Muitos podem julgar, a partir de uma visão presentista, que o conteúdo desse livro é mais algébrico do que aritmético. Porém, devemos lembrar que os indícios mostram, a partir de livros como esse, que a álgebra no século XIII e XIV

fazia parte da aritmética prática e comercial, servindo sempre para resolver problemas da vida cotidiana urbana e comercial, ou seja, de ordem prática. Não tendo um apreço das universidades, que contemplavam mais a especulação filosófica preservando a aritmética e a música da tradição inaugurada por Boécio (840 – 520) (SAITO, 2015).

Foi possível, dessa forma, perceber ao longo da idade média, que os elementos historiográficos apresentados, nos auxiliam a compreender que os fatos que proporcionaram a construção do livro não foram isolados, mas foi um entrelaçamento dos acontecimentos desses fatos, ou seja, das repercussões de cada acontecimento. Como a heterogenia europeia que permitiu a entrada de obras e tradutores na Europa que não precisavam necessariamente atender as necessidades do clero, assim como, a ampliação do comércio interno e externo que impulsionou a praticidade, inovação e popularidade da aritmética, favorecendo a repercussão do *Liber Abaci*. Vemos que essa repercussão foi tamanha, quando observamos que ainda utilizamos muitos dos algoritmos que Leonardo Pisano propôs nas escolas, afinal, toda base aritmética constituída posteriormente ao século XIII se baseou no *Liber Abaci*, se transformando num manual comum para a vida europeia e porque não para o início de uma aritmética escolar.

REFERÊNCIAS

BRITO, Arlete de Jesus. Matemática na idade média: entre o místico e o científico. Revista Brasileira de História da Matemática, Especial no 1, p. 127-141, 2007.

LEONARDO PISANO. Liber Abbaci. Secundo la lezione del codice magliabrchiano, C. I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73, Roma: 1857.

POTRO, B. C. Oficios Urbanos y Desarrollo de la Ciencia y de la Técnica en la Baja Edad Media: la corona de castilla. Norba. Revista de Historia, vol. 17, 2004, p. 41 - 68.

POTRO, B. C. Un Manual de Aritmética Mercantil de Mosén Juan de Andrés. Pecunia, n. 8, 2009, p. 71-96.

POTRO, B, C. El desarrollo del comercio medieval y su repercusión en las técnicas mercantiles: Ejemplos castellanos. Pecunia, n. 15 (julio-diciembre), 2012, p. 201- 220.

SAITO, Fumikazu. História da matemática e suas (re)construções contextuais. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015.

SCHRAMM, Matthias. Frederick II of Hohenstaufen and Arabic Science. Science in Context 14(1/2), 2001, p. 289-312.

VASCONCELOS, Fernando de Almeida e. História Das Matemáticas na Antiguidade. Lisboa: Livrarias Aillaud e Bertrand, 1925.



GRUPOS QUE POSSUEM O PROBLEMA DA PALAVRA DECIDÍVEL

Leite, Rafael, rwb.leite@gmail.com¹
Canella, Juliana, jscanella@ufpa.br¹

¹ Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo: O conhecido Problema da Palavra é um famoso problema da álgebra moderna, mais precisamente da teoria combinatória de grupos, que busca responder quando duas palavras são equivalentes em um certo grupo. Este problema inicialmente era conhecido como “Problema de Dehn”, introduzido pelo matemático alemão Max Dehn, juntamente aos Problema do Isomorfismo e do Problema da Conjugação, em alguns de seus trabalhos em Topologia. Apesar de serem problemas de fácil compreensão, suas soluções não são triviais pois, em geral, se tratam de problemas indecidíveis ou insolúveis. Neste trabalho, citaremos uma classe especial de grupos que possui o Problema da Palavra resolvido, chamados grupos policíclicos. O que nos permite resolver o Problema da Palavra para estes grupos é o modo conveniente de apresentá-los, uma vez que as relações entre os seus geradores envolvem apenas potências e conjugações.

Palavras-chave: teoria combinatória de grupos, algoritmos, álgebra

INTRODUÇÃO

O conceito de algoritmo está presente desde cedo nos estudos em Matemática por estar intrinsecamente ligado à resolução de exercícios de qualquer nível. Apesar de uma criança não saber do que se trata, ao realizar uma conta de multiplicação, por exemplo, por mais simples que seja, ela realiza uma série de passos para conseguir chegar na solução correta, que é o produto. Segundo Boyer [1], a palavra algoritmo vem da palavra Al-Khwarizmi, antigo matemático persa, e significa qualquer regra especial de um processo ou operação sucessiva cuja finalidade é resolver um problema em finitos passos. Em [9], Turing idealizou um modelo de computador que estava mais conectado aos seus processos lógicos do que pela sua construção física. Tal construção abstrata é conhecida como Máquina de Turing, e foi fundamental para se introduzir na matemática os problemas indecidíveis. Para Turing, um problema seria indecidível se não fosse possível criar um algoritmo que fosse capaz de sempre responder afirmativamente ou negativamente a um determinado questionamento. Além disso, Turing foi responsável por uma das primeiras provas da existência dessa classe de problemas, através do famoso “*Halting Problem*”. Este problema busca responder se é possível decidir se um programa de computador, com uma entrada dada, pára sua execução ou continua rodando infinitamente.

Em [2], Dehn propõe implicitamente a primeira versão do Problema da Palavra que consiste em determinar se dois nós matemáticos são equivalentes, ou seja, se é possível transformar um nó em outro por meio de um processo de isotopia. Um ano depois, Dehn [3] percebeu que os problemas de nós que estudava eram apenas um caso particular proveniente das propriedades de grupos finitamente gerados e, a partir daí, começou a explicitar os problemas que estudava na área de teoria de grupos. Antes de provar a existência de classes de

grupos no qual certas equivalências entre dois objetos não poderia ser mostrada, foram encontrados alguns exemplos de grupos bastante específicos que possuíam este problema decidível por Magnus [6], no qual a demonstração da solubilidade para grupos envolvia apresentações com apenas um relator. Foi quase duas décadas depois que Novikov [7] verificou que esse problema na verdade é insolúvel em geral.

A primeira aparição dessa classe de problemas foi através de estudos topológicos. Desta forma, é inevitável estudá-los sem tentar fazer conexões com problemas de outros ramos da Matemática. Poincaré [8] introduziu o conhecido Grupo Fundamental, $\pi_1(S)$, cujos elementos são caminhos dentro de um conjunto S . Naturalmente surgiram problemas de decisão envolvendo este grupo, ou seja, como decidir se um caminho fechado em $\pi_1(S)$ pode ser contraído para um ponto em S . Este problema foi resolvido de modo puramente algébrico por Dehn 30 anos depois de ser solucionado topologicamente por Poincaré. O artigo em que Poincaré aborda o Grupo Fundamental creditou a ele a autoria de uma área na Matemática que liga as áreas de topologia e álgebra, conhecida atualmente como topologia algébrica.

Exemplos de problemas decidíveis em Matemática são: determinar se dois números são relativamente primos por meio do Algoritmo de Euclides; determinar se um número é primo pelo teste da divisão; determinar se uma matriz quadrada é inversível dentre vários outros.

DESENVOLVIMENTO

Há três problemas fundamentais formulados historicamente por Max Dehn em Teoria de Grupos que podem ser estudados, com algumas variações, em outras áreas da Matemática. Estes problemas possuem características envolvendo propriedades locais ou globais. Quando falamos em propriedades locais, o intuito é saber que propriedades dois elementos de um certo grupo possuem em comum e, pelas propriedades globais, buscamos saber se certos grupos como um todo estão relacionados de alguma forma.

Os problemas de Dehn para grupos são os seguintes:

Problema da Palavra: Seja G um grupo definido através de uma apresentação finita. Existe algum algoritmo para determinar se uma palavra arbitrária w em G , definida por meio dos geradores de G , é igual à identidade em G ? Isto é, $w = e_G$.

Problema da Conjugação: Seja G um grupo definido através de uma apresentação finita. Existe algum algoritmo para determinar se duas palavras arbitrárias u e v em G , definidas por meio dos geradores de G , são ou não conjugados em G .

Problema do Isomorfismo: Sejam dois grupos G e H determinados através de apresentações finitas. Existe algum algoritmo para determinar se G é isomorfo à H ?

Como podemos notar, o Problema da Palavra e o Problema da Conjugação são problemas de propriedades locais, e o problema do isomorfismo é de propriedade global. Além disso, todos esses problemas possuem algo em comum: são propostos a partir de grupos finitamente apresentados. Esse detalhe é muito importante, pois não faz sentido tentar resolver algorítmicamente qualquer problema aplicando processos e transformações em infinitos elementos, uma vez que essa sequência de passos nunca terminará.

Para falar sobre quaisquer desses problemas de decisão para grupos, é necessário antes entender basicamente alguns conceitos fundamentais, sendo estes: grupos finitamente gerados, grupos livres, apresentação de grupos e grupos finitamente apresentados, bem como entender o que é uma palavra em G , e como podemos dar ao conjunto das palavras uma estrutura de grupo, utilizando relações de equivalência e algumas transformações para chegar de uma palavra a outra.

Definição: Um grupo G é dito finitamente gerado se, existe um conjunto finito S , dito conjunto gerador, tal que cada elemento de G possa ser escrito como uma combinação entre os elementos de S e seus inversos. Em outras palavras, sendo $X = S \cup S^{-1}$, temos que $G = \langle X \rangle$.

Podemos ter como exemplo trivial de grupo finitamente gerado qualquer grupo finito, uma vez que, se $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, então $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$.

Considerando $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, podemos formar uma *palavra* concatenando os elementos do conjunto X um após outro, de modo a obtermos um elemento da forma $w = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_n}^{\alpha_n}$, com $\alpha_i = \pm 1$. Caso todos os expoentes sejam 0, definimos como *palavra vazia* o elemento $w = e$ ou $w = 1$. Com isso, podemos dar às palavras formadas pelos geradores do grupo G uma estrutura de grupo, uma vez definida a operação entre duas palavras sendo simplesmente a justaposição entre elas. Para construir tal grupo, é necessário usar classes de equivalência, isto é, precisamos definir quando duas palavras em um grupo são equivalentes.

Sejam as palavras $w = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_n}^{\alpha_n}$ e $w' = x_{j_1}^{\beta_1} x_{j_2}^{\beta_2} \dots x_{j_n}^{\beta_n}$ dadas. Dizemos que w e w' são palavras *equivalentes*, se há uma sequência finita de transformações em w , de modo que esta possa ser convertida na palavra w' . Tais transformações consistem em adicionar ou retirar elementos da forma xx^{-1} , ou seja, aplicando as conhecidas transformações de Tietze. Consideramos agora o conjunto $G = \{[w] / w = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_n}^{\alpha_n}\}$ de todas as classes de equivalência em X , e definindo o produto entre duas classes $[u][v]$ por $[uv]$, G será um grupo, conhecido como *grupo das palavras* em X .

Definição: Dizemos que $G = \langle X | R \rangle$ é uma *apresentação livre*, ou simplesmente *apresentação* para o grupo G . Os elementos do conjunto X são chamados de geradores e os elementos de R de relatores. Em alguns casos, é conveniente escrever os relatores na forma $r_i = e$ e daí, G pode ser definido pela apresentação $\langle X | r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_t = e \rangle$.

Um grupo G é dito *finitamente apresentado* se possui uma apresentação onde ambos os conjuntos, X e R , são finitos. O Problema da Palavra para o grupo G consiste em saber se, dada uma palavra w em G , temos que $w = e$. O Problema da Decisão sobre a equivalência entre duas palavras claramente acaba se reduzindo a este, pois, dados dois elementos u e v , a igualdade entre eles é válida se, e somente se, $uv^{-1} = e$.

Definição: Chamamos de *grupo livre de posto n* ao grupo definido pela apresentação $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n | - \rangle$.

Um grupo livre não está amarrado a relações entre seus geradores (esta é a motivação para ele se denominar livre) e a única regra ao qual os grupos livres estão sujeitos são aos axiomas que definem F sendo um grupo. Como uma das coisas que sabemos com relação aos geradores de grupos livres são informações válidas para quaisquer grupo, como por exemplo que $a_i a_i^{-1} = e$, o processo para resolver o problema da palavra para essa classe de grupos consiste em trabalhar com as palavras reduzidas, que são aquelas onde retiramos elementos da forma $a_i a_i^{-1}$ ou $a_i^{-1} a_i$, recursivamente.

Existe uma classe de grupos que possuem o problema da palavra decidível, que são conhecidos como grupos policíclicos ou grupos com alguma apresentação policíclica. A sua estrutura nos permite encontrar a forma normal de um elemento arbitrário deste grupo, e esta é a chave para solucionar o problema da palavra sob certas condições.

Definição: Um grupo G é dito *policíclico* se possui uma cadeia descendente de subgrupos $G = G_1 \geq \dots \geq G_{n+1} = \{e\}$, onde $G_{i+1} \triangleleft G_i$ e o quociente G_{i+1}/G_i é um grupo cíclico. Esta cadeia de subgrupos é chamada de *série policíclica*.

Definição: Se X é uma sequência policíclica para G , então definimos a *sequência das ordens relativas a X* pelo conjunto $R(x) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, onde $r_i = |G_i : G_{i+1}| \cup \{\infty\}$.

Definição: Se um elemento $g \in G$ é da forma $g = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, no qual cada a_i é um inteiro, então esta é chamada de forma normal do elemento g . Caso $0 \leq a_i \leq r_i$, dizemos que g é uma palavra coletada.

Teorema: Se $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma sequência policíclica para G , então G é finitamente apresentado, e suas relações são

$$\begin{aligned} x_i^{s_i} &= R_{i,i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad s_i < \infty \\ x_j^{-1} x_i x_j &= R_{i,j}, \quad 1 \leq j < i \leq n \\ x_j x_i x_j^{-1} &= R_{j,i}, \quad 1 \leq j < i \leq n \end{aligned}$$

onde cada lado direito da igualdade corresponde a uma palavra coletada.

A apresentação dada acima para um grupo G é chamada *apresentação policíclica*. É possível verificar que toda apresentação policíclica define um grupo policíclico, e vice-versa, por [4]. Assim, quaisquer resultados que obtivermos para grupos que possuem apresentações policíclicas, também serão válidos para grupos policíclicos. Ainda em [4], podemos estudar as apresentações policíclicas consistentes, que são as apresentações em que o conjunto de expoentes $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ das relações acima, coincide com o conjunto das ordens relativas $R(X)$. Esta propriedade tem grandes consequências no que diz respeito à forma normal de um elemento do grupo, pois se esta condição é satisfeita, então esta forma normal será única. Além disso, é descrito um algoritmo chamado “*Collection Algorithm*”, que busca deixar dois elementos de um grupo dado por uma apresentação policíclica consistentes em sua forma normal e, por sua unicidade, é possível comprovar se esses dois elementos são ou não equivalentes.

Por fim, como o algoritmo da palavra coletada pode nos dar uma resposta negativa ou positiva para este problema nesta classe de grupos, dizemos que o problema da palavra para os grupos policíclicos é decidível. Mais do que isso, também é possível mostrar que o problema do isomorfismo e da conjugação é decidível nesses grupos. Além dos policíclicos, temos como exemplo de grupos com problemas de decisão solúvel qualquer grupo finito, grupos de tranças, grupos livres finitamente gerados e grupos com um relator em sua apresentação[6].

REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, C. História da Matemática. ed. Edgard Blucher, 2011.
- [2] DEHN, M. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, 1910.
- [3] DEHN, M. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, 1911
- [4] HOLT, D.F. Handbook of computational group theory. Chapman and Hall/CRC, 2005
- [5] JOHNSON, D.L., Presentations of groups. Vol. 15. Cambridge university press, 1997.
- [6] MAGNUS, W., Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation, Math. Ann. 106 (1932), no. 1, 295–307
- [7] NOVIKOV, P. S. On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory, 1955
- [8] POINCARÉ, H. Analysis Situs, *Journal de l'École Polytechnique*, 1895
- [9] TURING, A. M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, 1936



ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMA DE EQUAÇÕES DE ONDA SOB EFEITO TÉRMICO

Barbosa. Ronald C., rbarbosa@ufpa.br ¹

Ramos. Anderson J. A., ramos@ufpa.br ²

¹Doutorando em Matemática pelo Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM, Bolsista CAPES.

² Faculdade de Matemática, UFPA Campus Salinópolis.

Resumo: Neste trabalho vamos apresentar alguns resultados obtidos com respeito ao sistema de equações de onda sob efeitos térmico. Foi feita a análise e a prova da estabilidade exponencial através do método de semigrupos. Além disso, fizemos a análise de estabilidade do sistema semi-discretizado. Para alcançar este objetivo construímos o funcional de Lyapunov na sua versão semi-discreta obtendo cada uma das suas componente por meio de técnicas multiplicativas utilizando versões semi-discretas dos multiplicadores. Provamos assim que o sistema é exponencialmente estável.

Palavras-Chave: Estabilidade Exponencial; Diferenças Finitas.

INTRODUÇÃO

Consideramos o problema 1 – d envolvendo sistema de equações de ondas sob efeito térmico dado por

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma u_t = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \delta \theta_{xx} = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty) \quad (2)$$

$$c\theta_t - K\theta_{xx} + \beta v_t = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty) \quad (3)$$

estando este sujeito as condições de contorno e iniciais dados, respectivamente, por

$$u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), \theta(0, t) = \theta_0(x), x \in (0, L). \quad (5)$$

A energia total do sistema (1) – (5) é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |v_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u - v|^2 dx + \frac{c\delta}{2\beta} \int_0^l |\theta_x|^2 dx \quad (6)$$

satisfazendo a seguinte lei de dissipação:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{K\delta}{\beta} \int_0^l |\theta_{xx}|^2 dx - \gamma \int_0^l |u_t|^2 dx. \quad (7)$$

Aqui $\alpha > 0$ é uma constante de acoplamento, $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são os deslocamento de duas cordas vibrantes, $\theta(x, t)$ é a temperatura no tempo t e no espaço x .

Analisaremos o sistema (1) – (5) sob o ponto de vista contínuo e semi-discretizado em diferenças finitas. Vamos comparar os resultados e verificar que o sistema é exponencialmente estável, sendo que, para o contínuo na Seção 1 será provado usando semigrupos. No caso semi-discretizado ele também terá a propriedade de estabilidade exponencial, como veremos na Seção 2.

1 O problema Contínuo

Consideramos o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(0; l) \times L^2(0; l) \times H_0^1(0; l) \times L^2(0; l) \times H_0^1(0; l)$ dotado da norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\phi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \alpha\|u - v\|^2 + \frac{c\delta}{\beta} \|\theta_x\|^2 \quad (8)$$

e produto escalar $\langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}}^2$. Pondo $U = (u, \phi, v, \psi, \theta)^T \in \mathcal{H}$ e $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0)^T$ podemos reescrever o sistema (1) – (5) no problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U, & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (9)$$

onde o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I_d(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x^2(\cdot) - \alpha I_d(\cdot) & -\gamma I_d(\cdot) & I_d(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d(\cdot) & 0 \\ \alpha I_d(\cdot) & 0 & \partial_x^2(\cdot) - \alpha I_d(\cdot) & 0 & -\delta \partial_x^2(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-1}\beta I_d(\cdot) & c^{-1}K \partial_x^2(\cdot) \end{pmatrix} \quad (10)$$

com domínio $D(\mathcal{A}) := \{U = (u, \phi, v, \psi, \theta)^T \in \mathcal{H}; \theta \in H^3(0; l), u, v \in H^2(0; l), \phi, \psi \in H_0^1(0; l)\}$. É fácil verificar que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{c\delta}{\beta} \|\theta_{xx}\|^2 - \gamma \|\phi\|^2 \leq 0, \quad (11)$$

ou seja, que operador \mathcal{A} é dissipativo. Sendo \mathcal{A} dissipativo, por Lumer-Phillips, podemos concluir que ele é um gerador de um semigrupo C_0 de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$.

Usando os resultados acima é fácil ver que o sistema (9) é bem posto. Além disso, provamos que o sistema é exponencialmente estável usando o Teorema de J. Prüss (Referências[2], [4], [6]) que é caracterizado da seguinte maneira:

Teorema 1.1. *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$(a) \quad i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad e \quad (b) \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Considerando a equação resolvente $(i\lambda I - \mathcal{H})U = F$, em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$, o problema (9) em termo de

suas componentes escalares é dada por

$$i\lambda u - \phi = f_1 \in H_0^1(0, l) \quad (13)$$

$$i\lambda\phi - u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma\phi = f_2 \in L^2(0, l) \quad (14)$$

$$i\lambda v - \psi = f_3 \in H_0^1(0, L) \quad (15)$$

$$i\lambda\psi - v_{xx} + \alpha(v - u) + \gamma\theta_{xx} = f_4 \in L^2(0, l) \quad (16)$$

$$ic\lambda\theta - K\theta_{xx} + \beta\psi = cf_5 \in H_0^2(0, l). \quad (17)$$

Lema 1.1. *Sob as notações acima temos*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (18)$$

Demonstração: Como o resolvente de \mathcal{A} está contido em um compacto, seu espectro é discreto. Para provar (18) é suficiente mostrar que $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, com $F = 0$ implica $U = 0$. Usando este fato em (11) podemos ver que $\phi = \theta_{xx} = 0$. Conseqüentemente, usando a desigualdade de Poicaré, obtemos $\theta = \theta_x = 0$. Usando isto, de (13) obtemos $u = 0$. Finalmente, de (17) e (15) obtemos $\psi = 0$ e $v = 0$, respectivamente. Assim, $U = 0$ seguindo nossa conclusão.

Do outro lado, para verificar o item (b), usamos alguns lemas auxiliares. Primeiramente notamos que da equação resolvente e (11) conseguimos verificar que

$$\|\phi\|^2 + \|\theta_{xx}\| \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (19)$$

Lema 1.2. *Sob as notações acima existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|\phi\|^2, \|\theta\|^2, \|\theta_x\|^2, \|\theta_{xx}\|^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (20)$$

Demonstração: A prova segue imediatamente de (19).

Lema 1.3. *Sob as notações acima existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|\psi\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (21)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (17) por $\bar{\psi}$ e integrando sobre $[0, l]$ temos

$$ic\lambda \int_0^l \theta \bar{\psi} dx - k \int_0^l \theta_{xx} \bar{\psi} dx + \beta \|\psi\|^2 = c \int_0^l f_5 \bar{\psi} dx. \quad (22)$$

Usando a equação (16) obtemos

$$\beta \|\psi\|^2 = -c \int_0^l \theta_x \bar{v}_x dx - \alpha c \int_0^l \overline{\theta(v-u)} dx + \delta c \|\theta_x\|^2 + k \int_0^l \theta_{xx} \bar{\psi} dx + \int_0^l \bar{f}_4 \theta dx + c \int_0^l f_5 \bar{\psi} dx.$$

Usando a desigualdade de Young e o Lema 1.2 temos

$$\|\psi\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Lema 1.4. *Sob as notações acima existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u - v\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (23)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (14) e (16) por \bar{u} e \bar{v} respectivamente, realizando integrações em $[0, l]$ e somando

o resultado temos

$$\|u_x^2\|^2 + \|v_x^2\|^2 + \alpha\|u - v\|^2 = -i\lambda \int_0^l \phi \bar{u} dx - i\lambda \int_0^l \psi \bar{v} dx + \delta \int_0^l \theta_x \bar{v}_x dx - \gamma \int_0^l \phi \bar{u} dx + \int_0^l f_2 \bar{u} dx + \int_0^l f_4 \bar{v} dx.$$

Usando as equações (13), (15), das desigualdades de Poincaré e Young e os Lemas 1.2–1.3 temos

$$\|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u - v\|^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (24)$$

Agora, de posse dos resultados dos Lemas 1.2, 1.3 e 1.4, nos permitem estabelecer nosso resultado de estabilidade exponencial.

Teorema 1.2. *O semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ associado ao sistema (1) – (5) gerado por \mathcal{A} é exponencialmente estável.*

Demonstração: De fato, somando as desigualdades dos Lemas 1.2–1.4 e usando a estimativa (19), temos

$$(1 - \varepsilon C) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (25)$$

Escolhendo $\varepsilon := 1/2C$, podemos concluir que existe uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (26)$$

Então, usando o Teorema 1.1, tem-se a conclusão.

2 Versão Semi-Discreta

Além de provar que o problema contínuo (1) – (5) é exponencialmente estável via semigrupos, também provamos que, ao usarmos a semi-discretização em diferenças finitas nesse mesmo sistema, verifica-se a propriedade de decaimento exponencial. Considerando a malha $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j = jh < \dots < x_J < x_{J+1} = l$ em que $J \in \mathbb{N}$, pondo $h = l/J + 1$, então o sistema (1) – (5) semi-discretizado será dado por

$$u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha(u_j(t) - v_j(t)) + \gamma u_j'(t) = 0 \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (27)$$

$$v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha(v_j(t) - u_j(t)) + \delta \Delta_h \theta_j(t) = 0 \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (28)$$

$$c\theta_j'(t) - K \Delta_h \theta_j(t) + \beta v_j'(t) = 0 \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (29)$$

com as condições de contorno e iniciais dadas, respectivamente, por

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = v_0(t) = v_{J+1}(t) = \theta_0(t) = \theta_{J+1}(t) = 0, \quad \forall t \in (0, T) \quad (30)$$

$$u_j(0) = u_j^0, u_j'(0) = u_j^1, v_j(0) = v_j^0, v_j'(0) = v_j^1, \theta_j(0) = \theta_j^0, \quad t \in (0, T). \quad (31)$$

A energia total associada ao sistema (27) – (31) é definida da seguinte maneira:

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |u_j'(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |v_j'(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |\nabla_h u(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |\nabla_h v_j(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 + \frac{c\delta}{2} h \sum_{j=0}^J |\nabla_h \theta_j(t)|^2, \quad (32)$$

sendo

$$\nabla_h u_j(t) := \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h}, \quad \bar{\nabla}_h u_j(t) := \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h}, \quad \Delta_h u_j(t) := \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2}$$

os operadores diferenças finitas. A lei de dissipação do sistema semi-discreto é dada por

$$\frac{d}{dt}E_h(t) = -\gamma h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 - \frac{\delta K}{\beta} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 \leq 0. \quad (33)$$

Nosso objetivo é provar o seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *A energia $E_h(t)$ do sistema (27) – (31) decai exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Isto é, existem duas constantes positivas M e η , independente dos dados iniciais, tal que*

$$E_h(t) \leq M E_h(0) e^{-\eta t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (34)$$

Para isso usamos alguns Lemas técnicos, que podem ser visto em detalhes em [1], que nos auxiliarão nessa tarefa. Seja $S = \{w(t) = (w_0(t), w_1(t), \dots, w_J(t), w_{J+1}(t)); w_0(t) = w_{J+1}(t) = 0\}$.

Lema 2.1. *Suponha que $v, w \in S$. Então, vale a seguinte identidade*

$$h \sum_{j=1}^J v_j(t) (\Delta_h w_j(t)) = -h \sum_{j=0}^J \nabla_h v_j(t) \nabla_h w_j(t).$$

Lema 2.2. *Suponha que $w \in S$. Então, vale a seguinte estimativa*

$$h \sum_{j=1}^J |w_j(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2.$$

Lema 2.3. *Suponha que $w \in S$. Então, vale a seguinte estimativa:*

$$h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h w_j(t)|^2. \quad (35)$$

Consideremos o funcional

$$\mathcal{F}_h(t) = h \sum_{j=0}^J u'_j(t) u_j(t) + h \sum_{j=0}^J v'_j(t) v_j(t) + \frac{\gamma}{2} h \sum_{j=0}^J |u_j(t)|^2 \quad (36)$$

e a este funcional temos o seguinte estimativa:

Lema 2.4. *Para qualquer $h > 0$ e $(u_j(t), v_j(t), \theta_j(t))$ solução de (27) – (31) temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_h(t) &\leq -h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 - \alpha h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ &\quad + Ch \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 + Ch \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (27) por $hu_j(t)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(h \sum_{j=0}^J u'_j(t) u_j(t) + \frac{\gamma}{2} h \sum_{j=0}^J |u_j(t)|^2 \right) - h \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \\ + \alpha h \sum_{j=0}^J (u_j(t) - v_j(t)) u_j(t) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Analogamente, multiplicando a equação (28) por $hv_j(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(h \sum_{j=0}^J v'_j(t) v_j(t) \right) - h \sum_{j=0}^J |v'_j|^2 + h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J (v_j(t) - u_j(t)) v_j(t) \\ + \delta h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v_j(t) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Adicionando as equações (38) e (39) e usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_h(t) \leq -h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 - \alpha h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ + h \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + \frac{3}{2} h \sum_{j=0}^J |v'_j|^2 + \frac{\delta}{2} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned}$$

Isso completa a demonstração.

Agora considerando o funcional

$$\mathcal{G}_h(t) = ch \sum_{j=0}^J \theta_j(t) v'_j(t) \quad (40)$$

temos como resultado o seguinte Lema:

Lema 2.5. Para qualquer $h > 0$ e $(u_j(t), v_j(t), \theta_j(t))$ solução de (27) – (31) temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}_h(t) \leq -\frac{\beta}{2} h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 + \epsilon_2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + \epsilon_1 \alpha h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 + Ch \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2, \quad (41)$$

para todo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.

Demonstração: Multiplicando a equação (29) por $hv'_j(t)$ e somando para $j = 1, 2, \dots, J$ obtemos

$$ch \sum_{j=1}^J \theta'_j(t) v'_j(t) - Kh \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) + \beta h \sum_{j=1}^J |v'_j(t)|^2 = 0. \quad (42)$$

Usando a identidade $\theta'_j(t) v'_j(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_j(t) v'_j(t)) - \theta_j(t) v''_j(t)$ temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}_h(t) = ch \sum_{j=1}^J \theta_j(t) v''_j(t) + Kh \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) - h\beta \sum_{j=1}^J |v'_j(t)|^2. \quad (43)$$

Usando a equação (28) em (43) e pelas desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_h(t) &= ch \sum_{j=1}^J \theta_j(t) \left(\Delta_h v_j(t) - \alpha (v_j(t) - u_j(t)) - \delta \Delta_h \theta_j(t) \right) + Kh \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) - h\beta \sum_{j=1}^J |v'_j(t)|^2 \\ &\leq -h \frac{\beta}{2} \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 - ch \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}(t) - \theta_j(t)}{h} \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right) + C \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 \\ &\quad + \alpha h \epsilon_1 \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ &\leq -h \frac{\beta}{2} \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 + h \epsilon_2 \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + C \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 + \alpha h \epsilon_1 \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \end{aligned} \quad (44)$$

concluindo assim a demonstração.

Prova do Teorema 2.1.

Considere agora o funcional de Lyapunov definido por

$$\mathcal{L}_h(t) = N_1 E_h(t) + \mathcal{F}_h(t) + N_2 \mathcal{G}_h(t). \quad (45)$$

Note que conseguimos verificar, sem dificuldades, que existem constantes positivas k_1 e k_2 tais que $K_1 E_h(t) \leq \mathcal{L}_h(t) \leq k_2 E_h(t)$. Tomando a derivada em (45) e usando (33), Lema 2.4 e o Lema 2.5 temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) &\leq -(N_1 \gamma - C) h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 - (N_2 \beta / 2 - C) h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \\ &\quad - (1 - N_2 \varepsilon_2) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 - (1 - N_2 \varepsilon_1) \alpha h \sum_{j=0}^J |v_j(t) - u_j(t)|^2 \\ &\quad - (N_1 \delta k / \beta - C - N_2 C) h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Ao escolhermos $N_2 > 2C/\beta$, $\varepsilon_2 := 1/2N_2$, $\varepsilon_1 := 1/2N_2$ e N_1 grande o suficiente tal que $N_1 > \max\{C/\gamma, (1 + N_2)\beta C/\delta k\}$ teremos

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= N_1 \gamma - C > 0, & \xi_2 &:= N_2 \beta / 2 - C > 0, & \xi_3 &:= 1 - N_2 \varepsilon_2 > 0, \\ \xi_4 &:= 1 - N_2 \varepsilon_1 > 0, & \xi_5 &:= N_1 \delta k / \beta - C - N_2 C > 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) &\leq -\xi_1 h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 - \xi_2 h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 - \xi_3 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 \\ &\quad - \xi_4 \alpha h \sum_{j=0}^J |v_j(t) - u_j(t)|^2 - \xi_5 h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Usando o Lema 2.3 no termo $\sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2$, pode-se concluir que existe uma constante $\eta := \min\{2, 2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3, 2\xi_4, 2\lambda_1 \xi_5\} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) \leq -\eta E_h(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (48)$$

Usando a equivalência entre $E_h(t)$ e $\mathcal{F}_h(t)$ concluímos o resultado.

CONCLUSÕES

Ao fazermos a análise do comportamento do sistema (1) – (5) provamos que ele é exponencialmente estável na sua versão contínua através da teoria de semigrupos lançando mão do Teorema de J. Prüss. Posteriormente, analisamos sua versão semi-discreta em diferenças finitas, conseguimos concluir que o possui lei de dissipação. Além disso, também tivemos como resultado a estabilidade exponencial que foi provada por meio de técnicas multiplicativas, na qual foi usado multiplicadores semi-discretos e assim obtivemos o resultado desejado.

REFERÊNCIAS

- [1] INFANTE, J.A.; ZUAZUA, E. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation. *Math. Model. Num. Ann.* 33, 407-438 (1999)
- [2] GEARHART LM. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978;236: 385-394.
- [3] LIU Z, ZHENG S. Semigroup Associated with Dissipative Systems, *Res. Notes Math.*, Vol 394, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton; 1999.
- [4] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, NewYork; 1983.
- [5] HUANG, F. (1985). Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. of Diff. Eqs.*, 1, 43-56.
- [6] PRÜSS, J. On the spectrum of C_0 -semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 284 (1984), 847-857.
- [7] S. JIANG, R. RACKE, Evolution Equations in Thermoelasticity, *Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, vol. 112, Chapman & Hall, 2000



BELAS SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Lustosa, Italo Bruno Leandro, italo2020leandro@gmail.com

Veras, Leomar dos Santos, leomar.santos.veras@gmail.com

¹Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

²Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo: No cálculo nos deparamos com a seguinte regra de derivação:

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Podemos nos questionar quando vale $(f(x).g(x))' = f'(x).g'(x)$?

Neste trabalho estamos interessados em encontrar soluções para equações diferenciais bem específicas satisfazendo condições que, em geral, não valem para as funções. Estaremos investigando exceções, como por exemplo, quando vale as seguintes condições:

$$(f(x).g(x))'; f''(x) = (f(x))^2; f'(x) = f(f(x)).$$

Palavras-chave: Equações, Diferenciais, Soluções, Exceções.

INTRODUÇÃO

Classicamente, as Equações Diferenciais são divididas em: Equações Diferenciais Ordinárias onde essas descrevem fenômenos unidimensionais, e as Equações Diferenciais Parciais que descrevem fenômenos superiores. Todavia, as equações diferenciais ordinárias estão desempenhando um papel na análise científica dos fenômenos em todas as dimensões, graças o advento moderno da teoria dos sistemas dinâmicos.

Quando desejamos estudar Leis físicas que descrevem a natureza, usamos modelos matemáticos como aproximação, muitos destes modelos são relações que envolvem a taxa de variação de uma determinada grandeza física. Como foi visto no curso de Cálculo, a taxa de variação é uma derivada e as relações entre elas são equações. Sendo assim, estes fenômenos físicos são descritos por equações que envolvem derivadas que chamamos de equações diferenciais.

Sabemos que uma equação algébrica é aquela que tem números como incógnitas, enquanto em uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(i)$, i é a sua variável independente e y a variável dependente. O presente trabalho irá mostrar resolução de três belas equações diferenciais ordinárias, neste trabalho estamos interessados em encontrar soluções para equações diferenciais bem específicas satisfazendo condições que, em geral, não valem para as funções. Estaremos investigando exceções, como por exemplo, quando vale as seguintes condições: $(f(x).g(x))'$; $f''(x) = (f(x))^2$; $f'(x) = f(f(x))$.

BELAS SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1- Primeira Bela Equação

Queremos encontrar funções que possuem a propriedade na qual a derivada do produto é igual ao produto das derivadas, ou seja

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Demonstração. Supomos que $f(x)$ é dada, assim vamos encontrar a $g(x)$. Temos que:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

substituindo $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$, ficaremos,

$$f' \cdot g' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$f' \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g$$

$$(f' - f) \cdot g' = f' \cdot g$$

assim a função $g(x)$ resolve a seguinte equação diferencial:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)}$$

integrando ambos os lados,

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx.$$

Substituindo a integral do lado esquerdo na igualdade anterior obtemos,

$$\ln g(x) = \int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx$$

Logo, a nossa equação $g(x)$ será da forma,

$$g(x) = C e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx}.$$

Concluimos: Se $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ então $g(x) = C e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx}$ ■

2- Segunda Bela Equação

Queremos encontrar funções que possuem a propriedade na qual a derivada segunda é igual a função ao quadrado, ou seja

$$f''(x) = (f(x))^2$$

Demonstração. Queremos que $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, ou de modo similar $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Fazendo uma substituição $u = \frac{dy}{dx}$ teremos que,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= u^2 \\ \frac{1}{u^2} du &= dx\end{aligned}$$

integrando a última igualdade e isolando u ,

$$u = \frac{1}{-x + C_3}$$

ou na outra forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-x + C_3}$$

integrando novamente,

$$\boxed{y = -\ln|-x + C_3| + C_4}$$

encontramos a solução para $f''(x) = (f(x))^2$.

Calculando a segunda derivada temos que,

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(-x + C_3)^2} = \left(\frac{1}{-x + C_3}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

■

3- Terceira Bela Equação

Queremos encontrar funções que possuem a propriedade na qual a derivada é igual a composição da função consigo mesma, ou seja

$$f'(x) = f(f(x))$$

Vamos dividir a construção em três passos.

Demonstração. **Passo 1:** Assumimos que f é uma função exponencial, ou seja,

$$f(x) = Cx^\alpha, C \neq 0.$$

Além disso, queremos que a função satisfaça,

$$f'(x) = f(f(x)).$$

Derivando e fazendo a composição,

$$C\alpha x^{\alpha-1} = C(f(x))^\alpha$$

$$C\alpha x^{\alpha-1} = C(Cx^\alpha)^\alpha$$

$$\alpha x^{\alpha-1} = C^\alpha x^{\alpha^2}.$$

Vamos comparar os expoentes e os coeficiente de $\alpha x^{\alpha-1} = C^\alpha x^{\alpha^2}$.

Passo 2: Vamos encontrar α .

Pelo Passo 1 temos que α deve satisfazer a equação $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Portanto,

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{(\pm \frac{i\pi}{3})}.$$

Passo 3: Agora vamos encontrar C .

Pelo Passo 1 segue que $C^\alpha = \alpha$ e assim $C = \alpha^{\frac{1}{\alpha}}$.

Vamos finalizar a construção de f . Pelo Passo 2 temos dois casos a considerar:

$$\boxed{\text{Caso 1 : } \alpha = e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

Substituindo α em C obtemos

$$C = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} e^{\frac{i\pi}{6}}.$$

Daí,

$$\boxed{C = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)}.$$

Portanto, nossa primeira solução é dada por

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.}$$

$$\boxed{\text{Caso 2 : } \alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

De maneira análoga ao caso anterior obtemos

$$C = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{e^{\frac{4\pi}{3}}} = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Assim,

$$\boxed{C = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)}.$$

Logo, a segunda solução é dada por

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) x^{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}}.$$

Só nos resta verificar que $f'(x) = f(f(x))$. A derivada de $f(x) = Cx^\alpha$ é $f'(x) = C\alpha x^{\alpha-1}$ então,

$$f'(x) = CC^\alpha x^{\alpha^2}$$

$$f'(x) = C(Cx^\alpha)^\alpha$$

$$f'(x) = C(f(x))^\alpha$$

$$f'(x) = f(f(x)).$$

■

REFERÊNCIAS

1. **ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS** An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences, Morris Tenenbaum, Harry Pollard
2. **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS** Joseph N. A. Yartey & Simone S. Ribeiro, Instituto de Matemática UFBA
3. **Differential Equations Demystified** STEVEN G. KRANTZ



COMPORTAMENTO ARITMÉTICO DE FUNÇÕES TRANSCENDENTES

Souza, Pedro, pedrop.santosdesouza@gmail.com¹
Lelis, Jean, jeanlelis@ufpa.br¹

¹ Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo: A pesquisa introdutória do comportamento aritmético de funções transcendentais leva ao estudo de funções inteiras, pois, funções inteiras só são algébricas se forem polinômios fazendo com que o conjunto de funções inteiras transcendentais seja um grupo relevante para o estudo de funções transcendentais no geral. A priori foram definidos e estudados resultados, conceitos e definições preliminares como as definições de números transcendentais, números de Liouville, funções transcendentais, funções inteiras e resultados associados essenciais para o estudo dessas funções e do teorema principal do projeto. Foi estudada uma expansão polinomial para funções inteiras no intuito de extrair propriedades aritméticas convenientes para o estudo das mesmas, visando facilitar o estudo da imagem de funções inteiras transcendentais no conjunto dos números de Liouville. Depois se estudou o uso dessa expansão polinomial para uma representação adequada, associada a um conjunto numérico explícito, das funções inteiras no intuito de se calcular mais precisamente limitações inferiores e superiores para os coeficientes de tal representação polinomial. Para isso foi estudada uma fórmula de recorrência para esses coeficientes para facilitar o estudo dos mesmos. E em seguida foi estudada a demonstração do teorema principal do projeto de autoria do Prof. Dr. Jean Lelis de Aguiar, onde o mesmo utilizou tais resultados para demonstração.

Palavras-chave: Números de Liouville, Funções transcendentais.

INTRODUÇÃO

A teoria dos números transcendentais (para mais detalhes ler [3]) é uma área de estudo da matemática muito complexa e de resultados muitos difíceis de provar. Por exemplo, é muito difícil provar que um número dado não é raiz de nenhum polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes inteiros. Os números nessas condições são chamados transcendentais (como veremos a seguir), pois, “transcendem” as fatorações algébricas usuais.

Uma função *inteira* é uma função que é analítica em todo o plano complexo. E, também, uma função $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é algébrica, se existe $P \in \mathbb{C}[x, y]$, não nulo, tal que $P(z, f(z)) = 0$, $\forall z \in \Omega$ então f é dita algébrica em Ω , caso contrário f é chamada transcendente.

Mahler foi um dos principais estudiosos do comportamento aritmético das funções transcendentais. E seus estudos geraram o questionamento que é o principal motivador desse trabalho: Existe uma função f inteira transcendente tal que $f(L) \subseteq L$?

Maillet provou que uma função racional com coeficientes racionais interpola o conjunto L nele mesmo [2]. Marques e Moreira mostraram que se existir uma função f inteira transcendente de modo que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f(p/q)) = O(q^v)$ para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, $v > 0$ e $q > 1$ suficientemente grande, então $f(L) \subseteq L$ [4]. Silva mostrou que não existe uma função f inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f(p/q)) \leq Cq^v$ para $C > 0$ uma constante e $\forall q$ suficientemente grande e $0 < v < 1$ [5]. A dificuldade de mostrar para $v \geq 1$ na demonstração citada anteriormente é que ela resulta em $\lim_{q \rightarrow \infty} C q^{v-1} = 0$ que não é verdade para $v \geq 1$.

Um número real ξ é chamado **ultra-Liouville** se para qualquer inteiro positivo k , existe uma quantidade infinita de números racionais p/q tais que $q > 1$ e

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(q)},$$

onde $\exp^{[0]}(x) = x$ e $\exp^{[n]}(x) = \exp(\exp^{[n-1]}(x))$ é uma recorrência. Marques e Moreira mostraram que existe uma quantidade não enumerável de funções f inteiras transcendentais tais que $f(L_{ultra}) \subseteq L_{ultra}$ com L_{ultra} o conjunto de todos os números **ultra-Liouville**.

Leis provou [1] que não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$\text{den}(f(p/q)) = O(q)$$

$\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande. ficando em aberto para o caso $v > 1$. as dificuldades de provar o resultado para este caso serão discutidas mais a frente. A seguir formalizaremos algumas definições e apresentaremos alguns resultados essenciais para a prova do teorema principal.

Teoria transcendente

Euler definiu números transcendentos como números que não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes racionais, porém, não conseguiu dar nenhum exemplo desses números. Ele chamava esses números de transcendente por que, segundo ele: “esses números ‘transcendem’ as operações algébricas”. Só em 1844 Liouville apresentou os primeiros exemplos de números transcendentos, os números de **Liouville**. a seguir formalizaremos essa definição.

Definição (números transcendentos): Seja $L|K$ uma extensão de corpos. Dizemos que $\alpha \in L$ é algébrico sobre K , quando existe $P \in K[x]$, não nulo, tal que $P(\alpha) = 0$. Caso contrário, dizemos que α é transcendente sobre K .

Para encontrar números transcendentos, Liouville teve a brilhante e elegante ideia de encontrar uma propriedade satisfeita apenas pelos números *algébricos* e procurar números que não satisfizessem essa propriedade. O teorema a seguir devido a Liouville nos mostra essa propriedade.

Teorema de Liouville: seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um número algébrico de grau $n \geq 2$. Então, existe uma constante $A = A(\alpha) > 0$ tal que

$$|\alpha - p/q| > \frac{A}{q^n}$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Neste trabalho daremos ênfase a outro tipo de transcendência. Estaremos interessado na generalização do conceito de *números transcendentos* que é o conceito de *funções transcendentos* especialmente o caso das funções inteiras transcendentos.

Definição (Funções transcendentos): Dada uma função $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se existe $P \in \mathbb{C}[x, y]$, não nulo, tal que

$$P(z, f(z)) = 0, \forall z \in \Omega,$$

então f é dita algébrica em Ω caso contrário f é chamada transcendente.

O teorema a seguir nos dá uma importante caracterização de funções inteiras transcendentos e será essencial para a demonstração do teorema principal. Lembremos que uma função *inteira* é uma função que é analítica em todo o plano complexo.

Teorema: Uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio.

Como o teorema acima é uma equivalência, ele caracteriza inteiramente as funções inteiras algébricas. Daí, a relevância do estudo de funções inteiras transcendentos aumenta.

Números de Liouville

Os números de Liouville são os primeiros exemplos de números transcendentos e são muito importantes, historicamente, para o desenvolvimento da teoria transcendente. E o conjunto dos números de Liouville é essencial para o nosso estudo do comportamento aritmético de funções transcendentos, pois, aqui vamos estudar como algumas dessas funções percorrem esse conjunto. Se a definição dos mesmos.

Definição (Números de Liouville): Um número real ξ é chamado de número de Liouville se existe uma sequência infinita de racionais (irredutíveis) $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$ com $q_n > 1$ tal que

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

O conjunto dos números de Liouville é denotado por L .

O resultado a seguir nos dá uma definição equivalente a dada acima que pode ser usada quando for conveniente e é útil para mostrar que o conjunto dos números de **Liouville** tem medida nula na reta.

Teorema (Definição Equivalente): Um número real ξ de Liouville se, e somente se para todo $n > 0$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tal que

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Teorema principal

O teorema principal provado por Lelis afirma que não existe função f inteira transcendente de modo que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ $\text{den}(f(p/q)) = O(q^v)$ para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, $v = 1$ e $q > 1$ suficientemente grande. E a prova, a grosso modo, consiste em desenvolver uma representação conveniente, aritmeticamente, para funções inteira para se obter estimativas de crescimento das mesmas. Isso possibilita decidir se existem funções nas condições do teorema. No poster falaremos mais a respeito dessa demonstração (ver [1]).

Teorema principal: Não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$\text{den}(f(p/q)) = O(q)$$

$\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande.

CONCLUSÕES

Ao mostrar que não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f(p/q)) = O(q)$ $\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande, vamos na direção do problema ainda em aberto referente a existência de uma função nas mesmas condições, porém, da ordem de q^v com $v > 1$, pois para o caso $v < 1$ não existe tal função (demostrado por Silva). A dificuldade de mostrar a inexistência de tal função para o caso $v > 1$ é que a limitação inferior, estudada neste projeto, para a norma dos coeficientes c_n , no caso c_n diferente de zero, é insuficiente para garantir a convergência da série na totalidade de \mathbb{C} . Pois teríamos que calcular o mmc $(1, 2, 3, \dots, C \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^v)$, com $v > 1$ o que não é mais da forma ρ^n , para algum ρ fixo como o é para $v = 1$. É possível que, melhorando a estimativa para as normas dos coeficientes c_n , seja possível provar a inexistência de tais funções. Outra possibilidade é considerar outro conjunto $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ para mudar a Φ_S - representação, pois, para um conjunto onde $\text{den}(\alpha_n)$ cresça de forma mais lenta é possível que a estimativa de $|\alpha_n|$ seja mais conveniente.

REFERÊNCIAS

- [1] J. C. d. A. Lelis. Sobre números de liouville e funções transcendentas. 2018.
- [2] E. Maillet. Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Gauthier-Villars, 1906.
- [3] D. Marques. Teoria dos números transcendentos. SBM, 2013.
- [4] D. Marques and C. G. Moreira. On a variant of a question proposed by k. mahler concerning liouville numbers. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 91(1):29–33, 2015.
- [5] E. C. d. S. Silva. Alguns problemas de mahler sobre funções transcendentas e resultados relacionados. 2019.
- [6] J. M. Whittaker. Interpolatory function theory. Number 33. The University Press, 1935.



UM ESTUDO SOBRE FRAÇÃO: UMA ABORDAGEM SOBRE AS ANÁLISES DE ERROS.

Oliveira da Silva, Jean, silvajejan559@yahoo.com

Sideney Vidal de Santana, Francklim, francklim24@yahoo.com.br

Da Costa Trindade, Hailson, hailson.costa.trindade@gmail.com.

Resumo: O presente artigo trás resultados de uma pesquisa de campo realizada na Escola Municipal de Ensino Fundamental Maria Odete Marvão na turma do 6º ano do turno vespertino, cujo objetivo foi analisar os erros dos alunos relativo ao conteúdo de Fração que teve como instrumento de pesquisa um questionário contendo 5 (cinco) questões referente ao assunto acima citado, nesse sentido, foram analisados e utilizados como mecanismo para o ensino e aprendizagem. Outrossim, informamos, que o texto reflete as frações, alguns aporte teórico que se alicerça nos autores Nunes & Bryant (1997); Boyer (2012/1996); Oliveira (2007), com isso teve a execução de uma fase como procedimento metodológico no intuito de analisar os conhecimentos e compreensão dos educandos. De acordo com as análises foram diagnosticados alguns erros de: a interpretação na montagem do problema, o mau desenvolvimento operacional sobre as operações de multiplicação e divisão de frações. Por intermédio da pesquisa concluímos que os alunos apresentam um índice elevado de obstáculos sobre a temática citada, nesse contexto sugerimos como método metodológico o jogo “Pião de Frações” com a finalidade de auxiliar no estímulo dos alunos na aprendizagem de frações de maneira lúdica, dinamizada e significativa nas atividades em sala de aula e assim mostrando aos educadores e aos educandos que por meio do material concreto e ludicidade pode-se aprender o ensino de frações.

Palavras chave: Erro; Análise; Frações; Jogo.

INTRODUÇÃO

Este artigo teve a intenção de buscar uma análise procedente de uma pesquisa, levando em consideração as praticidades matemáticas e assim sugerindo um recurso metodológico para um ensino diferenciado com vistas a uma aprendizagem significativa, uma vez que, é comum a maiorias das pessoas já possuem um obstáculo quando se trata de qualquer assunto relacionado com a matemática, justamente por pensarem que todo conteúdo dessa disciplina é difícil.

A análise de questionamento de caráter qualitativa apresentada foi derivada utilizando recurso recolhido de informações por meio de uma atividade subjetiva, com a intenção de saber resultados de erros obtidos pelos educandos e assim analisar quais foram as objeções dos alunos sobre o assunto apresentado pelos pesquisadores. Desta maneira, expomos as leituras de cada questão, buscando relacionar com o dia a dia dos discentes. As duas primeiras foram mais simples de resolução, na intenção de posteriormente poder resolver as demais. As três últimas, era preciso um pouco mais de atenção, pois envolvia as operações de multiplicação e divisão de frações.

Após as análises recolhida na aplicação da atividade, pesquisamos técnicas de ensino para minorar as dificuldades apresentadas pelos alunos e aperfeiçoando o ensino e aprendizagem relacionando com o tema de Frações, no qual foi notável na análise de erro na pesquisa, nesse contexto, observamos que os alunos acharam difícil em resolver as três (3) últimas questões, especificamente quando envolveu as operações básicas da matemática correlacionando com as frações e que são primordiais na escola e fora dela na vida enquanto social na sociedade. Diante desse resultado, propomos métodos ou estratégias de didáticas voltadas para o ensino incentivador, derivando a perspectiva de abordar o jogo “Pião de Frações”. Sendo assim, o jogo ajuda os alunos a lidar com situações-problema dando a eles oportunidade de pensar e agir por si mesmos, e faz com que o aluno pense e racione (FONSECA et al, 2014). Diante do evidenciado, a pesquisa teve como contribuição teórica, os autores; Paraná (2008); Alves (2007); Santos (2014); Sanches & Santos (2011); Fornari & Massa (2014); Boyer (2012); Berlingoff & Gouvêa (2010); Nunes e Bryante (1997), entre outros que buscam na linguagem matemática, influenciar a construção do pensamento cognitivo para o raciocínio na resolução de problemas matemáticas tendo o elo com a realidade do aluno.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

1. UM BREVE CONTEXTO HISTÓRICO DE FRAÇÃO.

Segundo Boyer (2012), não se pode afirmar nada sobre a origem da matemática, seja aritmética, seja da geometria, afinal, seu princípio é mais antigo do que a arte de escrever. Não se podem apontar épocas e datas exatas pela falta registros das civilizações antigas. Isso não é diferente com as frações. Berlingoff & Gouvêa (2010) dizem que as frações fazem parte da matemática há 4 mil anos ou mais. Mas não é possível precisar quando elas surgiram ou quem as descobriu, novamente porque os registros são poucos e talvez as primeiras ideias sobre frações nem tenham sido registradas por falta de meios para fazer isso.

A noção de número está presente desde muito cedo na história nas mais variedades de atividade. Essa noção de número só veio a ter seu êxito com o desenvolvimento da linguagem, sobre isto Boyer (2012, p. 3), afirma:

O homem difere dos outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato, no entanto palavras que exprimem ideias numéricas aparecem lentamente. Sinais para números provavelmente precederam as palavras para números, pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar número. (Boyer,2012, p. 3)

De maneira intuitiva que surgiu a noção de número natural por meio do “princípio da correspondência biunívoca”, onde o homem relacionava um determinado objeto com algo que determina sua existência. Um dos primeiros registros que temos notícia sobre frações foram encontradas em pesquisas arqueológicas que comprovam sua existência há milhares de anos, no antigo Egito, quando esta civilização teve a necessidade de contar e medir terras, colheitas, líquidos, tecidos e tudo isso, motivando a um mecanismo numérico que pudesse realizar tal contagem e medida com rapidez e eficiência, que culminou para o estudo e desenvolvimento daquilo que compreendemos hoje como frações.

2. O ENSINO DE FRAÇÕES

O ensino de frações deve ser iniciado nas escolas brasileiras, segundo Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a partir do segundo ciclo do ensino fundamental (4º e 5º anos). O ensino de frações é um processo complicado e este é agravado quando os educandos transferem as propriedades dos números naturais para as frações. Segundo Nunes e Bryant (1997), “os alunos parecem ter uma compreensão completa das frações, utilizam de termos corretos, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes fogem”.

É notório que os alunos não socializam com frações fora da sala de aula em relação com os números naturais. Sendo assim esquecida no dia a dia levando ao esquecimento. Diante disso, é perceptível que o ensino e aprendizagem de frações é vista como um paradigma presente para professores e alunos no Brasil.

As frações é o passaporte dos alunos do ensino fundamental com os números racionais, visto que resolver questões de frações o aluno cria generalizações do qual passa por outros conhecimentos como: sistema de

numeração, conjunto de números naturais, expressões numéricas, múltiplos e divisores de um número, noções de estatística, conjunto dos números racionais para que os mesmos lhe permitam ter a noção para interpretar representações fracionárias.

3. O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Atualmente, a Matemática é utilizada para delinear, representar, e resolver problemas nas diversificadas áreas da atividade humana, uma vez que, a transcendência da Matemática não é limitada somente a isso, mas seu ensino pode e deve ser concretizado utilizando várias características, o que integra os desafios matemáticos, suas curiosidades, sua História, dentre outros aspectos. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática (DCEs), o objetivo da aprendizagem da Matemática é assim registrado:

A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas, de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios (PARANÁ, 2008, p.45).

Nessa perspectiva, a relevância da Matemática no currículo escolar é destacada quanto ao papel que desenvolve o professor em sala de aula, que perpassa pela visão de educador, de estimulador, construindo as condições ideais aos seus propósitos e ao planejamento pedagógico, mediante diretrizes que ampliem os conhecimentos de mundo, em associação com os conteúdos escolares, “vendo o sujeito histórico, inserido no mundo, visando sempre ao seu crescimento” (ALVES, 2007, p.22).

Assim, Santos (2014), afirma que a função do professor é ser mediador entre o conhecimento e o aluno. Nesse ponto de vista, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, evidencia a função do professor por meio do ensino da matemática e a vida do aluno diante alcançar conceitos matemáticos.

4. A ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO E APRENDIZAGEM.

É perceptível que o erro é visto pela maioria das pessoas como algo ruim, fraco, inferior, etc... e usado como um indicador de baixo rendimento/aproveitamento de conhecimento de determinado contexto. Os resultados são cobrados na escola, na família, nos grupos e na sociedade em geral. Na escola é preciso corrigir os erros de forma dinamizada provocando a multiplicidade de diálogos entre o professor com o aluno, o professor com a matemática, do aluno com a matemática e do aluno com aluno, com o propósito de interagir com o erro na eficácia do acerto das questões proposta. Os erros não são simplesmente ausência de conhecimentos: eles expressam conhecimentos malformados que, depois, se tornam resistentes (cf. Brousseau, apud Centeno 1988, p. 115). É observável que o erro é importante para verificar ou diagnosticar o nível de desenvolvimento de aprendizagem significativa e a partir disso, o professor buscar técnicas didáticas para auxiliar no ensino e aprendizagem minorando as dificuldades dos erros.

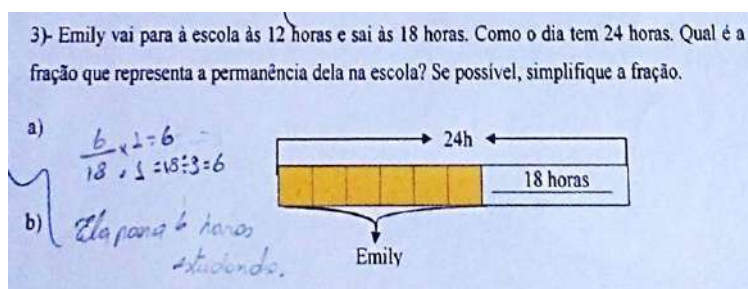
METODOLOGIA

A atividade desenvolvida com alunos do 6º ano do ensino fundamental, na Escola Municipal de Ensino Fundamental Prof.^a Maria Odete Marvão, na cidade de Igarapé Açu – PA, no qual utilizamos questionário com 5 (questões) de Fração (Apêndice1), na perspectiva de analisar o quanto a temática acima supracitada é vista complexa e dificultosa no ensino em sala de aula. As etapas ocorridas foram: Na 1ª Etapa - Chegando ao local ao encontro da professora chefe de sala, no qual a mesma por acaso estava ministrando o conteúdo fração e após foi aplicado o questionário escrito aos alunos referente ao tema fração. Muitos alunos chamavam-nos para tirar dúvidas a respeito das questões no sentido de compreensão e interpretação dos problemas elaborados no questionário. Aqueles que iam terminando entregavam para a professora de chefe de sala e por fim, após todos entregarem o questionário para a professora e a mesma entregou-nos os testes e deu por encerrado a aplicação das questões. Entretanto, na 2ª Etapa – Foi feito as correções e análises dos questionários.

DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DA PESQUISA DE CAMPO

A partir das pesquisas bibliográfica e das análises (campo) das provas aplicadas com 5 (cinco) questões de caráter subjetiva, com 23 (vinte e três) alunos e assim podemos verificar os seguintes resultados. As questões aplicadas de fração, terceira, quarta e a quinta, foram as que tiveram os maiores números de erros, as quais foram aplicadas os questionários. Os obstáculos se referem basicamente a interpretação e, por conseguinte na montagem do problema, juntando-se a isso também, o mal desempenho operacional sobre as operações de multiplicação e divisão de frações. Podemos verificar os maiores índices de erros nas questões abaixo:

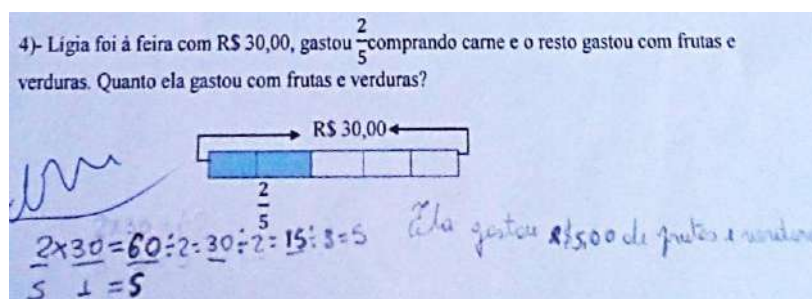
FIGURA 1: Questão 3 da atividade do aluno A.



FONTE: Autor 2019.

Na terceira questão o aluno A teria que ter conhecimentos básicos sobre o conceito de fração, redução de frações e também teria que saber uma operação básica da matemática que é a divisão e subtração, só que o aluno em questão deslizou, visto que o mesmo conferiu o número de horas que Emily ficou na escola e com esse resultado o aluno colocou como numerador e depois como denominador o número 18, assim ocasionado o erro e ao simplificar ele utilizou o número 1 e assim o mesmo chegou ao resultado de 6 horas que é o correto, mas por falta de atenção, o mesmo não percebeu que era para colocar em fração.

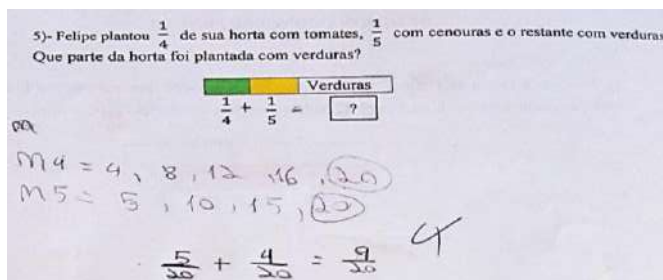
FIGURA 2: Questão 4 da atividade do aluno B.



FONTE: Autor 2019.

Na questão acima, o aluno por falta de conhecimentos básicos sobre frações, mas o aluno em questão armou a operação de multiplicação por fração corretamente, mas o aluno até o momento da multiplicação por 2/5 fez tudo correto, porém ao simplificar a fração obtida, o aluno B só simplificou o numerador deixando o denominador intacto, assim cometendo o erro.

FIGURA 3: Questão 5 da atividade do aluno C.



FONTE: Autor 2019.

Na 5ª questão, o aluno teria que usar mais o raciocínio lógico, uma interpretação de texto boa, o aluno em questão utilizou a soma de frações com denominadores diferentes exatamente como manda as normativas de soma de frações com denominadores diferentes, porém o aluno chegou ao resultado da soma de tomates e cenouras e não ao que o problema pediu que fosse o de verduras, mas ao analisarmos a questão o aluno esqueceu ou não compreendeu que tinha que colocar que somar as frações com mais uma incógnita e igualando ao todo para assim chegar ao resultado correto. A partir do encerramento da análise feita pelos testes realizados com alunos da Escola Municipal de Ensino Fundamental Prof.^a Maria Odete Marvão, diagnosticamos que a realidade da disciplina de matemática e da temática Fração é vista por alunos com uma disciplina e temática difícil de ser compreendida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na realização da pesquisa de campo, observamos por meio da aplicação do questionário, que a disciplina de matemática precisa sair do abstrato para o lúdico fazendo elo com outros campos do saber e que a formação docente precisa ser mais construtiva e pensada no aluno e no contexto em que o mesmo está inserido, buscando uma proximidade com o educando estimulando para o aperfeiçoamento do conhecimento com a matemática especificamente o conteúdo de frações. A pesquisa trouxe como resultados que os alunos não compreender totalmente os conceitos básicos de matemática, assim como as operações de multiplicação, após análise de erros das questões feitas pelos alunos, podemos dar como sugestão para a solução do problema que os professores testem os conhecimentos dos alunos por meio de testes como este realizados com os discentes e a partir do diagnóstico achar as dificuldades e barreiras para assim traçar o professor traçar estratégias para sanar esses problemas, o professor pode inserir jogos para melhorar o processo de ensino e aprendizado, mas também não deixando de apresentar os conceitos matemático como os de fração fazendo um elo entre o jogo e o conteúdo.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino de Matemática: uma prática possível**. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

ALVES, Denis Rogério Sanches; MARTENES, Adam Santos. **Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do ensino fundamental**. In: X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. Anais. Curitiba: PUC, 2011. p. 7-10.

BERLINGOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Trad. ELZA GOMIDE, ELENA CASTRO. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Trad. HELENA CASRTO. São Paulo: Blucher, 2012/1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Disponível em: Acesso em: 28. set.2019.

BRENELLI, Rosely Palermo. **O jogo como espaço para pensar: a construção de noções lógicas e aritméticas**. 8ª Edição; Papirus, 2008.

FORNARI, Elaine Lima da Silva; MASSA, Lindemberg Sousa. **O uso do tangram no ensino de frações em turmas de 6º ano.** Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor. PDE. Caderno de Artigos, 2014.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná: Matemática.** Disponível em: . Acesso em: 29.set.2019.

SANTOS, Maria José Batista de Souza. **O ensino e aprendizagem das frações utilizando materiais concretos.** 2014. 13p. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014.

FONSECA, Fernanda Souza. et al. **O ensino da matemática trabalhado através de oficinas lúdicas com atividades diferenciadas e jogos.** In: 2º Encontro Nacional PIBID Matemática. Anais. 2014



REFLEXÕES ACERCA DO USO DE MATERIAL CONCRETO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL, COM ÊNFASE EM CILINDRO E PARALELEPÍPEDO

Gomes, Clovis, clovislaerdson@gmail.com¹
Nascimento, José, zepauloperseverante@gmail.com²
Souza, Leonaldo, leonaldosouza@gmail.com³
Oliveira, Mauro, maurooliver@yahoo.com.br⁴
Chaquiam, Miguel, miguel.chaquiam@uepa.br⁵

¹Universidade Estadual do Pará

²Universidade Estadual do Pará

³Universidade Estadual do Pará

⁴Universidade Estadual do Pará

⁵Universidade Estadual do Pará

Resumo: Esta pesquisa apresenta um estudo sobre “Reflexões acerca do uso do material concreto no processo ensino e aprendizagem da geometria espacial”. Inicialmente submetemos 22 alunos, de uma instituição, a uma avaliação a fim de verificar os seus conhecimentos acerca da geometria espacial e termos dados para conclusões futuras. Para isso utilizamos o aplicativo Google Classroom e seus formulários, para elaboração de duas avaliações com o mesmo conteúdo, sendo uma diagnóstica e, no final, a avaliação somativa. As atividades são compostas de sete questões relativas às figuras geométricas, a saber, o paralelepípedo e o cilindro. Como materiais didáticos foram utilizados objetos representando às figuras mencionadas e, também para maior compreensão do assunto, a planificação dessas figuras. O desenvolvimento do trabalho foi realizado através de uma aula lúdica, cujos conceitos pertinentes ao cálculo do volume de cilindro e paralelepípedo, foram apresentados e, especialmente, ratificados com os materiais didáticos manipuláveis, disponibilizados aos alunos. Finalmente, submetemos os alunos novamente a avaliação anterior no desejo de quantificar o rendimento de nossa proposta. Dessa forma, com o resultado entre as duas avaliações, a priori e posteriores podemos afirmar a eficácia da proposta, pois foi solucionada a problemática da pesquisa, melhorando a eficácia da aprendizagem da ciência matemática, no tocante à geometria espacial, mais precisamente ao cálculo de volume de cilindro e paralelepípedo, através de materiais concretos e respectivos relacionamentos com aplicações cotidianas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Geometria espacial, Material Concreto, Paralelepípedo, Cilindro.

INTRODUÇÃO

Este projeto apresenta o cálculo de volumes de uma forma lúdica e descontraída. Para isso exploraremos apenas duas figuras geométricas: cilindro e o paralelepípedo. Conteúdo do 2º ano do ensino médio, mostrando-o como algo prático, que transcende muito além das salas de aulas e ambientes educacionais. Demonstrando sua aplicabilidade tanto para um ambiente simples, familiar, e suas diversas demandas, quanto para uma realidade complexa de empresas em seus processos industriais. Dessa forma, expor de forma límpida e pragmática a importância desse tema para estudantes de matemática, em espacial, geometria espacial.

Deste modo a pesquisa foi dividida em cinco seções. Assim, discorremos na primeira sobre a história da geometria espacial, mencionando as civilizações antigas, povos que exploraram esse tema matemático, e também alguns estudiosos que ao longo do tempo manifestaram suas descobertas sobre o assunto. Ainda no contexto histórico, mencionaremos contribuições de outros povos, acerca da geometria espacial, menos expressivos, mas que também deixaram marcas em seus tempos, assim como os nomes dos estudiosos, que com seus trabalhos levaram-nos, aos dias atuais, a outras fontes de estudos e conhecimentos da ciência matemática. Depois, discorremos sobre a história da geometria em um contexto brasileiro, dessa forma, mencionaremos os momentos significantes do ensino da matemática e em especial da geometria, relatando os acontecimentos do período monárquico, republicano e, até os dias atuais.

Na terceira seção, dentro dos procedimentos metodológicos, discorremos sobre a aula de geometria espacial, especificamente o cilindro e o paralelepípedo, em uma turma de alunos de curso profissionalizante, retratando a importância do assunto, não somente para a vida estudantil, mas principalmente na aplicação do seu dia a dia. Dessa forma induzindo-os a perceber a aplicação prática do cálculo de volume, em seus lares e processos industriais (contexto dos alunos). Na quarta e quinta seção, apresentamos a análise dos resultados da pesquisa e considerações finais, respectivamente. É importante ressaltar que o trabalho apresentado foi desenvolvido no início do período de pandemia de Sars-Cov-2 (Covid-19).

HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESPACIAL ANTIGA

A herança babilônica, egípcia e grega

A matemática em sua amplitude gera vários temas, que se desdobram em conhecimento e importância. Igualmente a geometria espacial, que embora surja despreziosamente na história, é uma derivação que traz consigo valor e perspectiva, pois teve e tem seu papel relevante para a humanidade. Na civilização Babilônica temos registros de sua aplicação como nos mostra Eves (2011, p. 61): “(...) do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e (...) do volume de um prisma reto de base trapezoidal (...) considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva (regras corretas para $\pi = 3$)” e daí, se obtinha o volume de um cilindro circular reto.

A civilização egípcia, historicamente, também deixou seus registros acerca do uso da geometria espacial. Já Possuidora de uma linguagem própria, apresentou anotações que até os dias atuais servem de fonte de informações sobre o desenvolvimento da matemática. Nesse sentido discorre Mol (2013, p. 21) que: “O papiro de conteúdo matemático mais célebre é o Papiro de Rhind, adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind em 1858 e datado de cerca de 1650 a.C. (...) é possivelmente o melhor registro da matemática egípcia.”

Figura 1: Papiro de Rhind



Em relação aos gregos, é incontestável a herança helênica para a humanidade quando falamos especificamente da ciência matemática, inúmeras são suas contribuições. Há vários nomes de destaques com trabalhos consistentes e consagrados até os dias atuais. No apogeu grego, dentre os muitos estudos e legados a seus tempos e a posteridade, alguns nomes são notórios com suas contribuições a ciência de uma forma geral, e à geometria espacial especificamente. Nesse sentido dois nomes são mencionados inicialmente com suas contribuições, a saber, Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. Conforme nos orienta Boyer (2010, p. 31): “Tales (...) e Pitágoras (...) tinham ainda mais uma vantagem: estavam em condição de viajar aos centros antigos de conhecimento e lá adquirir informações de primeira mão sobre astronomia e matemática”. Boyer (2010, p. 31) também nos diz que possivelmente aprenderam geometria; na Babilônia, com o governador Caldeu Nabucodonosor. Nesse contexto, Tales provavelmente deva ter entrado em contato com tabelas e instrumentos astronômicos.

O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

Segundo Valente (2008), os primeiros registros históricos sobre o ensino da matemática no Brasil remontam o ano de 1669, quando a Coroa Portuguesa viu a necessidade de treinar melhor seus militares e, para isto, criou a Aula de Artilharia e Fortificações. No início houve dificuldades em sua implementação, pela falta de livros adequados, e em 1710 o curso ainda não havia iniciado. Apenas em 1738, depois que o militar português José Fernandes Pinto Alpoim chegou ao Brasil, as aulas tiveram início e foram consideradas obrigatórias a todo oficial. Alpoim foi o autor dos dois primeiros livros didáticos de Matemática escritos no Brasil, que ensinavam conceitos de Geometria e Aritmética: Exame de Artilheiros (1744) e Exame de Bombeiros (1748). Com isto podemos concluir que o ensino de Matemática no Brasil iniciou-se com a necessidade de defesa da colônia por parte dos militares, incentivada pela Coroa Portuguesa.

Quase duzentos anos passaram e em 1929, Euclides Roxo lança o livro “Curso de Mathematica Elementar”, numa tentativa de unir as três grandes áreas da Matemática. Seu livro ensinava, através da geometria, conceitos de Álgebra e Aritmética, sendo adotado pelo Colégio Pedro II em 1930. Este autor propõe o uso do material concreto, pois ao ensinar o conceito de reta, por exemplo, solicitava que os alunos verificassem arames, bordas de papel, e etc. Nessa mesma época surgem ginásios e liceus públicos, e a educação, antes exclusiva da elite, passa a ter adesão da classe média. Nos anos 60, surge o movimento da Matemática Moderna, onde ela é ensinada com rigor e formalidade. Segundo Pavanello (1993), a partir desse movimento a geometria assume posição secundária no ensino, pois perde seu caráter intuitivo e pauta-se na demonstração e no formalismo. Assim, o ensino dos conhecimentos geométricos inicia pela intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação a linguagem da teoria dos conjuntos.

A proposta da bncc para a geometria

Concerte ao estudo específico da geometria e para que se tenha um melhor rendimento em sala de aula e uma aplicabilidade real com o cotidiano a BNCC em seu projeto para esse tema apresenta algumas das seguintes competências. BNCC (2021):

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
(...)
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
(...)
- 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC 2021, p. 532)

PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS

Problema de pesquisa

Buscamos responder a seguinte questão com a pesquisa: “É possível melhorar a eficácia da aprendizagem da ciência matemática, no tocante à geometria espacial, mais precisamente ao cálculo de volume de cilindro e paralelepípedo, através de materiais concretos e respectivos relacionamentos com aplicações cotidianas?”

Objetivo

O presente trabalho tem o objetivo de retomar o conteúdo de geometria espacial, com foco no ensino do cálculo do volume de cilindro e paralelepípedo, com utilização de materiais concretos, visando o desenvolvimento da capacidade do aluno de resolver problemas práticos do cotidiano.

MATERIAL CONCRETO

Encontramos em Smole e Diniz (2016), que “dentre as formas mais comuns de representação de ideias e conceitos em matemática estão os materiais conhecidos como manipulativos ou concretos.” e ainda que: Desde sua origem, os materiais são pensados e construídos para realizar com o objeto aquilo que deve corresponder a ideias ou propriedades que se deseja ensinar aos alunos.”

Nas Fotos 1 e 2 tem-se os materiais concretos: paralelepípedos e cilindros em plástico, o processo de construção das respectivas planificações em cartolina, e a jarra graduada (Foto 3), respectivamente.

Foto 1: Materiais concretos - paralelepípedo e cilindro



Foto 2: Confeção das planificações



Foto 3: Jarra graduada de 500 ml

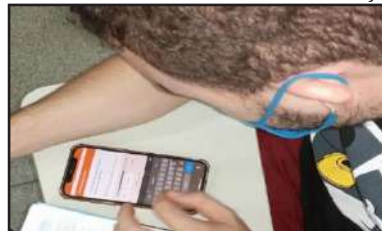


Aplicação da avaliação diagnóstica

Foto 3: Alunos realizando avaliação diagnóstica



Foto 4: Aluno realizando avaliação diagnóstica



Uso do material concreto pelos alunos

Foto 5: Alunos manipulando sólidos e planificações



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordar esta reflexão de forma singela de um tema tão plural nos dá certeza de que o assunto não se esgota com esse trabalho. A abordagem da geometria espacial em sala de aula necessita de uma roupagem nova, com o reforço do conteúdo teórico com o lúdico, se valendo de jogos, materiais concretos e, extrapolando o ambiente escolar, correlacionando com aplicações do cotidiano.

A temática surgiu a partir da vivência dos autores na área de manutenção mecânica, docência técnica e como aluno do curso de matemática. Como docentes e alunos de matemática sabemos das dificuldades de entendimento, manuseio e relacionamento com o dia a dia, sobre cálculo de volume de sólidos cúbicos, cilíndricos, entre outras. Diante disso, utilizamos materiais concretos, que foram utilizados durante a aula com os alunos de um curso profissionalizante. A utilização do lúdico se revelou interessante, podemos presenciar o maior envolvimento dos alunos, ante a aula tradicional, com uso de formulários para calcular volumes. Estes manusearam os cubos e cilindros, preenchendo com água, com a utilização de uma jarra graduada em mililitros, anotando os valores. Desse modo puderam experimentar de forma prática os conceitos de volume e comparar com o conteúdo discutido em sala de aula. Assim, conseguem reter o conhecimento sobre cálculo de volume, e correlacionar com maior facilidade com o seu cotidiano.

Os resultados tabulados demonstram os ganhos de aprendizados obtidos, porém mostra a necessidade de melhorar a prática de ensino, buscando outras estratégias pedagógicas, que despertem o interesse de diversos perfis de alunos. Sendo assim, ressaltamos que as dificuldades no processo ensino e aprendizagem devem ser fonte de estímulo para o profissional da educação, de tal modo que deve ser incansável no seu aperfeiçoamento, busca e aplicação de metodologias ativas criativas e inovadoras, visando a qualidade do ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. História da matemática. 3 edição. Editora: Edgard BlucherLtda 2010.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricula (BNCC). Brasília: Fundação Carlos Alberto Vanzolini, 2018. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/viewer.html?pdfurl=http%3A%2F%2Fbasenacionalcomum.mec.gov.br%2Fimages%2FBNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf&cflen=3058884&chunk=tr. Acesso: 30 Jan. de 2022.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

MOL, R. S. Introdução a História da Matemática. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

PAVANELO, R. M. O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e consequências. São Paulo: Unicamp, 1993.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números. Porto Alegre: Penso, 2016.

VALENTE, W.R. Quem somos nós, professores de matemática? Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 11-23, jan./abr. 2008. Disponível em: [http://www. https://www.cedes.unicamp.br/](http://www.https://www.cedes.unicamp.br/). Acesso em 01 Dez. 2021



CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES ALGÉBRICAS EM TEMPOS DE ENSINO REMOTO

Silva, Bárbara, barbigaia@hotmail.com¹
Lima, Reinaldo, reinaldo.lima@unifesspa.edu.br²
Gomes, Silvana, silvanagomes@ufpa.br³
Arruda, Suellen, scqarruda@ufpa.br⁴

¹ discente FACET/CUBT/UFPA
² Doutor FACET/CUBT/ UFPA
³ Mestra FACET/CUBT/ UFPA
⁴ Doutora FACET/CUBT/UFPA

Resumo: Em março de 2020, escolas e universidades brasileiras suspenderam as aulas presenciais devido a pandemia da COVID-19, obrigando estudantes e professores à uma mudança abrupta no processo de ensino e aprendizagem em meio a necessidade do isolamento social. Com a autorização do Ensino Remoto Emergencial (ERE) houve a necessidade de incluir as tecnologias digitais na educação. O presente trabalho visa discutir sobre as contribuições do GeoGebra no ensino de funções algébricas por meio de oficinas virtuais, a partir da análise de questionários aplicados aos discentes do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará. O método de estudo utilizado foi a pesquisa-ação com o desenvolvimento de duas oficinas pedagógicas via *Google Meet* em que foi apresentado uma aula/revisão dos conteúdos de funções e aplicação de atividades de visualizações de gráficos construídos por meio das ferramentas do software Geogebra. Os resultados apresentam a motivação da utilização das tecnologias no ensino de conteúdos matemáticos propostos.

Palavras-chave: *Tecnologias Digitais; GeoGebra; Matemática; Funções Algébricas; Ensino Remoto Emergencial.*

1. INTRODUÇÃO

Em março de 2020 para evitar a proliferação do novo coronavírus, cientificamente identificado como SARS-COV-2, o causador da doença COVID-19, instituições de ensino do mundo todo foram obrigadas a fechar as portas como medida preventiva de combate à propagação do Novo coronavírus (Sars-CoV-2). Neste contexto, o ensino remoto emergencial se tornou uma realidade para muitas escolas a fim de minimizar os impactos da falta das aulas presenciais.

O processo de ensino e aprendizagem teve que ser redirecionado com a realização de aulas remotas, os educadores tiveram que buscar exploração de recursos tecnológicos como o principal auxílio na nova prática docente. Este cenário reforça a importância do docente em saber utilizar as tecnologias na educação remota como forma de potencializar o aprendizado do aluno, entretanto, se torna um desafio para alguns educadores, pois muitos não possuem domínio das ferramentas tecnológicas.

Em particular, quando se trata do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, historicamente considerada uma das disciplinas de mais difícil assimilação, vale saber se o ensino remoto compromete a interação do professor e aluno, dificultando assim ainda mais o aprendizado discente.

Diante disso, como forma de investigar as possíveis contribuições das tecnologias digitais no ensino remoto, o presente artigo tem como objetivo a utilização do GeoGebra no ensino de funções algébricas por meio de oficinas virtuais transmitidas pelo Google Meet. O software GeoGebra é um programa gratuito composto por ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica e tem a competência de trabalhar todas as áreas da matemática, realizando cálculos simples até os mais complexos e disponibilizando as duas formas de representação de um objeto, sendo elas, geométrica e algébrica.

Neste processo de ensino remoto com a aprendizagem matemática, buscamos avaliar que o ensino e aprendizagem podem ser mais significativos com a utilização das tecnologias digitais. Para analisar os resultados obtidos nas intervenções, aplicou-se questionários qualitativos aos participantes visando captar informações sobre o conhecimento dos alunos de softwares disponíveis e se o entendimento do conteúdo trabalhado foi de mais fácil compreensão.

1.1. Educação a distância versus ensino remoto emergencial

A concepção de Educação a Distância (EAD) é bastante ampla. De acordo com o Decreto nº 9.057, de 25 de maio de 2017, que a regulamenta o artigo 80 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), considera-se EAD a modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorra com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com pessoal qualificado, com políticas de acesso, com acompanhamento e avaliação compatíveis, entre outros, e desenvolva atividades educativas por estudantes e profissionais da educação que estejam em lugares e tempos diversos.

Com a regulamentação da EAD pelo Ministério da Educação (MEC), o ensino a distância se tornou bastante oportuno e atrativo, sendo uma alternativa ao ensino presencial, por possibilitar um modelo educacional flexível.

O Ensino Remoto Emergencial (ERE) surge em março de 2020, em um momento de crise sanitária e humanitária ocasionada pela pandemia do novo coronavírus. Para evitar a suspensão total das atividades escolares, o MEC regulamentou o ERE através da Portaria nº 343, de 17 de março de 2020, onde resolve

Art. 1º Autorizar, em caráter excepcional, a substituição das disciplinas presenciais, em andamento, por aulas que utilizem meios e tecnologias de informação e comunicação, nos limites estabelecidos pela legislação em vigor, por instituição de educação superior integrante do sistema federal de ensino, de que trata o art. 2º do Decreto nº 9.235, de 15 de dezembro de 2017.

A partir da autorização do ERE, as instituições de ensino começaram às pressas a reformular o seu planejamento pedagógico, buscando estratégias, em caráter de urgência, para viabilizar, dentro de suas possibilidades, a manutenção das atividades de ensino à comunidade acadêmica. Diante disso, é importante saber diferenciar cada um dos modelos educacionais.

1.2. O uso das tecnologias digitais de acordo com a BNCC no ensino da matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância da utilização das tecnologias digitais e ressalta algumas habilidades que devem ser desenvolvidas para que a aprendizagem ocorra dentro de um contexto significativo, sendo então, imprescindível a busca do conhecimento necessário para a inclusão a utilização das TICs por parte da escola e dos professores na educação para que os saberes sejam assimilados de forma sintetizados e a aprendizagem ocorra de forma mais dinâmica.

De acordo com Richit et al (2012, p. 91), no contexto educacional uma das grandes buscas dos docentes em relação aos alunos é a aprendizagem. Sendo assim, podemos afirmar que os professores estão cada vez mais preocupados em adotar recursos metodológicos diversificados em suas aulas, para que o aluno tenha alternativas de ensino e se sinta motivado a aprender, tornando a aprendizagem discente mais significativa.

A inclusão de recursos tecnológicos na educação se torna cada vez mais necessário, o uso de tecnologias digitais¹, mas especificamente a utilização de softwares educacionais, vem se estabelecendo como uma estratégia pedagógica para amenizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos, possibilitando a compreensão e visualização dos

¹ DE LIMA, V. S. et al. Capacitação docente e discente para o uso das tecnologias digitais e ambientes virtuais: uma análise da real necessidade em tempos de pandemia. **Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.**, p. 12, 2020.

conceitos matemáticos à medida que os conteúdos se tornam mais interessantes e dinâmico ao serem abordados em um contexto digital.

Diante da importância de um software como ferramenta facilitadora para a aprendizagem da Matemática, Estevam et al (2018, p. 345) evidencia que o “GeoGebra é um dos softwares mais estudados e utilizados no ensino de Matemática atualmente”. Graças à possibilidade de manipulação, ele oferece dinamicidade ao ensino, por meio da interação do usuário com o programa. Ao manipulá-lo, é possível observar e relacionar variações geométricas e algébricas, que seriam inviáveis utilizando apenas lápis, papel e ferramentas de desenho.

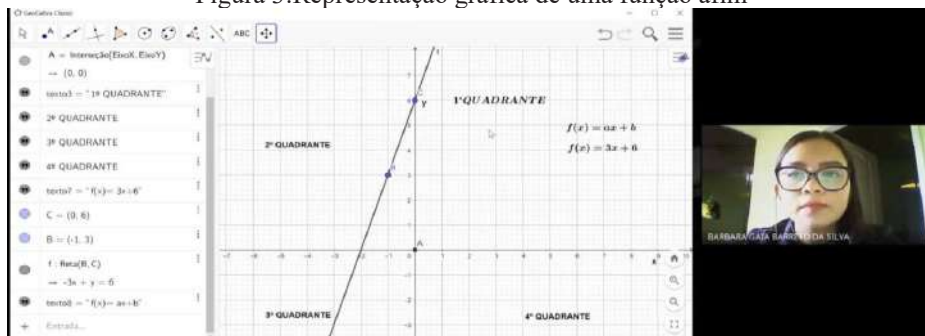
1.3. Elaboração e execução das oficinas virtuais

Ao atuar como monitora na disciplina Conjuntos e Funções durante o período de Ensino Remoto Emergencial da UFPA. Foram realizadas duas oficinas via plataforma Google Meet, com ampla divulgação nas redes sociais do Campus de Abaetetuba e nos grupos de WhatsApp dos alunos do curso. Em cada oficina, o primeiro momento foi destinado para abordar a importância do uso das tecnologias digitais no ensino da Matemática e o motivo da escolha do GeoGebra, além de mostrar o passo a passo para o download e a instalação do programa.

A primeira oficina intitulada “O uso do GeoGebra no ensino de Função Afim” foi realizada no dia 22 de dezembro de 2020 com a duração de uma hora. Após a abordagem inicial mencionada acima, o conteúdo matemático foi sendo ministrado de forma simultânea com a exploração das funcionalidades do GeoGebra. As atividades consistiam em mostrar a expressão algébrica da função afim e sua representação gráfica através de uma reta, conforme mostra a Figura 3. A partir da plotagem dos gráficos e da identificação dos coeficientes de cada exemplo proposto, foram trabalhados os conceitos de domínio, imagem, crescimento ou decrescimento e zero de uma função afim.

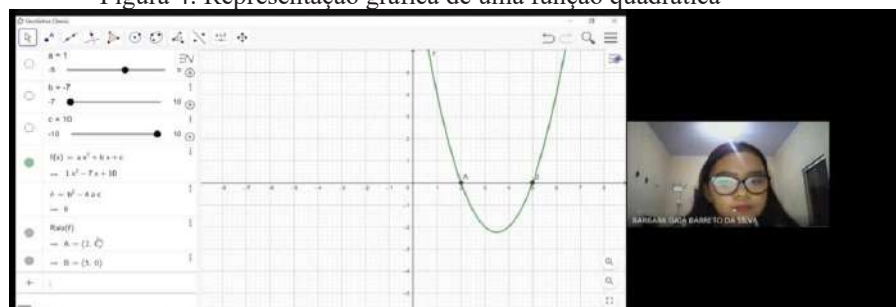
A segunda oficina com o tema “O uso do Software Geogebra no Ensino da Função Quadrática” ocorreu no dia 24 de fevereiro de 2021 e teve a duração de 1 hora e 25 minutos. De modo análogo à primeira oficina, as características de uma função quadrática foram apresentadas, explicitando sua formulação matemática e representação gráfica através de uma parábola, veja a Figura 4. Em seguida, alguns exemplos de função quadrática foram feitos no GeoGebra para que os participantes pudessem visualizar a concavidade das parábolas traçadas, as raízes e o vértice de cada função. Somente após a observação do comportamento de cada gráfico, foi trabalhado a relação com os coeficientes da expressão algébrica. Por fim, usou-se as fórmulas matemáticas conhecidas para constatar os valores encontrados no gráfico para as raízes e para o vértice da função quadrática em questão.

Figura 3: Representação gráfica de uma função afim



Fonte: Autoria própria (2020)

Figura 4: Representação gráfica de uma função quadrática



Fonte: Autoria própria (2021)

Portanto, o conteúdo foi abordado de forma detalhado e as atividades realizadas proporcionaram construir um cenário que possibilite a elaboração e construção de conceitos matemáticos levando aos educandos novos hábitos de aprendizagem, incentivando o aluno a ser protagonista da construção do seu conhecimento. Posto isso, é fato que as Tecnologias de Informação e Comunicação embora sejam um componente bem rico, ela precisa ser devidamente compreendida a como fazer uso delas com estratégias dos docentes em sua utilização no processo de ensino e aprendizagem para que façam a diferença na sala de aula.

2. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Ao final de cada oficina virtual, um questionário avaliativo com algumas perguntas foi aplicado aos participantes com o intuito de coletar informações acerca do uso das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática da execução das oficinas. Abaixo, as perguntas disponibilizadas via formulário Google:

Pergunta 1: Você já conhecia o software Geogebra ou outros programas que auxiliam no ensino-aprendizagem da Matemática?

Pergunta 2: Em uma escala de 1 a 5, como você avalia a importância da introdução de softwares/programas matemáticos como auxiliares do processo de ensino-aprendizagem da matemática?

Pergunta 3: Na sua opinião, o estudo de Função Afim/Função Quadrática com o auxílio do Geogebra facilitou a aprendizagem do conteúdo por meio do ensino remoto?

Pergunta 4: Em uma escala de 1 a 5, qual nota você atribui a didática da palestrante nesta oficina virtual?

Do universo pesquisado em cada questionário, os gráficos da Figura 5 representam respostas da Pergunta 1, onde se constata que a maioria dos participantes possuem conhecimento de algum software matemático, sendo que o GeoGebra é o mais conhecido entre eles.

Com relação a Pergunta 2, o percentual que avaliaram positivamente a introdução de softwares matemáticos como auxiliares no processo de ensino-aprendizagem da Matemática é alto, 84% dos entrevistados da Oficina 1 e 90,9% da Oficina 2 responderam que a utilização de recursos digitais na ministração de conteúdo matemático é totalmente necessária.

Figura 5: Gráficos sobre o conhecimento de software matemáticos



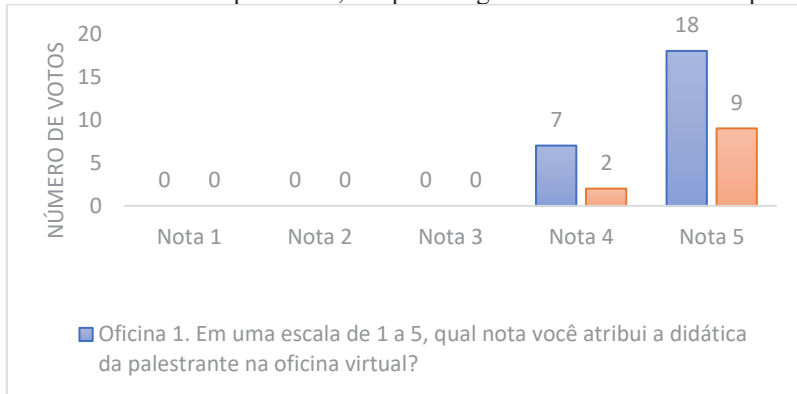
Fonte: Formulário preenchido pelos alunos do curso de Matemática (2020).

Das 36 respostas obtidas na Pergunta 3, somando os dois questionários aplicados, se observou que apenas 1 (um) participante em cada formulário informou que o uso do GeoGebra não facilitou a aprendizagem do conteúdo abordado por meio do ensino remoto. Com isso, podemos inferir que os futuros egressos do Curso de Matemática do

Campus Universitário de Abaetetuba reconhecem que o estudo de funções algébricas por meio de tecnologias digitais é um facilitador na absorção do conhecimento.

Observando os gráficos com as respostas da Pergunta 4, veja Figura 6, é possível afirmar que a didática adotada pela palestra foi muito bem avaliada, visto que 72% dos entrevistados na Oficina 1 e 82% dos entrevistados da Oficina 2 atribuíram a nota máxima

Figura 6: Gráfico sobre as questões 4, no qual é arguido sobre a didática da palestrante.



Fonte: Formulário preenchido pelos alunos do curso de Matemática (2020).

Os resultados mostraram que as oficinas virtuais tiveram grande contribuição na aprendizagem dos educandos, pois são oficinas que permitem o conhecimento do conteúdo de forma dinâmica e assim possibilitam a recriação favoráveis do ensino de funções algébricas. Nesse contexto, as oficinas virtuais realizadas pela Monitoria apresentaram-se estratégias de ensino utilizando as tecnologias digitais, tendo como objetivo que os futuros professores insiram as mesmas em sua sala de aula, tornando as suas aulas de matemática mais atuais.

3. CONCLUSÕES

Existem diversos desafios a serem enfrentados no contexto do ensino remoto, um deles é a escolha de tecnologias digitais adequadas para a promoção significativa da aprendizagem discente, uma tarefa nada fácil! Sendo assim, o uso de softwares surge como uma proposta metodológica para auxiliar no processo de construção do conhecimento, no qual possibilita a aprendizagem por meio de um processo diferenciado ao desenvolver atividades com as ferramentas do programa, tornando um momento de descobertas de maneira atrativa e criativa.

Com base nos resultados da pesquisa, presume-se que as oficinas virtuais transmitidas por videoconferência alcançaram os seus objetivos, constatando que o uso do software GeoGebra contribuiu positivamente no ensino funções algébricas, possibilitando compreender a importância da utilização de tecnologias digitais apropriadas para proporcionar um ensino remoto eficiente e de qualidade.

4. REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. **Portaria n.º 343, de 17 de março de 2020**. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus - COVID-19. Disponível em: <http://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-343-de-17-de-marco-de-2020-248564376>. Acesso em: 22 de out. 2021

BRASIL. Ministério da Educação. (2018). **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a base, Brasília, Ministério da Educação.

ESTEVAM, E. J. G. et al. Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo *software* GeoGebra. *Acta Scientiae*, v. 20, n. 3, 2018.

RICHIT, A. V. C. B. M. A.; MISKULIN, E. R. G. S. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. ISSN 2237-9657, v. 1, n. 1, p. 90–99, 2012.



UM DIAGNÓSTICO ACERCA DO OBJETO DE CONHECIMENTO PROPORÇÃO COM O USO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Delciana Góes da Silva, delciana.silva@escola.seduc.pa.gov.br

Leonardo Benedito Sarraf Caetano, leo.sarraf92@gmail.com

Acylena Coelho Costa, acylena@uepa.br

Natanael Freitas Cabral, natanael@uepa.br

Resumo: O presente artigo tem como objetivo apresentar um mapeamento de pesquisas que dedicaram-se a investigar acerca do uso de sequências didáticas no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Proporção. Mostra-se os pontos convergentes que os autores tiveram para realizar as pesquisas, pois aplicaram uma sequência didática para solucionar determinado problema, dentre tais problemas não são necessariamente todos iguais, porém pode-se observar que os resultados apontam conclusões muito semelhantes. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica que permitiu a maior compreensão sobre a sequência didática a qual favoreceu, significativamente, o ensino aprendido de Proporção conforme Lobato Júnior (2018). Porém houve outras conclusões como a de Soares (2016) que constatou que os materiais curriculares estão ligados e focados apenas no conteúdo; Batista (2018) afirma que a sequência didática melhora a linguagem e a representação das motivações referente a Proporção; enquanto Barbosa (2017) usa a sequência didática como mais um recurso para o aluno aprender o Teorema de Tales.

Palavra Chave: Razão e Proporção, Sequência didática, Engenharia didática

INTRODUÇÃO

A Proporção é um conceito importante para a matemática, pois serve como base para o ensino e aprendizagem de outras áreas, tais como: álgebra, estatística e probabilidade, geometria, grandezas e medidas, ou seja, é um conceito estruturante. O artigo faz uma análise bibliográfica de quatro trabalhos, dos quais, tem em comum o tema Proporção em que foram usadas como metodologia semelhantes, como a sequência didática e a engenharia didática. Os autores pesquisados, mostram quais os principais desafios de ensinar Proporção e fazem uso de teorias da educação matemática para fundamentar as metodologias e chegam em resultados favoráveis.

O presente trabalho tem como intenção mostrar a Proporção como conceito estruturante no ensino de matemática, para isso, destaca a construção desse conceito em todo ensino fundamental como mostra Soares (2016) e se intensifica no 7º ano conforme os trabalhos de Batista (2018), Barbosa (2018) e Lobato (2018).

A escolha do tema proporção foi pelo fato de ser um conceito fundamental, não só para o ensino de matemática, mas também em outras áreas do conhecimento como nas ciências da natureza. Importância essa que evidenciou, mais ainda, após a análise dos trabalhos aqui expostos.

Dessa forma, mostra-se metodologias e resultados de tais trabalhos e se faz comparativos, destaca-se ainda as convergências e divergências entre eles, além da importância do uso de sequência didática no ensino de matemática. A seguir expõe-se o ensino e aprendizagem de Proporção na Educação Básica com ênfase na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as concepções que subsidiaram a pesquisa. Posteriormente, é destacado como ocorreu o desenvolvimento dessa análise e finalizamos com as considerações.

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE PROPORÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O objeto matemático que está em desenvolvimento no presente artigo é a razão e a Proporção, que em um universo mais amplo, podemos denominar de Proporcionalidade. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o referido assunto aparece no tratamento de informações que é um assunto amplo e que permite abordar esse tema de modo a possibilitar aos educandos uma análise crítica de várias situações do seu dia a dia. Quando ampliamos o conceito para Proporcionalidade, verifica-se que o mesmo passa a ser abordado em outros momentos nos quais

podemos citar: grandezas e medidas, números, espaço e forma entre outros. Quando consultamos a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), O conceito de Proporcionalidade no documento da BNCC, aparece como uma ideia fundamental, pois segundo Brasil (2018), o referido tema pode ser abordado em operações com números naturais, representação fracionária, áreas funções entre outros. Verificamos também, que assim como nos PCN's, o objeto Matemático Proporcionalidade aparece na BNCC como um tema onde o aluno pode desenvolver a criticidade dentro de vários conceitos matemáticos e levá-los para o seu dia a dia, pois é um conteúdo que ajuda a reorganizar o pensamento matemático.

Os autores pesquisados nesse Artigo, utilizaram-se da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como documentos oficiais norteadores da educação brasileira, uma vez que o texto para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) só foi publicado em 2018, e as produções pesquisadas são contemporâneas ou anteriores a publicação do referido documento. Mesmo com as publicações sendo anteriores ao documento mencionado. Os pesquisadores já conseguiam perceber a importância do objeto matemático Proporcionalidade, conforme poderemos ver na análise dos resultados.

A pesquisa mostrou que para desenvolver a ideia de Proporcionalidade nos educandos, os autores pesquisados buscaram desenvolver o objeto de conhecimento supracitado através de uma sequência didática conforme poderemos verificar no procedimento metodológicos descritos no próximo tópico deste texto.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.

O artigo em questão buscou desenvolver a pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2013, p. 106)

Para que essa pesquisa fosse possível, fez-se necessário o levantamento e a análise da literatura existente acerca da temática. Os critérios de pesquisa foram previamente definidos, foi delimitado a teses e dissertações publicadas nos últimos cinco anos. Esse levantamento das produções foi realizado em bibliotecas digitais de Universidades e sites de pesquisas científica, entre os quais podemos citar: CAPES e BDTD (Biblioteca Digital de Teses e Dissertações). Nos referidos sites as palavras-chave utilizadas para realizar as buscas foram: “Razão e proporção”; “proporcionalidade”; “seqüências didáticas” e “engenharia didática”, as buscas ocorreram no mês de Abril de 2021.

Dentre as produções disponíveis nos sites supracitados, foram selecionadas três dissertações e uma tese para fazer parte do *corpus* da pesquisa, no espaço temporal de 2016 a 2018. As produções selecionadas foram às citados no quadro 1 abaixo:

QUADRO 1 - Sínteses das pesquisas escolhidas para estudo

Natureza do Trabalho	Autor(es)	Título	Ano	Instituições
Dissertação	José Maria dos Santos Lobato Júnior	O Ensino de Razão e Proporção por meio de atividades	2018	Universidade do Estado do Pará – UEPA
Dissertação	Jaqueline de Aquino Batista	O Ensino de Razão e proporção por meio de atividades	2018	Universidade do Estado do Pará – UEPA
Dissertação	Maria José Fagundes Barbosa	Uma Sequência Didática para O Teorema de Tales	2018	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Tese	Maria Arlita da Silveira Soares	Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática: Uma análise de materiais que expressam fases do Currículo da Educação Básica	2016	Universidade regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul

Fonte: Elaborado pelos autores do trabalho

Após a realização das pesquisas e delimitação dos textos científicos, conforme quadro acima, foi realizada a leitura e levantamento das informações por parte dos autores, no qual buscou-se identificar os elementos epistemológicos e

as correlações que existem dentro do objeto de conhecimento “proporcionalidade” e sequência didática como metodologia. Os resultados obtidos serão explicitados no próximo tópico.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

A escolha do objeto de pesquisa Proporcionalidade deu-se pelo fato de ser um conceito fundamental para o ensino de matemática básica, e o foco deste artigo era analisar uma temática do ensino fundamental.

Conforme mostra Soares (2016, p. 5) “a proporcionalidade é um conceito formador e unificador da matemática”. Ainda a respeito do trabalho de Soares (2016), o autor faz uma análise de materiais curriculares como livro didático e caderno do professor para identificar o tratamento dado ao conceito de proporção, sua pesquisa é feita em todo ensino fundamental, ou seja, do 1º ao 9º Ano. A questão norteadora do autor supracitado é: “de que maneira as estruturas múltiplas centrais do raciocínio proporcional e da proporcionalidade no currículo estão trabalhando para educação básica?”.

Para desenvolver a sua pesquisa Soares (2016) utiliza como metodologia o modelo de Romberg - Onuchic embasado na Teoria dos Registros e Representação Semiótica, Teoria dos Campos Conceituais e Sequência Didática (o qual é metodologia comum com os demais trabalhos pesquisados) além das Estruturas multiplicativas e os “nós” da rede elaborada por Lamon.

A conclusão de Soares (2016) é que a maioria dos materiais curriculares que trabalham com o objeto Proporção estão ligados e focados apenas no conteúdo em si, ou seja, não amplia a concepção para outros campos dentro da matemática, nem interdisciplina essa ideia. O referido autor observa ainda que a Proporcionalidade é tratada como conceito de função apenas no Ensino médio, o que é uma concepção errada, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que defende o conhecimento em forma de espiral, ou seja, sempre sendo explorado uma ideia em diversos anos da educação básica, daí a concepção de um raciocínio progressivo e regressivo. Abaixo representado, temos a idéia sintetizada do objeto de estudo matemático, também reforçado pelo referido autor.

Quadro 2: Proporcionalidade e suas relações com os campos da matemática



FONTE: Soares (2016, p. 217)

Pode-se observar que a pesquisa de Soares (2016) tem um olhar mais amplo para o ensino de Proporção, pelo fato também de ser um trabalho de tese de doutorado, porém os trabalhos de Batista (2018), Barbosa (2017) e Lobato Junior (2018) não diferem, pelo contrário, apontam resultados semelhantes, mesmo que entre eles a motivação inicial fosse provocada por problemas diferentes.

Por sua vez Batista (2018) faz sua pesquisa motivada pela preocupação em apontar caminhos mais acessíveis e significativos para o ensino de Proporção. A autora usou como metodologia, para solucionar a problemática, a teoria da engenharia didática tendo como base a sequência didática, fez também uma revisão bibliográfica e levantou os aspectos históricos referente ao tema com o objetivo de avaliar os efeitos da sequência didática para o ensino de razão e Proporção em uma escola da rede pública de ensino da cidade de Belém – Pará.

Para desenvolver a sequência didática, a referida autora realizou 200 pesquisas, das quais 100 foram realizadas com docentes e 100 foram realizadas com discentes. Com os dados foi desenvolvida a análise a priori para criação das fases da sequência didática, para a aplicação foram construídas 21 atividades, acerca do estudo de razão e proporção. Passada a fase de construção, foi feita a aplicação em alunos e logos após foi feita a análise a posteriori que equivale a quarta e última fase da sequência didática.

A pesquisadora utilizou-se da engenharia didática para o desenvolvimento de sua pesquisa, para tanto, após a análise a priori a autora passou a etapa do confronto das informações iniciais com as que foram produzidas na experimentação estatística dos resultados dos testes enquanto a fase qualitativa foi realizada por meio dos registros das atividades. Na segunda sessão, a mesma apresentou as análises prévias sobre o ensino de razão e proporção. Na terceira, a autora apresentou a concepção e a análise a priori. Na quarta sessão, foi descrita a experimentação e na quinta sessão foi realizada a análise a posteriori, validação dos dados e considerações finais.

A autora supramencionada, concluiu que a sequência didática influenciou positivamente na aprendizagem e melhorou a linguagem e a representação das motivações referente ao conteúdo de Proporção.

Ao realizar a análise na pesquisa de Barbosa (2017) cujo o título é: ‘Uma sequência didática para o Teorema de Tales’, selecionamos essa temática pois Soares (2016) defende várias formas de se ensinar Proporção, como dito antes e ilustrado no quadro 2. Diante do exposto Barbosa (2017) propõe uma sequência didática que segundo Teixeira e Passos (2013) *apud* Barbosa “é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado”. Mediante essa definição, a autora buscou desenvolver com os alunos uma sequência didática para que os mesmos tenham acesso a diferentes recursos para resolver questões sobre o Teorema de Tales, a mesma utiliza-se da Teoria das Situações Didáticas de Brosseau e a Engenharia Didática de Artigue, as quais foram aplicadas em uma turma de 30 alunos do 9º ano no município de Curiúva no estado do Paraná.

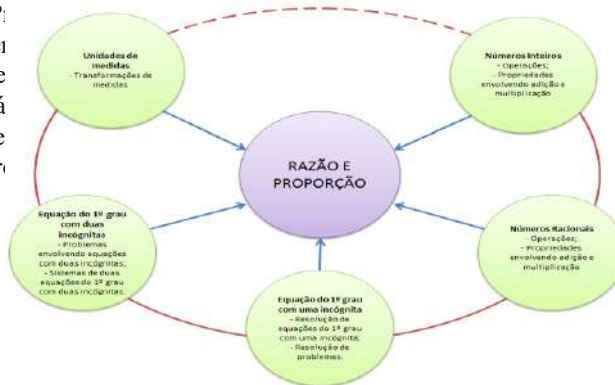
Para desenvolver a sequência didática a autora desenvolveu na sua primeira fase tarefas de 1 a 15 que abordaram conhecimentos prévios sobre reta, segmentos de reta, paralelismo, transversalidade e feixe, conceitos presentes no Teorema de Tales, que tinham por objetivo fazer uma análise prévia dos conhecimentos dos alunos, a qual foi constatado que os alunos tinham poucos conhecimentos referente a parte introdutória do objeto de conhecimento.

Com base nessas informações a autora desenvolveu as tarefas de 15 a 19, nessas tarefas foram trabalhados os conceitos de ampliação e redução de figuras já introduzindo conceitos de Razão e Proporção. O objetivo dessa tarefa é verificar a concepção dos alunos sobre o tema. Após a aplicação e suas análises foram desenvolvidas as tarefas de 20 a 28, que reforçam a ideia de Razão e Proporção através de vídeos e exercícios digitais. Nessas atividades a autora percebeu que o uso de uma estratégia diferente de ensino possibilita uma maior atenção e participação dos alunos. A terceira parte da Sequência Didática contém tarefas que têm como objetivo oportunizar aos alunos condições de reconhecer o significado de Teorema de Tales e identificar, nele, todos os conceitos previamente estudados, como por exemplo: feixe de retas paralelas e Razão e Proporção. Nesta etapa da sequência didática foram realizadas as tarefas de 29 a 38, por meio da aplicação das referidas tarefas observou-se que os alunos conseguiram compreender os conteúdos que estão inseridos no Teorema de Tales além de aplicá-lo para solucionar as atividades propostas.

Dessa forma, a autora já mencionada mostra a preocupação que os conhecimentos de proporção sejam trabalhados de forma gradativa, eis aí um ponto de convergência com os resultados de Soares (2016). Tal pesquisadora ainda considera que a sequência didática contribui para melhora da compreensão de razão e proporção e acarretou na aprendizagem do Teorema de Tales além de observar, um pouco, de dificuldades em introduzir conceitos de Proporção, no início das atividades realizadas, por falta de conhecimentos prévios, porém foram superados posteriormente ao decorrer das atividades.

Outro estudo analisado foi a dissertação de Lobato Júnior (2018) intitulada “O ensino de razão e Proporção por meio de atividades” o mesmo que Batista (2018), apesar dos títulos serem iguais o enfoque da pesquisa é diferente uma vez que questão norteadora de seu trabalho foi “Quais as contribuições que uma sequência didática, estruturada nos moldes do Ensino por Atividades, podem trazer para minimizar as dificuldades no processo de Ensino/ Aprendizagem de Razão e P

sequência didática pode trazer
O autor anteriormente me
considera o objeto matemá
aprendizagem de vários conte
Quadr



]16), uma vez que o mesmo
no processo de ensino e
o a seguir.
[ção]

Fonte: Lobato Júnior (2018, p. 115)

O referido autor usou como metodologia a sequência didática a partir de concepções da Engenharia Didática, e utilizou também dados de uma análise microgenética, a qual consiste em recortes de ambientes educacionais, na qual busca-se observar as interações verbais entre professor/aluno e aluno/aluno, e os processos de aprendizagens que estão em desenvolvimento. A pesquisa começou com uma análise prévia de 65 docentes e 65 discentes sobre o tema Razão e Proporção e os dados da pesquisa prévia serviram como base para desenvolver a metodologia supracitada, que consistiu em realizar 11 atividades, baseadas nas Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC), que foi aplicada em 25 alunos do 7º ano do ensino fundamental da cidade de Barcarena – Pará.

Para desenvolver essas atividades o pesquisador realizou 12 encontros, dos quais 2 foram para questionários de análises prévias, 9 para aplicação das sequências didáticas e 1 para avaliação das atividades propostas. Após a aplicação da sequência didática o autor Lobato Júnior (2018) realizou a análise microgenética dos dados e concluiu que a sequência didática proporciona resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos.

Portanto, observa-se que em diversos lócus, tempos, sujeitos e motivos diferentes é utilizado em certas metodologias distintas, a sequência didática interfere positivamente no ensino aprendizagem de Proporção.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo tem como objetivo apresentar um mapeamento de pesquisas que dedicaram - se a investigar acerca do uso de sequência didática no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo Proporção. A pesquisa centrou-se em trabalhos que foram publicados nos últimos 5 anos e definiu-se que os mesmos seriam a dissertações e teses.

Observa-se que a sequência didática favoreceu, significativamente, o ensino aprendido de Proporção conforme Lobato Júnior (2018). Porém houve outras conclusões como a de Soares (2016) que constatou que os materiais curriculares estão ligados e focados apenas no conteúdo; Batista (2018) afirma que a sequência didática melhora a linguagem e a representação das motivações referente a Proporção; enquanto Barbosa (2017) usa a sequência didática como mais um recurso para o aluno aprender o Teorema de Tales.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Maria José Fagundes. **Uma sequência didática para o Teorema de Tales**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Londrina, 2018.

BATISTA, Jackeline de Aquino. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade do Estado do Pará – Belém, 2018.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf acessado em: 08/03/2020

LOBATO JUNIOR, José Maria dos Santos. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade do Estado do Pará – Belém, 2018.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico**. 1 ed. São Paulo: Editora Cortez, 2013.

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática: Uma análise de materiais que expressam fase do currículo da educação básica**. Tese. (Doutorado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016.



CONTAGEM E SISTEMAS NUMÉRICOS: ENCONTROS ENTRE A MATEMÁTICA E A LINGUAGEM

Gomes Rosa de Mendonça, Raquel, quel_rosa@yahoo.com.br¹
Pitombeira Fernandes de Carvalho, João Bosco, jbpfcarvalho@gmail.com²
Nunes da Silva, Patrícia, nunes@ime.uerj.br³

¹SME Duque de Caxias e PROFMAT, UERJ

²PROFMAT, UERJ

³PROFMAT, UERJ

Resumo: Neste trabalho, destacamos um paralelo entre dois marcos históricos: as origens da escrita e do sistema numérico indo-arábico, posicional e de base dez. É possível reconhecer no registro da numeração em sânscrito o princípio de posição decimal e acompanhar o processo de representação atual surgindo da simplificação deste registro. Neste processo, testemunhamos a influência da linguagem sobre a matemática. Caminho inverso ao observado no desenvolvimento da escrita, quando registros de contagem pavimentaram e precederam seu surgimento.

Palavras-chave: sistema numérico indo-arábico, origem da escrita, sânscrito, tokens.

INTRODUÇÃO

“Algarismos árabicos”. É assim que muitas vezes nos referimos ao nosso sistema de numeração, levando à ideia equivocada de que os nossos algarismos são de origem árabe. Apesar das muitas incertezas quanto à sua origem, muitos escritores medievais e renascentistas o reconheciam como indiano. Karpinski e Smith (1911) nos esclarecem que al-Khowārazmī afirmou explicitamente na aritmética que escreveu que os números eram devidos aos hindus e que outro testemunho é o do árabe al-Bīrūnī (973-1048) que também afirma claramente que os hindus não usavam as letras do alfabeto para notação numérica como os árabes, afirmando que por essas evidências e outras, que aqui não foram mencionadas, é possível concluir que os árabes do início do século IX reconheceram totalmente a origem hindu dos novos números. Mas, será que eles surgiram essencialmente na Índia?

A história dos números indo-arábicos é um quebra-cabeça com muitas peças faltantes por conta da escassez de material confiável. A escrita na Índia, provavelmente, não foi introduzida antes do final do século IV a.E.C. fazendo com que a literatura existisse apenas na forma falada. O que se conhece, antes do século VII E.C., é através dos dois maiores épicos indianos, o *Mahābhārata* e o *Rāmāyana*, das moedas e de algumas inscrições.

Há três importantes descobertas que ajudam a entender a evolução do sistema numérico Hindu: as inscrições de Açoka, de Nana Ghat e de Nasik. Colunas de pedra construídas durante o reinado de Açoka (272 a 232 a.E.C) contêm as formas preservadas mais antigas dos atuais símbolos numéricos. Essas colunas apresentam duas formas numéricas: a *Kharoṣṭhī*, que é a forma mais primitiva representada apenas por marcas verticais, e o *Brāhmī*. Segundo Karpinski e Smith (1911), inscrições feitas em uma caverna no topo da colina Nana Ghat, datadas do segundo século a.E.C., contêm uma lista de presentes ofertados por ocasião da realização de vários *yagnas* ou sacrifícios religiosos, e os números aparecem em nada menos que em trinta lugares. A terceira descoberta relativa a registros numéricos é do primeiro ou segundo século da nossa era e foi encontrada em uma caverna na cidade de Nasik. O que podemos observar nessas inscrições é: a ausência do zero e que os múltiplos de dez, de cem, e assim

por diante, possuem símbolos próprios o que impede a característica de valor de posição e exige uma quantidade grande de símbolos que dificulta a escrita de grandes números.

O sistema numérico indiano até esse momento não possui nenhuma característica que o coloca em vantagem em relação aos demais sistemas antigos. Podemos afirmar que nesse formato não teria havido chance de ser aceito pelo Ocidente. Além da característica posicional, já utilizada em outros sistemas, os hindus precisavam acrescentar em seu sistema numérico a mais vantajosa de suas características: o zero. Neste momento em que o sistema numérico indiano incorpora o zero, vamos traçar um paralelo entre dois marcos históricos: as origens da escrita e do sistema numérico indo-arábico, posicional e de base dez. Este paralelo testemunha uma relação simbiótica entre a matemática e a linguagem escrita. Em um primeiro momento, veremos que o desenvolvimento dos registros de contagem guarda em si o embrião do desenvolvimento da escrita. Posteriormente, veremos imanente no registro da numeração em sânscrito o princípio de posição decimal.

OS TOKENS

Os *tokens*¹ começaram a aparecer no Crescente Fértil do Oriente Próximo, da Jordânia ao Irã, por volta de 8000 a.E.C. A maior necessidade da contagem coincidiu com o desenvolvimento da agricultura e a economia de redistribuição dos excedentes que dela derivou. O método de contagem através de tokens foi adotado por várias culturas distintas e, segundo Schmandt-Besserat (2001), provavelmente ajudaram os líderes a controlar os bens em espécie coletados e sua redistribuição como oferendas aos deuses, a preparação de festivais e várias necessidades da comunidade. Até 3500 a.E.C., os tokens representavam medidas de cereais, óleo e animais. Eles possuíam uma superfície lisa e foram modelados em formas geométricas simples, incluindo cones, esferas, discos, ovoides e cilindros. O que é notável sobre os “*tokens* simples” é que eles permaneceram os mesmos durante todo seu período de existência, cerca de cinco mil anos.

Na Figura 1 podemos observar *tokens* simples encontrados em Tepe Gawra, atual Iraque, ca. 4000 a.E.C. O cone, a esfera e o disco plano são três medidas de cereais. O tetraedro é uma unidade de trabalho.

Figura 1 – Tokens simples



Fonte: Mendonça (2021)

Com o surgimento das cidades, a diversidade de *tokens* aumentou significativamente, de 6 para 300 tipos, com a finalidade de controle dos bens manufaturados. Surgiram *tokens* mais complexos que além de formas geométricas também assumiam formas naturalísticas, incluindo vasos, ferramentas e animais e eram cobertos por linhas ou pontos que conferiam informações qualitativas. De acordo com Schmandt-Besserat (2014), os *tokens* não tinham o caráter abstrato da contagem, ou seja, não existia um símbolo para o 1 ou para o 2, por exemplo. Para cada tipo de insumo havia um tipo de *token* para representá-lo, ou seja, jarras de óleo só podiam ser contadas por *tokens* ovoides. Essa contagem era feita na forma de correspondência um a um: uma jarra de óleo era representada por um ovoide; duas jarras, por dois ovoides; e assim por diante. É interessante observar que o *token*, além de deter o caráter numérico, era fator de distinção da natureza do objeto a que remetia.

A Origem da Escrita











No período Neolítico (c. 10000 – 3000 a.E.C.), o homem inicia a transição de uma sociedade de caçadores para uma de agricultores. É o início da sedentarização que levou ao surgimento das sociedades urbanas. É na região da Suméria que surgem as primeiras cidades hierarquizadas mesopotâmicas. Aproximadamente em 3500 a.E.C., os sumérios, cuja origem ainda é desconhecida, já haviam formado mais de uma dezena de cidades, como Ur, Uruk, Nipur, Eridu e Lagash. Também foram responsáveis pela origem da escrita cuneiforme.

Os *tokens* eram guardados em invólucros de argila que funcionaram como um dos primeiros dispositivos administrativos, que serviram como meio de monitorar e controlar o fluxo de materiais, várias mercadorias, e trabalho. Para poder saber o conteúdo desses invólucros sem destruí-lo passaram a marcar em sua superfície a forma

¹ *Tokens* são símbolos tangíveis de outros objetos.

e a quantidade de *tokens* que haviam sido colocados no seu interior. Aos poucos, essas impressões foram transferidas para tabletes de argila tornando os invólucros desnecessários. Essas marcas eram os primeiros sinais de escrita, uma escrita pictográfica. Essas marcações na argila se tornaram um sistema próprio que se desenvolveu para incluir não apenas marcas impressas, mas sinais mais legíveis traçados com uma caneta pontiaguda. Os sinais não copiavam ou refletiam a forma dos itens que representavam, mas sim eram cópias dos *tokens* usados como contadores no sistema contábil anterior (SCHMANDT-BESSERAT, 2006).

Quadro 1 – *Tokens* e pictogramas

<i>Tokens</i>	Escrita pictográfica	Significado
		Carneiro
		Ovelha
		Pão
		Óleo
		Metal

Fonte: Mendonça (2021)

Schmandt-Besserat (2006) afirma que a invenção da escrita, primeira tecnologia a garantir um registro permanente do discurso oral, revolucionou a condição humana. Ela afirma também que a escrita Mesopotâmica se originou de um dispositivo arcaico de contagem e suporta sua posição através da apresentação de evidências arqueológicas. Para ela, a escrita surgiu da contagem a partir do desenvolvimento de *tokens* para *script*. Sendo usada exclusivamente para a contabilidade até o terceiro milênio a.E.C., quando a preocupação suméria com a vida após a morte abriu o caminho para a literatura usando a escrita para inscrições funerárias. Esta perspectiva subverte o entendimento de que a contagem era subserviente à escrita; pelo contrário, neste encontro da matemática com a linguagem, vemos que a escrita surgiu da contagem! A escrita resultou não apenas de novas demandas burocráticas, mas da invenção da contagem abstrata.

O SÂNSCRITO

O mais antigo testemunho da civilização do Vale do rio Indo é o sítio arqueológico Mohenjo Daro, descoberto em 1922. Ele revelou evidências de uma cidade construída principalmente com tijolos assados, bem planejada, com banhos públicos e sistemas de saneamento e drenagem. Essa civilização floresceu entre 2500 e 1500 a.E.C., mas não se sabe qual foi o fim desse povo. Após este período, de acordo com Thapar (apud LEITE, p. 142) “O que existe do ponto de vista documental é uma longa coexistência entre horizontes cerâmicos da pré-existente cultura Harappa e Védicos, isto é, dos autodenominados aryas”. Após se estabelecerem de forma consistente, os arianos desenvolveram o hinduísmo que instituiu o sistema de castas e aprimoraram a língua falada e escrita que se tornou o sânscrito clássico.

O período de 240 a 535 E.C., período imperial dos Gupta, é conhecido como Idade de Ouro da Índia. Esse período foi palco da mais alta expressão da arte indiana e o sânscrito foi adotado pelos Jaina² e pelos budistas, o que veio a favorecer seu desenvolvimento e seu enriquecimento em relação aos tempos védicos. Foi quando surgiram as primeiras redações de uma das maiores epopeias sânscritas indiana, o *Mahābhārata*. A escrita Gupta faz a transição entre o *brāhmī* e a escrita *nāgarī*, que surgiu no século VII E.C., tornando-se a escrita principal do sânscrito e,

² De acordo com Ifrah (1997), Jaina é uma seita religiosa indiana, fundada por volta do século VI a.C., que acredita que o universo é indestrutível por ser infinito tanto no tempo como no espaço, fazendo com que recorressem a números gigantescos e, por fim, o universo dos números infinitos.

posteriormente, da língua hindi. É desse período também a redação definitiva do *Lalitavistara Sūtra*³ que além de contar a vida de Buda, faz menção a números gigantescos, como por exemplo *dhvajāgranishāmani*, que significa 10^{145} , e também o início do desenvolvimento da astronomia trigonométrica.

A Origem do Sistema Indo-arábico

Sabe-se que o sistema de notação com símbolos sânscritos, que utilizavam uma base decimal, o princípio da posição e o uso do zero, era empregado por todos os astrônomos indianos. Sendo assim, os árabes entraram em contato não só com a astronomia indiana, mas também conheceram seus símbolos numéricos, algarismos e procedimentos de cálculo. Karpinski (1911) afirma que o trabalho de autoridades da antiga epigrafia indiana (Bühler, Kielhorn, V. A. Smith, Bhandarkar e Thibaut) é aceito por estudiosos do mundo inteiro e segundo os quais o surgimento do sistema com valor posicional ocorreu na Índia, no início do século VI E.C.

O sânscrito é comparado ao grego e ao latim pelo papel que desempenhou na Índia e no sudeste asiático. É uma língua extremamente elaborada e seu vocabulário é extremamente rico e diversificado, levando a ser considerada como a “língua dos deuses”. Não diferente é a numeração sânscrita que possui uma qualidade conceitual ímpar. Cada uma das nove unidades simples recebia um nome particular, assim como cada uma das potências de base dez. Para expressar um número, bastava enunciar a unidade e a potência de dez relativa à ordem a que pertencia no sentido das potências crescentes de dez, ou seja, das menores unidades às maiores⁴. Com o passar do tempo, fez-se o uso de uma escrita mais concisa em que foram suprimidas as expressões numéricas relativas às potências de base dez. O Quadro 2 ilustra o uso dos nomes das potências de dez.

Quadro 2 – Exemplo numérico com os nomes das potências de dez

Notação atual	523 622 198 443 682 439
Forma sânscrita completa	Nove e três daśha e quatro śhata e dois sahasra e oito ayuta e seis laksha e três prayuta e quatro koti e quatro vyarbuda e oito padma e nove kharva e um nikharva e dois mahāpadma e dois śhankha e seis samudra e três madhya e dois antya e cinco parārdha
Decomposição aritmética	$9 + 3 \times 10 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 6 \times 10^5 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^7 + 4 \times 10^8 + 8 \times 10^9 + 9 \times 10^{10} + 1 \times 10^{11} + 2 \times 10^{12} + 2 \times 10^{13} + 6 \times 10^{14} + 3 \times 10^{15} + 2 \times 10^{16} + 5 \times 10^{17}$
Forma abreviada	nove.três.quatro.dois.oito.seis.três.quatro.quatro.oito.nove.um

Fonte: Mendonça (2021).

Essa escrita simplificada produzia expressões que não soavam bem. Por exemplo, o número 333 333 333 em sânscrito fica tri.tri.tri.tri.tri.tri.tri.tri.tri. Para evitar essa repetição de palavras, os astrônomos indianos empregavam diversos sinônimos de seus nomes representados pelos nomes de certos objetos ou ideias próprias da cultura indiana. Outro problema que surge com essa numeração simplificada é exprimir a falta de uma ordem decimal, o que exigiu um progresso fundamental: o uso de um vocábulo para exprimir essa ausência. Para isso, os astrônomos indianos usaram a palavra *śūnyabindu*, geralmente abreviado para *śūnya* que significa vazio, excluindo qualquer equívoco na expressão dos números.

Nenhuma outra língua além do sânscrito fez uma aplicação consistente, em numeração, do sistema decimal de números. Podemos concluir, como disse Ifrah (1997), que “a numeração sânscrita levava em si o próprio germe da descoberta do princípio de posição decimal”.

CONCLUSÕES

O papel da História da Matemática como um recurso pedagógico vai além do seu papel tradicional de motivar os alunos, e proporcionar-lhes fatos históricos que elucidem o caráter cultural da Matemática. Pois a história da

³ Esse texto é uma compilação tardia de histórias e lendas antigas. Antes de serem transcritos numa data muito posterior, essas histórias eram passadas oralmente. Então, o que se sabe, segundo Ifrah (1997), é que a especulação numérica contida na lenda do Buda pode ser situada por volta do século III da nossa era.

⁴ Esse sentido de escrita se deu a partir do século II a.E.C.

Matemática pode ser utilizada como um agente da formação cultural geral da sociedade, revelando-se um produto cultural dentro do contexto de uma cultura geral. A familiaridade que temos com o sistema numérico indo-arábico dificulta identificarmos todos seus aspectos e nuances. Sua simplicidade e eficiência foram frutos de um longo processo histórico e guardam importantes influências culturais.

Na unidade temática Números, de acordo com a BNCC, o aluno deve adquirir a seguinte habilidade:

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. (BRASIL, 2017, p.301)

Para profunda compreensão de nosso sistema numérico, é fundamental reconhecer que ele resulta de um processo de construção ao longo de milênios e que está intimamente ligado à necessidade dos homens em um determinado momento da história e à pluralidade de concepções sobre um mesmo ente matemático: o número. Estreitar a relação entre a matemática e diferentes formas de linguagem abre espaço para tratamentos transdisciplinares e favorece a sistematização de conceitos matemáticos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da UERJ e da FAPERJ, processos E26/010.101140/2018 e E26/010.001143/2019.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>>. Acesso em: 25 fev. 2022.

IFRAH, G. História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tomos 1 e 2. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KARPINSKI, L. C.; SMITH, D. E. The Hindu-Arabic Numerals. Boston: The Athenæum Press, 1911.

LEITE, C. G. A Construção Histórica dos Sistemas de Numeração como recurso didático para o Ensino Fundamental I. 52 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

MATTESSICH, R. Archaeology of accounting and Schmandt-Besserat's contribution. In: Accounting, Business & Financial History, v. 4, ed. 1, 1994. p. 5-28. DOI: 10.1080/09585209400000033.

MENDONÇA, Raquel Gomes Rosa de. Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do Liber abaci. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática em rede nacional) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

SCHMANDT-BESSERAT, D. The Evolution of Writing In: SMELSER, N. J.; BALTES, P. B. (Ed.). International Encyclopedia of Social & Behavioral Sciences. [S.l.]: Pergamon, 2001. p. 16619-16625.

_____. How writing came about. Austin: University of Texas, 2006.



A MATEMÁTICA POR TRÁS DA PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA

Arias, A., alissonarias.aaa@gmail.com¹
Da Silva, A., adamsilva@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará

Resumo: *O respectivo pôster tem como intuito apresentar para os discentes dos anos iniciais da graduação e do final do ensino médio um dos teoremas fundamentais da teoria de Geometria Diferencial, o Teorema Egregium de Gauss, utilizando para isto, ferramentas algébricas e alguns resultados que serão tomados como verdade. Além disso, apresentamos uma aplicação que consiste na impossibilidade que há em retratar, fielmente, um mapa mundi em uma folha de papel, visando facilitar o entendimento do teorema.*

Palavras-chave: *Teorema Egregium de Gauss, Geometria Diferencial, Isometria Local, Projeção Cartográfica.*

INTRODUÇÃO

A palavra Geometria é de origem grega, o “geo” se refere à terra e “metria” vem de “métron” que significa medida. O uso da Geometria teve início com o povo babilônico e seu uso na agricultura, porém foram os gregos que deram um importante passo para estabelecer o método dedutivo-formal, sendo concretizado com Euclides de Alexandria em sua obra “Os Elementos”. O desenvolvimento da Geometria proporcionou a criação de ramificações como as geometrias não euclidianas e a geometria diferencial. A geometria diferencial iniciou com o estudo de curvas e com a descoberta dos algoritmos do cálculo infinitesimal de Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727). O desenvolvimento dessa área deve-se à nomes como: Christian Huygens (1629-1695), Leonhard Euler (1707-1783), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), etc.

Baseando-se na definição de Jean Piaget, de que existem quatro fases que representam os níveis de desenvolvimento intelectual infantil, a noção geométrica está presente desde a primeira fase que é a sensorio-motor, mostrando que a noção geométrica intuitiva está presente em nosso cotidiano. Deste modo, este trabalho espera desenvolver e instigar o leitor a procurar a geometria que existe além do ensino médio. Para isto, iremos desenvolver e apresentar de forma superficial os conceitos que serão necessários para explicar a existência das projeções cartográficas.

2. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é apresentar e despertar o interesse do público para a Geometria, mais especificamente a Geometria Diferencial, além de evidenciar a importância da Matemática para assuntos cotidianos. Para isto, usaremos o Teorema Egregium para justificar o porquê de as projeções cartográficas não preservarem distâncias.

3. METODOLOGIA

O conteúdo necessário para a compreensão do problema central deste pôster será apresentado, em grande parte, de maneira intuitiva devido a sua complexidade. Primeiro, exibiremos os resultados que iremos utilizar, que são: a definição de Isometria Local e o Teorema Egregium de Gauss. Em seguida, teremos o exemplo do Plano-Esfera, que proporciona a consolidação do conteúdo apresentado associando a noções já consolidadas do cotidiano. Neste exemplo, iremos considerar a Terra como sendo uma Esfera.

4. ISOMETRIA LOCAL

Intuitivamente, uma isometria é uma aplicação bijetora e diferenciável com inversa diferenciável que preserva o produto interno, isto é, preserva a noção de métrica (distância). Formalmente temos:

Uma aplicação $F: S \rightarrow S'$ é uma isometria se F é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$, temos

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle dF_p(w_1), dF_p(w_2) \rangle_{F(p)}$$

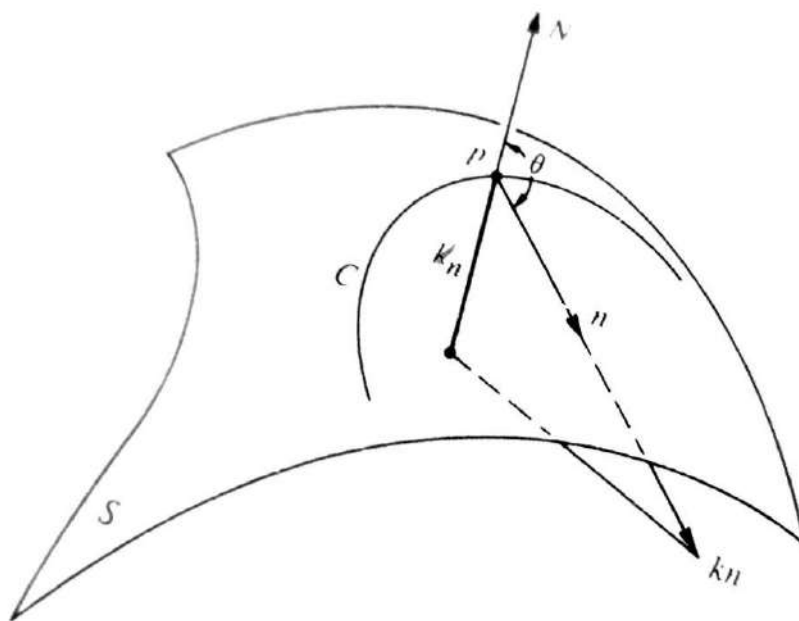
diz-se então que as superfícies S e S' são isométricas.

5. TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

Para apresentarmos este teorema é necessário introduzirmos as noções de curvatura normal, curvaturas principais e curvatura Gaussiana, porém esses conceitos serão apresentados apenas intuitivamente, sendo assim:

A curvatura normal K_n é o comprimento da projeção do vetor k_n sobre a normal à superfície em um ponto p . O máximo da curvatura normal e o mínimo da curvatura normal são chamados de curvaturas principais. A curvatura Gaussiana K é o produto das curvaturas principais.

Figura 1 - Curvatura Normal K_n



Para o caso em que estamos trabalhando, o importante é saber que a curvatura Gaussiana é constante positiva para a esfera e é nula para o plano.

Dito isso, enunciaremos o Teorema Egregium de Gauss.

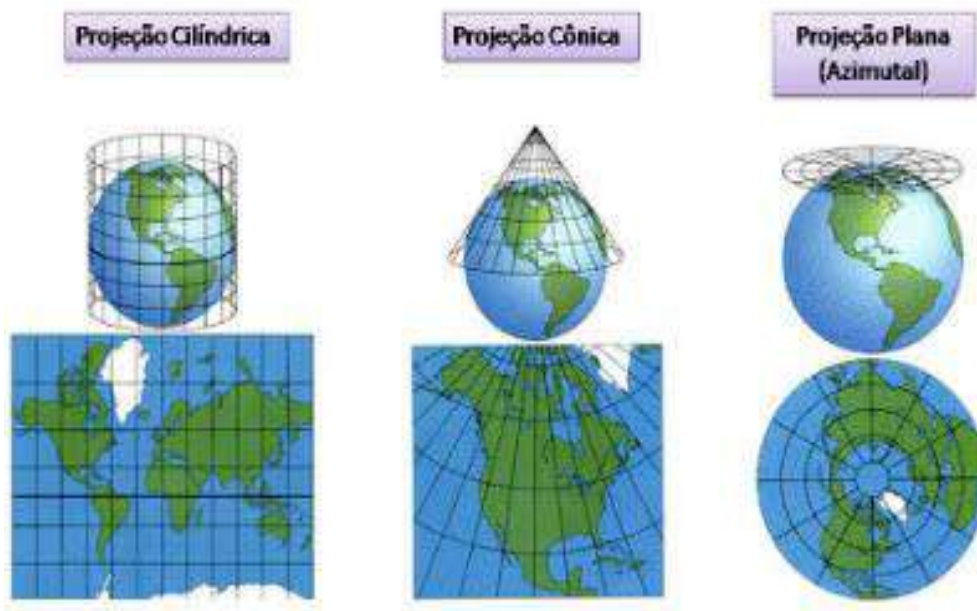
A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.

Portanto, duas superfícies que tem curvaturas Gaussianas diferentes, no caso o plano e a esfera, não são localmente isométricas.

6. PLANO – ESFERA

Todos os conceitos vistos até aqui à primeira vista parecem complexos, mas quando aplicados no nosso cotidiano tornam-se mais compreensíveis. Ao estudar projeções cartográficas aprendemos que não é possível desenhar o mapa da Terra em uma folha de papel sem sofrer distorções cartográficas. A justificativa para esta afirmação é o teorema Egregium de Gauss, pois como foi apresentado, o plano e a esfera não são localmente isométricos, isto é, não é possível preservar a noção de distância quando tentamos fazer essas projeções.

Figura 3 – Tipos de Projeções Cartográficas



Na Figura 3, temos três exemplos de projeções cartográficas. Na projeção cilíndrica a distorção aumenta conforme nos aproximamos dos polos. Na projeção cônica quanto mais próximo do vértice, maior é a distorção. Na projeção azimutal, a distorção aumenta à medida que nos afastamos do centro.

CONCLUSÕES

Sendo fruto de uma iniciação científica, este trabalho traz um exemplo de aplicação da matemática no cotidiano. Além disso, o autor espera ter despertado o interesse do público para a matemática pura, em especial para a área de geometria, principalmente dos alunos que estão nos anos iniciais da graduação. Por fim, apesar da disciplina que é base para os assuntos presente neste pôster (a Geometria Diferencial) exigir uma certa maturidade matemática, restringimos o conteúdo com o objetivo de provocar o público, dando início a compreensão de uma teoria complexa, cabendo a cada leitor buscar se aprofundar no vasto e belo conteúdo da Geometria Diferencial.

REFERÊNCIAS

DO CARMO, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 6a. Ed. **Coleção Texto Universitários**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GORODSKI, C. Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria. **Humboldtbrasil**, v. 2, n.2, p. 61-77, 2002.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança: Imitação, jogo e sonho imagem e representação**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1964.



USO DO GEOPLANO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM COM UMA TURMA DE 3ª ETAPA EM UMA ESCOLA MUNICIPAL DE PARAUPEBAS - PARÁ

Costa, Bruno, matbrunocosta@gmail.com¹
Gomes, Clovis Laerdson, clovis.gomes@semed.parauapebas.pa.gov.br²
Junior, Fábio, fabioalves.junior@hotmail.com³
Carvalho, Ricardo, Ricardo.mcarvalho@escola.seduc.pa.gov.br⁴
Chaquiam, Miguel, miguel.chaquiam@uepa.br⁵

¹Universidade Estadual do Pará

²Universidade Estadual do Pará

³Universidade Estadual do Pará

⁴Universidade Estadual do Pará

⁵Universidade Estadual do Pará

Resumo: A pesquisa, apresenta um estudo acerca da utilização do Geoplano como alternativa didático pedagógica o processo de ensino e aprendizagem de Figuras Planas. Com o objetivo de verificar a potencialidade do material manipulável no processo de ensino-aprendizagem das Figuras Planas: Quadrado, Retângulo, Paralelogramo, Trapézio, Losango, Pentágono e Hexágono. Para o desenvolvimento metodológico, foi escolhida uma turma da 3ª etapa do Centro de Ensino Personalizado de Jovens e Adultos em Parauapebas – Pará. A pesquisa se motivou pela percepção de ensinar de forma prazerosa o conteúdo de maneira mais prática e objetiva para os alunos, os quais, muitas vezes, desmotivados para ir à escola. Assim, justificamos a escolha pelo material didático Geoplano, pois, entendemos, que a ludicidade por meio do uso desta ferramenta pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, tornando o ensino mais prazeroso e dinâmico. Para tanto, utilizamos como metodologia a pesquisa-ação (CHIZZOTTI, 2001, THIOLENT, 1986, ESTEBAN, 2010) de cunho qualitativo (OLIVEIRA, 2012). Com isso, para a coleta dos dados foram utilizados teste a priori e a posteriori e um questionário final, no qual, os alunos avaliaram a nossa proposta de ensino por meio do Geoplano. Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios e serão apresentados por meio de gráficos. Portanto, o processo de ensino e aprendizagem por das Figuras Planas, por meio do uso do Geoplano, se mostrou dinâmico, motivador e facilitador para os estudantes, pois, foi possível verificar diante dos fatos apresentados que objetivos uma melhor percepção dos estudantes das figuras planas trabalhadas neste estudo.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Figuras Planas, Geoplano, Materiais Manipuláveis.

INTRODUÇÃO

O ensino da geometria, tem sido colocado em segundo plano nas escolas brasileiras, estando ausente por duas razões: a primeira, partindo de conhecimentos empíricos, está relacionada ao fato de muitos professores não detêm os conhecimentos necessários para ensinar Geometria e a segunda, refere-se a exagerada valorização que atribuímos aos livros didáticos, que muitas vezes trazem esses conteúdos, como um conjunto de fórmulas e definições segundo Lorenzato (1995).

Com isso, pretendemos apresentar o ensino de figuras planas de forma menos abstrata, fazendo com que os alunos se aproximem desses saberes, compreendendo suas ramificações e aplicações, deste modo, formulamos a seguinte questão de pesquisa: *Como a utilização do material manipulável Geoplano, pode contribuir com o processo de aprendizagem dos alunos?* Para responder tal questão, temos como objetivo geral: *Verificar a potencialidade do material manipulável Geoplano no processo de ensino e aprendizagem das Figuras Planas: Quadrado, Retângulo, Paralelogramo, Trapézio, Losango, Pentágono e Hexágono.*

No intuito de conseguir responder nossa questão de pesquisa e constatar a aplicabilidade do uso de Geoplano como alternativa metodológica, foi escolhida uma turma da 3ª etapa do Centro de Ensino Personalizado para Educação de Jovens e Adultos no município de Parauapebas – Pará, no período de outubro e novembro de 2021. A escolha desta turma foi devido a nossa pesquisa contemplar os assuntos de 6º e 7º ano na modalidade semipresencial de EaD.

Na pesquisa, utilizamos como metodologia a pesquisa-ação de cunho qualitativo, balizada nos autores Chizzotti (2001), Thiollent (1986), Esteban (2010) e Oliveira (2012). Portanto, este trabalho está dividido em seis capítulos, o qual, no primeiro objeto esta introdução, que apresenta na forma de resumo expandido a estrutura deste texto. Para o segundo capítulo, iremos apresentar o contexto histórico da Geometria, onde buscamos alguns relatos da origem da Matemática assim como, sua correlação com a Geometria, além da abordar os comportamentos antrópicos nas construções das cidades, para aquelas civilizações antigas, por meio do uso de cordas para mediar suas terras, realizar desenhos e figuras, trazendo alguma relação com a Geometria.

Já para o terceiro capítulo, trataremos “da importância dos materiais manipulativos para o ensino e aprendizagem das figuras planas”, apresentando um pouco sobre jogos matemáticos com o uso do Geoplano. No quarto capítulo, apresentaremos os procedimentos metodológicos de caráter qualitativo Oliveira (2012) e como método a pesquisa ação Chizzotti (2001), Thiollent (1986), Esteban (2010).

O quinto capítulo terá análises de resultados, o qual, os gráficos terão as nossas interpretações com base nos questionários aplicados e realização de microaulas por meio do material manipulável Geoplano. Por último, apresentaremos as considerações finais.

GEOMETRIA: UM POUCO DO SEU CONTEXTO HISTÓRICO

Segundo Farago (2003), a partir do momento em que se compreende a história dos conceitos matemáticos, estende-se o motivo pelo qual estes foram construídos, auxiliando o professor e o aluno no processo de ensino e aprendizagem. No que diz respeito a História da Matemática, Farago (2013, p. 17), ressalta: “A História da Matemática (...) permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram”.

Seguindo o pensamento de Boyer (2010, p. 23) que diz: “A sequência simples em desenhos no Egito antigo, sugerem uma espécie de teoria de grupos aplicada, bem como proposições geométricas e aritméticas.”. Devemos ter em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem.

Podemos fazer conjecturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da Matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjectura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da Matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós Boyer (2010).

Considerando então um breve relato sobre um pouco do histórico da geometria, iremos apresentar no próximo capítulo, a importância da utilização dos jogos para o ensino da geometria, em especial, as figuras planas.

DA IMPORTANCIA DOS JOGOS AO USO DO GEOPLANO

A importância da utilização dos jogos e o geoplano

Os jogos nos espaços escolares, podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, assim como, estimular o aluno a desenvolver os saberes matemáticos e suas capacidades cognitivas, tornando o ensino prazeroso. À vista disso, o ensino da Matemática no contexto atual, exige cada vez mais, uma boa metodologia, dentre os diversos recursos como os materiais manipuláveis, podem ser uma boa opção na interação de uma aula bem planejada, pois, segundo Alves (2007, p. 14), “o estudante se identifica mais, demonstra uma melhor aptidão e gosta de ser desafiado”,

portanto, ao aprender Matemática de forma lúdica, desconstruímos aquela ideia em que a Matemática seria enxergada como ‘um bicho-papão’.

Ainda segundo Alves (2007, p. 26), “o jogo tem a finalidade de desenvolver habilidades de resolução de problemas” logo, o aluno tem a oportunidade de compreender os conteúdos de Matemática aplicados e ao mesmo tempo realizar modelos necessários à ação de aprender. Nesse contexto, o Parâmetros Curriculares Nacionais – BRASIL (1998, p. 46), infere que “os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permite que este sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.”. Já para a Base Nacional Comum Curricular – BNCC BRASIL (2017), ressalva a importância em se utilizar os jogos na compreensão do ensino da Matemática para os alunos de ensino fundamental, pois:

Os recursos didáticos como malhas quadriculares, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Além de que, esses materiais precisam estar integrados a situações que levam à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2017, p.46).

Portanto, os jogos no ensino da Matemática, podem ocasionar nos alunos, uma melhor aproximação e intimidade com os números, com as figuras planas, além do mais, a proposta da BNCC deixa claro e evidente, que não podemos menosprezar as alternativas metodológicas, uma vez, que são importantes para a construção do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, as práticas pedagógicas no ensino da Matemática quando não são trabalhadas, podem tornar os conteúdos mais abstratos, não trazendo o interesse aos estudantes durante o processo de assimilação de conteúdo. Para o processo de ensino e aprendizagem, Araújo (2002) afirma:

A motivação é o móvel da ação humana, inclusive para a aprendizagem, é algo recorrente e deve sempre estar presente no ensino de forma criativa trazendo consigo desafios em nível adequado aos alunos que ao obter êxito sua autoconfiança é aumentada e “passam a mostrar comportamentos mais complexos de explorar, manipular, pesquisar, persistir, indagar e procurar novos desafios” (ARAUJO, 2002, p. 276).

O Geoplano, foi criado pelo professor Caleb Gattegno, do Instituto de Educação da Universidade de Londres em 1961. O nome Geoplano vem da junção Geo, que significa geometria superfície plana, como já mencionado em Knijnik, Basso e Klusener (2004); Meneses (2008).

Imagem 01: Geoplano utilizado em nossas atividades



Imagem 02: Oficina com o Geoplano – CEPEJA.

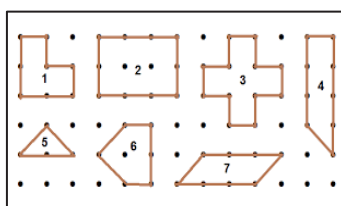


Gattegno apud Knijnik, Basso e Klüsener (1996, p. 5-6) afirma que:

Todos os Geoplanos tem indubitável atrativo estético e foram adotadas por aqueles professores que os viram ser utilizados. Podem proporcionar experiências geométricas a crianças desde cinco anos, propondo problemas de forma, dimensão, de simetria, de semelhança, de teoria dos grupos, de geometria projetiva e métrica que servem como fecundos instrumentos de trabalho, qualquer que seja o nível de ensino (GATTEGNO apud KNIJNIK, BASSO e KLÜSENER, 1996, p. 5-6).

Podemos introduzir conceitos geométricos por meio de atividades de construção de figuras planas e espaciais”. Sendo assim, é possível que diversas atividades podem ser exploradas por meio deste material concreto, em relação a construção de diversas figuras planas, como análise de suas propriedades (lados e vértices) conforme observamos na figura 1 abaixo.

Figura 1: Construção de figuras planas através do Geoplano



De acordo com Machado (2012) menciona que “O Geoplano é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes”. Costa (2011) traz,

Geoplano é um artefato que permite ao aluno descrever, reproduzir, montar, identificar, explorar e reconhecer as diferenças e semelhanças das formas planas, além de propiciar meios de ele deduzir, analisar, avaliar e propor soluções para questionamentos de cunho geométrico, algébrico, aritmético, entre outros temas matemáticos (COSTA, 2011, p.13).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A abordagem metodológica desta pesquisa enquadra-se no tipo qualitativa, pois, procuramos realizar observações das reações dos alunos, ao utilizarmos a nossa proposta didático-pedagógica por meio do Geoplano. De acordo com Oliveira (2012), ao compreender as ações empregadas, os fatos e resultados se mostram de forma mais abrangentes, pondo as ações dos sujeitos investigados em evidência.

Por essas prerrogativas, assumimos a pesquisa-ação como estratégia de pesquisa, pois, Chizzotti (2001), ressalta que, a observação do participante acontece a partir do envolvimento entre pesquisadores e pessoas que compõem as situações a serem estudadas, podendo visar uma fina descrição dos componentes de determinada circunstância.

Já para Thiollent (1986, p. 14) a pesquisa-ação: É um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Para Esteban (2010), a pesquisa-ação, colabora de forma bastante comum em situações que envolvem a comunidade escolar, “os conhecimentos ali produzidos (fruto da intervenção professor-alunos) são fontes para o investigativo, ao mesmo tempo em que oportunizam reflexões pedagógicas para um melhor fazer docente”.

Os sujeitos da pesquisa

Os participantes da pesquisa foram estudantes da 3ª etapa (equivalente aos 6º e 7º anos) de diversas idades (acima de 15 anos de idade), uma vez que se trata de um público vinculado à modalidade de ensino personalizado de jovens e adultos. Para organizarmos o processo metodológico desta pesquisa, foi dividida em momentos, para isso, iremos detalhar cada um deles, sendo descrito abaixo.

ANÁLISE DE RESULTADOS

O gráfico 1, mostra como o aluno está percebendo a geometria no seu cotidiano e também em sala de aula. Os alunos em sua maioria deixam claro que o professor não utiliza recursos e em especial o geoplano em suas aulas. Já no gráfico 2, temos uma nova percepção e entendimento da geometria, relacionados a construção de formas e suas características básicas.

Gráfico 1: Conhecimento prévio dos participantes

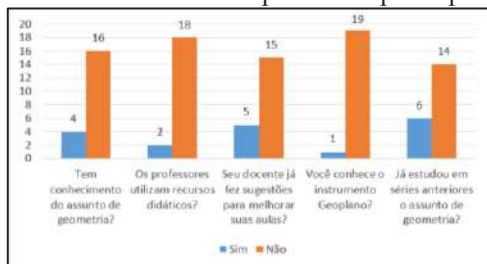
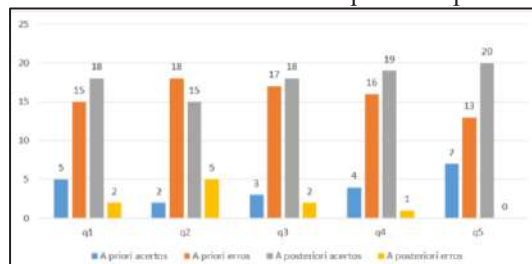


Gráfico 2 : Resultados do teste a priori e a posteriori



Este estudo, nos mostrou que por meio dos jogos lúdicos o Geoplano pode ser uma ferramenta satisfatória no estímulo e aprendizagem do aluno, além de ser um elo de incentivo a curiosidade dos estudantes na aprendizagem de Matemática. Nesse sentido, através da prática de jogos, buscamos um estreitamento da disciplina com o aluno, rompendo “barreiras” com os conteúdos e fomento com os mesmos a serem criativos e autoconfiantes. Por meio do auxílio do Geoplano, foi observado que podemos contribuir com o processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático referente ao estudo de figuras planas, como por exemplo, quadriláteros, triângulos, retângulos, trapézio e losango.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Eva Maria Siqueira. *A Ludicidade e o Ensino de Matemática: Uma prática Possível*. 4 ed. Campinas, SP, Papyrus, 2007.

ARAÚJO, P. O teatro ensina a viver. 2002. (s.d.). Disponível em: <http://novaescola.org.br/conteúdo/392/o-teatro-ensina-a-viver>. Acesso em: 20 dez. 2021.

BOYER, C. B. História da Matemática. 3ª Edição. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

CHIZZOTTI, A. Pesquisa em ciências humanas e sociais. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

COSTA, D. E.; PEREIRA, M. J.; MAFRA, J. R. S. GEOPLANO NO ENSINO DE MATEMÁTICA: alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas* V.7 - n. 13 - jul. 2010, 2010/dez. 2010, V. 7 - n. 14 - jan 2011/dez. 2011.

ESTEBAN, M. P. S. Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições. Porto Alegre: AMGH, 2010.

FARAGO, J. L. Do ensino da história da matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2003.

GATTEGNO, C. et al. *El Material para la Enseñanza de las Matemáticas*. 2. Ed. Madri (Espana): Aguilar, 1996. Horizonte: CAED-UFGM, 2012.

KNIJNIK, Gelsa; BASSO, N. V. de A.; KLÜNSENER, R. *Aprendendo e Ensinando Matemática com o Geoplano*. 2 ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2004. (Biblioteca do professor. Coleção Programa do Livro na Escola).

LORENZATO, S. O Laboratório de Ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. O Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACHADO, P. F. Fundamentos de geometria plana / P. F. Machado. – Belo Horizonte: CAED-UFGM, 2012.

OLIVEIRA, J. E. M. A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Biblioteca Depositária, UFRJ 2013.

THIOLLENT, M. Metodologia da Pesquisa-Ação. São Paulo: Cortez, 1986.



A ÁLGEBRA DOS OCTÔNIOS

Rodríguez, Marjenny, marjennyrdm@gmail.com¹
Morbach, Joelma, joelmam@ufpa.br²

¹UFPA

²UFPA

Resumo: Durante seus estudos, Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) desenvolveu uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores no plano. Isto o levou a considerar um problema que seria fundamental para a física da época: desenvolver uma álgebra de ternas que daria a linguagem para trabalhar com vetores do espaço. Foi, então, por volta de 1943 que definiu uma multiplicação que deu origem ao conjunto dos quatérnios, sendo o primeiro exemplo de anel não comutativo, com divisão. Baseados nos estudos de Hamilton, John T. Graves (1806 – 1870) e Arthur Cayley (1821-1895) desenvolveram independentemente o conjunto dos octônios. Logo percebeu-se que a álgebra dos octônios era de divisão, normada e desprovida de comutatividade e associatividade, mas que respondia a questionamentos de anos dentro do mundo matemático. Além disso, Os matemáticos Arthur Cayley e Leonard Eugene Dickson publicaram um trabalho em que apresentaram um algoritmo para as álgebras de dimensão 2^n , e provando que as únicas álgebras com composição possuem dimensões 1, 2, 4 e 8.

Palavras-chave: Álgebra, Octônios, Cayley-Dickson.

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente apresentaremos a definição de uma álgebra de divisão construída pelo processo de Cayley-Dickson: a álgebra dos Octônios, que é uma extensão não associativa dos quatérnios, que, por sua vez, é uma extensão não comutativa dos complexos, ambas construídas a partir de uma álgebra A com unidade, sendo a última delas a álgebra dos octônios. Teremos como objetivo principal a definição do conjunto e da álgebra dos octônios e também de suas propriedades e operações com o auxílio de exemplos numéricos para facilitar o entendimento. Ao final faremos um breve comentário acerca de aplicações.

2. DEFINIÇÕES E OPERAÇÕES COM OCTÔNIOS

A partir de agora conheceremos os octônios e suas propriedades.

Definição: Sejam $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}$, um octônio é um número da forma $o = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$. Denotamos por \mathbb{O} o conjunto dos número octônios.

Assim

$$\mathbb{O} = \{o = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 / x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}\},$$

onde x_0 é chamado de parte real e $x_i e_i$, para $i = 1, \dots, 7$, é a parte imaginária. Quando $x_0 = 0$, temos que o número será um octônio puro.

Definição: Sejam $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ dados por $o_1 = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$ e $o_2 = y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + y_5 e_5 + y_6 e_6 + y_7 e_7$, definimos a soma entre octônios como sendo a soma dos coeficientes da seguinte forma:

$$o_1 + o_2 = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + (x_3 + y_3) e_3 + (x_4 + y_4) e_4 + (x_5 + y_5) e_5 + (x_6 + y_6) e_6 + (x_7 + y_7) e_7.$$

Exemplo: Sejam $o_1 = 2 + 7e_1 - 2e_3 + 4e_4 + 3e_5 - 2e_6 + 4e_7$ e $o_2 = 3e_1 - e_2 + 2e_3 + 5e_5 - e_6 + 4e_7$, a soma $o_1 + o_2$ será um novo octônio o_3 dado por

$$o_3 = (2 + 0) + (7 + 3) e_1 + (0 - 1) e_2 + (-2 + 2) e_3 + (4 + 0) e_4 + (3 + 5) e_5 + (-2 - 1) e_6 + (4 + 4) e_7$$

$$o_3 = 2 + 10 e_1 + -1 e_2 + 4 e_4 + 8 e_5 - 3 e_6 + 8 e_7.$$

Definição: Sejam $o \in \mathbb{O}$ dado por $o = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar. A multiplicação de um octônio por um escalar é dada pela multiplicação do escalar por cada um dos coeficientes, da seguinte forma:

$$\alpha o = \alpha x_0 + \alpha x_1 e_1 + \alpha x_2 e_2 + \alpha x_3 e_3 + \alpha x_4 e_4 + \alpha x_5 e_5 + \alpha x_6 e_6 + \alpha x_7 e_7.$$

Exemplo: Sejam $o_1 = 2 + 7e_1 - 2e_3 + 4e_4 + 3e_5 - 2e_6 + 4e_7$ e $\alpha = 5$, a multiplicação por escalar resultará em um novo octônio o_3 dado por

$$5 o_1 = 5 (2 + 7e_1 - 2e_3 + 4e_4 + 3e_5 - 2e_6 + 4e_7) = 10 + 35e_1 - 10e_3 + 20e_4 + 15e_5 - 10e_6 + 20e_7.$$

Percebe-se que o conjunto dos octônios com as operações de soma e multiplicação por escalar são um espaço vetorial sobre os reais. A partir disto, podemos definir um produto neste espaço para obter uma álgebra com os octônios, que será uma álgebra de composição, não associativa, não comutativa e de dimensão 8. Portanto, considere o conjunto $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ e a seguinte tabela:

Tabela 1

x	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

utilizaremos este conjunto como sendo a base canônica dos octônios.

Definição: Sejam $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ dados por $o_1 = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$ e $o_2 = y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + y_5 e_5 + y_6 e_6 + y_7 e_7$. Utilizando o produto entre os elementos $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ e a propriedade distributiva, definimos a multiplicação entre os octônios o_1 e o_2 como sendo

$$o_1 \cdot o_2 = (x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7) (y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + y_5 e_5 + y_6 e_6 + y_7 e_7)$$

$$= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7) +$$

$$(x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_4 + x_3 y_7 - x_4 y_2 + x_5 y_6 - x_6 y_5 - x_7 y_3) e_1 +$$

$$(x_0 y_2 - x_1 y_4 + x_2 y_0 + x_3 y_5 + x_4 y_1 - x_5 y_3 + x_6 y_7 + x_7 y_1) e_2 +$$

$$(x_0 y_3 + x_1 y_7 - x_2 y_5 + x_3 y_0 + x_4 y_6 + x_5 y_2 - x_6 y_4 + x_7 y_1) e_3 +$$

$$\begin{aligned} & (x_0 y_4 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_2 + x_4 y_0 + x_5 y_7 + x_6 y_3 - x_7 y_5) e_4 + \\ & (x_0 y_5 - x_1 y_6 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_7 + x_5 y_0 + x_6 y_1 + x_7 y_4) e_5 + \\ & (x_0 y_6 + x_1 y_5 - x_2 y_7 + x_3 y_4 - x_4 y_3 - x_5 y_1 + x_6 y_0 + x_7 y_2) e_6 + \\ & (x_0 y_7 + x_1 y_3 + x_2 y_6 - x_3 y_1 + x_4 y_5 - x_5 y_4 - x_6 y_2 + x_7 y_0) e_7. \end{aligned}$$

Definição: Seja $o \in \mathbb{O}$ dado por $o = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$, definimos o conjugado \bar{o} de o como sendo

$$\bar{o} = x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 - x_4 e_4 - x_5 e_5 - x_6 e_6 - x_7 e_7.$$

Exemplo: Seja $o = 7 - 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 - e_4 + 5e_5 - 5e_6 - 2e_7$. Temos $\bar{o} = 7 + 2e_1 - 3e_2 - 5e_3 + e_4 - 5e_5 + 5e_6 + 2e_7$.

Definição: Seja $o \in \mathbb{O}$ dado por $o = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$, definimos a norma de um octônio $\|o\|$ como sendo

$$\|o\| = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2)^{1/2}.$$

Exemplo: Seja $o = 7 - e_1 + 3e_2 + 5e_3 - e_4 + 5e_5 - 2e_7$ temos

$$\|o\| = (7^2 + (-1)^2 + 3^2 + 5^2 + (-1)^2 + 5^2 + (-2)^2)^{1/2} = (114)^{1/2} = 12.$$

Obs.: Temos que a norma de um octônio será um número real.

Definição: Seja $o \in \mathbb{O}$ dado por $o = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$, definimos o inverso de um octônio o^{-1} como sendo

$$o^{-1} = \bar{o} / \|o\|.$$

Exemplo: Seja $o = 7 - e_1 + 3e_2 + 5e_3 - e_4 + 5e_5 - 2e_7$ temos

$$o^{-1} = (7 + e_1 - 3e_2 - 5e_3 + e_4 - 5e_5 + 2e_7) / 12.$$

3.CONCLUSÃO

Acabamos de conhecer um conjunto que surpreendeu a matemática durante o século XIX, apesar de, no início, suas aplicações serem difíceis de encontrar. No entanto Sua relevância na geometria foi descoberta em 1925, quando Élie Cartan descreveu a 'trialidade' a simetria entre vetores 'spinors' em espaços Euclidianos de 8 dimensões. Já na física, sua relevância foi notada em 1934, em um artigo de Jordan, von Neumann e Wigner. No entanto, as tentativas em aplicar a teoria octonionica nesta área obteve pouco sucesso até os anos 80, quando descobriram que octonios explicavam ferramentas interessantes da Teoria das Cordas. Além do mais, a partir das definições de multiplicação entre complexos, quatérnios e octônios podem-se exibir as soluções de determinadas EDP's. É claro que ainda é uma parte da matemática com poucas descobertas, no entanto há estudiosos em todo o mundo interessados no seu caráter promissor.

REFERÊNCIAS

SILVA, M.S.B. Solução Não-Clássica de Equações Elípticas Totalmente não Lineare Via Álgebras Não Associativas. UFPA, 2019.

VALERO, D. M.; MARTINEZ, G.L. Os quatérnios e octônios como álgebras não comutativas de dimensão finita sobre os reais: existem outras álgebras do mesmo tipo?. UNICAMP, 2015.

SILVA, A.C.; PEREIRA, J.M.; SARAIVA, L.F.L. Os Complexos, O Quatérnios E Os Octônios: Os Números Imaginários. UNIFAP, 2012.

NADIRASHVILI, N.; TKACHEV, V.; VLĂDUȚ, S. Nonlinear Elliptic Equations and Nonassociative algebras. AMS, 2014.



A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE

Assunção, Railandi, railandisousa8@gmail.com¹
Sobral, Yuri Dumaresq, ydsobral@unb.br²

¹Estudante de Licenciatura em Matemática, Universidade de Brasília
²Professor do Departamento de Matemática, Universidade de Brasília

Resumo: O objetivo deste trabalho é realizar uma comparação da solução da equação do transporte obtida por métodos matemáticos distintos: um analítico e outro numérico, implementado computacionalmente na linguagem de programação Fortran. Inicia-se a exposição com a dedução da equação num contexto de dispersão de poluentes e finaliza-se com a comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos. Para o modelo analítico, foi utilizado o método das características, o modelo numérico foi baseado no método de diferenças finitas.

Palavras-chave: equação do transporte, modelos matemáticos, método das características, métodos numéricos

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa individual realizada no âmbito do projeto PETMAT – Programa de Educação Tutorial em Matemática – realizado pela autora de março de 2020 a dezembro de 2021, sob orientação do Prof Dr Yuri Dumaresq Sobral da Universidade de Brasília. O foco reside em comparar as soluções da EDP do Transporte obtidas por formas distintas e verificar a concordância nos resultados.

1. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE

Para fins de compreensão, imagina-se uma situação imaginária, de dispersão de poluentes na água. A área de análise pode ser compreendida como o espaço de x até $x + \Delta x$. Para cada instante de tempo t e diferentes posições, temos a velocidade dada pela função u , que para nosso estudo supomos como constante c . A concentração dos resíduos despejados na área estudada é a função Φ , e ainda, a densidade destes mesmos resíduos é a função ρ . Com isso, queremos saber quantos resíduos sólidos se encontram nesta região delimitada em um determinado período de tempo, ou seja, a concentração de massa dos resíduos.

Precisamos entender o fluxo que passa pelas fronteiras do volume elementar, que é a diferença do volume que entra pelo volume que sai. E o acúmulo de massa no volume elementar, ou seja, o que nos restou no espaço em um período de tempo.

A variação dos sólidos é dada como,

$$\Delta_m = m_i - m_f,$$

em que o sub-índice i denota a entrada do volume elementar, e o sub-índice f denota a saída do volume elementar. O fluxo de massa de poluentes em um determinado volume elementar é dada por

$$m = V_f \cdot \Phi \cdot \rho,$$

em que V_f é a vazão de fluido, o que nos permite escrever:

$$\begin{aligned} m_i &= a \cdot c \cdot \Delta t \cdot \Phi(x, t) \cdot \rho \\ m_f &= a \cdot c \cdot \Delta t \cdot \Phi(x + \Delta x, t) \cdot \rho \end{aligned}$$

em que a é a altura do volume elementar. Fazendo as devidas substituições, temos que a variação é dada por

$$\Delta_m = a \cdot c \cdot \Delta t \cdot \rho \cdot (\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t))$$

Seguindo o estudo, buscamos agora o acúmulo de massa no volume. Temos que, a variação da massa dos resíduos no volume elementar é dada por;

$$\begin{aligned} \Delta_V &= [V(t + \Delta t) - V(t)] \cdot \rho \\ \Delta_V &= a \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \left[\phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t\right) - \phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right] \end{aligned}$$

A partir disso, concluímos que a massa que cruza a fronteira é dada por unidade de área da seção transversal e por unidade de tempo. Com estas análises, podemos dizer que a variação de massa acumulada no volume elementar é igual a variação de fluxo pelas fronteiras i e f . Sabemos a variação de massa pelo fluxo e o quanto houve de concentração. Sendo assim, para ocorrer um acúmulo no volume elementar, o fluxo de massa na entrada foi maior que o fluxo de massa na saída. Desta forma, pelo princípio de conservação da massa, temos:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \Delta_V \\ a \cdot c \cdot \Delta t \cdot \rho \cdot (\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)) \\ &= a \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \left[\phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t\right) - \phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right] \end{aligned}$$

fazendo as devidas manipulações, encontramos que

$$\frac{\phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t\right) - \phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right)}{\Delta x} + c \cdot \frac{\phi(x + \Delta x, t) - \phi(x, t)}{\Delta x} = 0$$

Como queremos analisar cada volume de forma infinitesimal, onde a concentração é válida em todos os pontos do domínio, tomamos o limite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t\right) - \phi\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right)}{\Delta x} + c \cdot \frac{\phi(x + \Delta x, t) - \phi(x, t)}{\Delta x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Encontramos a equação diferencial parcial de primeira ordem que governa a dispersão de um poluente em um rio, chamada de Equação do Transporte.

2. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL (EDP)

2.1 Solução analítica: método das características

Dada a equação do transporte,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

com a velocidade de propagação da onda c constante e a condição inicial $\phi(x, 0) = f(x)$. Queremos encontrar uma região do plano característico $\phi(x, t)$ em $R \times [0, \infty)$. Como $\phi = \phi(x, t)$, buscamos pela região em que $x = x(t)$, para assim calcular

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Comparando a equação acima com a Equação do Transporte obtida na seção anterior, podemos igualar as duas se tivermos que $\frac{dx}{dt} = c$ e $\frac{d\phi}{dt} = 0$. Integrando, temos que a reta característica terá o formato de $x = c \cdot t + F_1$ e a função se dará de forma constante $\phi = F_2$. Assim, aplicamos a condição inicial $t = 0$, que nos dá $x = x_0$ e $F_1 = x_0$. Sendo assim, temos $x = c \cdot t + x_0$, ou seja, ao longo de uma reta característica a função se dá de forma constante. Além disso, para diferentes valores de t , têm-se diferentes retas características e em todas a função é constante.

$$\phi(x, t) = f(x_0) \forall (x, t) \setminus x = c \cdot t + x_0.$$

Conclui-se que, a solução da EDP linear de primeira ordem sempre se dará no seguinte formato

$$\phi(x, t) = f(x_0) = f(x - c \cdot t).$$

Esta solução é chamada de solução de onda viajante da Equação do Transporte.

2.2 Solução numérica: método de diferenças finitas

O método das diferenças finitas (MDF) é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. Método utilizado para obter valores numéricos, a partir de uma EDP que descreva um fenômeno físico de interesse. Para a equação do transporte,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

como queremos ter conhecimento a respeito de todos os pontos do domínio, vamos discretizar para ser um domínio finito. Assim, tendo y valores, onde y é a quantidade de nós que tem na nova malha de domínio. A ideia deste método é aprender como a partir de uma EDP que descreve um fenômeno físico de interesse, e também um comportamento de uma função, seria possível utilizar este método para obter valores numéricos, ou seja, números que representem os valores desse campo em cada ponto do espaço que pertença ao novo domínio discretizado da solução.

Iniciamos escolhendo o ponto da hipotética malha de nós para rearranjar nossa equação. Ou seja, supondo que quiséssemos analisar nossa equação em regiões entre nós e determinar as derivadas nestes nós. Chamamos a coordenada do nó central de (m, n) e a distância entre um nó e outro de Δx na direção espacial e Δt na direção temporal.

Calculando a diferença finita em todos os pontos, temos as seguintes aproximações para as derivadas que aparecem na equação do transporte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} |_{m,n} \simeq \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} |_{m,n} \simeq \frac{u_{m,n} - u_{m,n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

válidas para o caso em que $c > 0$, e

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} |_{m,n} \simeq \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} |_{m,n} \simeq \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

válidas para o caso em que $c < 0$. O cálculo feito no ponto anterior é nomeado como derivada atrasada e de forma análoga, no ponto posterior é chamada de derivada avançada. Além disso, quanto menor a variação Δx e Δt , mais o resultado vai se aproximar da solução exata, pois temos que os erros destas aproximações são $O(\Delta x)$ e $O(\Delta t)$. Isso se dá, primeiramente, por intuição. E ainda, pela série de Taylor, ideia que é usada para estimar o valor que não conhecemos em termos de um ponto conhecido. Expansão de algo conhecido para conhecimento de algo desconhecido.

Sendo assim, como queremos a solução em que o fluxo se move da esquerda para a direita, isto é, $c > 0$, entende-se que tudo que está fazendo com o que ocorra este movimento, está à esquerda dela (atrás), isso imaginando graficamente. Com a ideia matemática, podemos imaginar um plano característico, onde estamos propagando ao longo de uma reta característica, sabemos que a velocidade é constante, então para a análise em um nó necessita estudo do nó anterior.

Sendo assim, buscamos a derivada avançada para Δt e a atrasada para Δx . Ou seja, a solução aproximada da EDP, é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} + c \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{\Delta x} = 0$$

isolando um ponto da malha, temos

$$u_{m+1,n} = u_{m,n} - c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{m,n} - u_{m-1,n}).$$

Com a condição geométrica $0 < c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ sendo o limite de estabilidade para os passos $\frac{\Delta t}{\Delta x}$; isso se dá para que o ponto x_0 , que a característica corta o eixo x , pertença ao domínio de dependência da equação numérica. Sendo assim, Δx tem que ser maior que a distância percorrida pela solução em Δt , em uma velocidade c constante, ou seja, o tempo numérico para avançar a solução deve ser menor que o tempo necessário para que a onda percorra um Δx .

2.3 Solução computacional: Fortran

Para a solução computacional, iniciamos com o desenvolvimento da condição de contorno periódica. A equação sozinha não especifica uma solução, uma solução única é normalmente obtida pela fixação de um problema com outras condições, tais como as condições inicial e de contorno. Buscamos a condição de contorno periódica já que tínhamos estipulado uma malha de nós finitos e as condições de fronteira periódica são frequentemente escolhidas para aproximar um domínio grande (infinito). Graficamente buscamos visualizar nossa onda percorrendo de forma continua de um lado ao outro.

Sabemos que o domínio é de $m = 1$ até $m = i$. Então, vamos unir o ponto final $u_{(i,n)}$ ao ponto inicial $u_{(1,n)}$. Aplicando para $m = 1, 2, \dots, i - 1$, temos

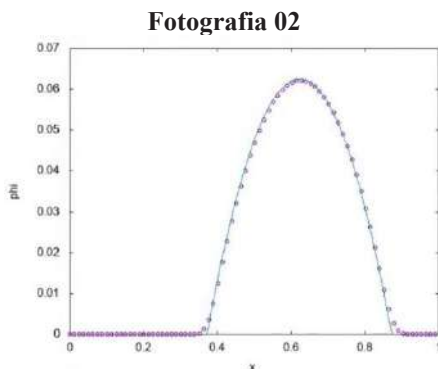
$$\begin{aligned} u_{m,n+1} &= u_{m,n} - c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{m,n} - u_{m-1,n}) \\ m = 1: u_{1,n+1} &= u_{1,n} - c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{1,n} - u_{i-1,n}) \\ m = 2: u_{2,n+1} &= u_{2,n} - c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \\ m = i - 1: u_{i-1,n+1} &= u_{i-1,n} - c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{i-1,n} - u_{i-2,n}). \end{aligned}$$

Com isso, pode-se então desenvolver o algoritmo com a condição de contorno periódica. O extrato da parte principal do algoritmo implementado encontra-se exposto na Fotografia 01.

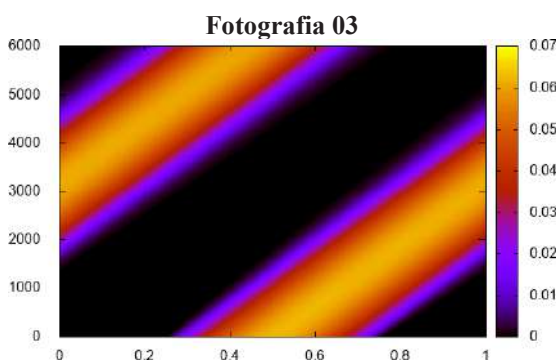
Fotografia 01

```
!Algoritmo
do n=0,Nfinal
u(1,n+1) = u(1,n) - (c*dt/dx)*(u(1,n)-u(Ifinal-1,n))
do i=2,Ifinal-1
u(i,n+1) = u(i,n) - (c*dt/dx)*(u(i,n)-u(i-1,n))
end do
u(Ifinal,n+1)=u(1,n+1)
!salvar o resultado num arquivo
open(unit=101,file='saida.dat', status='unknown')
do i=1,Ifinal
write(101,*) n*dt, i*dx, u(i,n+1), solucao((i-200)*dx,n*dt,c)
end do
close(unit=101)
write(*,*) 'Terminou a iteração ', n !Imprime na tela
read(*,*) !Espera um enter para continuar
end do
```


Pode-se concluir, com o auxílio do aplicativo Gnuplot, que a solução analítica segue junto com a solução numérica. Abaixo temos o gráfico gerado pelo aplicativo, na Fotografia 02. A linha contínua verde é a solução obtida pelo método das características e a linha pontilhada roxa é a solução por diferenças finitas. A condição inicial é uma parábola $\phi(x, 0) = f(x)$ côncava para baixo, centrada no domínio e retificada, ou seja, $f(x) = 0$ se os pontos da parábola forem negativos. Pegamos apenas a parte positiva da parábola para que fosse permitido visualizar a periodicidade. Percebe-se que ambas as soluções andam juntas. Porém, percebe-se que a solução numérica suaviza a parábola retificada nos pontos onde não há derivada.



Por fim, na Fotografia 03 foi reproduzida a solução no diagrama espaço temporal, onde observam-se os rastros deixados pela onda do gráfico da Fotografia 02. Nota-se que a onda sai da esquerda e retorna na direita, de forma periódica. E ainda, é perceptível pelas cores que o pico da onda se encontra próximo a 0.06 e que as extremidades continuam sendo 0.



CONCLUSÕES

Neste trabalho foram testados métodos numéricos para a aproximação de um problema de valor inicial, comparando-se os resultados obtidos com a solução analítica. Ao analisar os resultados atingidos percebe-se que o método de solução analítica condiz com o método de solução numérico. É possível, ainda, visualizar como andam juntas as soluções.

REFERÊNCIAS

SAVAGE, S.B., Hutter, K., The motion of a finite mass of granular material down a rough incline, *Journal of Fluid Mechanics* v. 199, pp.177–215, 1989.

BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Ed. Harbra Ltda., 1988.

C. F. Gerald and P. O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis*, Sixth Edition, Addison-Wesley, 1999.



A NECESSIDADE DO ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Ramos, Augusto Cezar Abreu, augusto.ramos@icen.ufpa.br¹
Silva, Manoel Dione de Oliveira, dione@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará / Escola De Aplicação da UFPA

Resumo: *A Educação Financeira ainda não é uma realidade no ensino escolar do brasileiro. Em um país onde 39,9 %, este referente a população adulta, é de negativados, temos a Educação Financeira nas escolas sendo um dos principais facilitadores para mudar este cenário atual. A fim de instruir estudantes da Escola de Aplicação da Universidade Federal, surge a oficina “Educação Financeira”, onde este trabalho tem como objetivo elucidar pontos sobre a necessidade do ensino da Educação Financeira nas escolas, além de compartilhar resultados obtidos com a oficina.*

Palavras-chave: *Matemática, Ensino, Educação Financeira.*

INTRODUÇÃO

O cenário econômico atual do país nos remete a falta que faz a não existência obrigatória da disciplina de Educação Financeira no cronograma curricular escolar, em que esta poderia estar presente desde o fundamental ao médio. Este cenário é justamente o retrato do cidadão que sai da escola sem ter esses conhecimentos que deviam ser julgados básicos e obrigatórios curricularmente, a fim de auxiliar na vida adulta da população. O Brasil atualmente possui 39,9 %, este referente a população adulta, sendo negativados (JORNAL DO COMÉRCIO, 2022).

Como a Educação Financeira está muito ligada ao dinheiro, mesmo que não esteja estritamente resumida nisso, recai ao professor de Matemática tentar incluir de uma forma interdisciplinar, muitas vezes junto ao estudo de Matemática Financeira, que por vezes se resume apenas no estudo dos Juros, porém, sem um aprofundamento concreto do estudo da Educação Financeira e como ela pode auxiliar a todos. Com o intuito de motivar e auxiliar os estudantes da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EAUFPA), a oficina “Educação Financeira”, foi ministrada, porém, com essa pôde ser percebido o interesse não somente dos alunos, mas de pessoas de fora da instituição das mais diversas idades e classes sociais.

OBJETIVO

A oficina nasceu com o objetivo de instruir de forma introdutória e motivar o estudo de Educação Financeira por parte dos estudantes da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, onde esta seria ministrada em dois encontros, pautando assuntos como: perfis financeiros, como organizar ganhos e gastos e contabilizá-los, como poupar, tipos de investimentos, como começar a investir e outros. O educador Paulo Freire nos diz que quando uma criança começa a ter contato com o dinheiro, precisa-se ensinar o valor deste, a fim de que esta entenda que dinheiro deve ser respeitado e que este não leva desaforo (Freire, 2010).

Junto à necessidade de se entender o dinheiro e a Educação Financeira como um todo, temos que o maior investimento que uma pessoa pode fazer é nela mesma e o único investimento que não contém risco é o conhecimento (Buffet, 2020).

METODOLOGIA

A oficina foi ministrada em dois dias com alunos do ensino fundamental e médio da EAUFPA, porém, acabou sendo aberta ao público, ao qual acabou contando com Graduandos, Professores, pessoas de diferentes idades, locais do Brasil, além de diferentes classes sociais, indicando que a Educação Financeira é uma necessidade de todos e que quando o assunto abordado tange o financeiro, todos têm algum tipo de dúvida. A oficina foi ministrada através da plataforma do Google Meet, a fim de minimizar riscos de contaminação pela covid-19 e suas variantes, dado o período pandêmico que se estende até o momento deste resumo.

No primeiro encontro, foram pautados assuntos teóricos sobre qual o perfis financeiros e qual o caminho uma pessoa deve tomar para sair do perfil financeiro de endividado até o perfil de investidor, apresentados pontos sobre hábitos saudáveis e hábitos que devem ser evitados financeiramente, tipos de investimentos, ativos físicos e aplicações, sendo essas aplicações de taxa fixa ou taxa variável como: ações, CDI, CDB, Tesouro Selic e outros, além de como começar a investir. Ainda no primeiro dia também foi trabalhado o estudo de porcentagem, taxas e outros conceitos que envolvem operações matemáticas e estão diretamente ligados à Educação Financeira.

Figura 1

Taxas

O estudo de porcentagem é essencial para entender as taxas, acréscimos e descontos. A porcentagem pode ser exemplificada da seguinte forma: Uma mercadoria pode valer um dado valor, quando eu me refiro aos 100 por cento deste valor, é como se eu dividisse esse valor em 100 partes e quanto falo de 100 por cento, me refiro ao valor como um todo. Quando falo 30 % do valor, é como se eu pegasse 30 partes das 100 totais. Exemplo:

$$30\% \text{ de } 100 = \frac{30}{100} \cdot 100 = 30$$
$$50\% \text{ de } 80 = \frac{50}{100} \cdot 80 = 40$$

Quando um anúncio diz que haverá um acréscimo de 30% sobre um valor de 500 Reais, o que acontece é que devemos calcular 30% de 500 e somar(acrescentar) esses 30% aos 500 originais e esse será o novo preço do produto.

(EAUFPA) Educação Financeira 2021 22/31

Taxas

Finalizando o primeiro dia, foram acentuadas as aplicações de Juros simples e compostos e como esses estão presentes na sociedade. Ainda no primeiro encontro foram comentados assuntos sobre a sustentabilidade ambiental, empresarial, social e econômica e como a Educação Financeira está diretamente ligada a essas.

Figura 2

Juros

Comparativo entre Juros Simples e Juros Compostos

Tomando um capital de 1000 Reais em uma taxa de 5% ao mês, esse seria o comparativo inicial em juros simples e compostos.

Juros de 5% ao mês		
mês	Simple	Compostos
0	1000	1000
1	1050	1050
2	1100	1102,5
3	1150	1157,6

(EAUFPA) Educação Financeira 2021 27/31

Comparativo de juros simples e compostos aplicados em uma mesma taxa em um curto período de tempo.

A figura acima representa um dos slides utilizados na oficina, para exemplificar como os Juros Simples e Compostos funcionam sobre o dinheiro e como a diferença do montante final é pequena quando aplicamos a mesma taxa, sobre um mesmo capital em um curto período de tempo. Porém, a figura três, referente também a um slide da apresentação, nos apresenta a grotesca diferença do montante final que existe entre uma mesma taxa, aplicada por um mesmo período em um capital para os Juros Simples e para os Juros Compostos, evidenciando a necessidade do entendimento destes. Antes destes exemplos foram trabalhados os conceitos de Juros Simples e Compostos, apresentado suas respectivas fórmulas e a forma de operar com estes.

Figura 3

Juros

Comparativo entre Juros Simples e Compostos

Quando aplicados a curto prazo a diferença é pequena, porém, e se tomarmos esse mesmo exemplo dado acima no período de 3 anos (36 meses). Para juros simples, temos:

$$J = CIT$$

$$J = 1000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 36$$

$$J = 1800 \implies M = J + C = 2800$$

para juros Compostos temos:

$$M = C(1 + I)^T$$

$$M = 1000(1 + 0,05)^{36}$$

$$M = 1000 \cdot 5,7918$$

$$M = 5791,9$$

(EALFPW) Educação Financeira 2021 28/31

Comparativo de juros simples e compostos aplicados em uma mesma taxa em um período mais extenso de tempo.

No segundo encontro, foi repassado um método de organização de custos e despesas por planilhas eletrônicas, com o intuito de auxiliar no controle de ganhos e gastos dos participantes, beneficiando estes com suas despesas e no seu início da vida como um investidor.

Figura 4

Sumário						
JANEIRO						
Cód	Receitas e Rendimentos	Projetoado	Real	Saldo Projetoado	Saldo Real	Diferença
1	Salário	R\$ 3.500,00	R\$ 3.500,00			
2	Saldo anterior disponível	R\$ 79,00	R\$ 20,00	R\$ 573,60	R\$ 478,20	R\$ 95,40
3	Renda Extra 2	R\$ 350,00	R\$ 300,00			
4	Rendimentos Aplicação 1	R\$ 20,00	R\$ 20,00			
5	Lucro Empreendimento 1	R\$ 30,00	R\$ 35,00	R\$ 3.405,40	R\$ 3.396,80	R\$ 8,60
	TOTAL	R\$ 3.979,00	R\$ 3.875,00			

Cód	Morada e Comunicações	Descrição	Custo Projetoado	Custo Real	Data	Diferença
6	Aluguel		R\$ 450,00	R\$ 450,00		R\$ -
7	Energia Elétrica		R\$ 80,00	R\$ 80,00		R\$ -
8	Água		R\$ 20,00	R\$ 20,00		R\$ -
9	Streaming		R\$ 14,00	R\$ 14,00		R\$ -
10	Recarga Celular		R\$ 20,00	R\$ 20,00		R\$ -
11	Internet Casa		R\$ 70,00	R\$ 70,00		R\$ -
12	Manutenções ou Consertos					R\$ -

Planilha de ganhos e gastos.

Figura 5

Sumário	Jan			Fev			Mar		
Dívidas	Saldo Inicial ¹	Amortização ²	Saldo Final ³	Saldo Inicial ⁴	Amortização ⁵	Saldo Final ⁴	Saldo Inicial ⁵	Amortização ⁶	
Empréstimo Pessoal	R\$ 4.200,00	R\$ 580,00	R\$ 3.620,00	R\$ 3.620,00	R\$ 580,00	R\$ 3.040,00			
Casa			R\$ -			R\$ -			
Carro			R\$ -			R\$ -			
Faculdade			R\$ -			R\$ -			
Viagem			R\$ -			R\$ -			
Cartão de Crédito 1	R\$ 2.400,00	R\$ 330,00	R\$ 2.070,00	R\$ 2.070,00	R\$ 310,00	R\$ 1.760,00			
TOTAL	R\$ 6.600,00	R\$ 910,00	R\$ 5.690,00	R\$ 5.690,00	R\$ 890,00	R\$ 4.800,00	R\$ -	R\$ -	

Controle de dívidas.

Ainda no segundo encontro houve também um momento de perguntas e respostas, além da indicação de materiais e sites como: Primo Rico, o canal e o website da Nubank e outros, para ajudar aqueles que ansiavam por saber mais sobre a Educação Financeira.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A oficina contou com dois formulários de feedback, referentes a cada encontro, que foram disponibilizados ao final dos encontros aos participantes, formulários os quais tinham o intuito de pesquisar não somente o grau de aproveitamento dos participantes para com a oficina e o quanto esta foi benéfica, mas também, o intuito de apurar dados com a diversidade social dos participantes, corroborando em um estudo sobre a dificuldade do brasileiro para com seu controle de ganhos e gastos, junto a desinformação deste para como manipular de forma saudável suas finanças. Com este estudo, foram levantados dados já esperados como a desinformação dos jovens em relação a questões financeiras e econômicas, porém, um dado interessante que pode ser observado foi a desinformação financeira e econômica também pelos adultos, independente de sua classe social, estado e etc.

A oficina contou com praticamente todos os comentários de feedback presentes nos formulários sendo positivos e pedindo por mais encontros como os que houveram, sendo esses comentários de não somente alunos da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, mas também dos participantes de outras instituições e de vários estados do Brasil.

CONCLUSÕES

A Educação Financeira que é uma realidade para vários países, como Japão, Reino Unido e os EUA sendo englobada em disciplinas como os Estudos Sociais e Domésticos, Economia e outros, ainda continua sendo apenas um assunto pautado de forma interdisciplinar sem necessariamente ser obrigatório curricularmente em salas de aula brasileiras.

Podemos ver os resultados do descaso para com o ensino da Educação Financeira quando verificamos os negativados brasileiros, além das pessoas que não necessariamente estão com o nome sujo, mas que acabam vivendo de forma subsistente devido a falta de um melhor controle financeiro. Um ponto interessante é que a Educação Financeira também está ligada à sustentabilidade, onde são abordados outros casos onde o Brasil continua a bater

recordes negativos, ligados ao desperdício de alimento, energia, água e outros, que infligem diretamente nas questões sociais, ambientais, além de econômicas e empresariais. Com isso, fica evidente a necessidade da Educação Financeira nas Escolas a partir dos anos fundamentais, tratando não somente a parte financeira, mas sobre a sustentabilidade de uma forma mais geral e prática.

REFERÊNCIAS

BUFFETT, Warren Edward. 15 frases inspiradoras de Warren Buffett Leia mais em: <https://forbes.com.br/colunas/2020/08/15-frases-inspiradoras-de-warren-buffett/#foto1>. [S. l.], 30 ago. 2020. Disponível em: <https://forbes.com.br/colunas/2020/08/15-frases-inspiradoras-de-warren-buffett/#foto1>. Acesso em: 19 fev. 2022.

FREIRE, Paulo Reglus Neves. Paulo Freire passa a oferecer programa de educação financeira aos seus alunos. [S. l.], 25 out. 2010. Disponível em: <https://www.dsop.com.br/paulo-freire-passa-oferecer-programa-de-educacao-financiera-aos-seus-alunos/>. Acesso em: 19 fev. 2022.

NO BRASIL, 59,4 milhões de consumidores estão negativados: Agência Brasil. Porto Alegre, 19 fev. 2022. Disponível em: 19/02/2022. Acesso em: 19 fev. 2022.

PRIMO Rico. [S. l.], 26 fev. 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/c/ThiagoNigro>. Acesso em: 26 fev. 2022.

S.A., Nu Pagamentos. Nubank. [S. l.], 26 fev. 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/c/Nubank>. Acesso em: 26 fev. 2022.



A \mathbb{R} -ÁRVORE DUAL PARA SUPERFÍCIES TOPOLOGICAMENTE INFINITAS

Salazar Morales Jorge, salazarm84@hotmail.com
Vinhas Bertolini Marcel, marcelvbertolini@gmail.com

Universidade Federal do Pará

Resumo: *Vamos definir superfícies hiperbólicas, laminações geodésicas mensuráveis, e \mathbb{R} -árvores. Em seguida, mostramos o resultado principal, da existência de uma \mathbb{R} -árvore dual a uma laminação geodésica mensurável em uma superfície infinita.*

Palavras-chave: *superfície infinita, laminação geodésica mensurável, \mathbb{R} -árvore dual.*

INTRODUÇÃO

Uma classe de funções com valor real em grupos foi introduzida por Lyndon, agora chamadas funções de comprimento de Lyndon, mostrou que um grupo é livre se, e somente se, ele admite uma função de comprimento Lyndon com valor inteiro. Ele fez a questão de quais grupos admitem funções de comprimento Lyndon com valor em \mathbb{R} . Usando a construção de Chiswell, esta questão pode ser reinterpretada como perguntar quais grupos agem livremente (por isometrias) em \mathbb{R} -árvores.

Os exemplos de tais grupos apontados por Lyndon são produtos livres arbitrários de subgrupos de \mathbb{R} . Os primeiros exemplos que não são deste tipo foram dados por Alperin Moss, os quais não são finitamente gerados. Por outro lado, Morgan e Shalen apresentam os primeiros exemplos gerados finitamente que não são produtos livres de grupos abelianos livres, e garantem a existência do \mathbb{R} -árvore dual para certas laminações mensuráveis em variedades compactas. Neste trabalho garantimos a existência da \mathbb{R} -árvore dual associada a uma superfície aberta.

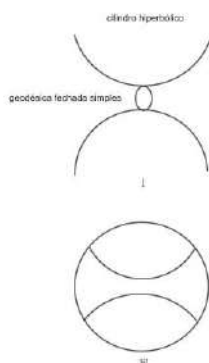
1 PRELIMINARES

1.1 Superfícies Infinitas

Começamos agora com os seguintes conceitos básicos para o estudo das laminações geodésicas mensuráveis em superfícies infinitas.

Definição. Uma superfície hiperbólica é uma variedade Riemanniana de dimensão 2 completa e localmente isométrica ao plano hiperbólico \mathbb{H} .

Figura 1

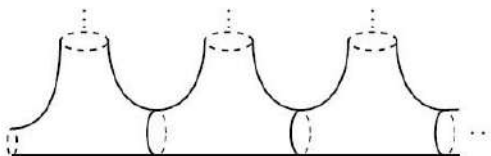


Superfície hiperbólica

Definição. Uma superfície hiperbólica de Riemann X é uma superfície de Riemann cujo espaço de recobrimento universal é isomorfo ao disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$.

Definição. Uma superfície topológica X é chamada infinita se o grupo fundamental $\pi_1(X)$ de X não é finitamente gerado.

Figura 2



Uma flauta

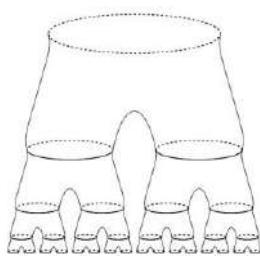
Observação. Se X é superfície de Riemann infinita, então X é superfície hiperbólica.

Sejam X uma superfície hiperbólica de Riemann infinita, e \tilde{X} o recobrimento universal de X equipado com a métrica hiperbólica, de modo que o mapa de recobrimento $\tilde{X} \rightarrow X$ é uma isometria local. O recobrimento universal \tilde{X} é isométrico ao plano hiperbólico \mathbb{H} , e a fronteira ideal $\partial_\infty \tilde{X}$ é homeomorfa ao círculo unitário S^1 . O grupo fundamental $\pi_1(X)$ é identificado com um subgrupo de isometrias de \tilde{X} tal que $\tilde{X}/\pi_1(X) = X$.

Definição. Seja $\Lambda(\pi_1(X))$ o conjunto limite da ação de $\pi_1(X)$ em $\partial_\infty \tilde{X}$. O núcleo convexo $C(\Lambda(\pi_1(X)))$ de $\Lambda(\pi_1(X))$ é o menor subconjunto convexo de \tilde{X} que tem $\Lambda(\pi_1(X))$ como sua fronteira ideal. O núcleo convexo $C(X)$ de X é o menor subconjunto convexo de X que tem o mesmo tipo de homotopia de X , equivalentemente $C(X) := C(\Lambda(\pi_1(X))) / \pi_1(X)$. O grupo fundamental $\pi_1(X)$ de X é chamado do primeiro tipo se e somente se $X = C(X)$. Equivalente a $\Lambda(\pi_1(X)) = \partial_\infty \tilde{X}$.

Definição. Uma decomposição de calças topológica localmente finita de uma superfície de Riemann infinita X é uma decomposição de X em pares topológicos de calças de modo que quaisquer dois pares de calças sejam disjuntos ou se encontrem ao longo de uma componente fronteira comum e cada subconjunto compacto de X encontra no máximo um número finito de calças.

Figura 3



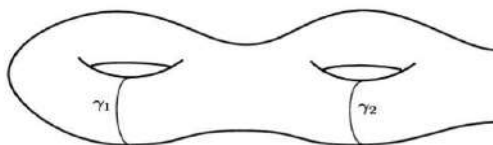
Colando um par de calças topológico em cada buraco da perna indefinidamente.

1.2 Laminações

As laminações geodésicas em superfícies foram introduzidas por W. Thurston, e podem ser consideradas como: objetos topológicos, ocorrendo como generalizações de curvas fechadas simples em superfícies ou objetos geométricos.

Definição. Seja X uma superfície hiperbólica de Riemann infinita com sua métrica hiperbólica. Uma laminação geodésica λ em X é um subconjunto fechado de X junto uma folheação por geodésicas completas simples disjuntas de X . Por uma folheação de um subconjunto fechado λ de X por geodésicas queremos dizer uma decomposição de λ em geodésicas duas a duas disjuntas completas e simples, de modo que cada ponto $x \in \lambda$ tem uma vizinhança homeomorfa a $T \times I$ onde T é homeomorfo a um subconjunto fechado de um arco geodésico compacto e I é um intervalo aberto correspondente a arcos abertos em geodésicas.

Figura 4



Uma laminação geodésica com todas suas folhas fechadas simples

Definição. Seja $V \subset M$ uma caixa de fluxo para λ com $V = U \times I$. Seja $X \subset I$ o espaço local das folhas de λ em V . Uma medida transversal μ para λ em V , é uma medida de Borel em I que tem massa total finita em qualquer subconjunto compacto de I , e que é suportada no conjunto fechado X . E de suporte total se seu suporte for exatamente X .

Definição. Uma laminação geodésica mensurável é um par (λ, μ) , formado por uma laminação geodésica λ junto com uma medida transversal associada μ .

Teorema. Sejam X uma superfície de Riemann infinita equipada com sua métrica hiperbólica, e λ uma laminação geodésica contida no núcleo convexo $C(X)$ de X . Então λ é densa em lugar nenhum de X . Em particular, se $X = C(X)$ então qualquer laminação geodésica λ em X é densa em lugar nenhum.

1.3 \mathbb{R} -Árvores

Esta subseção apresenta os conceitos necessários para garantir a existência da \mathbb{R} -árvore dual, para certas laminações geodésicas mensuráveis em superfícies topologicamente infinitas.

Definição. Um espaço métrico (X, d) é chamado geodésicamente linear, se dados $x, y \in X$ existe uma única isometria $\alpha: [0, d(x, y)] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(d(x, y)) = y$. Então denotamos por $[x, y]$ a imagem de α , e chamamos de segmento fechado em X entre x e y .

Definição. Uma \mathbb{R} -árvore é um espaço métrico (X,d) que satisfaz:

- (X,d) é geodésicamente linear;
- se $x,y,z \in X$ então $[x,y] \cap [x,z] = [x,w]$ para algum w . Este w é único, e escrevemos $w=y(y,x,z)$; e
- se $x,y,z \in X$ e $[x,y] \cap [y,z] = \{y\}$ então $[x,y] \cup [y,z] = [x,z]$.

RESULTADOS

Em [MORGAN, J.; SHALEN, P.], constroem em uma forma mais geral, o que é conhecido como a \mathbb{R} -árvore dual a uma laminação geodésica mensurável em uma superfície hiperbólica fechada. Aqui, estendemos o resultado para superfícies infinitas.

Fixamos:

X : Uma superfície hiperbólica de Riemann de tipo infinito cujo grupo fundamental $\pi_1(X)$ é do primeiro tipo;

(λ, μ) : Uma laminação geodésica mensurável com suporte λ em X ;

$(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$: A laminação geodésica mensurável induzida com suporte $\tilde{\lambda}$ em \tilde{X} ;

C : O conjunto das componentes conexas de $\tilde{X} \setminus \tilde{\lambda}$.

Proposição. Temos o seguinte:

- Cada folha de $\tilde{\lambda}$ no recobrimento universal \tilde{X} de X , é um subconjunto fechado de \tilde{X} ; e
- Se p e q são pontos de $\tilde{X} \setminus \tilde{\lambda}$, então existe um caminho $w:I \rightarrow \tilde{X}$ com $w(0)=p$ e $w(1)=q$, que é transversal às folhas de $\tilde{\lambda}$ e que encontra cada folha máximo uma vez.

Lema. Existe uma \mathbb{R} -árvore T e uma isometria $\varphi:C \rightarrow T$ tal que:

- $\varphi(C)$ gera T (ou seja, é a menor subárvore de T que contém $\varphi(C)$);
- Qualquer ponto $t \in T \setminus \varphi(C)$ é um ponto fronteira no sentido de que t separa T em duas componentes;
- A ação de $\pi_1(X)$ em C se estende unicamente a uma ação de $\pi_1(X)$ por isometrias em T . Entre qualquer dois desses \mathbb{R} -árvores existe uma isometria equivariante comutando com os mergulhos de C .

Se (λ, μ) satisfaz as condições i), ii), e iii) do lema anterior, então o \mathbb{R} -árvore dado pelo lema, será chamado de árvore dual. A árvore dual está equipada com a ação dada na parte iii).

Teorema. Sejam (λ, μ) que satisfaz i), ii), e iii) do lema anterior, e T a árvore dual. Para todo $c \in C$ o estabilizador em $\pi_1(X)$ de $\varphi(c) \in T$ é igual ao estabilizador de $c \in \tilde{X}$. Para todo $t \in T \setminus \varphi(C)$ existe uma folha de $\tilde{\lambda}$ cujo estabilizador é igual ao de t .

CONCLUSÕES

A partir disso, temos a intenção de investigar essas árvores para certas laminações geodésicas mensuráveis, por exemplo associadas a sistemas dinâmicos nessas superfícies.

REFERÊNCIAS

- ALPERIN, R.; BASS, H. Length Functions of Group Actions on Λ -Trees. Department of Mathematics, University of Oklahoma. 1987.
- ALPERIN, R.; MOSS, K. Complete trees for groups with a real-valued length function. J. Lond. Math. Soc. 31, 55-68, 1985.
- ÁLVAREZ, V.; RODRÍGUEZ, J.M. Structure theorems for Riemann and topological surfaces. London Math. Soc. (2) 69, 153-168, 2004.
- BEARDON, A. The Geometry of Discrete Groups. Springer. 1983.
- BESTVINA, M. \mathbb{R} -trees in topology, geometry, and group theory. University of Utah, Geometric Topology, Dec 1997.

- BONAHON, F. Geodesic laminations on surfaces. American Mathematical Society. 2001.
- CANTWELL, J.; CONLON, L. Endperiodic automorphisms of surfaces and foliations. Cambridge University Press, 2019.
- CASSON, A.J.; BLEILER, A. Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston. Cambridge University Press. 1988.
- CULLER, M.; MORGAN, J. W. Group Actions on \mathbb{R} -Trees. AMS. 1986.
- DO CARMO, M. Riemannian Geometry. Boston. 1992.
- CHISWELL, I. Abstract length functions in groups. Math. Proc. Cambridge. Soc 80, 451-463. 1976.
- FARKAS, H.M. Riemann Surfaces. Springer-Verlag, New York. 1980.
- HUBBARD, J.H. Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics. Matrix Editions, NY. 2006.
- LEE, J. Introduction to Topological Manifolds. Springer. 2000.
- MORGAN, J.; SHALEN. P. Degenerations of Hyperbolic Structures, II: Measured Laminations in 3-Manifolds. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 127, No. 2, pp. 403-456, 1988.
- MORGAN, J.; SHALEN, P. Free actions of surface groups on \mathbb{R} -trees. Topology Vol.30, N2, 143-154, 1991.
- MUNKRES, J.R. Topology. Prentice Hall. 2002.
- ŠARIC, D. Train tracks and measured laminations on infinite surfaces. Transactions of the American Mathematical Society, pp, 8903-8947. 2021.
- THURSTON. W. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 19 , no. 2, 417-431. 1988.



AS POTENCIALIDADES DO KIT MULTIPLANO NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DE PESSOAS DEFICIENTES

Barros, Marlon, marlonbarros009@gmail.com¹
Silva, Maiko, maikojsilva@gmail.com²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo: *A inclusão apresenta-se como um grande desafio em diversas áreas, incluindo a matemática. Nessa perspectiva, torna-se importante refletir e pesquisar sobre práticas de ensino e materiais didáticos que favoreçam práticas inclusivas a fim de reduzir as dificuldades enfrentadas nas relações entre o professor, o aluno com deficiência e o conhecimento matemático. Neste sentido, este trabalho tem o objetivo de apresentar algumas potencialidades do material didático intitulado Kit Multiplano no processo de ensino e aprendizagem de matemática envolvendo pessoas com deficiência. A pesquisa realizada foi de cunho bibliográfico, isto é, buscando resultados de outras pesquisas para a sua concretização. Os resultados obtidos apontam que o Kit Multiplano é uma ferramenta que favorece a criatividade e autonomia dos alunos com deficiência enquanto facilita a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. Além disso, é explicitado a importância do professor estar preparado para a utilização deste e de outros materiais didáticos de maneira adequada e a necessidade de mais pesquisas que visem analisar a utilização do Kit Multiplano na perspectiva da educação inclusiva, possibilitando análises mais profundas sobre as possibilidades do material.*

Palavras-chave: *multiplano, potencialidades, deficientes, matemática.*

1. INTRODUÇÃO

A inclusão de pessoas com deficiência apresenta-se como grande desafio nos ambientes escolares, tendo diversos fatores que contribuem para que não haja uma educação inclusiva de qualidade como, por exemplo, a falta de recursos para ensinar e as condições precárias de trabalho. Segundo Montoan (2015), é necessário que as escolas adotem práticas de ensino adequadas às diferenças dos alunos em geral, oferecendo possibilidades que, sem discriminação, atendam a todas as necessidades especiais dos educandos. Nesse sentido, é importante que os professores, em conjunto com a escola, proporcionem condições para que os discentes com deficiência possam, com menos dificuldades, desenvolver uma aprendizagem ampla. Logo, faz-se necessário refletir sobre equipamentos especializados, práticas e recursos de ensino com a finalidade de proporcionar condições favoráveis de aprendizagem para todos os alunos.

Lorenzato (2006, p. 22) caracteriza materiais didáticos como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”. Nessa perspectiva, os materiais manipuláveis são caracterizados como materiais didáticos e, se utilizados de forma adequada, podem facilitar a introdução e compreensão do conhecimento matemático, oportunizando novas experiências de aprendizagem que auxiliem na mediação de conteúdos em que muitos alunos apresentam dificuldades. Sendo assim, a utilização adequada de materiais manipuláveis pode favorecer a aprendizagem de pessoas com variadas deficiências, explicitando a importância do professor estar capacitado para utilizar determinado material a fim de explorar as potencialidades que este material pode oferecer para as relações de ensino-aprendizagem de diferentes tipos de alunos, contribuindo para práticas docentes inclusivas, e a importância de pesquisas que abordem sobre a temática com o objetivo compartilhar experiências e informações sobre a utilização de

determinado material didático ou sequências didáticas, favorecendo, desta forma, novas maneiras de se pensar sobre a utilização daquele determinado objeto nas relações educacionais.

Portanto, este trabalho tem o objetivo de apresentar, com base em outras pesquisas, algumas potencialidades do material didático intitulado Kit Multiplano no processo de ensino-aprendizagem de matemática de pessoas com deficiência, visando contribuir para a disseminação de informações sobre a utilização deste material e incentivar práticas inclusivas. Além disso, busca-se explicitar a necessidade da utilização de materiais didáticos alternativos a fim de proporcionar experiências enriquecedoras de aprendizagem.

2. ASPECTOS INICIAS SOBRE O KIT MULTIPLANO

A história do Kit Multiplano se inicia em 1998 com os questionamentos e reflexões do professor Rubens Ferronato, que é o criador deste material. Durante sua atuação profissional, Rubens teve contato com um aluno cego e percebeu que o mesmo apresentava muita dificuldade em matemática, pensando até em desistir da graduação, fazendo com que o professor pesquisasse e elaborasse um material para ensiná-lo. Dessa forma, foi desenvolvido o Multiplano, que inicialmente vinha com o propósito de instruir um estudante cego, mas as aulas montadas, especificamente, para esse estudante acabaram contagiando toda a turma, que pediu-lhe para ensiná-los com esse material. Atualmente, o Multiplano está sendo utilizado por pessoas com necessidades educacionais especiais e por alunos e professores de classes regulares e especializadas nas diversas modalidades de ensino de várias instituições do país (FERRONATO, 2008). Dessa forma, o professor Rubens Ferronato descobriu um modo de ensinar de forma mais interativa e que possibilitasse o entendimento dos conteúdos de Matemática para todos, sem exceção.

O Kit Multiplano é composto por multiplano retangular, multiplano circular, hastes para sólidos geométricos (prismas, pirâmides), haste reta para usar no plano cartesiano e para representar o esboço de um gráfico de função do primeiro grau, raio nas figuras circulares, parábola para usar no plano cartesiano para representar o esboço de um gráfico da função de segundo grau, hastes trigonométricas para análise do comportamento das funções trigonométricas; pinos (três tipos: com superfície esférica, com superfície plana e os pinos com detalhes em braille) para variadas aplicabilidades, como fixador de elástico, indicador de posição, unidade de contagem, e outros; Elásticos para aplicar em intervalos numéricos dos números reais, figuras geométricas como segmento de retas, e outros; Base de Operações e Barras Estatísticas, aplicado na montagem de gráficos de barras, desenho de figuras planas, e outros (FERRONATO, 2008). Logo, percebe-se a extensão de possibilidades que esta ferramenta pode oferecer para o processo de ensino-aprendizagem de matemática.

FIGURA 1 – ITENS DO KIT MULTIPLANO




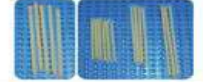



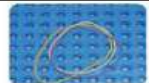


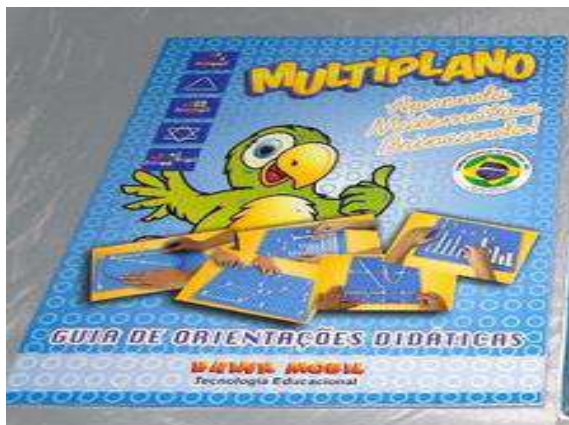
	Maleta Multiplano		Multiplano Retangular
	Hastes Trigonométricas		Multiplano Circular
	Hastes para Sólidos Geométricos		Haste reta
	Pinos		Pinos coloridos com números em Braille
	Elásticos		Parábola
	Base de Operações		Barras Estatísticas

FIGURA 2 – GUIA PEDAGÓGICO DO KIT MULTIPLANO



O Kit também apresenta um guia pedagógico (Figura 2) que traz informações sobre como estruturar o material para o ensino de diversos conteúdos como, por exemplo, trigonometria, matrizes, operações numéricas, geometrias, funções, inequações e alguns teoremas. Nesse sentido, o material apresenta-se como um instrumento relevante para o ensino de conteúdos básicos e avançados da matemática, podendo ser utilizado para os mais variados tipos de alunos, reforçando conceitos aprendidos e ou facilitando a aprendizagem para as pessoas que apresentam dificuldades na aprendizagem matemática. Entretanto, para que este recurso didático e outros possam, de maneira efetiva, auxiliar nas aulas de matemática, é necessário que estes sejam utilizados de maneira pedagogicamente correta, isto é, de maneira a construir uma aprendizagem que permita ao aluno refletir e aplicar o que foi aprendido (RODRIGUES; GRAZIRE, 2013).

3. CONTEÚDOS APLICÁVEIS

Segundo Ferronato (2008), são diversos conteúdos que podem ser trabalhados a partir do Kit Multiplano como, por exemplo, operações, tabuada, equações, proporção, regra de três, funções, matriz, determinante, sistemas lineares, gráficos de funções, funções exponenciais e logarítmicas, trigonometria, geométrica plana e espacial, estatística, entre outros. Observaremos os assuntos de matemática, que foram trabalhados com o auxílio do Multiplano, nos trabalhos realizados por Lima (2017) e Melo (2014).

Na pesquisa de Lima (2017), envolvendo quatro alunos cegos, o autor diz que não restou dúvidas quanto a utilização do Multiplano ao ensino de função afim, explicitando que a aplicação do material para o ensino desses alunos foi bem-sucedida. Com o uso do multiplano, foram analisados os aspectos relacionados à função do primeiro grau, assim como suas características, e foi feito exemplo da inclinação do gráfico, do crescimento e decrescimento de acordo com o valor do coeficiente angular e identificação dos quadrantes. Pode-se observar, a partir das considerações de Ferronato (2008), que é possível realizar as atividades que envolvem o processo de construção de gráficos. A observação do uso do material por deficientes visuais resultou na constatação de que o aluno adquire prática com extrema facilidade, auxiliando na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no processo (FERRONATO, 2008).

Melo (2014) realizou sua pesquisa com três estudantes, que são deficientes visuais, visando analisar o auxílio do Multiplano na aprendizagem do conteúdo de geometria. O autor relata que dois desses alunos tiveram progresso ao realizarem uma atividade com o assunto que foi ensinado a partir do material didático. As atividades envolviam as funções seno e cosseno. Segundo Ferronato (2008), é possível realizar, através do multiplano, atividades relativas a funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente pois o Kit Multiplano apresenta um plano Circular em que pode ser realizado a representação do círculo trigonométrico, permitindo o estudo dos conceitos e cálculos referentes a trigonometria. Com o Multiplano, todas as relações trigonométricas podem ser concretizadas, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos (FERRONATO, 2008).

Nota-se nos trabalhos de Lima (2017) e Melo (2014), que o Multiplano, de fato, auxiliou na compreensão de conteúdos da matemática, sendo uma ferramenta didática interessante e abrangente. Entretanto, é importante que as atividades e os assuntos, em conjunto com o Kit Multiplano, sejam analisados e preparados antes de serem utilizados na sala de aula. Ademais, é necessário que a linguagem utilizada seja clara e objetiva e que o aluno possa,

preferencialmente, interagir com o material para exercitar a sua curiosidade intelectual e, dessa forma, facilitar a compreensão de conceitos matemáticos e a resolução de problemas.

4. METODOLOGIA

A pesquisa é de cunho bibliográfico que, segundo Marconi e Lakatos (2003), é caracterizada por abranger bibliografias públicas relacionadas ao tema de estudo como, por exemplo, publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, teses, livros, material cartográfico, etc. É importante ressaltar que a pesquisa bibliográfica não se limita a repetir aspectos já mencionados em outras fontes, mas analisa-los e compara-los, com base no referencial teórico adotado, a fim de chegar a determinadas conclusões (MARCONI; LAKATOS, 2003). Logo, a pesquisa bibliográfica apresenta-se como um importante recurso para realizar um levantamento de informações relevantes sobre determinada temática.

Portanto, para alcançar os objetivos propostos, buscaremos subsídios em outros trabalhos a fim de analisar e elencar, de maneira mais precisa e a partir de experiências, algumas potencialidades do Kit Multiplano em relação ao processo de ensino e aprendizagem de pessoas com deficiência.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Segundo Dessbesel, Silva e Shimazaki, (2018), um dos principais desafios no ensino de matemática para pessoas surdas é a não existência de todos os termos matemáticas na Linguagem Brasileira de Sinais (LIBRAS), fazendo com que o uso de softwares e objetos como Kit Multiplano sejam úteis para favorecer a materialização de uma representação matemática e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nesse sentido, os recursos teriam ênfase nas habilidades gestuais e visuais, encorajando os alunos surdos a participarem e desenvolverem uma aprendizagem matemática ampla e ativa (DESSEBEL; SILVA; SHIMAZAKI, 2018). Assim sendo, é importante ressaltar a importância do material ser utilizado de maneira adequada para que, desta forma, de fato, possa vir a explorar as suas potencialidades.

Arnoldo Junior (2010), em sua dissertação de mestrado, apresentou uma pesquisa que buscava analisar de que forma o Kit Multiplano para aprendizagem de geometria e o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos surdos. A pesquisa, de cunho etnográfico, teve como base os estudos de cultura surda, Van Hiele e Vygotsky, apresentando caderno de campo digital, entrevistas, questionários, vídeos, fotografias e testes avaliativos baseados em Van Hiele como instrumentos de coletas de dados. Os resultados apontam uma evolução do pensamento e raciocínio geométrico por parte dos participantes, que são deficientes auditivos. Além disso, os dados foram submetidos a Análise Textual Discursiva, validando o Kit Multiplano para o ensino-aprendizagem de pessoas surdas, apresentando como principais contribuições: O desenvolvimento do pensamento geométrico, a mediação do conhecimento, a estimulação à criatividade, a diminuição de barreiras comunicativas por compensações sígnicas, a criação de ZDP, a possibilidade de nelas intervir, atuando em posições de não-aprendizagem, léxico de libras e estimulação de pensamento por sinais (ARNOLDO JUNIOR, 2010), explicitando uma abordagem interessante da utilização deste recursos no ensino fundamental de uma escola especial.

Vivian (2018) apresentou, em seu trabalho de conclusão de curso, um estudo de caso realizado com uma pessoa com paralisia cerebral a partir do Multiplano. A participante apresentava baixa visão e limitações, necessitando de determinadas adaptações para a realização determinadas atividades com o material didático. Além disso, segundo relatos de professores, a participante apresentava dificuldade em matemática, explicitando a necessidade da utilização de recursos que apresentem possibilidades de uma aprendizagem mais ampla. Os resultados apontaram que o material didático proporcionou a participante a possibilidade de visualizar os procedimentos matemáticos envolvidos durante as atividades, podendo, desta forma, pensar em estratégias para a resolução dos problemas propostos.

A dissertação de Sá (2019) apresentou uma pesquisa, que foi realizada em um centro de ensino médio no Maranhão, e teve como objetivo analisar intervenções pedagógicas com a utilização do multiplano alunos videntes e deficientes visuais. Os resultados da pesquisa apontaram que a intervenção pedagógica foi satisfatória para os estudantes videntes e com deficiência visual, contribuindo para melhorar a aprendizagem dos conhecimentos básicos da Matemática. Além disso, as pesquisas de Melo (2014) e Lima (2017) também apontam resultados satisfatórios quanto a utilização do multiplano no processo de ensino-aprendizagem de pessoas com deficiência visual, respectivamente, nos conteúdos de trigonometria e função, explicitando os pontos positivos que o material pode trazer para a aprendizagem deste público e a importância do docente estar capacitado para a utilização deste material nos ambientes escolares. É importante ressaltar que algumas peças do Kit Multiplano estão com escrituras em braille, oferecendo possibilidades para as pessoas cegas e demonstrando avanços relacionados a proposta inicial do material, que era auxiliar na aprendizagem de um aluno com deficiência visual.

A partir dos resultados obtidos nas pesquisas mencionadas, é possível perceber que o Kit Multiplano é uma ferramenta didática que pode contribuir para a redução das dificuldades enfrentadas no processo de ensino-aprendizagem de matemática de pessoas com e sem deficiência. Além disso, podemos elencar, com base nos aspectos comuns presentes nas pesquisas apresentadas, as seguintes potencialidades: Mediação do conhecimento, estímulo a criatividade, postura ativa e habilidades funcionais de visão e tato (para deficientes auditivos), audição e tato (para deficientes visuais). Além disso, este material didático apresentou-se como uma importante ferramenta para estimular a construção do pensamento algébrico e geométrico, facilitando as relações de transposição didática e, conseqüentemente, estimulando a construção de um ambiente escolar mais inclusivo e participativo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na atualidade, a educação para alunos com deficiência apresenta-se como um grande desafio para os docentes. Nesse sentido, a matemática que é considerada, por muitos, como uma das disciplinas mais difíceis da educação básica apresenta determinados desafios associados a práticas inclusivas no ambiente escolar como, por exemplo, a ausência de termos matemáticos para libras. Nessa perspectiva, é importante refletir e pesquisar sobre materiais didáticos e abordagens que visem contribuir para amenizar as dificuldades enfrentadas por alunos portadores de necessidades especiais. Portanto, o Kit Multiplano apresenta-se como uma ferramenta extremamente interessante e relevante para mediar as relações de ensino-aprendizagem de alunos com ou sem deficiências.

O Kit Multiplano possui possibilidades interessantes para as relações envolvendo o professor, o aluno e o conhecimento matemático, apresentando determinadas potencialidades que podem facilitar a aprendizagem de diversos conteúdos enquanto estimulam as habilidades funcionais e a criatividade dos alunos, reduzindo as dificuldades que estes podem ter. Entretanto, é necessário hajam mais pesquisas sobre o assunto a fim explicitar mais potencialidades deste recurso e compartilhar, detalhadamente, experiências e práticas de ensino envolvendo este recurso para que, desta forma, os docentes possam ter mais fontes de pesquisas que contribuam para uma capacitação docente quanto a utilização deste recurso nos ambientes educacionais.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para outros relacionados a temática da educação inclusiva e sirva como incentivo para práticas docentes relacionadas a utilização de objetos manipuláveis e outros recursos que possam auxiliar na prática docente, promovendo novas experiências de aprendizagem, uma postura ativa dos alunos na construção de seus conhecimentos, a redução nas dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão de conceitos matemáticos e auxílio na introdução de uma postura inclusiva.

REFERÊNCIAS

- ARNOLDO JUNIOR, Henrique. **Estudo Do Desenvolvimento Do Pensamento Geométrico Por Alunos Surdos Por Meio Do Multiplano Do Ensino Fundamental**. 2010. Dissertação de Mestrado. PUCRS.
- DESSBESEL, R. S.; SILVA, S. C. R.; SHIMAZAKI, E. M. **O Processo De Ensino E Aprendizagem De Matemática Para Alunos Surdos: Uma Revisão Sistemática**. Ciênc. Educ., Bauru, v. 24, n. 2, p. 481-500, 2018.
- FERRONATO, R. **Manual de utilização do multiplano**. Cascavel: Multiplano, 2008.
- FERRONATO, R.; HIRATA, F. **A História Do Professor Criador Do Método Que Tem Revolucionado O Ensino Da Matemática**. Toledo Paraná, p. 8 - 8, 16 jul. 2017.
- LIMA, Tiago Souza. **Multiplano como recurso didático para o ensino de função afim a alunos deficientes visuais**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. UFPB.
- LORENZATO, Sérgio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 1 ed. Campinas: Autores Associados, 2006.
- MANTOAN, M.T.E. **Inclusão Escolar: o que é, por que, como fazer**. São Paulo, Summus, 2015.
- MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5 ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2003.

MELO, Luciano Marques de. **O Ensino De Trigonometria Para Deficientes Visuais Através Do Multiplano Pedagógico**. 2014. 99 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

RODRIGUES, F.C; GAZIRE, E.S. **Reflexões Sobre Uso De Material Didático Manipulável No Ensino De Matemática: Da Ação Experimental À Reflexão**. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

SÁ, Raimunda Maria Barbosa de. **O Multiplano No Processo De Ensino Da Matemática: Intervenções Educacionais Para Estudantes Com Deficiência Visual E Estudantes Videntes Com Dificuldade De Aprendizagem**. 2019. 170 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Gestão de Ensino da Educação Básica) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís.

VIVIAN, Clarice Fonseca. **O Multiplano® Como Instrumento De Aprendizagem: Um Estudo De Caso Sobre Pessoa Com Paralisia Cerebral**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Pampa.



CAOTICIDADE: DETERMINAÇÕES SEGUNDO O EXPOENTE DE LYAPUNOV

Santos, Vinícius, viniciuslattes1999@gmail.com ¹

Nascimento, Marcio (Orientador), marcionufpa@gmail.com ²

1 Resumo

Desenvolveremos um conceito amplamente reverberado em diversas áreas do conhecimento, modelado por ramos teóricos distintos bem como Matemática, Física e nas diversas engenharias. Mas, o que seria o Caos? Uma vez compreendido que é possível encontrar esta palavra em diversos contextos, reforçamos que nossa conceituação se desenvolve com a discussão teórica da caoticidade, afinal esta será abordada com noções que conotam instabilidade, regularidade e aleatoriedade matematicamente. Dentre diversas formas de se definir a caoticidade, Alligood (1996, p. 110) conceitua para a dinâmica a caoticidade sobre órbitas. De modo que define órbita caótica considerando uma aplicação invariante da reta e um conjunto limitado de uma órbita desta aplicação. Nessa conformidade, uma órbita será caótica se esta órbita não for assintoticamente periódica e o respectivo expoente de Lyapunov da órbita for maior que zero.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Caos. Expoente de Lyapunov.

2 Órbita caótica

Considere em uma condição inicial um ponto x_0 que está próximo de um ponto p sobre uma aplicação f . No início da órbita de x_0 , é possível vislumbrar diversos comportamentos resumidos em estabilidade e instabilidade. Quando p é um ponto repulsor observa-se separações ao longo

¹Universidade Federal do Pará - UFPA.

²Universidade Federal do Pará - UFPA.

da órbita numa progressão exponencial - isto é, cada iterado é multiplicado por $|f'(p)| > 1$. Retomando que se dissermos que p é um ponto periódico de período n e se $|(f^n)'(p)| \neq 1$, então p é um ponto hiperbólico e $(f^n)'(p)$ é o multiplicador do ponto periódico. Desse modo, dizemos que a razão exponencial de separação por iterado é $|f'(p)|$ quando p é hiperbólico repulsor. Mas lembre que se $|f'(p)| < 1$, então estamos diante de um ponto atrator. Ou seja, a órbita de x_0 próximo de p pode ser atraída para uma bacia. Esta órbita exibirá um comportamento convergente, a distância entre o ponto da órbita e o "coletor" mudará pelo fator $|f'(p)| < 1$. Desse modo, se a órbita se aproxima do atrator, a pequena distância que este x_i está de p se encolhe.

Definição 2.1 *Seja f uma aplicação diferenciável da reta. O número de Lyapunov $L(x_0)$ da órbita $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é definido, claro, se existir, como o limite*

$$L(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| \cdots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (1)$$

Definição 2.2 *O Expoente de Lyapunov $h(x_0)$ é definido, se existir, como o limite*

$$h(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot [\ln |f'(x_0)| + \cdots + \ln |f'(x_n)|]. \quad (2)$$

Observação 2.1 *Veja que h existe se, e somente se, L existe e não é nulo, bem como é verdade que $\ln L = h$. Números e expoentes de Lyapunov não estão definidos para algumas órbitas. Particularmente, uma órbita contendo um ponto x_i com $f'(x_i) = 0$, resultará na não existência do expoente de Lyapunov.*

Veja que estudar o Expoente de Lyapunov é estudar o desenvolvimento da teoria da estabilidade em dinâmica, e consecutivamente, entender a discussão da evolução dos sistemas e seus comportamentos. Conhecer o valor $L(x_0)$ significa poder interpretar a natureza divergente, dissipativa ou conservativa de um sistema dinâmico. Além disso, vale frisar que o Expoente de Lyapunov descreve a velocidade com a qual dois pontos próximos se aproximam ou afastam.

Segue da definição que o número de Lyapunov de um ponto fixo x_0 para uma aplicação unidimensional f é $|f'(x_0)|$, ou equivalentemente, o expoente de Lyapunov da órbita é $h = \ln |f'(x_0)|$. Se x_0 é um ponto periódico de período k , então é verdade que o expoente de Lyapunov é

$$h(x_0) = \frac{\ln |f'(x_0)| + \cdots + \ln |f'(x_k)|}{k}.$$

Observação 2.2 *Números e expoentes de Lyapunov são sobretudo médias. Note que o número de Lyapunov é a média geométrica dos módulos das derivadas calculadas nos $n + 1$ iterados de x_0 . Mas também, o expoente de Lyapunov é a média aritmética do logaritmo natural do módulo das derivadas calculadas nos $n + 1$ iterados de x_0 .*

Proposição 2.1 *Seja f uma aplicação sobre a reta real. O expoente de Lyapunov da órbita $O[x_0]$ periódica de período k é $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \ln |f'(x_i)|$.*

Proposição 2.2 *Se o expoente de Lyapunov da órbita de x_0 sobre a aplicação f é h , então o expoente de Lyapunov da órbita de x_0 sobre a aplicação f^k é hk , para $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Definição 2.3 *Seja f um difeomorfismo. Uma órbita $O[x_0] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é dita assintoticamente periódica se convergir a uma órbita periódica quando $n \rightarrow \infty$. Isso significa que existe uma órbita periódica $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, y_1\}$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0. \quad (3)$$

Observação 2.3 *Órbitas as quais obedecem sequências de Cauchy são exemplos diretos de órbitas assintóticas. Dado que uma destas órbitas é periódica então a outra deverá ser no mínimo assintoticamente periódica.*

Observação 2.4 *Qualquer órbita que é atraída para uma bacia é assintoticamente periódica.*

Exemplo 2.1 *Se $x_0 = \frac{1}{2}$, então $O[x_0]$ é assintoticamente periódica para T_2 e F_4 . Veja que para as duas aplicações, após dois iterados a órbita coincide com o ponto fixo $x = 0$.*

Observação 2.5 *Veja que no exemplo anterior a órbita recaiu precisamente sobre uma órbita periódica. Nestes casos, será interessante compreender a definição de órbitas assintoticamente periódicas como eventualmente periódicas.*

Teorema 2.1 *Seja f uma aplicação da reta. Se a órbita $O[x_0]$ de f : satisfizer $f'(x_i) \neq 0$ para todo i e for assintoticamente periódica à órbita periódica $\{y_0, y_1, \dots\}$ então as duas órbitas possuem os mesmos expoentes de Lyapunov, isto claro, supondo a existência destes limites.*

Após definir o expoente de Lyapunov h de uma órbita como a média aritmética do logaritmo natural dos módulos das derivadas calculadas nos $n + 1$ iterados de x_0 - sobretudo como expansões médias de \ln por iterados, podemos desenvolver interpretações sobre h em casos especiais, por exemplo, para um ponto fixo ou órbita periódica. E nestes determinados casos podemos expressar h em termos das derivadas, ponderar sobre a convergência de órbitas a outra órbita periódica e verificar que estas possuem o mesmo expoente de Lyapunov. Veremos a seguir nesta subseção casos de dinâmicas de órbitas interessantes, quando nossos determinados casos especiais não envolvem órbitas assintoticamente periódicas.

Definição 2.4 *Sejam f um difeomorfismo em \mathbb{R} e $O[x_0]$ uma órbita limitada de f . Diremos que $O[x_0]$ é uma órbita caótica se: $O[x_0]$ não for assintoticamente periódica e se o expoente de Lyapunov é maior que zero, $h(x_0) > 0$.*

Exemplo 2.2 *A aplicação Baker de parâmetro $\mu = 2$, $B_2(x) = 2x(\text{mod}1)$, possui expoente de Lyapunov positivo nos pontos diferenciáveis - e, portanto as órbitas desses são caóticas. Tal aplicação não é contínua, e portanto não diferenciável em $x = \frac{1}{2}$. Restringindo nossa atenção às órbitas que não recaem sobre $x = \frac{1}{2}$, podemos observar que*

$$\begin{aligned} h(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \ln |B_2'(x_i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \ln |2| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln |2|}{n+1} = \ln |2|. \end{aligned}$$

Portanto, todo $x \neq \frac{1}{2}$, ou melhor, toda órbita de $x_0 \in [0, 1]$ ao longo de B_2 que diverge do ponto $\frac{1}{2}$ e não é assintoticamente periódica é uma órbita caótica. Além disso, se $x_i \neq \frac{1}{2}$ para todo i , então $h(x_i) = \ln 2$.

Exemplo 2.3 *Sejam q um número irracional e $f(x) = (x + q)(\text{mod}1)$ uma rotação irracional. Embora, f não seja contínua em um intervalo, já sabemos que está em S^1 . Observe que f apenas rotaciona cada ponto por um ângulo fixo e portanto, é contínua. Como nenhum ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação irracional concluímos que f não possui órbitas periódicas, e portanto não possui também órbitas assintoticamente periódicas. Além disso, por se tratar de uma rotação irracional todas as órbitas de f são densas no S^1 . No entanto, ainda assim não*

existem órbitas caóticas, uma vez que o expoente de Lyapunov de qualquer órbita é 0. Veja que

$$\begin{aligned}h(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \ln |1| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Observação 2.6 No exemplo anterior vimos um caso de órbita limitada a qual não era assintoticamente periódica. Quando estivermos diante desta situação e a aplicação não possuir a dependência sensível às condições iniciais diremos que esta órbita é quase-periódica.

Exemplo 2.4 Uma vez que $|T_2'(x)| = 2$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$, é direto concluir que o expoente de Lyapunov de qualquer órbita que não recaia sobre o ponto $\frac{1}{2}$ é $\ln 2$. Desse modo, qualquer órbita que fuja do ponto $\frac{1}{2}$ e não é assintoticamente periódica é portanto caótica. Além disso, qualquer órbita assintoticamente periódica é na verdade periódica. Veja que se uma órbita é periódica então esta possui um itinerário que se repete. No caso de $T_2(\Lambda)$ (aliás, como o conjunto de Cantor Λ é não enumerável) há infinitos itinerários que não se repetem os quais correspondem a órbitas caóticas distintas. Desse modo, T_2 possui infinitas órbitas caóticas. É válido observar também que, uma vez que a derivada de $T_2^k(x)$ é 2^k , então todas as órbitas periódicas são fontes e estas não atraem nenhuma órbita.

Referências

- [1] ABDENUR, F.; FRANÇA, L. F. N. **Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um**. Rio de Janeiro: Publicações Matemáticas, 2007.
- [2] ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. Nova York: Springer-Verlag, 1996.
- [3] DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2. ed. Addison-Wesley, Menlo Park California: Westview Press, 2003.
- [4] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Vol. 1, 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [5] NASCIMENTO, M. L. do. **Semana do Infinito: alusiva a I Semana do Infinito da FAC-MAT**. Belém: EditAedi/UFPA, 2018.
- [6] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. New York: McGraw-Hill Science, 3rd edition, 1976.



CARTEADO DA DIVISIBILIDADE E DA CONGRUÊNCIA MODULAR

NETO, Oséas Guimarães Ferreira, oseas.neto3234@escola.seduc.pa.gov.br¹

NUNES, Marly dos Anjos, marlynunes@ufpa.br²

QUADROS, Glenda de Fátima Amorim, glendaamorimquadros@gmail.com³

¹Secretaria de Educação do Estado do Pará

²Universidade Federal do Pará

³Universidade Federal do Pará

Resumo: *Esse trabalho pretende fornecer aos professores do ensino básico e do ensino superior alternativas didático metodológicas, através do uso do jogo carteadado, como estratégia para a melhoria da qualidade de ensino, dos conteúdos do eixo Números, baseados na BNCC, para o ciclo fundamental II e médio, bem como na disciplina Teoria dos Números na graduação, com o objetivo de promover o desenvolvimento junto aos alunos de habilidades no reconhecimento e uso dos critérios de divisibilidade, da mesma forma o de relacionar a divisibilidade com a teoria da congruência modular, oportunizando uma conexão entre os conteúdos da Educação Básica e o Ensino Superior. Dessa forma, apresentamos essa alternativa lúdica, que já foi aplicada no laboratório de ensino, como instrumento de aprendizagem acessível e acertiva nos três ciclos de ensino.*

Palavras-chave: *Carteadado, Critérios de Divisibilidade, Congruência Modular, Teoria dos Números.*

INTRODUÇÃO

Esse trabalho surge da necessidade de oferecer alternativas metodológicas práticas ao ensino de matemática, em especial a unidade temática Números, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018, uma vez que praticamente todos os conteúdos de Aritmética se concentram nessa unidade. Com essa estrutura curricular, os conteúdos são abordados dentro de uma visão de progressão vertical em torno dos objetos de conhecimento e habilidades apresentadas ao longo dos eixos, de forma que as construções e procedimentos acerca dos conceitos sejam conectados e ampliados ao longo de todo o processo. Nesse sentido:

“A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.” (BRASIL, BNCC, 2018. p.270)

No entanto, dentro do contexto escolar o que se percebe é uma abordagem do eixo de Números voltada principalmente para a resolução de algoritmos, com escassa ênfase ao olhar qualitativo, investigativo e associativo em torno das propriedades que os envolvem. É no ensino fundamental II, que assuntos importantes da Aritmética, tais como: múltiplos, divisores, divisão euclidiana e critérios de divisibilidade são apresentados, porém o que se verifica na prática é que essa apresentação está voltada apenas a exposição simples de um conjunto de regras e cálculos desconectados de situações cotidianas, concretas, não proporcionando ao aluno percepções de implicações gerais que seus conceitos e ideias podem proporcionar.

Essas implicações convergem para uma preocupação concreta sobre o ensino da matemática, no que se configura uma abordagem fragmentado e independente dos tópicos presentes no eixo Números do currículo. Nessa perspectiva, verifica-se a causa de uma série de paradigmas e insucessos relacionados ao interesse e aprendizagem matemática. Assim, observamos no uso do jogo de cartas a possibilidade de explorar conceitos e resultados matemáticos de grande importância, pois usamos a ludicidade para conectar conteúdos e promover um uso prático dos tópicos abordados, conforme verificado nos documentos oficiais.

pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (BNCC, 2018, p. 276).

Mas devemos tomar muito cuidado para que o jogo tenha um propósito matemático de ajudar enquanto ferramenta de obtenção de habilidades dessa área de conhecimento, fazendo com que ele favoreça a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de competências e habilidades, como afirma Smole:

O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE, 2007, p. 9)

Dessa forma, as ações a serem aplicadas com a finalidade de facilitar e auxiliar o professor durante a execução dessas ações, fazendo com que ele tenha um apoio nas tarefas de planejamento de mediação do jogo como recurso didático, bem como no desenvolvimento da ludicidade inerente ao jogo, além de todo o seu potencial educativo. Para isso, será preciso o planejamento de uma sequência didática efetiva para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Sob esse ponto de vista.

Queremos salientar que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. (BORIN, 2002, p. 8)

Outra importante contribuição do uso do jogo está na conexão dos conteúdos abordados até o ensino superior, uma vez que ele também pode ser usado nesse nível de ensino com a devida adequação para a notação de congruências, reforçando assim a sua importância na sequência didática do ensino vertical que encontramos nos currículos enquanto prática metodológica.

RECURSOS DA DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA

Elaboramos o jogo de mesa Carteadado da Divisibilidade e Congruência para ser aplicado em sala de aula do ensino básico ao superior. O jogo foi construído tendo como base a disciplina de Teoria dos Números com enfoque nos critérios de divisibilidade de números primos e compostos e na teoria das congruências, com destaque as propriedades operatórias. Essa atividade é uma alternativa metodológica prática para o ensino da Matemática, nos mais variados níveis de aprendizagem, além de possibilitar e fortalecer habilidades diversas, como atenção, interação, memória, raciocínio lógico, planejamento, tomadas de decisão de modo a minimizar as dificuldades apresentadas nos conteúdos apresentados acima.

O jogo é de fácil compreensão, uma vez que utilizamos a mesma estrutura lógica do “carteadado uno”, ou seja, uma atividade que já faz parte da rotina da grande maioria dos estudantes, o que favorece a receptividade dos alunos e promove maior engajamento na atividade. Outro aspecto que cabe destacar é que no referido jogo podemos promover variações que dependem do número de participantes, dos critérios de divisibilidades envolvidos, das propriedades operatórias de congruência e da quantidade de cartas envolvidas, ampliando assim as possibilidades lúdicas metodológicas do jogo.

OBJETIVOS

Geral:

Fornecer ao professor, seja da educação básica ou mesmo do ensino superior, um produto educacional (jogo) de baixo custo a fim de promover uma alternativa didática metodológica que possibilite uma melhoria da qualidade do ensino dos conteúdos relacionados.

Específicos:

- Desenvolver junto aos alunos a habilidade de uso dos critérios de divisibilidade de forma rápida para números com muitos dígitos;
- Reconhecer os critérios de divisibilidade como um importante instrumento para a realização de cálculos mentais;
- Relacionar os critérios de divisibilidade com a teoria das congruências.

METODOLOGIA

Foi elaborado um planejamento de materiais referidos ao laboratório de matemática, dentre eles o jogo que será o centro do nosso trabalho, chamado “Carteado da Divisibilidade e Congruência Modular”, cuja base é a disciplina de Teoria dos Números com enfoque na parte de divisibilidade e congruência modular, visando não somente ser o suporte metodológico para o ensino de Matemática, mas também fornecer habilidades variadas, como atenção, interação, memória, raciocínio lógico, planejamento, tomadas de decisão de modo que minimize suas dificuldades.

Segue abaixo as etapas que foram desenvolvidas para efetuar o trabalho:

1ª Etapa – Discutimos acerca do assunto colocado em pauta por um grupo de discentes e docentes pertencentes ao Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAINMAT), ou seja, a divisibilidade e congruência modular com a finalidade de criar um material concreto de baixo custo que pudesse ser utilizado em aulas por docentes e para os discentes como forma de aprendizado diferenciado.

2ª Etapa – Pensamos em um jogo que fosse de fácil acesso e que a maioria tivesse algum conhecimento prévio sobre o jogo, assim escolhemos o carteado, pois avaliamos que por ser um jogo cuja a estrutura é bastante popular, puderam ser feitas as modificações necessárias para o conteúdo que queríamos esclarecer.

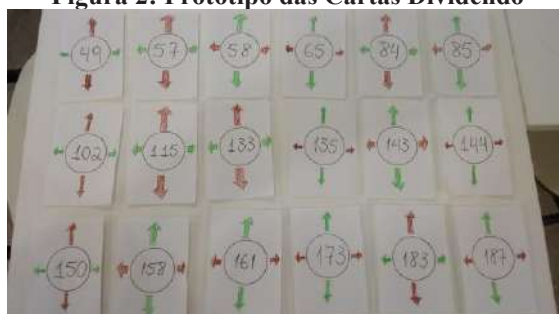
3ª Etapa – Confeccionamos um protótipo do “Carteado da Divisibilidade”, usando papel A4 (ver figura 1) com formato retangular em tamanho x por y , onde as cartas eram divididas em dois grupos: as cartas divisoras (grupo azul e preto) e as cartas dividendo (ver figura 2), sendo todas as cartas do mesmo tamanho, mas de fácil diferenciação.

Figura 1: Protótipo das Cartas Divisoras



Fonte: Os Autores

Figura 2: Protótipo das Cartas Dividendo



Fonte: Os Autores

4ª Etapa – Em um outro momento, utilizamos o aplicativo *Canva*, para confeccionar as cartas na forma digital (ver figura 3) e foi nesse momento que incluímos as cartas em notação de congruência modular e dividimos o jogo em níveis de acordo com o ciclo de ensino, fazendo com que o nosso jogo tivesse o nome “Carteado da Divisibilidade e Congruência Modular”.



5ª Etapa – Testamos o jogo para verificar se, de fato, alcançava nossas expectativas e se conseguiríamos assimilar os conceitos ministrados pelo docente relacionado a esse assunto.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O jogo Carteado da Divisibilidade e Congruência Modular pode ser graduado em quatro níveis, a depender da série em que o aluno esteja: Nível 1 (6º e 7º Anos do Ensino Fundamental II), Nível 2 (8º e 9º Anos do Ensino Fundamental II), Nível 3 (Ensino Médio) e o Nível 4 (Graduação), sendo que em todos os níveis há possibilidades de variações do jogo que dependem do número de participantes e da quantidade de divisores / módulos envolvidos.

REGRAS DO JOGO

Objetivo: Descartar todas as cartas divisores, tendo sido ensinado o assunto de divisibilidade e congruência modular, antes do jogo iniciar.

Descrição: O jogo dispõe de 200 cartas entre cartas divisoras e cartas divididos, com divisores primos menores ou igual a 13, ou seja, (2, 3, 5, 7, 11 e 13) e com divisores compostos, desde que formados pelos mesmos fatores primos citados acima, como por exemplo (6, 15, 21, 33 e 35) na notação de divisibilidade e a mesma quantidade de cartas na notação de congruência, cujos os módulos são os mesmos usados na divisibilidade.

Público-alvo: Discentes a partir do 6º Ano do Ensino Fundamental e docentes do curso de matemática ou que tenham a disciplina Teoria dos Números na sua grade curricular.

Composição: 200 cartas.

Instruções:

1. A partida pode ser disputada por até seis participantes ou grupos;
2. Os jogadores ou grupos recebem as mesmas cartas, inclusive em quantidade, de acordo com o nível: Nível 1 (20 cartas), Nível 2 (30 cartas), Nível 3 (40 cartas) e Nível 4 (50 cartas);
3. Escolhe-se a sequência dos jogadores e se inicia a partida;
4. O primeiro jogador retira uma carta dividendo e em seguida descarta os divisores que possui;
5. Caso o jogador descarte uma carta que não seja divisor da carta dividendo, a referida carta retorna para as mãos do jogador e o mesmo é obrigado a comprar uma nova carta divisora;
6. Não é permitido descartar mais de uma carta por divisor numa mesma jogada;
7. A partida se desenvolve com os demais participantes se alternando nas jogadas;
8. Os participantes devem fiscalizar e conferir os descartes de cada jogador;
9. O jogador que descartar todas as suas cartas primeiro será o vencedor;
10. Caso termine as cartas dividendo sem que nenhum jogador tenha descartado todas as suas cartas, deve-se embaralhar todas as cartas dividendo já usadas e retomar o jogo de onde ele parou, até que se obtenha um vencedor.

CONCLUSÕES

A atividade proposta nesse trabalho ainda não foi aplicada em sala de aula, apenas entre os discentes no laboratório de ensino, porém acreditamos que esse jogo, uma vez cuidadosamente planejado, pode oferecer aos docentes do ciclo básico e do ensino superior uma alternativa didática prática e lúdica ao ensino do eixo Números baseado na BNCC, bem como ao ensino de congruência modular para os alunos da graduação. Com o uso do jogo esperamos confirmar o importante papel que tais práticas têm de proporcionar o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, organização, atenção e concentração, aspectos tão necessários para o aprendizado da Matemática, conforme defendido por (BORIN, 2004). É oportuno mencionar também que o jogo promove uma ligação importante entre os ciclos de ensino fundamental, médio e superior, ratificando portanto a sua necessidade de aplicação.

REFERÊNCIAS

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo, SP: IME-USP, 2004. 100 p.

BRASIL, *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em 01 de março de 2022.

GUIMARÃES, O. *Aplicações de Divisibilidade e Congruência Modular: do Ensino Básico ao Superior*. Dissertação (Mestrado/ PROFMAT) - Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Pará – Faculdade de Matemática. Bragança. 2021.

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2011. 169 p

LACERDA, J. C. A. *Praticando a Aritmética*. Rio de Janeiro, 8ª Edição. Editora XYZ, 2014.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I. S. V. MILANI, E. *Jogos de matemática de 6º a 9º ano*. Porto Alegre, RS: Artmed, 2007. 104 p.



CRIPTOGRAFIA EM FUNÇÕES POLINOMIAIS

Pontes, Edel Alexandre Silva, edel.pontes@ifal.edu.br¹
Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos, bruno.silva@im.ufal.br²
De Oliveira, Elinelson Gomes, elielson.olivera@ifal.edu.br³
Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura, helloyne@hotmail.com⁴
De Melo, Camila Marques, camila_mmarques@hotmail.com⁵
Lira, Lidianne Leite e, lidianne.lira@ifal.edu.br⁶

¹Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

²Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

³Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

⁴Instituto Federal de Alagoas Campus Maceió

⁵Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

⁶Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

Resumo: Os altos índices de retenção dos alunos nas avaliações de matemática na educação básica têm provocado inúmeras discussões entre educadores, em busca de uma solução ideal para minimizar esse indicador. Faz-se imprescindível encontrar práticas educativas que possam estimular o educando a enxergar a matemática como uma ferramenta primordial e útil para seu dia-a-dia, de modo a formar cidadãos críticos, prontos para novos desafios e tomadas de decisões. Esse trabalho objetivou recomendar uma prática pedagógica vinculada a uma ferramenta matemática para alunos que estejam entre o final do ensino fundamental e o início do ensino médio. O modelo matemático proposto fundamenta-se em empregar a criptografia para o entendimento de funções polinomiais. As reflexões sobre a importância da utilização da criptografia no ato de ensinar e aprender matemática na educação básica demonstra evidenciar da necessidade de uma mudança de postura do professor na reconstrução de um modelo pedagógico que minimize as defasagens entre a teoria apresentada em sala de aula e a prática do cotidiano do educando.

Palavras-chave: Função Polinomial; Criptografia; Ensino de Matemática

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento científico e tecnológico do mundo contemporâneo demanda uma quebra de paradigma educacional no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação básica, tendo em vista as múltiplas aplicações originadas por essa ciência das coisas e da natureza.

Devido a uma formação estritamente conservadora e metódica, uma das primeiras dificuldades encontradas, por educadores, é definir quais estratégias devem ser alimentadas no intuito de apresentar práticas educativas eficientes e motivadoras no aprendizado de matemática. Parece-nos que os educadores ainda não perceberam a verdadeira essência de um mundo extremamente tecnológico, e a cada momento, os modelos matemáticos se tornam apropriados em seu cotidiano e de seus aprendizes.

Nem sempre é fácil abdicar uma determinada atividade padrão e recomendar outra, muitas vezes os professores, dito ainda transmissor de conhecimento, não dispõe de alternativas viáveis para o incremento de uma metodologia que aproxime o aluno do seu ambiente de convívio. O mundo contemporâneo exige que as propostas metodológicas para o ensino de matemática estejam sincronizadas com toda a evolução científica e tecnológica, muitas vezes produzidas no ambiente escolar. É necessário questionar qual a verdadeira função docente que permita propor uma mudança de paradigmas na transformação estratégica do processo ensino e aprendizagem de matemática na educação básica.

Ensinar matemática e aprender matemática, nos níveis básicos de educação, transforma educador e educando, respectivamente, em sujeitos proativos, na construção de um processo educativo compartilhado, atrelado a situações de uma aprendizagem com significados e sincronizada com a realidade dos envolvidos. “O significado consiste, basicamente, em proporcionar para o aluno um conhecimento que esteja realmente vinculado à sua realidade” (PAULA et al, 2016, p.26).

Esse trabalho objetivou recomendar uma prática pedagógica vinculada a uma ferramenta matemática para alunos que estejam entre o final do ensino fundamental e o início do ensino médio. O modelo matemático proposto fundamenta-se em empregar a criptografia para o entendimento de funções polinomiais. A partir do momento que conceitos matemáticos são estimulados, por uma prática educativa eficiente, a defasagem existente entre o cotidiano do aprendiz e a escola que frequenta suaviza drasticamente.

Desenvolvimento

Atualmente, na era digital, a vida das pessoas tornou-se mais práticas devido à internet e a comunicação entre jovens estudantes são geralmente feitas através de um sistema virtual, preferencialmente, o WhatsApp. Imagine a possibilidade de criar uma ferramenta capaz de remeter uma mensagem entre duas pessoas, de modo que não houvesse possibilidade de interferência de terceiros em seu deslocamento.

A ideia de criptografia nasceu exatamente dessa necessidade de se remeter mensagens, com total segurança, entre dois ou mais agentes. “A criptografia torna possível o envio de mensagens incompreensíveis para uma terceira pessoa que, eventualmente, venha a interceptá-las, mas que poderão ser lidas pelo seu destinatário, que conhece o critério para decifrar o texto encriptado”. (GROENWALD, FRANKE & OLGIN, 2005, p.43).

A palavra Criptografia, substantivo feminino, vem do latim “*cryptographia*” formado de *krypto*, (obscuro, secreto, oculto) mais *grapho* (escrita, grafia). A Criptografia incide em codificar documentos empregando uma chave antes que essas sejam comunicadas, e após sua recepção, decodificá-las, por meio de um processo de cifração.

Apesar de a Criptografia ser uma área do conhecimento bastante antiga, atualmente existe uma teoria matemática que apoia seus conceitos, por intermédio das inúmeras aplicações na transmissão de mensagens secretas. Devido ao desenvolvimento científico e tecnológico e a demanda crescente da tecnologia no mundo contemporâneo, fica percebido que a Criptografia está ficando cada vez mais usual nas bancas escolares, da educação básica, motivado fundamentalmente por um cotidiano digital.

Segundo Tamarozzi (2001), a fundamentação básica da criptografia consiste expor uma função f injetiva, entre um conjunto de mensagens escritas em um determinado sistema de símbolos para um conjunto de mensagens codificadas, camuflando eficazmente a chave para a inversão da função f .

Shokranian (2005) afirma que a possibilidade de emitir mensagens em códigos, vulgo secretas, pode servir para proteger o teor enviado contra fontes não desejadas. Neste caso, estamos abordando criptografia, já que queremos tomar a mensagem da fonte A e enviá-la para a fonte B, de forma que para a fonte B consiga ler a mensagem e saber o conteúdo da fonte A, ela carece, obrigatoriamente, de uma chave para decodificar a mensagem e, conseqüentemente, lê-la.

CONCLUSÕES

Espera-se que este artigo possa cooperar para o debate desta respeitável demanda no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação básica – a utilização de novos conteúdos que permitam aproximar o conhecimento matemático, por meio de atividades que provoquem motivação para seu aprendizado, entre os envolvidos.

Compreende-se que alterações eficazes em sala de aula só sucedem se os educadores se adaptarem da proposta recomendada e se estiverem informados das dificuldades que poderão surgir, de maneira que o educando seja o sujeito atuante em aprender matemática com significados. Não obstante, é imprescindível que a escola também harmonize a discussão do uso de novos conceitos e metodologias para o ensino e aprendizagem de matemática, entre professores e alunos, possibilitando estímulos necessários para a construção do pensamento matemático.

É importante notar que o trabalho de elaboração do pensamento matemático por intermédio da criptografia estabelece que o educador tenha o domínio dessas relações, conceitos e propriedades, como também, do processo metacognitivo do educando na assimilação de novos conhecimentos e saberes.

As reflexões sobre a importância da utilização da criptografia no ato de ensinar e aprender matemática na educação básica demonstra evidenciar da necessidade de uma mudança de postura do professor na reconstrução de um modelo pedagógico que minimize as defasagens entre a teoria apresentada em sala de aula e a prática do cotidiano do educando. Desta forma, percebe-se que o enriquecimento do estudo de matemática com novos

significados vem fortalecer a prática pedagógica, impulsionando tanto o professor a alcançar o objetivo de ensinar, como, do aluno de obter o desígnio de aprender.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Diogo et al. DIÁLOGOS PARA A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. **Seminário Temático Internacional**, p. 1-13, 2021.

DE OLIVEIRA, Thâmillys Marques; MARTINS, Danielle Juliana Silva; MONTEIRO, Willmara Marques. Quebrando paradigmas no ensino da matemática: um relato de experiência no (pro) EJA utilizando o software tux of match command. **Tecnologias na Educação**. V. 13, n.7, p. 1-10, 2015.

DE PAIVA SILVA, Giselle; DA SILVA, Adelmo Carvalho. Compreensão da linguagem matemática no 9º ano do Ensino Fundamental. **Revista de Educação Pública**, v. 29, p. 1-15, 2020.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; FRANKE, Rosvita Faelber; OLGIN, Clarissa de Assis. Códigos e senhas no Ensino Básico. **Educação Matemática em Revista-RS**, p. 41-50, 2009.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**, [S.l.], n. 38, p. 105-119, fev. 2018. ISSN 2447- 9187.

PAULA, Samantha C. R. de, RODRIGUES, Chang K., SILVA, Julio C. da. **Educação Matemática e Tecnologia: Articulando práticas geométricas**. Curitiba: Appris, 2016.

PONTES, Edel Alexandre Silva. O professor ensina e o aluno aprende: questões teóricas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. **RACE-Revista de Administração do Cesmac**, v. 4, p. 111-124, 2019.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Os Quatro Pilares Educacionais no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología**, n. 24, p. e02-e02, 2019.

SANTOS, Gabriel Xavier. Uma proposta diferenciada para o ensino e aprendizagem da matemática na educação básica. **Com a Palavra, o Professor**, v. 2, n. 4, p. 16-24, 2017.

SHOKRANIAN, Salahoddin. **Criptografia para iniciantes**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2005.

TAMAROZZI, Antônio Carlos. Codificando e decifrando mensagens. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n.45, 41-43, 2001.



ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA POR MEIO DE UM HIPERTEXTO MATEMÁTICO - HIPERMAT

Pontes, Edel Alexandre Silva, edel.pontes@ifal.edu.br¹
Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos, bruno.silva@im.ufal.br²
De Oliveira, Elinelson Gomes, elielson.olivera@ifal.edu.br³
Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura, helloyne@hotmail.com⁴
Freitas, Esther Nascimento Soares de, esther.freitas@ifal.edu.br⁵
Bastos, Tamara Moraes, tamara.bastos@ifal.edu.br⁶

¹Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

²Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

³Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

⁴Instituto Federal de Alagoas Campus Maceió

⁵Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

⁶Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

Resumo: *A matemática ensinada nas escolas e a realidade do mundo atual caminham em sentidos contrários, em um verdadeiro descompasso. Enquanto o mundo aprecia o aparecimento de novas tecnologias a matemática continua sendo digerida nos mesmos moldes do início do século XX. A utilização de novas tecnologias como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem de matemática é uma alternativa aceitável para diminuirmos as defasagens entre a teoria abstrata e a sua prática. Este trabalho de pesquisa aplicada tem como objetivo descrever as características de um ambiente interativo de ensino e aprendizagem de matemática e desenvolver um aplicativo para dispositivos móveis baseado em um hipertexto matemático virtual (Hipermat) como ferramenta pedagógica para os laboratórios de ciências e matemática da educação básica. A não linearidade do aplicativo Hipermat permite que o aluno seja curioso e busque a cada momento explicações dos conteúdos e exercícios apresentados. A importância do aplicativo Hipermat como um recurso educacional possibilita uma maior relação entre os alunos e os estoques de conhecimento, uma de suas características mais importantes é a interatividade. Espera-se que este aplicativo, o Hipermat, venha melhorar a relação de ensino e aprendizagem de matemática entre professor e aluno e que seja um produto educacional bastante atrativo e didático.*

Palavras-chave: *Ensino e Aprendizagem de Matemática; Hipertexto Matemático; Aplicativo.*

INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da existência humana, que o indivíduo sente a necessidade de transmitir as informações geradas em seu cotidiano e durante os séculos, isso vem ocorrendo através do aparecimento de tecnologias. Para Ribeiro e Cabral (2014), nos dias atuais, com o surgimento da Internet na pesquisa e do uso de computadores na educação básica, aumentam-se as possibilidades pela busca de informações e de novas metodologias adequadas para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Segundo Pontes (2013), no contexto atual, com uma sociedade em evolução do conhecimento, é necessária total e irrestrita adequação das escolas aos novos modelos de tecnologia, de tal forma, que o aluno esteja interessado e motivado na escola que frequenta.

A matemática apresentada nas escolas de educação básica e a realidade do mundo contemporâneo caminham em sentidos opostos, enquanto o mundo aprecia o aparecimento de novas tecnologias a matemática continua sendo

estudada nos mesmos moldes do início do século XX. Faz-se necessário uma quebra de paradigmas na prática pedagógica de ensinar e de aprender matemática. Na escola, os desafios encontrados pelos docentes no processo de ensino e aprendizagem de matemática são discutidos diariamente e tendo como preocupação maior as aulas com muitas expressões matemáticas e fora o contexto do aluno.

Segundo D' Ambrosio (1989), a criação de alternativas motivadoras para a compreensão da matemática é de muito valia, pois permite que o aprendiz esteja sempre interessado e pronto para novos desafios. Pontes (2016) comenta que a sociedade contemporânea reivindica que o aprender do saber matemático do aprendiz na escola, esteja em plena sintonia com o aprender do fazer matemático desse aprendiz no seu dia a dia.

Vivemos atualmente em um novo espaço de interação humana chamada espaço cibernético. Este espaço representa o conjunto de todas as memórias informatizadas e de todos os computadores. Com o espaço cibernético, temos uma ferramenta de comunicação muito diferente da mídia clássica, porque é nesse espaço que todas as mensagens se tornam interativa, ganham uma plasticidade e têm uma possibilidade de metamorfose imediata. Do espaço cibernético encontramos uma variedade de estruturas: Inteligência artificial, hipertextos, simulações, multimídia interativos, etc. Vários são os aspectos para essa mudança hábitos: • O leitor não vai se deslocar diante do texto, mas é o texto que vai se desdobrar diante de cada leitor. • O leitor pode personalizar seu programa de leitura. • O leitor passa a participar da própria redação do texto não estando na posição passiva de um texto estático. • Toda leitura é uma escrita em potencial. • Texto e mensagem se tornam matéria. No espaço cibernético qualquer elemento tem a possibilidade de interação com qualquer outro elemento presente. É como todos os textos fizessem parte de um único texto. Dessa forma o espaço cibernético está se tornando um lugar essencial de comunicação humana e do pensamento humano.

Uma alternativa bastante motivadora é a utilização de um hipertexto, como fonte principal da informação, pois cria um novo tipo de ensino e aprendizagem interativo, com múltiplas variações. O Hipertexto é um texto com conexões e sua invenção possibilitou a leitura não linear, isto é, a não segmentação do saber por sequências padrões pré-definidas. Ele estimula outra forma de conhecimento. É um conceito que diz respeito ao nosso modo de ler e escrever – fazer desdobramento – sem perda da generalidade.

O hipertexto propõe vias de acesso e instrumentos de orientação sob a forma de diagramas, de redes ou de mapas conceituais manipuláveis e dinâmicos. Desta forma, a utilização de um Hipertexto Matemático virtual é uma proposta que desperta no aprendiz a curiosidade pelo conhecimento e pelas novas formas, visando à diversão crítica e o bem-estar do envolvido. As escolas devem utilizar novas estratégias para o ensino e aprendizagem de matemática, e o uso de um hipertexto matemático virtual pode ser um fator preponderante para uma melhor assimilação dos conceitos e contas matemáticas. Não é necessário, em sala de aula, substituir a utilização dos livros didáticos pelo hipertexto, o que se faz necessário é utilizar esse novo instrumento como ferramenta metodológica no entendimento de matemática, principalmente nas aulas práticas de laboratórios.

O hipertexto é uma maneira eficiente de ler e escrever, principalmente, textos e artigos acadêmicos. O aluno tem a oportunidade de tomar suas próprias decisões. De que maneira fará a leitura do texto? A leitura deixa de ser sequenciada, passo a passo, capítulo por capítulo, e se transforma em algo não linear, onde o principal condutor desse processo é o aluno.

Este trabalho de pesquisa aplicada tem como objetivo descrever as características de um ambiente interativo de ensino e aprendizagem de matemática e desenvolver um aplicativo (para tablet ou celular) baseado em um hipertexto matemático virtual (Hipermat), como instrumento educacional para os laboratórios de ciências e matemática da educação básica. Definiremos Hipermat como um hipertexto para o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Nas últimas décadas vem se discutindo a relação entre o ensino da matemática com o desenvolvimento da inteligência. Quanto melhor a educação, quanto mais variadas as oportunidades, maior o desenvolvimento da inteligência. O uso deste Hipermat tem a característica de minimizar as defasagens na compreensão dos modelos matemáticos, tornando assim, seu aprendizado mais eficiente, dinâmico e interativo. A importância das novas tecnologias na matemática escolar permite que o aprendiz crie situações de investigação e melhore seu desempenho na matéria.

METODOLOGIA

Nossa pesquisa tem um caráter experimental e tem como principal finalidade testar hipóteses que dizem respeito a relações de causa efeito. A hipótese que queremos comprovar é: O Hipertexto matemático numérico - Hipermat é um suporte adequado, em modelos matemáticos, para a melhoria da aprendizagem, com estudantes do nível básico de ensino.

Segundo Gil (2002), uma pesquisa é experimental quando se determina um objeto de estudo, selecionam-se as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definem-se as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto.

Em uma pesquisa experimental, a hipótese é sempre comparativa. Usaremos dois grupos:

- Grupo experimental: são os participantes da pesquisa que utilizaram a ferramenta Hipermat. (Método Hipermat)
- Grupo de controle: é o grupo onde não é introduzida a ferramenta Hipermat. Os participantes utilizaram o método tradicional de pesquisa. (Método Tradicional)

É uma pesquisa experimental, pois manipulamos e controlamos variáveis independentes, observando os resultados obtidos dentro de um espaço onde ocorre o nosso problema, dispondo os elementos para explicá-lo. O universo da pesquisa é composto por estudantes do ensino básico de uma escola pública da Cidade de Rio Largo (Universo: 30 estudantes). A seleção dos estudantes foi feita por meio de uma amostragem não probabilística.

CONCLUSÕES

O Hipermat é de fato uma ferramenta eficaz no ensino da matemática, pois possibilita a construção de dados com acesso associativo, imediato e intuitivo. O estudante sente-se mais interessado na matéria pelo motivo do próprio ter domínio sobre os passos a seguir. A curiosidade desperta no estudante uma nova maneira de aprender e, conseqüentemente, leva esse estudante a buscar nossos caminhos para o entendimento dos conteúdos abordados. Com o Hipermat o processo de ensino-aprendizagem fica muito mais divertido e atraente e faz com que essa relação professor – aluno seja interativa com o objetivo sempre de buscar e aprender novos conhecimentos

Acreditamos que esta nova metodologia de ensino da matemática – Hipermat – possa contribuir efetivamente para uma aprendizagem mais eficaz e significativa desta disciplina. E cabe ao professor de matemática valorizar, cada vez mais, a disciplina, tornando-a útil, criativa e prazerosa a fim de proporcionar um aprendizado eficiente e de qualidade.

REFERÊNCIAS

- RIBEIRO, Inácio Gilvando; CABRAL, Maria de Fátima Neves. O hipertexto didático virtual e o software educacional Hot Potatoes: ferramentas pedagógicas no ensino a distância de Física. In: XI Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância. Florianópolis. 2014.
- D' AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.
- KOMESU, Fabiana. Pensar em hipertexto. Interação na internet: novas formas de usar a linguagem. Rio de Janeiro: Lucerna, v. 1, p. 98-102, 2005.
- PONTES, Edel Alexandre Silva. HIPERMAT–Hipertexto Matemático: Uma ferramenta no ensino-aprendizagem da matemática na educação básica. Revista Psicologia & Saberes, v. 2, n. 2, 2013.
- PONTES, Edel Alexandre Silva et al. O SABER E O FAZER MATEMÁTICO: UM DUETO ENTRE A TEORIA ABSTRATA E A PRÁTICA CONCRETA DE MATEMÁTICA. Revista Psicologia & Saberes, v. 5, n. 6, p. 23-31, 2016.
- SOUSA, Maria do Carmo. Produtos educacionais de Matemática elaborados por professores da Educação Básica no âmbito do NIPEM. Anais do Encontro da rede de professores, pesquisadores e licenciandos de Física e de Matemática, São Carlos, SP, 2011.



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE AUTOVALORES

Silva, Ângelo Felipe Machado, a.felipesilva712@gmail.com¹
Arruda, Suellen Cristina Queirós, sqarruda@ufpa.com.br²

¹Universidade Federal do Pará – Campus do Baixo Tocantins

²Universidade Federal do Pará – Campus do Baixo Tocantins

Resumo: *As Equações Diferenciais é uma importante área de pesquisa na matemática tanto pelo seu rigor matemático, quanto por sua multiplicidade de aplicações em diversos campos científicos, como a Física, Biologia e Engenharias. Em todas essas áreas do conhecimento, nos deparamos com fenômenos modelados a partir de equações diferenciais, tais como, o movimento de fluidos, propagação e detecção de ondas sísmicas e balanço de droga no organismo. No presente trabalho, investigamos a existência de solução para problemas de autovalores na reta com valores de contorno. O objetivo consiste em encontrar todos os valores para os quais a solução do problema é não-trivial, chamados de autovalores, e as autofunções associadas a esses autovalores. Tal problema relaciona conceitos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral, além disso, está incluso em uma grande classe de problemas de valores de contorno chamada de problemas de Sturm-Liouville, a qual possui propriedades relevantes para o seu estudo.*

Palavras-chave: *equações diferenciais, problemas de valores de contorno, autovalores e autofunções, problemas de Sturm-Liouville.*

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII solucionou diversos problemas da época, fomentando o surgimento e avanço de novos estudos. Rompendo nesse período, os estudos das Equações Diferenciais, a princípio, para solucionar problemas práticos físicos, expressaram sua relevância às diversas áreas do conhecimento, seja por apresentar uma matemática rigorosa, seja por sua multiplicidade de aplicações. Para Zill e Cullen (2001), as equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas tanto da ciência, quanto da engenharia e, salienta que por esse motivo o estudante de ciências exatas deve estudá-las.

Nas diversas áreas da ciência, como a Física, Biologia, Engenharias e outras, nos deparamos com fenômenos descritos ou modelados por meio de equações diferenciais, como o movimento de fluidos, propagação e detecção de ondas sísmicas, dinâmica de desenvolvimento de tumores e balanço de droga no organismo. Essa rica diversidade de aplicações despertaram a atenção de respeitados matemáticos no passado e, ainda tem estimulado a curiosidade de muitos outros atualmente. Além disso, Boyce e DiPrima (2015) salientam que as equações diferenciais continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica com muitas questões em aberto, e ressaltam que os modelos mais simples podem modelar um fenômeno físico importante.

Dentre os problemas estudados nas equações diferenciais, destacamos o problema de valores de contorno de Sturm-Liouville, que se trata de uma grande e importante classe de problemas da matemática. Esta classe possui resultados úteis para o estudo de equações diferenciais aplicadas a valores de contorno. Portanto, abordaremos no presente trabalho um problema incluído na referida classe conhecido como problema do autovalor envolvendo o laplaciano na reta. Estudaremos esse problema a fim de apresentar sua solução e explicitar as características herdadas dessa classe.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

Para compreendermos a resolução do problema, é de suma importância o conhecimento prévio de alguns conceitos da Álgebra Linear e de Equações Diferenciais. Usamos como referência o livro do Boyce e DiPrima

(2015), no entanto, ao decorrer do trabalho nos embasamos também em outras obras que foram importantes para o desenvolvimento do mesmo, como a de Zill e Cullen (2001).

Definição 1: Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é dada na forma

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), \quad (2.1)$$

onde p, q, f são funções contínuas em \mathbb{R} definidas em $\alpha < t < \beta$.

A equação (2.1) é dita homogênea se $r(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Caso contrário, é dita não-homogênea. Qualquer função $y = \phi(t)$ que satisfaça (2.1) é dita solução da equação.

Vamos analisar o caso em que as funções $p(t), q(t)$ são constantes e $r(t) = 0$. Seja a equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad (2.2)$$

onde a, b e c são constantes dadas. Supondo que $y = e^{rt}$ é uma solução de (2.2), podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$a(r^2 e^{rt}) + b(re^{rt}) + c(e^{rt}) = 0 \implies e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, dividindo o resultado acima por e^{rt} , se obtém

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.3)$$

Essa equação é chamada de equação característica ou equação auxiliar. Sua importância está no fato de que se r for raiz desta equação, pode-se concluir que $y = e^{rt}$ é uma solução para a equação diferencial (2.2).

Considerando r_1 e r_2 raízes reais da equação característica, então $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ serão soluções para (2.3). Assim, notamos que a equação (2.3) é uma equação do segundo grau com coeficientes reais e, portanto, podemos considerar três casos para a solução geral da equação (2.2).

1º Caso: Se r_1 e r_2 são reais e distintas, então a solução geral se dá na forma

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

2º Caso: Se r_1 e r_2 são reais e iguais, então a solução geral será

$$y = c_1 t e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \text{ com } r_1 = r_2 = -b/2a.$$

3º Caso: Se r_1 e r_2 são complexas e conjugadas, ou seja, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t).$$

Os três casos acima são importantes para a análise dos valores de λ a fim de verificar se ele é um autovalor do problema em questão.

3. ANÁLISE DO PROBLEMA

Em aplicações que envolvem equações diferenciais, é comum estabelecer dois pontos diferentes para a variável dependente y ou para suas derivadas, estes pontos pré-definidos são chamados de valores de contorno ou de fronteira. Os problemas de valores de contorno possuem uma semelhança, no aspecto das suas soluções, com as equações algébricas lineares podendo ter uma única solução, não ter soluções ou ainda, ter uma infinidade de soluções.

Os problemas de valores de contorno chamados problemas de Sturm-Liouville se apresentam da seguinte forma

$$\begin{cases} [p(t)y'(t)]' - q(t)y(t) + \lambda r(t)y(t) = 0 & \text{em } [\alpha, \beta] \\ a_1 y(\alpha) + a_2 y'(\alpha) = 0 \\ b_1 y(\beta) + b_2 y'(\beta) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Essa classe de problemas dispõe de propriedades fundamentais que são essenciais para a solução do problema de autovalor na reta, mencionadas nos teoremas abaixo.

Teorema 1: Todos os autovalores do problema (3.1) de Sturm-Liouville são reais.

Teorema 2: Os autovalores do problema (3.1) de Sturm-Liouville são todos simples ou não degenerados. Além disso, os autovalores formam uma sequência infinita e podem ser ordenados crescentemente, de modo

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

com $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

3.1. Problema do Autovalor na Reta

Considere o problema de autovalor na reta

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, \pi] \quad (3.2)$$

Os valores de λ para os quais existem soluções não-triviais do problema (3.2) são chamados de autovalores e as soluções não-triviais são as autofunções.

Consideremos o problema de encontrar todos os seus autovalores e as autofunções associadas a esses autovalores. Para resolvermos, vamos analisar os valores de λ em três casos: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

1º Caso ($\lambda < 0$): Neste caso, seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, a solução geral de (3.2) é dada por

$$y(t) = c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \sinh(\mu t).$$

Para satisfazer a primeira condição de contorno $y(0) = 0$, é necessário tomar $c_1 = 0$. Da segunda condição de contorno, temos

$$y(\pi) = c_2 \sinh(\mu\pi) = 0,$$

o que implica em $c_2 = 0$. Logo, o problema (3.2) não possui soluções não-triviais e, conseqüentemente, não há existência de autovalores negativos.

2º Caso ($\lambda = 0$): Neste segundo caso, observa-se que o problema é reescrito da forma

$$y'' = 0$$

e suas raízes são reais e iguais. Desse modo, a solução geral é dada por

$$y = c_1 t + c_2.$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se $y(0) = c_2 = 0$ e $y(\pi) = c_1 \pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Logo, para $\lambda = 0$ o problema (3.2) só admite a solução trivial, ou seja, não existem autovalores.

3º Caso ($\lambda > 0$): Neste caso, obtém-se a equação característica $r^2 + \lambda = 0$ e suas raízes são

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Como as raízes da equação característica são complexas conjugadas, a solução geral será

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

E, pelas condições de contorno, obtemos

$$y(0) = c_1 = 0 \quad \text{e} \quad y(\pi) = c_2 \sin(\mu\pi) = 0.$$

Como o interesse é encontrar soluções não-triviais, tomemos $c_2 \neq 0$, assim, teremos

$$\operatorname{sen}(\mu\pi) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os autovalores do problema (3.2) são os quadrados de inteiros, isto é,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \dots, \lambda_n = n^2, \dots, \quad (3.3)$$

e as autofunções associadas aos autovalores de (3.3) são

$$y_1(t) = \operatorname{sen}(t), y_2(t) = \operatorname{sen}(2t), \dots, y_n(t) = \operatorname{sen}(nt), \dots,$$

Desde que a constante c_2 não está determinada, segue que, os múltiplos dessas funções também são autofunções para o problema (3.2).

4. CONCLUSÕES

Em várias áreas da matemática faz-se necessário o conhecimento das equações diferenciais. Para um estudante desejoso ou que estar inclinado a seguir seus estudos na área de Equações Diferenciais Parciais (EDP), julga-se significativo o conhecimento da classe de problemas aqui abordada, possibilitando familiarização com assuntos mais avançados da matemática. Além disso, o trabalho proporcionou o estudo das equações diferenciais e seus métodos de resolução, bem como conhecer a história de alguns célebres matemáticos precursores da teoria. E ainda, impulsionou no aprofundamento teórico de assuntos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral.

Vimos que a solução do problema proposto é uma sequência infinita crescente de senos e que todos os seus autovalores são valores reais e distintos, características herdadas dos problemas de Sturm-Liouville. Mais ainda, verificamos que a existência de soluções não triviais ocorre somente para autovalores positivos.

Cabe informar que, o desenvolvimento desse trabalho é resultado do projeto de Iniciação Científica intitulado “Introdução ao Estudo de EDP na Região Tocantina”, sob orientação da Prof.^a Dr.^a Suellen Cristina Queiroz Arruda, possibilitando aprofundamento teórico em equações diferenciais de modo a realizar pesquisas nas áreas da Matemática Pura e Aplicada, além de preparar os discentes para um possível ingresso em cursos de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais, volume 1. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro: Impa, 1997.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. Um Curso de Álgebra Linear. 2 ed. São Paulo: edusp, 2018.

MEDEIROS, Elisa Ferreira. Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível. 2016. 56 f. Trabalho de conclusão de Curso (graduação) – Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, FURG, Rio Grande, 2016.

SILVA, Carlos Antonio Pereira da. O problema de Sturm-Liouville e aplicações. 2011. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.



GEOGEBRA REALIDADE AUMENTADA COMO NOVA FERRAMENTA EDUCACIONAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Pinheiro Siqueira, Maria Eduarda, maria.siqueira@icen.ufpa.br¹
Dos Passos Neri Junior, Edilson, edilson_neri@yahoo.com.br²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo: Este artigo tem a finalidade de apresentar uma nova ferramenta chamada Realidade Aumentada, como um instrumento facilitador no processo de ensino e com capacidade para a criação de conteúdos pedagógicos, além de potencializar o ensino da Matemática. Assim como são apresentados resultados da oficina “GeoGebra em Realidade Aumentada: uma abordagem pedagógica” com o objetivo de promover a discussão e avaliar a aptidão do Software em questão como ferramenta educacional, gerando reflexões sobre a abertura e procura dos docentes e futuros docentes a novas metodologias de ensino eficazes e que de fato auxiliem no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Realidade Aumentada (R.A.), Ferramenta pedagógica, Matemática, TIC's, Ensino.

1. INTRODUÇÃO

Por anos os profissionais da educação dispuseram de recursos limitados que os auxiliassem no âmbito escolar e os ajudassem a produzir bons conteúdos pedagógicos que pudessem tornar o ensino mais dinâmico e eficaz. Com o avanço da tecnologia e o surgimento das TIC's (Tecnologias da Informação e Comunicação) esse cenário mudou e os professores passaram a ter acesso a uma vasta gama de *softwares* educativos que passaram a integrar o meio educacional. Em tempos pandêmicos, o ensino a distância se fez presente em larga escala na atual conjuntura, com isso, se fez ainda mais forte a necessidade de novas ferramentas e tecnologias que pudessem auxiliar o professor nesse meio de ensino e que de fato tornassem o processo de aprendizagem mais atrativo e inovador. Os *softwares* educativos que já integravam o cenário educacional e já eram conhecidos por sua alta capacidade de ajuda ao docente, ficaram ainda mais evidentes e isso aumentou a busca de conhecimentos referentes a eles, suas características e prerrogativas. O uso de tais ferramentas é defendido por D'Ambrosio e Barros (1988) que apontam o uso do computador como enorme facilitador para o professor em sala de aula e enfatizam a necessidade da formulação de métodos pedagógicos para suprir novos desafios encontrados nos dias atuais. Para o ensino da matemática, existem vários *softwares* que auxiliam na visualização de conceitos abstratos e se tornam ferramentas imprescindíveis para o professor. Com base nessa perspectiva, as inúmeras tecnologias disponíveis, segundo Kenski (2008), geram outras possibilidades variadas para ensinar matemática nas escolas, o que leva professores e alunos a vivenciarem e incorporarem novas formas de ensinar e aprender, mediadas por tecnologias inovadoras que auxiliam na prática profissional cotidiana. Com base no que foi tratado acima, foi possível observar que o uso das TIC's no ensino acaba sendo um grande aliado e uma poderosa ferramenta facilitadora no processo de ensino. Pensando nisso, falaremos sobre o uso do GeoGebra que é um *software* livre (gratuito) de geometria dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra, proporcionando a experiência de construir e projetar objetos matemáticos e como ele, aliado à sua nova ferramenta chamada Realidade Aumentada (R.A.), permite que seus usuários possam interagir com os objetos construídos, desenvolvendo novas habilidades e colecionando novas experiências, que culminam num ensino mais enérgico. Demonstrando assim que o uso da Realidade Aumentada

como uma ferramenta educacional é conveniente para quem busca novas estratégias pedagógicas para o ensino da Matemática.

2. REALIDADE AUMENTADA COMO UMA FERRAMENTA EDUCACIONAL

A utilização das TIC's ganhou força no atual período em que vivemos, seu uso é defendido por inúmeros autores e Valente (1993) declara que em ambientes de aprendizagem que se utilizam computadores e tecnologias como ferramentas de ensino, este deve ser entendido como um novo recurso para representar o conhecimento de novas formas e que acaba provocando uma mudança de conceitos pré-estabelecidos e possibilitando a busca e compreensão de novos conceitos e valores. Em meio a este cenário, escolhemos o GeoGebra que é um *software* livre como já foi citado e se encontra disponível para desktops, tendo versão online e aplicativo para celular. Na versão para *smartphones* o GeoGebra é chamado de “Calculadora 3D” e a ferramenta R.A. está à disposição para modelos de celulares mais atuais. Por ser um aplicativo de fácil acesso e manipulação, além de possibilitar: visualizar, criar, projetar objetos construídos pelos próprios usuários e também por obter um recurso tão relevante que é a Realidade Aumentada, possuindo uma grande capacidade de produção de conteúdos pedagógicos e acaba não sendo tão conhecida quanto deveria dentro do GeoGebra.

Podemos definir a Realidade Aumentada como a sobreposição de objetos virtuais no mundo real, através de um dispositivo tecnológico, melhorando ou aumentando a visão do usuário, essas são as considerações de (Azuma 1997) (Bajura 1995) (Kirner 2004). E surge como uma possível ferramenta que auxilia o docente no processo de ensino junto com a ideia de uma aprendizagem colaborativa como sendo uma abordagem educacional. Segundo Kirner e Zorzal (2005) essa abordagem leva em conta que: o aprendizado é ativo, através de processo construtivo. Além disso, pode-se implementar a aprendizagem colaborativa tanto em ambientes presenciais (face-a-face), quanto em ambientes remotos suportados por computador (Billinghurst 2003). Sendo assim, a Realidade Aumentada acaba se tornando um grande instrumento facilitador para o professor, seja presencial ou remotamente, pois estamos tratando de uma nova maneira de apresentar conteúdos pedagógicos. Na matemática um dos campos que mais se beneficiam com o uso da Realidade Aumentada é a Geometria, em especial a Geometria Espacial pois possui alguns conceitos mais complexos que necessitam de uma visualização mais detalhada e com essa ferramenta disponível é possível a criação de um ambiente virtual onde se pode interagir e manipular objetos virtuais em três dimensões, essa mesma experiência não pode ser proporcionada apenas com um quadro e um pincel, ou com objetos em 3D com materiais sólidos como cartolina, pois dentro desse ambiente computacional temos a oportunidade de rotacionar, reduzir e ampliar o objeto construído, tendo assim uma melhor visualização e interação do aluno com o objeto estudado. Nesse sentido, Scheffer et.al (2006), destacam que essas novas possibilidades oferecidas pelos sistemas multimídia e ambientes exploratórios são considerados facilitadores da aprendizagem dos alunos.

3. UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Com a finalidade de implementar o que foi teoricamente discursado e visando buscar novas alternativas para contribuir com a formação integral dos alunos nas aulas de matemática, foi desenvolvida uma oficina intitulada “GeoGebra em Realidade Aumentada: uma abordagem pedagógica” voltada para alunos da graduação do curso de Licenciatura em Matemática, realizada na semana dos dias 21 à 25 de fevereiro de 2022 e contando com 77 participantes, a mesma foi colocada em prática através do Projeto de Extensão da Universidade Federal do Pará (UFPA) “As TICs na Educação Básica: Ensinando e Aprendendo Matemática com as Tecnologias” que tem por objetivo criar, implementar e analisar estratégias metodológicas inovadoras de ensino de matemática. O grande objetivo era disseminar conhecimentos sobre Realidade Aumentada e como através de uma abordagem pedagógica ela pode auxiliar no processo de Ensino da Matemática e na construção do conhecimento, tornando-se um poderoso recurso e com inúmeras possibilidades de exploração. Podendo ser utilizado dentro e fora da sala de aula.

3.1 Metodologia

A oficina foi realizada de maneira virtual, através da plataforma do *Google Classroom*, de maneira assíncrona. Foram postados 5 (cinco) vídeos, um a cada dia, com duração de no máximo 10 minutos. O primeiro vídeo foi de apresentação do aplicativo, onde buscamos demonstrar as potencialidades da Realidade Aumentada como ferramenta pedagógica. Os demais vídeos foram expondo uma evolução de construções e de como poderíamos utilizar a ferramenta e produzir conteúdos educacionais, mostrando também o quanto a ferramenta promove um encontro entre tecnologia e ludicidade. Foram deixados exercícios de fixação ao final dos vídeos exibidos e foi adotado como meio de coletar resultados a criação de um formulário on-line onde eram feitas perguntas estratégicas

sobre como a oficina foi útil e qual as opiniões sobre a potencialidade da Realidade Aumentada e o seu uso como ferramenta pedagógica. Abaixo estão duas imagens de construções que foram feitas ao decorrer dos vídeos, a figura 1 retrata a modelagem de um objeto presente em casa (nesse caso um Guarda-roupa) e a figura 2 mostra uma construção que exige um conhecimento matemático maior e retrata um cone de revolução duplo sendo cortado por um plano, obtemos com a interseção dos dois a cônica conhecida como Hipérbole.

Figura 1

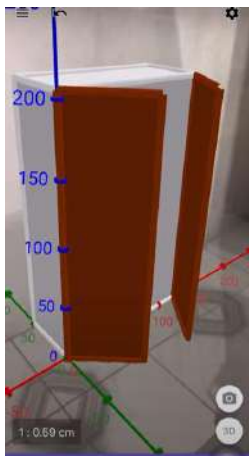


Figura 2



3.2 Resultados

Aplicamos o formulário na plataforma *google forms* e foram obtidos resultados satisfatórios, os participantes da oficina em sua maioria não tinham conhecimento da ferramenta R.A, apenas do GeoGebra. Constatamos que os próprios destacaram a ferramenta como positiva e afirmaram que após a oficina pretendiam utilizar mais o *software* como recurso pedagógico, além de enfatizar que a oficina foi relevante de alguma forma para suas formações acadêmicas.

4. CONCLUSÕES

Em assentimento a tudo que foi apresentado nas seções anteriores, que buscam legitimar a Realidade Aumentada como ferramenta educacional que potencializa o processo de ensino e levando em consideração os

autores que defendem o uso da tecnologia como instrumento que agrega na construção do conhecimento e com base nos resultados obtidos através da oficina ministrada, podemos observar que de fato, os discentes e docentes estão abertos a novas metodologias e novas formas de produzir conteúdos pedagógicos que possam não apenas desenvolver a capacidade de assimilar melhor os conteúdos mas também outras habilidades, segundo Weiss e Cruz (1999) o uso da informática em sala desenvolve várias habilidades como facilitação da construção do conhecimento, desenvolvimento do raciocínio lógico, aumento na flexibilidade do pensamento, promove o estímulo à curiosidade, imaginação e criatividade, além de fortalecimento da autonomia. É papel do professor fazer com que a ferramenta seja utilizada de forma correta e agregativa ao processo de aprendizagem do aluno, garantindo assim que ele consiga desenvolver as habilidades esperadas e atingir os resultados pré-estabelecidos, para Rocha (2008) “até mesmo nos momentos em que o aluno faz suas próprias descobertas, o professor deve ser figura presente, pois ele será mediador, ou seja, vai dinamizar esse novo processo de ensino-aprendizagem por intermédio do *software*, aproveitando o máximo para explorá-lo com criatividade e conseguindo o envolvimento do aluno na construção do seu próprio conhecimento”. Portanto, o impacto positivo causado pela Realidade Aumentada e sua potencialidade de proporcionar um ensino atrativo e inovador aliado a metodologias adequadas e um profissional mediador, tem grande capacidade de gerar uma aprendizagem interativa, colaborativa, criativa, dinâmica e eficiente.

5. REFERÊNCIAS

AZUMA, R. T. et al. "Recent Advances in Augmented Reality". IEEE Computer Graphics and Applications, v. 21, n. 6, p. 34-47, 2001.

BAJURA, M.; NEUMANN, U. "Dynamic Registration Correction in Video-Based Augmented Reality Systems". IEEE Computer Graphics & Applications, v. 15, n. 5. p. 52-60, 1995.

BARROS, J. P. D.; D'AMBRÓSIO, U. Computadores, escola e sociedade. São Paulo: Scipione, 1988.

BILLINGHURST, M.; BELCHER, D.; GUPTA, A.; Kiyokawa, K. "Communication behaviors in co-located collaborative AR interfaces". International Journal of Human-Computer Interaction, v. 16, n. 3, p. 395-423, 2003.

KENSKI, V. M. Memória, vivências e tecnologias. In: Encontro Nacional de Prática Didática e Prática de Ensino, v. 14, 2008, Porto Alegre. Anais... Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, p. 751 – 768, 2008.

KIRNER, C.; ZORZAL, E. R. Aplicações educacionais em ambientes colaborativos com realidade aumentada. In: Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE), p. 114-124, 2005.

KIENER, C.; TORI, R. "Introdução à Realidade Virtual, Realidade Misturada e Hiper-realidade". In: Claudio Kirner; Romero Tori. (Ed.). Realidade Virtual: Conceitos, Tecnologia e Tendências. 1ed. São Paulo, v. 1, p. 3-20, 2004.

ROCHA, S. S. D. O Uso do Computador na Educação: a Informática Educativa. Revista Espaço Acadêmico, n. 85, 2008. Disponível em: <<http://www.espaçoacademico.com.br/085/85rocha.pdf>>

SCHEFFER, N. F. et al. Matemática e tecnologias: Modelagem Matemática. Série didáticos. Erechim: EDIFAPES, p. 60, 2006.

VALENTE, J.A. Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Campinas: UNICAMP, 1993.

WEISS, A. M. L.; CRUZ, M. L. R. M. A Informática e os Problemas Escolares de Aprendizagem. Rio de Janeiro: DP&A editora, 2ª edição, 1999.



JOGO COMO METODOLOGIA DE ENSINO APRENDIZAGEM DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Santos, Jéssica de Sousa, jssifpi@gmail.com¹
Teixeira, Cícero dos Santos, cicsantos2013@gmail.com²
Feitosa, Marcia de Sousa, marciafeitosa100@gmail.com³

¹ INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI

² INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI

³ INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI

Resumo: *O presente trabalho resulta de uma pesquisa que buscou analisar de que forma a utilização dos materiais concretos e jogos auxiliam no ensino das expressões algébricas: monômios e polinômios no 8º ano, assim contribuindo para o ensino-aprendizagem dos alunos e trazendo um progresso maior ao conhecimento da Matemática, buscando-se uma maneira mais simples, de fácil entendimento por parte dos alunos. . Fez-se uma opção neste estudo pela utilização da pesquisa qualitativa com a coleta de dados através de entrevista com o professor da turma e posteriormente a utilização do material concreto nas aulas. A pesquisa apoia-se teoricamente nos estudos de autores como (CUNHA, 2000), (FREIRE, 1996), (BROUSSEAU, 1983). Conclui-se que a pesquisa é relevante para pesquisadores e educadores que buscam constantemente meios de melhorar a qualidade do ensino focalizando o uso de material concreto, jogo. Muitos alunos podem apresentar dificuldade de aprender conceitos básicos matemáticos. Essas dificuldades podem ser agravadas com uso de metodologias inadequadas. Nesse contexto, esse projeto pode ajudar os alunos a organizar o conteúdo de forma mais contundente. Os mesmos terão um campo muito mais amplo, apresentando uma Matemática mais real, inserida no cotidiano destes alunos. Além disso, contribui na formação da cidadania, pois possibilita a abordagem de outros assuntos de contextos não necessariamente matemáticos.*

Palavras-chave: *Ensino, material concreto, jogo, expressões algébricas.*

INTRODUÇÃO

É do conhecimento de todos que o ensino de matemática está rodeado de impasses, porém nos últimos anos vem se agravando. O que não se pode esperar é que apareça algo pronto e acabado, ou seja, algo que faça com que todos aprendam pois isso não existe. O que podemos é enquanto educadores procurarmos subsídios que aliem teoria e prática assim facilitando o entendimento e compreensão para assim confrontarmos essas adversidades.

A Matemática é tratada por muitos alunos como o pesadelo maior da escola, onde são apresentados assuntos nunca imaginados e de difícil compreensão. Grande parte dos alunos no início de sua vida acadêmica gostam da disciplina, mas ao longo desse trajeto se cria um desgosto, seja por conta de assuntos mal explicados levando dúvidas para os anos seguintes ou mesmo por aulas mecanizadas com professores de ensino tradicional que apenas transmitem assuntos de forma automática, tratando o aluno como um “miniadulto” de forma inteiramente passiva onde lhe cabe apenas decorar e reescrever.

Esse tipo de ensino passou a ser questionado no século XVIII. Rousseau (1727-1778) lançou uma nova visão da escola onde considerava a educação como um processo natural do desenvolvimento da criança que valorizava o trabalho manual, a experiência com as coisas e os jogos. Seguindo com essa mesma ideia Azevedo (1979, p. 27) diz

“nada deve ser dado à criança no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que leve a ela a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração”.

Neste contexto o professor deve estar sempre atento aos métodos e estratégias que vem garantindo essa aprendizagem e inovando cada vez mais sua metodologia em busca da melhoria da qualidade do ensino da Matemática. Neste sentido:

É fundamental refletir sobre os princípios metodológicos específicos de um trabalho com ensino de Matemática. Alguns deles podem derivar diretamente de princípios metodológicos gerais, mas, para que se concretizem na prática de sala de aula, devem ser detalhados de maneira a se compatibilizar as características do conhecimento matemático. (CARVALHO, 1994, p. 23)

Fundamentando-se nesta concepção surge o interesse pela investigação do tema. Assim, o presente trabalho visa relatar a experiência vivenciada com 31 alunos de uma turma de 8º ano da Escola Municipal Monsenhor Lotário Weber, situada em Pedro II-PI.

O projeto desenvolvido foi baseado na prática, no manuseio de materiais concretos e jogos no ensino das expressões algébricas: monômios e polinômios no 8º ano, procurando uma maneira mais simples, de fácil entendimento por parte dos alunos, pois o intuito de ensinar não é apenas repassar conteúdos, mas sim fazer com que eles aprendam de forma a desenvolver, construir e reconstruir esse conhecimento absorvido de forma natural. Onde foi apresentado a eles um ensino mais descontruído, um ensino relevante, foram propostas atividades nas quais os próprios alunos manusearam os materiais para responderem as perguntas.

Por meio de pesquisa de campo e teorias de autores renomados no assunto tratado, buscou-se responder a seguinte questão: Como a utilização dos materiais concretos podem contribuir no ensino das expressões algébricas: monômios e polinômios no 8º ano?

O que pretendeu-se com a pesquisa foi identificar como a utilização dos materiais concretos e jogos auxiliam no ensino das expressões algébricas: monômios e polinômios no 8º ano, assim contribuindo para o ensino-aprendizagem dos alunos e trazendo um progresso maior ao conhecimento da Matemática.

A pesquisa delineou-se em função dos seguintes objetivos: compreender até que ponto a utilização dos materiais concretos podem contribuir no ensino dos monômios e polinômios e suas contribuições para o ensino e aprendizagem; conhecer o desempenho dos alunos no decorrer do projeto; verificar quais são as maiores dificuldades dos alunos em monômios e polinômios; propor trabalho em grupo com a utilização de materiais concretos para uma maior interação entre os alunos e a troca de conhecimento.

Desta forma, a pesquisa aqui proposta torna-se relevante para os educadores e pesquisadores desta área, que busca um envolvimento maior com o ensino da Matemática e o conhecimento mais elaborado.

Apontamentos Iniciais: Dificuldades

A Matemática por ser uma disciplina que exige muito raciocínio, explora intensamente a capacidade de pensar dos alunos, torna-se às vezes bastante rejeitada pelos educandos. Apesar de tudo isso, sabemos que todo ser humano é por natureza, curioso e, por isso, o professor pode usar essa curiosidade a seu favor. Assim para Freire (1996)

(...) a curiosidade humana vem sendo histórica e socialmente construída e reconstruída. Precisamente porque a promoção da ingenuidade para a criatividade não se dá automaticamente, uma das tarefas propícias da prática educativo-progressiva é exatamente o desenvolvimento da curiosidade crítica, insatisfeita, indócil. (FREIRE, 1996, p.35)

Segundo o autor, todo ser humano deve ser criativo para construir um pensamento crítico diante de situações que lhe permitam desenvolver as atividades de maneira prática e, que essa criatividade se dá automaticamente de acordo com o acontecimento dos fatos ocorridos a cada momento.

A curiosidade leva o indivíduo a agir percorrendo caminhos que lhe garantem a solução dos problemas que estão à sua frente. Neste contexto os métodos matemáticos utilizados pelos professores ajudam a facilitar a passagem ou mesmo diminuir esse caminho que o aluno percorre, promovendo uma aprendizagem bem mais eficiente. Complementando o raciocínio é pertinente a citação de Piaget (1997) ao explicar que:

Quando comparamos a criança ao adulto, ora espanta-nos a identidade das relações, fala-se em uma “pequena personalidade” para dizer que a criança sabe muito bem o que deseja: age, como nós, em função de interesses precisos ora descobre-se um mundo de diferenças no jogo, por

exemplo, ou na maneira de raciocinar, e diz-se então que a criança não é um pequeno adulto. Pois assim, essas duas expressões são verdadeiras ora uma, ora outra. (PIAGET, 1997 p. 37)

Conforme o autor a criança não é um adulto em tamanho menor, apesar de saber o que deseja, precisa ser motivada e orientada para chegar a um destino final que é o objetivo do adulto. Em algumas situações pode ocorrer que esse adulto, lhe determine tarefas as quais não respeita suas capacidades cognitivas, seu ritmo de aprendizagem e que para ela não propõe sentido algum.

O papel do professor de Matemática neste caso é fazer uma relação entre o objetivo que deseja atingir e o que o aluno necessita realmente aprender na escola. Conciliando os dois objetivos, o professor terá um resultado satisfatório, pois segundo Emília Ferreiro(1986, p.83) uma das tarefas do professor é a de “observação e reflexão sobre o estudo e aprendizagem da matemática”. Pois “muito antes de entrarem na escola, as crianças separam, juntam, retiram, acrescentam, comparam objetos, estabelecem correspondências entre eles etc”.

Muitos alunos podem apresentar dificuldade de aprender conceitos básicos matemáticos. Essas dificuldades podem ser agravadas com uso de metodologias inadequadas. Nesse contexto, esse projeto pode ajudar os alunos a organizar o conteúdo de forma mais contundente. Os mesmos terão um campo muito mais amplo, apresentando uma Matemática mais real, inserida no cotidiano destes alunos. Além disso, contribui na formação da cidadania, pois possibilita a abordagem de outros assuntos de contextos não necessariamente matemáticos.

O 8º é considerado o ano mais difícil do Ensino Fundamental, devido às abordagens de conteúdos até então não vistos, tais como, estudo das figuras planas, monômios, polinômios e produtos notáveis; assim como, a complexidade de outros. Dentre esses conteúdos os alunos sentem mais dificuldade em monômios e polinômios, devido o primeiro contato com a álgebra, ou seja, o emprego de letras para representar números, por isso, propomos a utilização de materiais concretos no ensino de monômios e polinômios, pois, com esses recursos podemos manusear as peças, representá-los pelas as letras x e y, criar novas expressões e resolver exercícios.

Necessita-se da ludicidade no ensino da matéria, principalmente em conteúdos que possuem uma grande relação entre teoria e prática e que podem ser mostrados com o uso de materiais manipuláveis. Além disso, esses materiais lúdicos já foram utilizados em outras ocasiões, por isso são fáceis de ser adquiridos ou confeccionados.

O Jogo e sua Relevância na Aprendizagem

Na formação escolar, cria-se uma distância entre a Matemática e o aluno se o professor não conseguir convencer o aluno da primordialidade dela durante toda a sua vida. Muitos acabam por concluir seus estudos achando que a Matemática é desnecessária e poucos conseguem ver em que podem utilizá-la em sua rotina.

Geralmente os professores focam na fixação de definições, preceitos e métodos, desta forma boa parte dos alunos tendem a opor-se ao que é repassado pelo professor, tornando fatigante o ato de lecionar. Desta forma, torna-se fundamental considerar a perspectiva de ambos os lados levando-se em conta que é possível o progresso de seu trato com a Matemática e dela com a rotina, tornando assim possível a relação entre a teoria e a prática em situações habituais.

Nessa relação teoria-prática podemos destacar a ludicidade, de modo mais específico os materiais concretos, jogos, como investida afim de que a Matemática alcance os alunos.

Freire (2002, p.88) ao se referir em jogo cultural, destaca que e a cultura humana é uma construção que depende de uma atividade interior, o jogo tem a propriedade de “sugar” para esse interior as vivências da realidade, sendo o jogo indispensável à formação da cultura humana.

O jogo tem a propriedade de trazer as experiências do mundo exterior para o espírito humano, de maneira que, jogando com elas, a cultura possa ser criada, revista, corrigida, ampliada, garantindo o ambiente de nossa existência. Ora, todos sabemos que no nosso espírito as experiências viram imagens, viram ações internas, imaginação (...) A matéria da experiência, tornada representação mental, especialmente na atividade de jogo, ganha uma plasticidade que se distancia muito do real. E é com essa plasticidade que jogamos para criar um outro mundo, aquele ao qual podemos nos ajustar.

Para argumentar a respeito das diversas maneiras de perceber a aplicação de jogos na transmissão de conhecimentos matemáticos nos guiamos por Fiorentini (1995,p.5) que debate conforme alguns parâmetros:

A concepção de Matemática, a crença de como se dá o processo de obtenção/produção/descoberta do conhecimento matemático, as finalidades e os valores atribuídos ao ensino da Matemática, a concepção de ensino, a concepção de aprendizagem, a cosmovisão subjacente, a relação

professor-aluno e, sobretudo, a perspectiva de estudo/pesquisa com vistas à melhoria do ensino da Matemática.

É comum o professor fazer uso dos jogos apenas no pouco tempo restante da aula, para fixar um determinado conteúdo ou desenvolver uma habilidade. Dificilmente há um trabalho direcionado e organizado para que possa ser trabalhado de forma contínua não só em uma, mas em várias aulas, quantas sejam necessárias para a agregação dos conhecimentos.

Percurso Metodológico da Pesquisa

A prática docente requer métodos diversificados para se realizar análise e avaliação que atenda o contexto situacional. Partindo desta perspectiva a metodologia de uma proposta de pesquisa requer dispositivos que garantam efetividade na consecução dos objetivos propostos.

Tendo por base esse pressuposto, a pesquisa teve como público alvo a turma do 8º ano A da Escola Municipal Monsenhor Lotário Weber, situada em Pedro II – PI. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo pois “os métodos qualitativos trazem como contribuição ao trabalho de pesquisa uma mistura de procedimentos de cunho racional e intuitivo capazes de contribuir para a melhor compreensão dos fenômenos” (POPE & MAYS, 1995, p.42).

O trabalho fundamenta-se em Freire (1996, p. 18) quando entende que “todo ser humano é curioso, se tem curiosidade, então quer aprender”, em Cunha (2000, p.61) ao expor que “a mudança no processo da construção do conhecimento é inevitável”, além de outros autores que tratam do assunto em voga.

O projeto foi dividido em três etapas fundamentais:

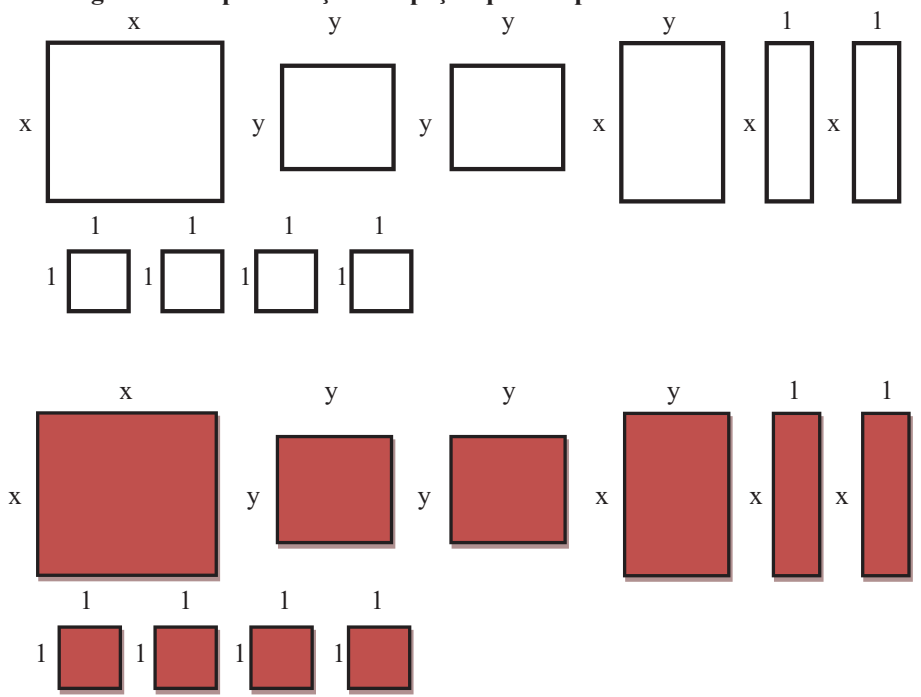
Primeira etapa: procuramos informar aos professores, alunos e membros da escola sobre a realização do projeto e suas contribuições para o ensino aprendizagem dos alunos.

Segunda etapa: fomos realizar uma entrevista semiestruturada com o professor regente do componente curricular Matemática da escola, tomando por base suas experiências em sala de aula.

Terceira etapa: desenvolvemos aulas teórico-práticas, em que utilizamos recursos concretos, como figuras geométricas e jogos. Depois das aulas teóricas colocamos em prática através dos materiais concretos a montagem e resoluções de exercícios.

O material é composto por peças (da direita para esquerda, figura 1) da seguinte forma: de um quadrado de lado x , dois quadrados de lado y , um retângulo com lados x e y , dois retângulos com lados x e 1 e quatro quadrados de lado 1 . Onde tinham peças brancas e vermelhas, que representaram respectivamente positivos e negativos.

Figura 1 – Representação das peças que compõem o material concreto.



Além da utilização do dominó que faz uso de conhecimentos matemáticos básicos como: área, perímetro, em conjunto com o entendimento de monômios e polinômios.

Nesta visão, propomos esse projeto que tem como objetivo facilitar a absorção de conhecimento através do ensino teórico aplicando-o na prática.

CONCLUSÕES

Muitos alunos podem apresentar dificuldade de aprender conceitos básicos matemáticos. Essas dificuldades podem ser agravadas com uso de metodologias inadequadas. Nesse contexto, esse projeto pode ajudar os alunos a organizar o conteúdo de forma mais contundente. Os mesmos terão um campo muito mais amplo, apresentando uma Matemática mais real, inserida no cotidiano destes alunos. Além disso, contribui na formação da cidadania, pois possibilita a abordagem de outros assuntos de contextos não necessariamente matemáticos.

O presente trabalho revela-se de grande importância para a formação dos acadêmicos de Licenciatura em Matemática em virtude da prática da docência ser imprescindível para a qualificação profissional do futuro professor. O estudante tem como desafio aplicar as teorias e desenvolver estratégias eficazes para o ensino da Matemática. De acordo com as atividades realizadas, pôde-se observar o melhor aproveitamento dos alunos ao utilizarmos os jogos como meio de transmissão do conteúdo, que vieram a facilitar no processo de aprendizagem.

Vivenciar a prática do professor e como se dá a aprendizagem dos alunos, torna-se, então, uma necessidade ímpar para que se possa ao menos minimizar as dificuldades enfrentadas nos anos iniciais da docência. Dessa forma, a inserção de projetos educacionais no interior das escolas públicas dinamiza o ambiente de ensino-aprendizagem e torna possível uma maior interação do aprendiz com a realidade da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

CAVALHO, Dione Lucchesi de. Metodologia do ensino da matemática. 2 ed. rev. São Paulo: Cortez, 1994.

CUNHA, M. V. Psicologia da Educação. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

FIorentini, Dario. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. In: Zetetiké. Campinas, SP, ano 3, nº 4, nov/1995, p. 01 – 37.

FREIRE, João Batista. O Jogo: entre o riso e o choro. Campinas, SP, Autores Associados, 2002, 125 p.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura).

GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 5ª edição. São Paulo: Atlas, 2009.

PIAGET, Jean. Seus Estudos e Psicologia. São Paulo: Forense, 1977.

ROSA, Rosemeire Aparecida. DIAS, Fernanda Mansur. MEDEIROS, Leticia Thais. FANTI, Ermínia de Lourdes Capello (orientadora). “O Algeplan como um recurso didático na exploração de expressões algébricas e fatoração”. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Campus de São José do Rio Preto.



JOGO DO NIM E O ALGORITMO DE EUCLIDES

Cavalcante, Raiele Conceição, cavalcante.raiele@acad.ifma.edu.br¹
Lima, Cássio Gomes de, cassio.lima@ifma.edu.br²
Cavalcante, Raimundo Nonato Barbosa, raimundo.cavalcante@ifma.edu.br³

¹Instituto Federal do Maranhão, *Campus Zé Doca*

²Instituto Federal do Maranhão, *Campus Zé Doca*

³Instituto Federal do Maranhão, *Campus Zé Doca*

Resumo: *O Nim é um jogo de estratégia, muito popular, sendo o primeiro jogo estudado matematicamente. Por ser um jogo estratégico, permite aos jogadores construir um modelo para a representação da “estratégia máxima” através das regularidades do jogo que é possível observar em cada jogada. O uso dos jogos como recurso didático proporciona um aprendizado mais prazeroso para o aluno, pois este demonstra a presença da Matemática através de práticas do cotidiano, as quais eles gostam e praticam culturalmente. Em virtude disso, este trabalho apresenta um breve apanhado do Nim expondo suas principais características e estratégias, descrevendo-as como o professor pode usufruir de seus recursos através do algoritmo de Euclides para a introdução de conceitos de multiplicação, divisão, MDC e MMC, como uma forma de despertar o interesse dos estudantes pela Matemática através de um contexto significativo.*

Palavras-chave: *Recurso didático, Jogo do Nim, Algoritmo de Euclides, Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum.*

1 INTRODUÇÃO

A matemática faz parte da vida diária das pessoas, sendo fundamental para a compreensão do mundo. A sua importância na educação vai além de ser gerenciadora de novas experiências, visto que prepara os estudantes para o campo de trabalho, assim como viver em sociedade e exercer a sua cidadania.

Este trabalho concentra-se no uso de jogos estratégicos para a introdução de conceitos e/ou noções de Multiplicação, Divisão, Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC), como uma forma de despertar o interesse dos estudantes pela Matemática. Conforme Grandó (2000), os jogos estratégicos são voltados para a investigação de uma “estratégia máxima” que garante a um jogador sempre vencer.

O jogo no processo de aprendizagem matemática proporciona ao aluno tomar decisões, elaborar estratégias alternativas e executar de forma viável no jogo, desenvolvendo não só o raciocínio lógico matemático e o cálculo mental, mas também, aprende a conviver e, compreender situações de perda, medo e frustração. Pensa-se ainda nos benefícios que os jogos, quando bem aplicados juntamente com a matemática, podem proporcionar para o desenvolvimento intelectual do estudante. Este trabalho tem como objetivo demonstrar como o jogo do Nim pode ser utilizado em sessão didática para a formalização dos conceitos de multiplicação, divisão, MDC e MMC.

2 O JOGO NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

A aprendizagem matemática é expressivamente cumulativa, tem exigências em conceitos e regras, e com o aluno passando por dificuldades em aprender o que está sendo lecionado, a utilização dos jogos estratégicos na sala de aula

torna o ambiente mais agradável e prazeroso, propiciando a assimilação e compreensão dos conceitos a serem estudados. Assim, a partir do uso dos jogos, o professor ganha mais uma forma interativa de ensinar, onde o aluno aprende brincando.

Conforme Grando (2000, p. 4),

o objetivo do jogo é definido pelo educador através de sua proposta de desencadeamento da atividade de jogo, que pode ser o de construir um novo conceito ou aplicar um já desenvolvido. Assim sendo, um mesmo jogo pode ser utilizado, num determinado contexto, como construtor de conceitos e, num outro contexto, como aplicador ou fixador de conceitos. Cabe ao professor determinar o objetivo de sua ação, pela escolha e determinação do momento apropriado para o jogo.

O jogo quando inserido no processo de aprendizagem precisa ter uma finalidade, seja ele para a construção, introdução ou aplicação de um conceito matemático. Além disso, é importante que tanto a metodologia como os objetivos a serem determinados pelo professor para o uso do jogo em sala de aula sejam claros e adequados ao nível que se está trabalhando, e que represente uma atividade desafiadora para o aluno, com o intuito de desencadear a reflexão durante o processo de aprendizagem.

A Base Nacional Comum Curricular enfatiza que os jogos podem despertar o interesse através de um contexto significativo para a construção da significação de conteúdos matemáticos, com a finalidade de possibilitar ao aluno o estabelecimento de conexões entre a apreensão de significados matemáticos com as suas diversas aplicações. No entanto, ressalta que esses recursos precisam ser integrados a situações que propicie a reflexão com o intuito de promover a formalização de conceitos matemáticos (BRASIL, 2018).

2.1 UM BREVE APANHADO DO JOGO NIM

O Nim é um jogo muito antigo, sendo um dos primeiros jogos que foram estudados matematicamente. Existem várias versões deste jogo, onde são utilizados diversos objetos como palitos, gravetos, pedras, feijões, blocos, entre outros. Além disso, existem versões com apenas uma, duas, três ou mais pilhas (ou torres) de objetos. As regras do jogo divergem de versão para versão, sendo que existem sempre dois jogadores ou duas equipes que jogam de forma alternadamente em todas as versões. As divergências dizem respeito a quantidade de pilhas, números de objetos presente na(s) pilha(s), quantidade de objetos que podem ser retirados em cada jogada e na determinação de quem é o vencedor, pois existe a *versão clássica* em que quem ganha é o jogador que retirar o último objeto, e a *versão Misère*, em que, o perdedor é o jogador que retirar o último objeto.

As versões mais complexas são as que apresentam 3 ou mais pilhas de objetos. Como mencionado anteriormente, sendo um dos primeiros jogos analisados do ponto de vista da Matemática, sua teoria foi desenvolvida pelo matemático americano Charles Leonard Bouton, que em 1901 publicou um artigo científico apresentando não apenas uma teoria matemática completa para o jogo, mas também revelou e demonstrou uma estratégia que permite a um dos jogadores ganhar (GRANDO, 2000; COSTA, 2016).

A estratégia vencedora descrita por Bouton pode ser aplicada no jogo do Nim com K-pilhas, sendo mais usadas nas versões que apresentam três ou mais pilhas por serem consideradas mais complexas. A sua estratégia pode ser configurada por meio de um algoritmo que permite ao primeiro jogador assegurar a vitória, mas para isso o jogador não pode cometer erros durante as jogadas. Tal estratégia é conhecida como *Teorema de Bouton*, o qual utiliza a linguagem binária para determinar uma posição vantajosa, onde é necessário transformar os números de objetos de cada pilha em notação binária, somando-as em notações binária em módulo 2, e se a soma encontrada for zero, então tem-se uma posição de perdido para quem vai jogar, e se a soma for diferente de zero, tem-se uma posição de ganho para quem vai jogar (GRANDO, 2000; COSTA, 2016).

As versões do jogo que apresentam apenas uma pilha de objetos são conhecidas como as versões mais simples, pois suas estratégias podem ser elaboradas por meio do algoritmo de Euclides. O **Jogo do Nim 21** (com 21 objetos) e o **Jogo do Nim 27** (com 27 objetos, *versão Misère*) são exemplos das versões simples. Carvalho (2013) e Mulas (2010) aconselham fazer uma análise retrógrada, ou seja, analisar o jogo do fim para o início, classificando cada posição por P-posição (posição de perdido para quem vai jogar) e N-posição (posição de ganho para quem vai jogar).

Segundo Carvalho (2013, p. 15), “no jogo do Nim 21, sob as regras normais, as posições que são múltiplas de 4 são P-posições e as restantes são N-posições”, neste caso pode ser feita a prova da demonstração pelo Princípio de Indução. Já em relação ao jogo do Nim 27 (*versão Misère*), Grando (2000), apresenta uma estratégia máxima através

da formulação do algoritmo de Euclides. No entanto, neste estudo, será apresentado a versão simples do jogo, especificamente com o Nim 21, onde será utilizada a formulação da estratégia máxima através do algoritmo de Euclides para a introdução de conceitos de multiplicação, divisão, MDC e MMC.

2.2 JOGO DO NIM 21

Material: 21 palitos de fósforo.

Objetivo do jogo: ganha o jogo o jogador que retirar o último palito.

Regras do jogo:

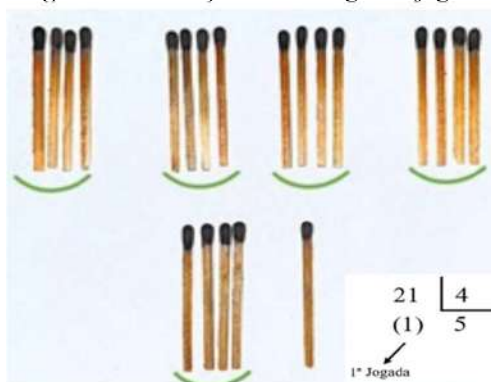
- Os 21 palitos são dispostos na mesa, um ao lado do outro;
- Os jogadores jogam alternadamente;
- Cada jogador, retira na sua vez, no mínimo, 1 palito e, no máximo, 3 palitos;
- Quem retirar o último palito, ganha o jogo.

Como o Nim é um jogo de estratégia, esta versão permite aos jogadores construir um modelo de representação da estratégia máxima, porém necessitam desenvolver habilidades de resolução de problemas, explorar o raciocínio hipotético-dedutivo e principalmente observar as regularidades do jogo, descrevendo-os através de um modelo.

2.2.1 Estratégia e Análise do jogo

O 1º jogador (vencedor) pode estabelecer a seguinte estratégia (**Imagem 1**).

Imagem 1: Elaboração da estratégia do jogo



Fazendo mentalmente a divisão, o 1º jogador pode estabelecer 5 grupos de 4 palitos, restando 1 palito ($21 = 4 \cdot 5 + 1$). O 1º jogador retirará um palito na 1ª jogada, e nas jogadas seguintes irá retirar x palitos, de modo, que $y + x = 4$, onde y é a quantidade de palitos retirados pelo adversário, ou seja, se o adversário retirar 2 palitos, o 1º jogador retirará 2, se o adversário retira 3, o 1º jogador retirará 1 e se o adversário retirar 1, o 1º jogador retirará 3, de modo que, a soma dos palitos retirados sempre resulte em 4. Seguindo essa lógica, o 1º jogador será o último a jogar ficando com x palitos ≤ 3 , ganhando o jogo.

Outra forma de se obter a estratégia máxima é através da análise retrograda das posições do jogo, conforme demonstrado a seguir (**Tabela 1**):

Tabela 1: Análises das posições do Nim

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Posição	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Posição	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Fonte: Carvalho (2013). Adaptado.

Observando a tabela, pode-se perceber que caso a pilha não tenha nenhum palito, então, tem-se uma posição terminal, ou seja, o jogo acabou e, portanto, é uma P-posição. Caso exista 1, 2 ou 3 palitos restante na pilha, logo o próximo jogador poderá ir para uma posição terminal, ou seja, isso significa que 1, 2 e 3 são N-posições e permitem atingir uma P-posição. Agora se na pilha restam 4 palitos só é possível jogar para uma N-posição, pois conforme as regras do jogo só podem ser removidas no mínimo 1, e no, máximo 3 palitos. Assim, 4 é P-posição, concluindo-se que toda P-posição leva para uma N-posição.

Com isso, pode-se fazer uma estruturação do mapeamento, onde:

- **P-posição** = $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\} = \{4n\} \quad n \in \mathbf{N}$.
- **N-posição** = $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21\} = \{4n+1, 4n+2, 4n+3\} \quad n \in \mathbf{N}$.

Assim, o jogador que ficar na posição $4n$ poderá retirar apenas 1, 2 ou 3 palitos, deixando o adversário em posição de ganho. Na tabela acima as posições vencedoras foram descritas marcando as posições N para o 1º jogador e P para o 2º jogador, em função da quantidade de palitos.

Neste caso, assim como na **Imagem 1**, é fácil verificar que se a quantidade de palitos não é múltiplo de 4, ou seja, se $n = 4*q + r$, com $r \in \{1, 2, 3\}$, então o 1º jogador pode usufruir da estratégia vencedora que é retirar r palitos na primeira jogada e depois ele retira $4 - y$, onde y é a quantidade retirada pelo 2º jogador, na jogada anterior.

2.2.2 Noções de multiplicação e divisão

O mapeamento do jogo permite a introdução dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade dos números naturais, onde o professor pode usufruir do conceito da P-posição para trabalhar com as noções de multiplicação pois, conforme o item anterior, para o 1º jogador ganhar, ele terá que deixar uma quantidade de palitos que seja múltiplo de 4 para o adversário, ou seja, $4n$. Assim como pode trabalhar com a relação fundamental da divisão: $n = d*q + r$ (dividendo = divisor x quociente + resto), com o intuito de mobilizar os alunos a compreensão dos significados associados as situações que envolve as operações de multiplicação e divisão que estão presentes no jogo.

2.2.3 O algoritmo de Euclides para a determinação de MDC e MMC

O algoritmo de Euclides é um método simples e bastante eficiente que é utilizado para encontrar o Máximo Divisor Comum (MDC) entre dois números naturais não simultaneamente nulos, esse método é descrito no Livro VII dos Elementos de Euclides. Como o jogo do Nim utiliza o algoritmo de Euclides na elaboração da estratégia máxima, o professor pode usufruir desse benefício para a introduzir os conceitos de MDC e MMC, uma vez que o algoritmo de Euclides ($n = d * q + r$, onde n é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto) pode ser facilmente descrito e organizado através do diagrama, a seguir:

Tabela 2: Diagrama do Algoritmo de Euclides

	q	
n	d	
r		

Como exemplo, pode-se utilizar o diagrama acima para calcular o MDC (20, 8), onde os dois números representam as P-posições do jogo que são múltiplos de 4.

Tabela 3: Diagrama para obtenção do MDC (20, 8)

	2	2
20	8	4
4	0	

Observando o diagrama é possível extrair as seguintes informações:

- Na primeira linha do diagrama, tem-se os quocientes das divisões;
- Na segunda linha do diagrama, tem-se os divisores e os dividendos das divisões efetuadas;
- Na terceira linha do diagrama, tem-se os restos das divisões;
- Na segunda linha da coluna três, tem-se o MDC $(20, 8) = 4$.

Para introduzir as noções de MMC, o professor pode utilizar os dados do jogo, presente na seção 2.2. Como o jogo contém 21 palitos, onde cada jogador poderá retirar um, dois ou três palitos, logo pode-se determinar o número máximo e mínimo de jogadas. O número máximo será vinte e um, se cada jogador retirar apenas um palito em cada jogada, e o número mínimo será sete, se cada jogador retirar três palitos em cada jogada. Sabe-se que apenas um dos jogadores poderá vencer o jogo, e que, para vencer o jogo terá que fazer n jogadas, e o adversário $n-1$ jogadas, e que as jogadas são alternadas entre eles.

Levando em conta essas informações, pode-se utilizá-las para determinar o MMC $(n, n-1)$, mas para isso, deve-se multiplicar um número pelo outro e dividir pelo seu MDC. Assim, o $MDC(n, n-1) = 1$, conforme descrito na tabela a seguir:

Tabela 4: Diagrama do MDC $(n, n-1)$

	1	$n-1$
n	$n-1$	1
1	0	

Interpretando o diagrama do MDC $(n, n-1)$, pode-se concluir que existe apenas uma jogada comum para se ganhar o jogo. Portanto, o $MMC(n, n-1) = n(n-1)$, ou seja, o produto. Sabendo que o número de máximo de jogadas são 21, então, se o 1º jogador tiver feito 11 jogadas, seu adversário terá feito 10 jogadas, chegando à conclusão de que o $MMC(11, 10) = 110$, ou seja, isso significa que para ser feita a mesma jogada seriam necessárias 110 jogadas. Para saber o MMC do número mínimo de jogadas basta utilizar o mesmo raciocínio, de modo que o $MMC(4, 3) = 12$.

3 CONCLUSÕES

A utilização do jogo do Nim quando aplicado em sessão didática para a formalização dos conceitos de multiplicação, divisão, MDC e MMC proporciona ao professor uma forma interessante de enriquecer as aulas de matemática, pois este jogo apresenta uma matemática simples e de fácil compreensão sendo percebíveis durante a elaboração e análise de cada jogada. O simples ato de jogar propicia ao aluno o desenvolvimento do raciocínio lógico quando cria estratégias para vencer o jogo.

Apesar desses conteúdos serem normalmente trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental e a sua introdução por meio do Nim proporcionar um ambiente mais descontraído e propicio a criatividade do aluno, o professor deve abordar o conteúdo com muito cuidado para não confundir os alunos. Assim, o apropriado é que o professor deixe os alunos pensarem e observarem as regularidades do jogo através de anotações, antes de fazer a exposição do conteúdo que pretende trabalhar.

REFERÊNCIAS

- CARVALHO, João Miguel Rafael de. **Jogos de subtração e outros jogos combinatórios**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Aveiro, 2013. Disponível em: <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/12077/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2021.
- COSTA, Joseane Sousa Lima. **Nim: uma introdução a teoria dos jogos combinatórios**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana, 2016. Disponível em: http://profmat.uefs.br/arquivos/File/JOSEANE_SOUSA_LIMA_COSTA.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.
- FERREIRA, Antonio Erivan Bezerra. **O lúdico no ensino da matemática: o nim, o tangram e os pentaminós como ferramentas de aprendizagem**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2019. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/43229/3/2019_dis_aebferreira.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.
- GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. Tese (Doutorado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP: [s.n], 2000. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_grando.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.
- MULAS, João Paulo Maltêz. **Jogos Combinatórios Imparciais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade de Évora. Évora, 2010. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/15327/1/Tese_Jogos_Combinatorios_Imparciais_AlunoMestrado_n10495.pdf. Acesso em: 20 dez. 2021.



MODELAGEM DO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA USANDO O MÉTODO VARIACIONAL E O SOFTWARE GEOGEBRA

Carvalho, Aline, alineribeirocarvalho10@gmail.com¹
Arruda, Suellen, scqarruda@ufpa.br²
Corrêa, Emerson, emersoncbpf@gmail.com³

¹ FACET/CUBT/UFPA
² FACET/CUBT/UFPA
² FAFIS/ICE/UNIFESSPA

Resumo: Neste trabalho, abordaremos a resolução do problema da Braquistócrona através do Método Variacional. O problema da Braquistócrona consiste em determinar a curva definida pela trajetória de uma partícula que partindo do repouso e sob a ação somente da força gravitacional se desloca entre dois pontos no menor tempo possível. E ainda, usaremos o software GeoGebra para simular o deslocamento de uma partícula sobre uma reta e sobre a curva Braquistócrona, com o intuito de constatar que na curva Braquistócrona o percurso da partícula é realizado no menor tempo.

Palavras-chave: Braquistócrona, Método Variacional, Software GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Ao longo dos últimos três séculos, o estudo das equações diferenciais atraiu a atenção de vários matemáticos e físicos renomados como Newton, Leibniz, família Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace. Atualmente, é indiscutível que as equações diferenciais estão presentes em diversas áreas de pesquisas altamente produtivas e interessantes, envolvendo além de uma matemática rigorosa, uma diversidade de conhecimentos quanto às suas aplicações.

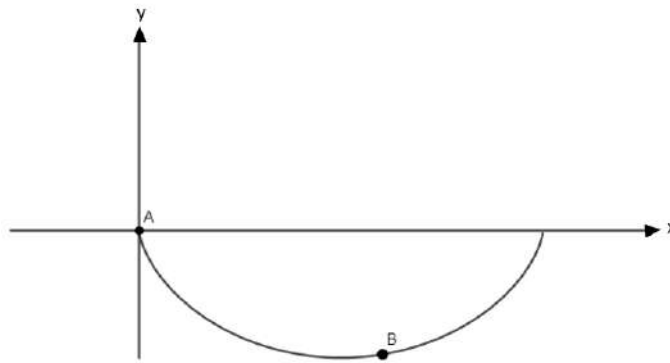
O problema da Braquistócrona foi proposto pelo matemático Johann Bernoulli no século XVII como um desafio para os matemáticos mais brilhantes da época, sendo um dos acontecimentos que contribuíram fortemente para o desenvolvimento do Cálculo Variacional, pois, através dele é possível solucionar o referido problema, cujo resultado é uma cicloide invertida. O nome Braquistócrona surge da união das palavras gregas Brakhisto, que significa o mais curto, e Chronos, que significa tempo. Assim, o problema da Braquistócrona consiste em determinar a curva que une dois pontos quaisquer a diferentes distâncias, pela qual uma partícula somente pela força da gravidade desce o mais rápido possível até atingir o seu ponto mínimo.

O uso das tecnologias digitais vem se tornando uma realidade no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na última década, principalmente durante o período de ensino remoto vivenciado por conta da pandemia da COVID-19. Diante disso, o software GeoGebra será importante para compreender o problema da Braquistócrona, sendo possível visualizar dinamicamente a trajetória de uma partícula ao longo da curva cicloide e compará-la com trajetória sobre a reta, comprovando assim que a curva cicloide faz o percurso entre dois pontos distintos no menor tempo.

A BRAQUISTÓCRONA E O MÉTODO VARIACIONAL

No contexto do Método Variacional, o problema da Braquistócrona consiste em é determinar a função $x = x(y)$ que representa a trajetória de menor tempo de uma partícula deslizando do ponto de origem $A(0,0)$ até um ponto $B(x, y)$ situados no mesmo plano vertical, apenas sob a ação da gravidade, conforme mostra a Figura 1. Note que se A e B estiverem na mesma vertical, a solução é uma reta.

Figura 1 - Curva Braquistócrona



Levando em conta a conservação de energia mecânica, a quantidade total de energia em um sistema isolado é sempre constante. Na ausência de forças dissipativas, a energia mecânica E_M de um sistema não se altera ao passar do tempo, ocorrendo apenas transformação em suas energias cinética K e potencial U . Em Física, a energia potencial gravitacional é a energia que uma partícula possui devido a atração gravitacional da Terra, dependendo apenas da altura (posição vertical) da partícula em relação ao ponto de referência.

Considerando v o módulo da velocidade da partícula em certo instante, y o seu deslocamento vertical e m a sua massa, temos que no ponto A , a energia potencial é dada por mgy , onde g é a aceleração da gravidade, e a energia cinética é nula, pois parte do repouso. No entanto, no ponto B , a energia potencial é nula e a energia cinética é dada por $\frac{mv^2}{2}$. Assim, a velocidade de uma partícula em queda livre, partindo do repouso, em um determinado tempo é obtida pela fórmula $v = \sqrt{2gy}$.

Sabendo que a velocidade instantânea de uma partícula é dada por $v = \frac{ds}{dt}$, onde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, segue que

$$dt = \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2gy}} dy.$$

Logo, integrando esta última expressão, o tempo total para que a partícula descreva uma trajetória qualquer se deslocando de do ponto A para o ponto B é dado por

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{y}} dy,$$

onde $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. O objetivo é encontrar a função $x = x(y)$ de modo que t seja mínimo e que satisfaça as condições de fronteira. Neste caso, o funcional

$$F(x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{y}}$$

deve ser extremizado pela equação diferencial dada por

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

conhecida como Equação de Euler-Lagrange.

Agora, calculando a derivada parcial e substituindo o resultado na Equação de Euler-Lagrange, obtemos a seguinte integral

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{y}{2R - y}} dy.$$

Ao aplicar a mudança de variável $y = R - R\cos(\theta)$, obtemos

$$x = \int \sqrt{\frac{(R - R\cos(\theta))}{2R - (R\cos(\theta))}} R\sin(\theta) d\theta.$$

Finalmente, resolvendo a integral acima e aplicando algumas propriedades matemáticas concluímos que

$$x = R\theta - R\text{sen}(\theta)$$

e

$$y = R - R\text{cos}(\theta),$$

que vem a ser a solução paramétrica da curva Braquistócrona, cujo gráfico é uma cicloide.

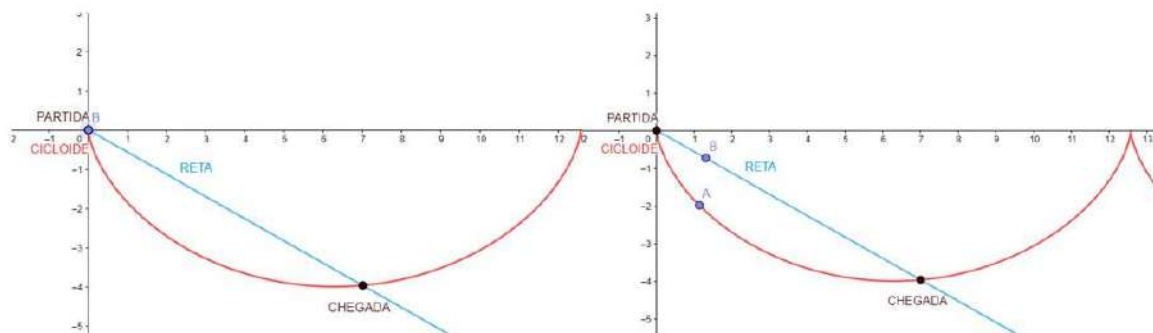
ABORDAGEM DA BRAQUISTÓCRONA VIA SOFTWARE GEOGEBRA

O software *GeoGebra* é um programa matemático gratuito, que permite ao aluno, dentre outras ferramentas, a visualização de gráficos 2D e 3D, com intuito de proporcionar o estudo da Matemática de forma mais prazerosa, dinâmica e significativa. Com isso, o referido programa se torna um facilitador no processo de ensino, tornando assim a um meio eficaz para a obtenção do conhecimento matemático.

Dessa forma, utilizamos o software *GeoGebra* para realizar o movimento de uma partícula através da curva cicloide e através da reta, a fim de verificar o tempo gasto pela partícula para percorrer a trajetória ao longo da reta e da curva cicloide.

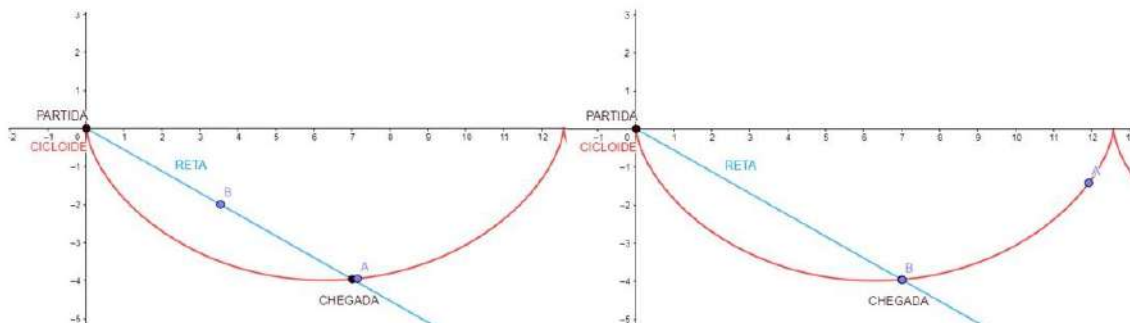
Na Figura 2, mostramos duas partículas partindo do repouso e do mesmo ponto inicial, porém, através de curvas diferentes.

Figura 2: Simulação da trajetória na cicloide e na reta



A dinâmica descrita pelo GeoGebra mostra que a partícula sobre a cicloide atinge o menor tempo, como podemos visualizar na Figura 3. Note que a partícula A através da cicloide atingiu o comando “Chegada” antes da partícula B através da reta.

Figura 3: Simulação da trajetória na cicloide e na reta



CONCLUSÕES

Com este trabalho, foi possível compreender que as Equações Diferenciais é uma área de pesquisa originada a partir da necessidade de criar modelos que solucionassem problemas reais nas diversas áreas do conhecimento. Vimos que a resolução do problema da Braquistócrona, proposto pelo matemático Jakob Bernoulli, é um importante exemplo de aplicabilidade das equações diferenciais na Física, originando um novo ramo de estudo na Matemática, o Cálculo Variacional, cuja solução é a cicloide.

A abordagem do problema da Braquistócrona através do software GeoGebra para analisar a trajetória da partícula na reta e na cicloide corrobora que o uso de recursos computacionais auxilia na melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática, possibilitando exploração e interação da tecnologia com a Matemática.

É importante informar que este trabalho é fruto de um projeto de iniciação científica intitulado “Uma Introdução ao Estudo de Equações Diferenciais e Aplicações”, sob a orientação da Profa. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda, que visa o estudo das equações diferenciais e sua aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento, proporcionando ao discente uma formação básica na área.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Impa, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Vols. 1 e 2: 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

SOUSA JUNIOR, José R. A. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, São Paulo. 2010.

TAGLIOLATTO, A, L, S.; **Braquistócrona**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, São Paulo 2015

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais, volume 1**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.



O GRAU TOPOLÓGICO E APLICAÇÕES

Bacelar, Leandro, leandrobacelar@estudante.ufscar.br¹

Dalbelo, Thais Maria, thaisdalbelo@ufscar.br²

¹Universidade Federal de São Carlos

²Universidade Federal de São Carlos

Resumo: O objetivo principal deste projeto é apresentar uma importante ferramenta da topologia diferencial, que tem grande aplicabilidade em diversas áreas da matemática: o conceito do grau topológico. Primeiramente, apresentaremos alguns resultados e conceitos preliminares. Na sequência, abordaremos o conceito de grau, suas propriedades e algumas de suas aplicações, como o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer e a noção de índice de vetores em variedades suaves.

Palavras-chave: topologia diferencial, grau topológico, variedades diferenciáveis, análise.

INTRODUÇÃO

Seja f uma função contínua definida em um subconjunto Ω contido em \mathbb{R}^n com valores em \mathbb{R}^n e y um elemento em \mathbb{R}^n . Um dos problemas mais básicos e antigos da matemática é estudar o conjunto das soluções da equação $f(x) = y$, pretendendo obter informações relevantes sobre a existência, unicidade ou multiplicidade destas.

Para exemplificar, tomemos as equações polinomiais $p(x) = 0$, onde os coeficientes de $p(x)$ são números reais. Este caso foi amplamente discutido na antiguidade e desempenhou um papel fundamental em diversas áreas da matemática. Em alguns casos particulares, quando o grau do polinômio $p(x)$ é menor ou igual a quatro, podem ser efetivamente calculadas as raízes da equação dada acima.

Embora esse seja um problema antigo, não é um problema fácil de lidar. De fato, não existe uma teoria única que dê uma resposta definitiva quanto a existência de uma solução para tal problema. Porém, uma importante ferramenta que nos auxilia a estudar esses problemas é a teoria do grau topológico.

Considerando a função f , o conjunto Ω e o ponto y como descritos acima, podemos formar ternas do tipo (f, Ω, y) e estudar o seu comportamento. O grau topológico é uma função que associa a cada terna (f, Ω, y) um número inteiro, denotamos por \deg .

a cada tripla (f, Ω, y) vamos associar um número inteiro $\deg(f, \Omega, y)$ tal que as propriedades do grau topológico nos permitam encontrar respostas relevantes quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de soluções da equação $f(x) = y$.

Evidentemente, se $f = \text{id}$, a função identidade em \mathbb{R}^n , definida por $\text{id}(x) = x$, então $f(x) = y$, em que y pertence a Ω , tem uma única solução $x=y$, dessa forma, é natural esperar que $\deg(\text{id}, \Omega, y) = 1$, para todo y em Ω .

Também podemos esperar que \deg contenha informações sobre a localização das soluções, da seguinte forma: suponha que Ω_1 e Ω_2 sejam subconjuntos abertos de Ω e que $f(x) = y$ tenha um número finito de soluções em $\Omega_1 \cup \Omega_2$, mas não tenha solução em $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Então, o número de soluções em Ω deve ser o número de soluções em Ω_1 mais o número de soluções em Ω_2 . Isso sugere que o grau topológico satisfaça a seguinte propriedade: $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$, sempre que Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de Ω , tais que y não pertence a $f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.

Por fim, a terceira propriedade que naturalmente iremos querer que o grau topológico satisfaça é a de que o cálculo de $\deg(f, \Omega, y)$, para uma função complicada de f , possa ser feito por meio de $\deg(g, \Omega, y)$, em que g é uma função mais simples. Por exemplo, se f puder ser continuamente deformada em g , sem que nesse processo ocorram soluções na fronteira de Ω , ou seja, $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ independente de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $h: J \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ forem contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo t em J .

Assumindo a existência de uma função com as três propriedades descritas acima, podemos mostrar que tal função é única e, além disso, obtemos uma indicação de como ela deve ser definida.

A teoria do grau topológico tem sido utilizada em diversas áreas da matemática. Por exemplo, no estudo de equações diferenciais parciais é possível provar a existência de soluções de problemas elípticos não lineares com condição de fronteira de Dirichlet. Na geometria, o grau se relaciona com o cálculo de curvaturas, através do Teorema de Gauss-Bonnet e sua conexão com o Teorema de Poincaré-Hopf e consequentemente com índices de campos de vetores. Em teoria de singularidades, algumas multiplicidades descritas pelo grau de projeções são invariantes centrais que ajudam a descrever propriedades geométricas e topológicas e espaços singulares.

Neste poster apresentaremos propriedades do grau topológico, entre elas a propriedade de existência de solução, a qual nos diz que se $\deg(f, \Omega, y)$ é diferente de 0, então a equação $f(x) = y$ possui solução em Ω . Outra propriedade a ser apresentada é a invariância homotópica, que permite, através de uma deformação contínua, transferir informações de aplicações cujo grau é conhecido para aplicações cujo grau é desconhecido.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L.; ET AL. Álgebra linear, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

DALBELO, T. M. O Índice de Poincaré-Hopf e Generalizações no Caso Singular. Dissertação de Mestrado, 2016.

LIMA, E. L. Análise real, v.2, Rio de Janeiro: IMPA, 2016

LIMA, E. L. Variedades Diferenciáveis. Publicações matemáticas. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.



O USO DO GEOGEBRA PARA EXEMPLIFICAR A CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR

MELO, Renan Castro de, renanmelo0954@gmail.com¹
BRANDEMBERG, João Claudio, brand@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará – UFPA

²Universidade Federal do Pará – UFPA

Resumo: Entender alguns aspectos da geometria ainda pode causar um pouco de dificuldade, porém busca-se métodos que mostrem como fazer com que os alunos possam lidar com esse conteúdo de forma menos complexa e mais interativa. Métodos que podem ser descobertos por meio de estratégias de ensino, como o uso de softwares educacionais. Este artigo apresenta uma forma de exemplificar a construção do Pentágono Regular utilizando um desses softwares, o GeoGebra. Mostrando a relevância do uso da tecnologia para o ensino; uma melhor compreensão da geometria; e possibilidades de metodologias que aproximam o aluno do conteúdo ministrado dentro de sala.

Palavras-chave: GeoGebra, Pentágono Regular, Tecnologia, Softwares Matemáticos.

INTRODUÇÃO

Atualmente, encontram-se muitas pesquisas e projetos que visam conciliar o avanço tecnológico com o ensino na sala de aula, e por meio dessa expansão pode-se realizar diversas intervenções, onde, essa interação, escola e tecnologia, pode permitir ao professor uma nova possibilidade de trabalhar em sala de aula, ou seja, o professor conta com uma possibilidade para levar o conhecimento aos seus alunos.

Levando em consideração os Parâmetros Curriculares Nacionais, que diz que:

Os recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão. (BRASIL, 1998, p. 57).

Na matemática, podemos presenciar metodologias que aproximam, cada vez mais, o aluno do conteúdo que está sendo ministrado em sala de aula. Uma dessas metodologias são as tecnologias de informação e comunicação (TICs), que fazem essa aproximação por meio da interação do aluno com a tecnologia, mas que para atuar de forma eficaz precisa de recursos tecnológicos e da capacitação dos profissionais envolvidos.

Como descrito anteriormente, na matemática há diversos *softwares* que se destacam, tanto pelo seu objetivo, quanto pela facilidade de obtenção, como o *Geogebra*, *Poly Pro*, *Scratch*, etc.

No estudo de geometria, temos a recorrência direta de figuras planas e sólidas, o que pode ser, muitas vezes, difícil de visualizar e compreender os desenhos no quadro, assim, dificultando a aprendizagem e fazendo com que os alunos demorem um pouco a se adequar com o conteúdo. Portanto, limitar as aulas somente no método tradicional, sem nenhuma dinâmica, sem tornar a geometria mais próxima do aluno, faz com que eles não desenvolvam interesse na disciplina.

Porém, mesmo com toda essa variedade educacional, nada vale se não existir profissionais que estejam aptos a elaborar métodos através desses *softwares*, e que estimulem os alunos a pesquisar mais sobre o conteúdo e se aperfeiçoar no uso dessa TIC, além dos recursos necessários para o desenvolvimento dessas atividades.

Portanto, esse trabalho apresenta uma forma de exemplificar a construção de uma figura geométrica, o Pentágono Regular, utilizando o *GeoGebra* como recurso tecnológico e educacional, buscando a possibilidade de se criar alternativas para os processos metodológicos do ensino de geometria.

1. GEOGEBRA

Pereira (2012) define o *GeoGebra* como um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O *GeoGebra* se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

E além de estar disponível na versão para *desktops*, nos sistemas operacionais *Linux*, *Windows* e *Mac Os*, ele está disponível para utilizar nas plataformas portáteis, como *tablets* e *smartphones*, ou seja, ele abrange os principais recursos tecnológicos que se utiliza hoje em dia, obtendo um maior poder de expansão do seu uso.

Das funcionalidades presentes no *GeoGebra*, podemos citar:

- **Mover:** permite fazer a seleção e a movimentação de objetos presentes na janela de visualização do *software*;
- **Ponto:** permite plotar um ponto na janela de visualização, assim como fazer algumas aplicações, como ponto médio, interseção de objetos, etc.;
- **Reta:** permite construir retas, semirretas, segmentos de reta, vetores, a partir de pontos da janela de visualização;
- **Reta Perpendicular:** permite construir as retas paralelas, retas ortogonais, bissetrizes, mediatrizes, retas tangentes, etc.;
- **Polígono:** permite construir polígonos regulares e não regulares, etc.;
- **Círculo dados centro e Um de seus pontos:** permite desenhar circunferências, semicírculos, arcos, setores circulares, etc.;
- **Elipse:** permite traçar elipses, hipérbolas e parábolas, etc.;
- **Ângulo:** permite definir ângulos, distâncias, áreas, inclinações, etc.;
- **Reflexão em Relação a uma Reta:** trabalha as reflexões;
- **Controle Deslizante:** permite dinamizar os elementos dentro da janela de visualização, como variar tamanhos de segmentos, mover pontos, inserir textos que servem de legenda, inserir imagem, etc.;
- **Mover Janela de Visualização:** permite movimentar, ampliar, reduzir, a área que compõe os objetos que são adicionados, além de exibir/esconder objetos, etc.

A seguir, será abordado um exemplo comum em muitos trabalhos e contido em Aaboe (2002, p. 63) e que mostra uma abordagem mais recente e diferente da construção elementar do pentágono regular, onde será reproduzida por meio das ferramentas do *GeoGebra*.

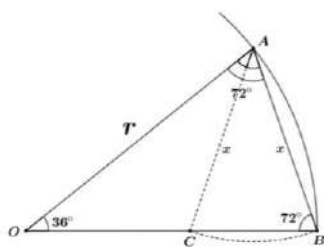
2. CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR NO *GEOGEBRA*

EXEMPLO: Seja o círculo com centro O e raio r , dado. Inscrever um decágono regular, de lado x neste círculo.

Fazendo uma análise algébrica do problema, é notório que hoje podemos construir facilmente um pentágono regular dado o seu ângulo central, que é igual a 72° , pois $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Assim, partindo dessa ideia, o problema pode ser abordado por meio da construção do decágono regular (10 lados), portanto, construir um ângulo central igual a 36° , pois, $\frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Desse modo, a figura abaixo define alguns parâmetros para a solução do problema.

Figura 1. Triângulo isósceles.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Donde, aplicando as relações geométricas presentes na figura e as manipulações algébricas, obtemos a expressão:

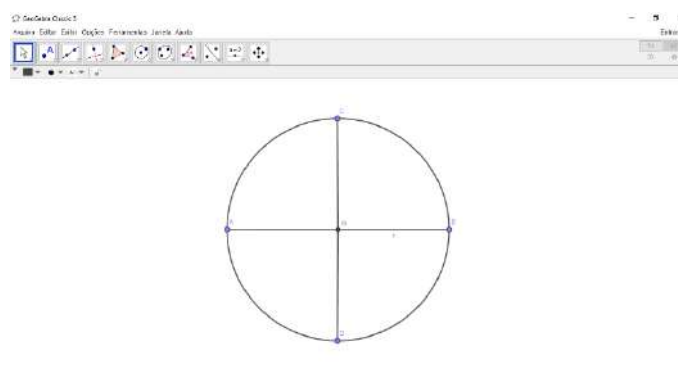
$$x = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1),$$

a qual representa o lado do decágono em função do raio do círculo circunscrito, ou seja, dado r , calcula-se x .

Agora, através do *GeoGebra* será feita a construção do decágono regular, tal que, $x = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$.

- **Passo 1:** Com a função **Círculo: Centro e Raio** defina o círculo O e raio r , e com a ferramenta **Segmento**, defina $AB \perp CD$, onde $AB = CD = 2r$.

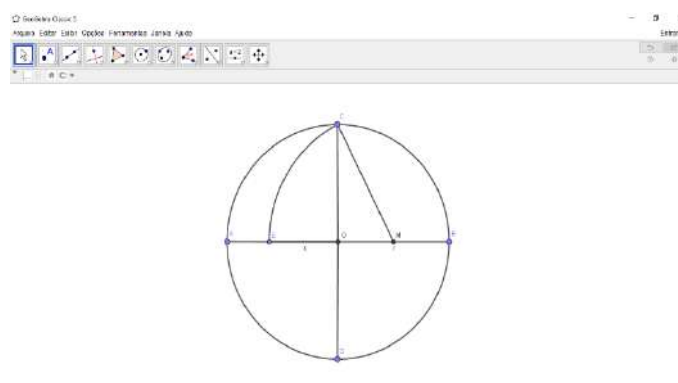
Figura 2. Passo 1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

- **Passo 2:** Usando a ferramenta **Ponto Médio**, determine M ponto médio de OB , sendo $OM = \frac{r}{2}$. E Usando **Segmento**, determine MC e com a ferramenta **Arco Circular** com centro em M e raio MC , trace o arco, determinando o ponto E sobre AB , além de $OE = x$.

Figura 3. Passo 2.



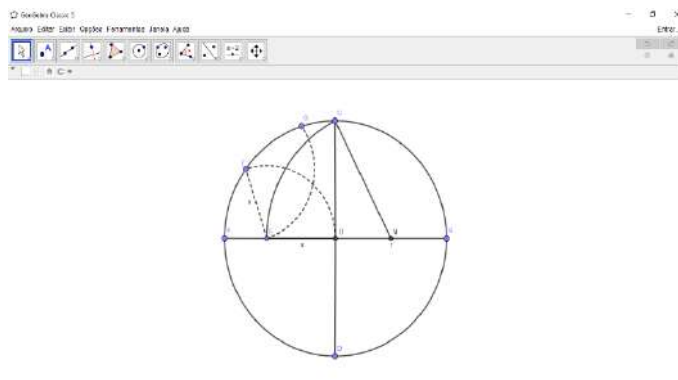
Fonte: Elaborada pelos autores.

Fazendo uso de alguns teoremas e identidades geométricas, conseguimos manipular algebricamente alguns dos segmentos e definir que o lado $EO = x$ é o lado do decágono regular que se deseja inscrever, ou seja,

$$OE = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = x.$$

- **Passo 3:** Com **Arco Circular**, trace o arco com centro em E e raio x , determinando F sobre o círculo e $FE = x$. Usando novamente **Arco Circular**, trace o arco com centro em F e raio x , obtendo G sobre o círculo.

Figura 4. Passo 3.



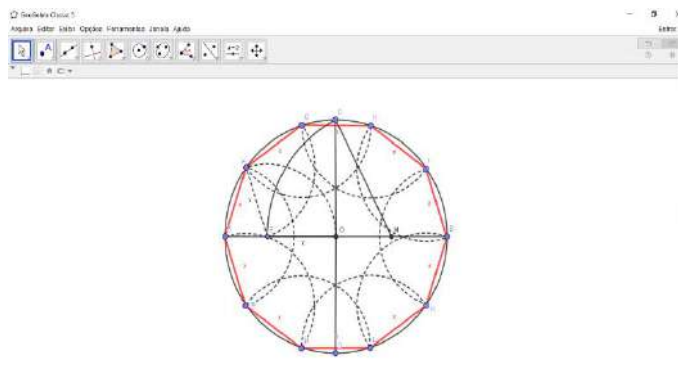
Fonte: Elaborada pelos autores.

- **Passo 4:** Fazendo a mesma construção acima 10 vezes, obtemos os pontos H, I, J, K, L, N e P sobre o círculo. Onde, ligando ponto a ponto com a ferramenta **Segmento**, temos:

$$OE = FG = GH = HI = IB = BK = KL = LN = NP = PA = AF = x.$$

Obtendo, assim, o decágono Regular de lado x .

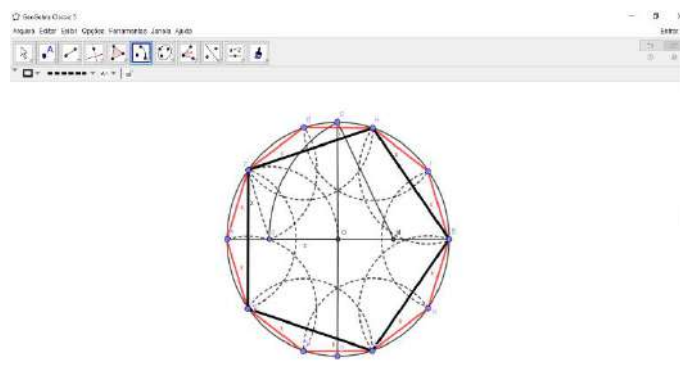
Figura 5. Decágono Regular (Passo 4).



Fonte: Elaborada pelos autores.

- **Passo 5:** Tomando pontos dois a dois e usando **Segmento** para ligá-los, obtemos o pentágono regular desejado (Figura 6).

Figura 6. Pentágono Regular (Passo 5).



Fonte: Elaborada pelos autores.

CONCLUSÕES

O uso do *GeoGebra* deu uma visibilidade maior a figura que se estudou, pois permitiu representar todo um procedimento que geralmente é realizado através de teoremas e demonstrações, ou seja, simplificou o modo de como as informações são colocadas ao telespectador (aluno). Além de que o ensino de geometria tem como característica principal o visual, o concreto.

Como a forma de comunicação mudou, de modo que a tecnologia já se tornou parte do cotidiano, com as ferramentas tecnológicas e seus *softwares*, com suas redes de comunicações, meios de entretenimento, ou seja, toda essa interação proporciona aos professores que estejam cientes dos recursos disponíveis e que possam utilizá-los da melhor maneira, fazendo com que o uso dessas ferramentas faça parte do ensino de geometria.

Finalmente, pode-se concluir que os estudos abordados foram importantes para estabelecer metodologias que possam mostrar o quanto é importante desenvolver estudos interdisciplinares, além de gerar boas atividades que envolvam o uso dos recursos tecnológicos disponíveis. E por meio dessas atividades, gerar novas possibilidades de se trabalhar os mais diversos conteúdos da matemática.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2002;

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Ensino de 5ª a 8ª Séries. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998;

PEREIRA, P. S.; et. al. Análise do Scratch como ferramenta de Auxílio ao Ensino de Programação de Computadores. **XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**, Belém, set. 2012. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/7/artigos/104281.pdf>. Acesso em 13 out. 2021.



O XADREZ PEDAGÓGICO E SUA INFLUÊNCIA NA MATEMÁTICA

Costa, Leandro, costafilhols@gmail.com¹

¹Professor mestre em matemática e professor de xadrez (autônomo)

Resumo: O propósito deste trabalho é o de trazer à comunidade de professores de matemática a poderosa e interdisciplinar ferramenta pedagógica que é o jogo de xadrez. Divulga-la ampla e principalmente aos profissionais do norte do país. Com sua prática é possível conseguir uma melhoria dos níveis de aprendizagem dos alunos do 1.º ano do ensino fundamental em diante, não só na matemática, mas em outras áreas do conhecimento também. A partir disso, mostrar-se-á um pouco sobre o jogo, os benefícios que este esporte proporciona ao aluno com influência direta na matemática, e uma forma de como ensinar de maneira a causar interesse nos alunos. Ou seja, serão apresentados muitos motivos pelo qual a prática deste jogo deveria ser mais incentivada nas escolas.

Palavras-chave: matemática, xadrez, interdisciplinar, ferramenta, pré-enxadrístico.

1. INTRODUÇÃO

Não é novidade que o uso de jogos matemáticos enquanto metodologia é uma crescente nos dias atuais. Sem dúvida, já se mostrou que sua utilização é eficaz para driblar a falta de interesse pela disciplina matemática por parte dos alunos e melhorar desempenhos individuais e coletivos dentro de sala. Sempre se deve estar atento, logicamente, ao contexto de cada turma ou aluno para se ter assim resultados mais satisfatórios para o ensino-aprendizagem. Entrar na realidade do aluno faz parte desse processo. Envolver a metodologia usada com o cotidiano implica no sucesso dessa estratégia de ensino, como, por exemplo, Araújo et al. (2021) e Prieto e Thijm (2021) abordam em seus trabalhos. E como bem mencionam estes últimos:

[...] A partir do emprego de jogos associados à resolução de problemas, portanto, que se podem pensar metodologias que aproximem a educação escolar com os conhecimentos que os estudantes desenvolvem no decorrer do seu dia-a-dia em situações comuns nas quais a matemática e os saberes escolares estão diretamente envolvidos, tais como ir ao supermercado ou até mesmo pagar uma passagem em um coletivo. (p. 148)

Seja presencial ou remotamente, devido à pandemia, há recursos tecnológicos e digitais muito interessantes que se podem explorar durante as aulas, como visto, por exemplo, por Alves et al. (2021), Barbosa et al. (2021), Gomes e Kayolan (2021) e Oliveira (2021). Com relação aos benefícios que a prática de jogos, que envolvem a matemática, proporcionam, Pereira e Martins (2021), por exemplo, ressaltam bem que:

[...] por diversas vezes estão em contato com os jogos, nota-se que estes podem resultar positivamente nas práticas escolares, pois os jogos despertam nos alunos a criação de estratégias, interação, resolução de problemas, além de favorecer a criticidade de cada aluno. (p. 67).

Na perspectiva do jogo de xadrez não é tão diferente. São muitos os benefícios que este jogo pode vir a proporcionar e se for trabalhado de forma adequada, implicará em uma melhora significativa tanto no âmbito escolar como para a vida do aluno. Do ponto de vista de um Grande Mestre (GM) em xadrez, pode-se destacar o que diz Rafael Leitão, sete vezes campeão brasileiro, à cerca da importância do xadrez para a matemática:

[...] Se a matemática tem participação no xadrez, o mesmo pode ser considerado invertendo-se as posições. Muitas escolas adotam o jogo de xadrez como ferramenta de ensino, estimulando o raciocínio lógico, operações matemáticas e outros fundamentos pessoais e sociais nos alunos (Leitão, 2015).

A partir de tudo isso, é feita uma breve introdução ao que consiste o jogo. Algo fundamental no uso desse jogo é que os alunos devem acompanhar cada aula para evoluir com consistência e para isso o professor é peça fundamental. Será mostrado uma forma atrativa de ensiná-lo de forma pedagógica, aos alunos do fundamental I, ao nível de fazer com que haja interesse pelo jogo e se consiga realizar as atividades propostas. Aliado ao supracitado, referências bibliográficas e recursos digitais acerca do uso do jogo nas escolas serão mencionados no intuito de reforçar o entendimento posterior do leitor em caso de querer se aprofundar.

2. UM POUCO SOBRE O JOGO E SUA PRÁTICA

Diz-se que o xadrez surgiu na Índia, por volta do século VI. Depois, disso o jogo sofreu mudanças e no século XV, no sudoeste da Europa, surgiu em sua forma atual. O xadrez é um dos jogos mais populares do mundo, sendo praticado por milhões de pessoas em torneios, clubes, escolas e em plataformas online. As competições oficiais tiveram início no século XIX, sendo Wilhelm Steinitz, considerado o primeiro campeão mundial. O atual campeão do mundo (desde 2013) é o norueguês Magnus Carlsen. Acredita-se que o xadrez tenha chegado ao Brasil no ano de 1500 pelos portugueses.

Em resumo, trata-se de um jogo de tabuleiro, composto por 64 casas em formas quadradas simétricas, disposto em 8 linhas e 8 colunas, com 32 casas negras e 32 claras. Há 6 diferentes categorias de peças: peão, bispo, cavalo, torre, dama e o rei. Cada peça tem seus movimentos característicos. O objetivo do jogo é encurralar o rei adversário, dar xeque-mate. Ou seja, se o rei não consegue escapar dos ataques do oponente, é xeque-mate e o jogo encerra neste momento. Jogado por 2 pessoas, decide-se na sorte quem jogará com as peças brancas e quem jogará com as negras. O jogador de brancas sempre inicia a partida. Cada jogador faz um movimento com uma de suas peças, no intuito de melhor se aproximar do rei adversário.

Figura 1: Torneio de xadrez realizado em janeiro de 2022 em Belém/PA



Mesmo parecendo que o jogo tem uma complexidade muito grande, sem conhecê-lo de forma um pouco mais detalhada, é possível perceber que a dinâmica do jogo se espelha de forma muito próxima ao raciocínio para resolver problemas matemáticos. Frei e Goulart (2005), detalham bem essa relação:

[...] nota-se no estudo de sua complexidade diversos outros exercícios de ordem cognitiva, principalmente no que diz respeito à estratégia, concentração e raciocínio lógico. Numa partida o jogador deve preparar o movimento de suas peças imaginando imediatamente as respostas possíveis de seu adversário e reagir prontamente as escolhas alheias, exercitando a reversibilidade e a autonomia ao tomar as decisões por si mesmo. É lugar comum que uma das grandes dificuldades na resolução de problemas matemáticos estabelece-se na incapacidade de entender e analisar sua proposta. Ao buscar a melhor combinação de lances a criança aprende a pensar no problema de forma geral, aprendendo a analisar os diferentes pontos e a encontrar o melhor caminho para sua solução. (p. 724)

Para chegar a este nível de jogo, mencionado acima, o aluno deve passar por um processo de construção do conhecimento, raciocínio lógico, estratégia, prioridades, cálculo de movimentos, ou seja, de entendimento do jogo de fato. Para isso, antes de chegar a jogar efetivamente o jogo de xadrez, estão os jogos pré-enxadristicos que dão suporte ao professor na hora de desenvolver essas habilidades. Assim, permite ao aluno ter mais autonomia de tomar decisões nas horas que for exigido. Resultando talvez na escolha da melhor jogada para as mais variadas posições em jogo e, conseqüentemente, na melhor forma em se resolver problemas matemáticos. Da mesma forma, a importância de superação do pensamento abstrato, da criação de habilidades cognitivas que resultam no aprimoramento do raciocínio lógico e conseqüentemente na resolução de problemas, Santos (2009) diz que:

[...] A abstração requisitada nas ciências exatas é grandemente desenvolvida no jogo de xadrez. Essa abstração é a capacidade de desenvolver as idéias mentalmente, antes de passá-las a um plano material. A verdadeira partida de xadrez desenvolve-se na mente do jogador; é lá que ocorre a multiplicidade de variantes e artifícios que estarão apenas parcialmente representadas no tabuleiro. Um bom enxadrista deve ser capaz de visualizar várias jogadas à frente, sem mover as peças, até confiar em uma determinada linha de jogo. Da mesma forma, o aluno precisa abstrair o problema em sua mente, tratando de descobrir sua essência, representando-o no papel quando encontrada a melhor forma de resolvê-lo (p. 66, 67)

Outro autor, por outro lado, fez um grande estudo acerca da prática do jogo de xadrez, desde suas regras até os diversos benefícios que sua prática gera nos alunos, passando também por pesquisas entre grupos de crianças praticantes de xadrez e as que não praticam. Baseado em uma abordagem acerca do cálculo mental e raciocínio para se realizar um movimento durante o jogo, ele afirmou que:

[...] A utilização do xadrez para o desenvolvimento de habilidades cognitivas tem despertado o interesse das escolas, que a cada dia se rendem aos seus benefícios e procuram incluir atividades enxadrísticas em sua rotina. Seja de forma discreta, inserindo-o apenas como uma atividade extracurricular, esporádica e voluntária, ou de forma contundente, fazendo-o parte integrante do currículo regular, a sua presença nas salas de aula é cada vez mais visível. (Melo, 2015; p. 13)

Perceber-se que de fato há vantagens em se praticar esse esporte. Muitas outras pesquisas foram feitas, projetos implementados, experiências relatadas e o leitor é convidado a ler algumas delas para melhor conhecer o uso do jogo de xadrez como ferramenta pedagógica de ensino e observar ótimas pesquisas de campo que resultaram ter sucesso em suas propostas. Seja ela voltada a alunos especiais, com deficiência intelectual, como Neves (2017). Seja na utilização de outras formas de implementação do jogo em sala de aula, para 6.º ao 9.º ano, por exemplo, visto por Junior (2017). Seja para reforçar as ideias e objetivos abordadas neste trabalho, desenvolvida por Paim (2010).

3. XADREZ ESCOLAR

Primeiramente, deve-se atentar ao fato que estamos lidando com crianças de 7 a 10 anos, então o jogo deve ser algo divertido, atrativo e, porque não emocionante. Relacionar o xadrez, por exemplo, a uma batalha de dois castelos e que o tabuleiro é o campo de batalha dos exércitos. Chama-se a atenção dos alunos e a partir daí se pode introduzir o tabuleiro, dizer a quantidade de casas, que o tabuleiro tem linhas e colunas identificadas por letras e números. Dizer também que o jogo possui casas pretas e claras, e peças da mesma forma, quem são os personagens do jogo... Assim, apresentar as peças aos alunos pouco a pouco sem falar seus movimentos característicos, nem o objetivo do jogo. A primeira aula se resume a isso. O primeiro contato deve ser apenas com os elementos do jogo para criar esse universo, uma certa expectativa para se seguir em frente, pouco a pouco.

Posteriormente, tem-se cada aula como uma apresentação de cada peça, iniciando com um pouco de teatro para atrair a atenção dos alunos, isso vai muito de cada professor usar sua criatividade. O peão, por exemplo, fica na linha de frente da batalha dos exércitos de cada castelo e cada grupo defende seu rei. São 8 peões para cada lado, a posição inicial é exatamente um ao lado do outro ocupando as linhas 2 e 7. Em seguida se vê o movimento do peão. Este, veste uma armadura, usa escudo, espada e é muito pesado andando assim apenas uma casa, e sempre para frente. Como no começo ele está com muito energia pode andar 2 casas no seu primeiro movimento, depois apenas de 1 em 1... Daí, pode ser abordado sem seguida a forma como o peão captura outra peça, movimentos proibidos,

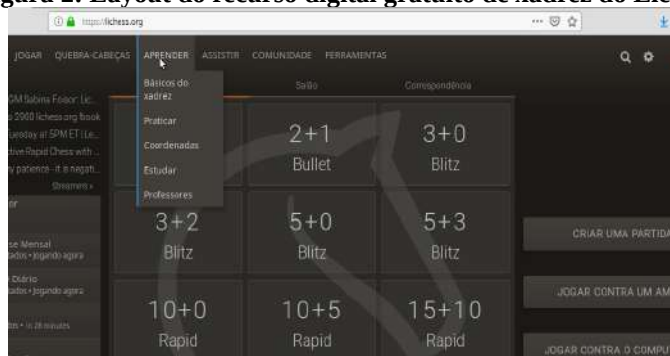
etc. Perceba então, como se cria um ambiente para introduzir as regras, movimentos das peças e essa é uma forma para ensinar esses alunos do 1.º ao 5.º ano do ensino fundamental.

Com isso, os alunos acabam ganhando interesse em querer praticar o jogo. Logicamente os alunos querem jogar e para isso deve-se coloca-los para jogar logo após aprender as características de uma peça. Por exemplo, após aprender o movimento do peão, pode-se ensinar um jogo adaptado do jogo de xadrez, chamado batalha de peões. Este jogo pré-enxadístico consiste em quem chegar do outro lado do tabuleiro vence. Cada jogador faz um movimento com o peão, realiza capturas, avança e quem fizer a melhor estratégia, ganha. É um jogo já muito utilizado por diversos professores do país e divertidíssimo.

Um exemplo forte da interdisciplinaridade do jogo de xadrez é que pode ser praticado em uma quadra, coordenando o momento do jogo com corridas, arremessos, chutes, etc. Pode-se, associar à ideia do uso de letras, sílabas, ou palavras; assuntos da língua portuguesa estudada pela turma naquele ano. Promover a interação dos alunos, trabalho em grupo, explorar o manuseio de materiais como pinturas, recortes, etc. Matematicamente falando, na introdução do jogo já se explora os números, quantidades, noção de posicionamento espacial (muito explorado no plano cartesiano), etc. Aos jogos pré-enxadísticos se pode associar às operações matemáticas, números primos, dentre outros. Muita coisa é possível de ser explorada com o tabuleiro e as peças de xadrez.

Seguindo nessa mesma linha, de ensinar as peças, em 5 meses é possível ensinar a uma criança o jogo de xadrez. Concretamente se tem êxito com os alunos a partir do 3.º ano em diante. O trabalho é contínuo e o professor deve ter estudado, estar qualificado e preparado para tal. Aliado ao ensino em sala, estão as plataformas online de prática de xadrez. Ali também se pode encontrar jogos pré-enxadísticos como australiana e loser. Além de sites, estes estão em formato de aplicativos também: chess.com e lichess.org. O primeiro tem algumas restrições, por ser uma plataforma paga para algumas funções, e o outro uma plataforma de livre acesso, muito boa para usar em sala de aula e para os alunos aprenderem e praticarem também.

Figura 2: Layout do recurso digital gratuito de xadrez do Lichess



Obviamente, que ao se ensinar para pré-adolescentes em diante é possível ser mais direto. O entendimento é maior. Contudo, usar os jogos pré-enxadísticos é de certa forma, essencial para motivar e estimular os alunos e assim poderem usufruir dos mesmos benefícios que os do fundamental I. Nesse sentido, para alunos de 6.º ano em diante, se não for possível ter a disciplina de xadrez na grade curricular da escola, pode-se criar um clube de xadrez e/ou uma escolinha de xadrez. Como mencionado anteriormente para jogos em geral, estar atento ao contexto e realidade dos alunos é essencial para compreensão do jogo de xadrez. Os estudos dessa faixa etária são mais técnicos. Após um certo nível de entendimento do jogo, pode-se falar de aberturas, finais (que são importantíssimos nos jogos), estratégias, táticas, etc. Dizem que o xadrez é a academia da mente, então sua prática é aconselhável às pessoas de todas as idades.

CONCLUSÕES

A intenção das escolas sem sombra de dúvidas é proporcionar o melhor ensino aos seus alunos e pra isso os professores devem empenhar-se ao máximo no quesito plano de aula. O que se quer são alunos mais participativos, que manipulem a teoria aplicando na prática de maneira mais natural. Interligar matérias, ideias, criando, questionando, etc. É fundamental uma aula mais dinâmica e que envolva alguns dos elementos básicos do ensino-

aprendizagem: motivar o aluno e variar as formas de abordar os assuntos em sala. Não ser um professor conteudista que coloque o assunto no quadro, o aluno copia, registra e fica por isso mesmo.

Portanto, a prática do xadrez nas escolas, pode ser um aliado na caminhada dos pequenos cidadãos que se formam. Assim, buscar entendimento no ensino desse esporte é bastante recomendado para o professor que quer utilizar essa ferramenta. Vale mencionar que proporcionar ganhos aos alunos não é demais. Como foi visto anteriormente, não só na aula de matemática a prática de xadrez é recomendada, mas em todas as outras matérias. Além dos que já foram vistos nesse trabalho, pode-se mencionar outros e reforçar alguns dos benefícios que este esporte aporta às crianças para melhorar o aprendizado em matemática: estimular a atenção, concentração, paciência, ter responsabilidades, memória, o raciocínio lógico, tomada de decisões e capacidade de dedução.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V.; AZEVEDO, I. F. de; SOUSA, R. T. de. Wordwall como ferramenta para a gamificação no ensino de matemática. Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

ARAÚJO, L. M. de; LIMA, L. S. de; SILVA, A. P. V. da. A relevância da utilização de jogos como ferramenta metodológica no ensino de matemática para alunos do ensino fundamental II. Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

BARBOSA, E. A. A.; LOZADA, C. de O.; SANTOS, J. de A. Uma trilha de aprendizagem para o desenvolvimento do sentido de número com base na argumentação e uso de jogos digitais. Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

FREI, F.; GOULART, E. O jogo de xadrez como ferramenta para o ensino da matemática à crianças do ensino fundamental. Disponível na web. 2005.

GOMES, C.; KAYOLAN, L. Proposta metodológica para o ensino de geometria com o uso do class craft. Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

JUNIOR, J. A. B. O tabuleiro de xadrez no ensino da matemática. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, 2017.

LEITÃO, R. D. Xadrez: Uma questão matemática. Blog: rafaelleitao.com.br. 2015

MARTINS, J. L. da S.; PEREIRA, A. V. S. P. O ensino da matemática para educação de jovens e adultos por meio de jogos. Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

MELO, W. A. de. Influência da prática do xadrez escolar no raciocínio infantil. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2015.

NEVES, E. R. das. A prática do xadrez e os processos de aprendizagem dos alunos com deficiência intelectual. Dissertação de mestrado. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, 2017.

OLIVEIRA, O. Mas afinal, de onde vem a matemática? Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

PAIM, L. M. R. Contribuição do jogo de xadrez na aprendizagem de matemática nas séries iniciais. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

PRIETO, K. R. H.; THIJM, G. de C. S. Jogos pedagógicos e resolução de problemas no ensino aprendizagem da matemática nos anos iniciais. Anais do III Simpósio da Formação do Professor da Matemática da Região Norte, 2021.

SANTOS, M. S. dos. A abstratividade das ciências químicas, físicas e matemáticas – O xadrez como auxílio no desenvolvimento das habilidades cognitivas. SABER CIENTÍFICO, Porto Velho, 2 (2): 63 - 79, jul./dez., 2009.



O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA: ENTENDIMENTO SOBRE AS CURVAS

Lopes Assunção, Lucas, lucasassuncao001@gmail.com
Cruz dos Prazeres, Jose Anderson, andersoncruzprazeres2000@gmail.com

Discente FAMAT/PIBID/UFPA
Discente FAMAT/PIBID/UFPA

Resumo: A finalidade deste trabalho é exemplificar o conceito e aplicação da braquistócrona, abordando sua história e curiosidades que se interligam com a tautócrona e a curva cicloide, isto é, citando cada uma delas com o intuito de evidenciar a resolução nos seus problemas propostos. A resolução se identifica por meio das figuras, ilustrações e tabelas demonstrativas. Com o objetivo final de associar os três termos trabalhados, visando o melhor entendimento do público sobre o tema apresentado.

Palavras-chave: Braquistócrona. Cicloide. Tautócrona

INTRODUÇÃO

Inicialmente, vamos a um fato curioso: se perguntarmos para qualquer pessoa, qual o caminho mais rápido de um ponto A ao ponto B em um plano vertical, onde haja uma aceleração constante, instintivamente, caso a pessoa não conheça sobre o conceito da braquistócrona, ela dirá que será uma reta, pois deduzirá que o caminho mais curto também será o mais rápido, afinal é o que “faz mais sentido”, no entanto, ela estará equivocada.

A relação do ponto A com o ponto B sob influência da gravidade, faz com que o caminho mais rápido seja uma curva (cicloide), quando se considera um plano vertical, pois o seu impulso acaba por ser maior do que o da reta.

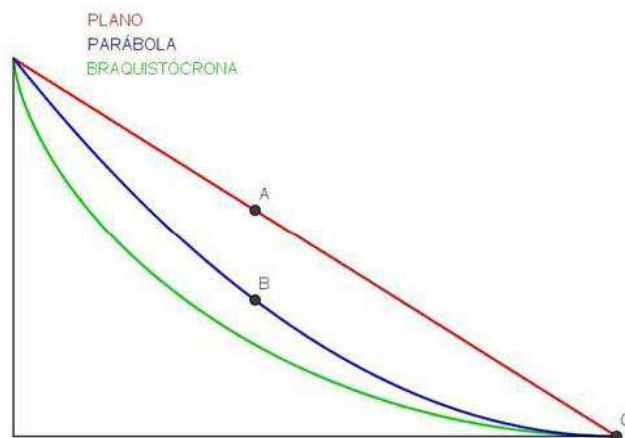
Neste trabalho, evidenciamos o problema da braquistócrona e como ele pode ser resolvido. Falamos, também, sobre a curva cicloide e qual a sua relação com a braquistócrona, assim como o problema da tautócrona. Tudo isso vinculado ao ensino de uma forma mais dinâmica e exemplificadora por meio de ilustrações.

O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

O problema da Braquistócrona surgiu em (1669), quando foi proposto por Jean Bernoulli, este publicou o problema na revista *Acta Eruditorum*, esse problema chamou atenção dos matemáticos e físicos daquele período que ficaram curiosos em resolvê-la, então revista *Acta* foi responsável por enviar o problema aos maiores matemáticos da época, a solução foi encontrada por vários deles inclusive pelo Isaac Newton, nesta solução todos indicaram que o caminho mais rápido seria uma curva que era a cicloide, denominada também como braquistócrona.

A palavra braquistócrona deriva das palavras gregas *brachistos*, que significa menor, e *chronos*, que significa tempo. O problema da braquistócrona consiste em determinar a curva que une dois pontos dados a diferentes distâncias na horizontal, e no mesmo plano vertical, pela qual uma partícula, esfera ou bola se desloca, por meio do seu próprio peso sobre efeito gravitacional, começando o seu movimento no ponto superior, descendo o mais rapidamente possível até ao ponto inferior.

Figura 1. Comparação do tempo de descida das curvas



Fonte: Simulação elaborada por meio do Geogebra

Para medir o tempo em que as 3 partículas se deslocam do ponto inicial ao ponto final, foi usado um cronômetro para fazer várias medidas do tempo de descida das esferas, conforme ilustrado nas várias curvas na Figura 1 para, com isso, estimar o tempo de percurso ótimo. Calculou-se além do tempo de descida o desvio padrão pela seguinte fórmula:

$$Dp \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n}}$$

sendo Dp o desvio padrão, t_i : o valor individual do tempo, n : o número de vezes que o tempo foi coletado, e \bar{t} : a média dos intervalos de tempo, dada por:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

O resumo das medidas obtidas está apresentado na Tabela 1.

Tabela 1. Tempo estimado da descida das esferas em diferentes percursos

Curva	Tempo Estimado (S)	Desvio Padrão
Reta	0,30 s	0,06
Parábola	0,23 s	0,013
Braquistócrona	0,20 s	0,010

Fonte: Os autores

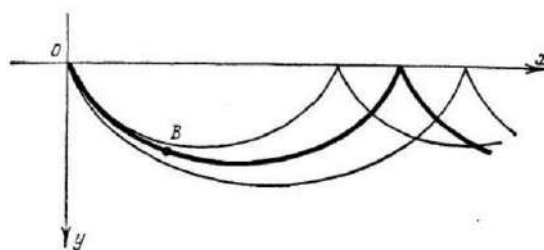
Agora, aplicaremos uma condição que irá revelar, na teoria, que a cicloide (braquistócrona) é a curva que minimiza o tempo de descida da partícula entre dois pontos.

O feixe de cicloides $x = C_1 (t - \text{sen}(t))$ e $y = C_1 (1 - \text{cos}(t))$ com centro em $(0, 0)$ forma um campo central que inclui o extremal:

$$x = \alpha (t - \text{sen}(t)) \text{ e } y = \alpha (1 - \text{cos}(t))$$

Onde α é determinado pela condição de que a cicloide passa pelo segundo ponto de fronteira $B (x_1, y_1)$, então $x_1 < 2\pi\alpha$, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2. Feixe de cicloides



Fonte: Elsgoltz (1696)

Temos também que

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} e$$

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

para qualquer y' . Assim, pelas condições suficientes, para $x_1 < 2\pi\alpha$, o funcional assume o mínimo na cicloide.

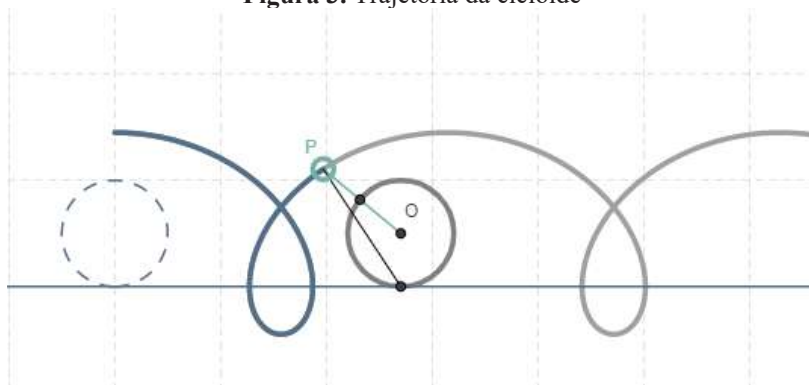
$$x = \alpha(t - \text{sen}(t)) \text{ e } y = \alpha(1 - \text{cos}(t))$$

Desta forma temos a comprovação teórica de que a solução da Braquistócrona é realmente a cicloide, como foi demonstrado.

CURVA CICLOIDE

A curva cicloide é a trajetória definida por um ponto P em uma circunferência que inscrita sobre um plano, é transladada paralelamente a um eixo referencial fixo. Uma cicloide invertida é a solução para o problema da braquistócrona é através dela que se obtém o caminho mais rápido de um ponto ao outro.

Figura 3. Trajetória da cicloide



Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/parametrizacao-cicloide/>

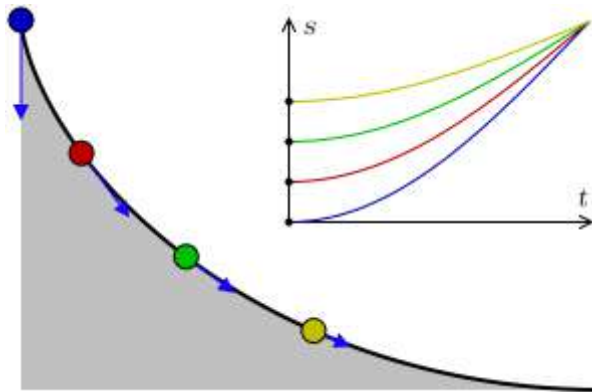
Se a distância de P ao centro O é igual ao raio da circunferência temos uma cicloide. Caso seja menor, temos uma cicloide encurtada e, se é maior, temos uma cicloide alargada.

O PROBLEMA DA TAUTÓCRONA

Um problema que intrigou os matemáticos do século XVII foi o problema da tautócrona, palavra que tem origem no grego: *tauto* que significa “mesmo” e *chronos* que significa “tempo”, ou seja, tautócrona literalmente significa “no mesmo tempo”. O problema tautocrônico, foi resolvido por Christiaan Huygens em 1659. Ele provou geometricamente que essa curva se tratava de uma cicloide. Este consistia em determinar a curva sobre a qual um objeto (esfera) escorregará de um ponto qualquer até o fundo exatamente no mesmo tempo, qualquer que seja o ponto

de partida. Exemplo um ponto A em uma altura e um ponto B em outra, sendo altura de B inferior de A , ambos as esferas são soltas ao mesmo tempo de seus pontos, e ambas chegam ao mesmo tempo em seu destino final.

Figura 4. Esferas em pontos diferentes de partida, mas ambas chegam juntas ao final



Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone> R

Na Figura 4 podemos analisar um esquema com 4 bolinhas (azul, vermelha, verde, amarelo), respectivamente, se deslocando sobre uma tautócrona, lançadas de pontos diferentes, no entanto, atingindo o ponto final juntas. O gráfico no detalhe da Figura 4 mostra a posição em função do tempo, se observarmos a bolinha azul ela é que está mais distante, mas chega junto com as demais devido a sua maior aceleração durante o percurso.

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos o conceito e aplicação da braquistócrona, abordando sua história e curiosidades e sua ligação com a tautócrona e a curva cicloide, envolvemos o leitor sobre suas histórias. A braquistócrona (curva que une dois pontos dados a diferentes distâncias), cicloide (curva definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta) e a tautócrona (curva no qual o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo, independentemente de seu ponto de partida). Ao longo do texto foi transmitido a problemática delas e o desenvolvimento, tentando solucioná-las de forma simples e compreensível para que o leitor entenda sem nenhuma dificuldade.

REFERÊNCIAS

- De Andrade M. A; Ferreira Filho L. G.: **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, 2309 (2015)
- Oliveira R. V; Da silva M. G.: **Experiências em Ensino de Ciências** V.15, No.3 (2020)
- Tagliolato, Ana Luísa Sader: **Braquistócrona** - Rio Claro, 2015 54 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas 2015
- BUSTILLOS, O. V.; SASSINE, A. **A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona**. São Paulo: Scor Tecci, 2011.
- Vieira C. G; Gonçalves Rosa R. J; de Freitas W. D.: **O Problema da Braquistócrona: uma proposta para o ensino** Abakós, Belo Horizonte, v. 4, n. 2, p. 94-104, maio 2016



RECURSOS DIDÁTICOS E A ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR NA MATEMÁTICA

TAVARES, Simone Cristina da Costa, sim0ne_tavares@yahoo.com.br¹
VALE, Jesiane Calderaro Costa, jesianecalderaro@gmail.com²

¹Engenheira de Telecomunicações, Licenciada em Matemática, Especialista em Docência no Ensino Superior, Mestre em Engenharia Elétrica na área de Telecomunicações, Doutoranda em Engenharia Elétrica na área de Telecomunicações na Universidade Federal do Pará.

²Psicóloga, Neuropsicóloga, Especialista em Saúde Mental, Especialista em Psicologia Hospitalar, Mestre em Psicologia Clínica e Social, Doutora em História Social, Pesquisadora no GP Militares, Política e Fronteiras na Amazônia -UFPA/CNPQ

Resumo: *A proposta do presente trabalho é oferecer uma compreensão interdisciplinar sobre o ensino da ciência matemática, por intermédio do uso de diferenciados recursos didáticos, na interface com as áreas de pedagogia, psicologia educacional, psicanálise, dentre outras, e como podem contribuir em seu aprendizado, tendo por certo que o fenômeno ensino-aprendizagem perpassa por enfoques que envolvem uma perspectiva interdisciplinar. Nesse sentido, destacamos que o aparato dos recursos didáticos, quando bem planejados, desenvolvidos e administrados pelo professor de matemática, é capaz de produzir no alunado, a motivação com intencionalidade para a aquisição do conhecimento da disciplina.*

Palavras-chave: *Matemática, recursos didáticos, interdisciplinaridade, motivação, estímulo.*

1. INTRODUÇÃO

Historicamente se constata que o docente, em âmbito da sala de aula, se utiliza de diversos instrumentos e meios para poder transmitir o conteúdo de sua disciplina e se fazer compreender. Assim, tudo aquilo que é encontrado no ambiente e que ao ser utilizado venha favorecer o processo ensino-aprendizagem compreende-se como recurso didático sendo ele o suporte instrumental empregado para repassar conhecimento, de modo organizado, em sala de aula. Para Souza (2007), os recursos didáticos são componentes do ambiente educacional para ser aplicado pelo professor a seus alunos com a finalidade de estimulá-los ao aprendizado, facilitando e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem.

Considera-se que a motivação é um fator fundamental para aprendizagem do aluno, seja ele de que natureza for. Por isso, no tocante ao ensino-aprendizagem, o professor de matemática deve buscar transmitir sua matéria de modo que favoreça a motivação do seu alunado, inclusive na utilização de recursos em suas aulas. Sobre a motivação humana, Abraham Maslow (1943), um dos formuladores da teoria humanista, defendeu a ideia de que o ser humano está imerso em necessidades e que à medida que uma dada necessidade de primeira ordem é realizada, ele se motivará a satisfazer uma outra, e depois outra e assim sucessivamente. Dentre os sete conjuntos de motivos necessários, encontra-se elencado por Maslow a ‘necessidade de conhecimento e compreensão’, a qual abrange a curiosidade, a exploração e o desejo de conhecer coisas novas, de adquirir conhecimentos. Trata-se de uma necessidade que difere de uma pessoa para a outra; que é mais forte em uns do que em outros. No caso da motivação do aluno para o aprendizado da matemática, é muito importante que o professor possa avaliar que ou quais variáveis intervenientes estejam porventura hierarquicamente dificultando o aprendizado daquele aluno.

Entretanto, Moreira (2008), defende que não pode haver só motivação. Assegura, que tem que haver intencionalidade para o aprendizado:

A predisposição para aprender não é exatamente aquilo que chamamos de motivação. É claro que implica motivação, mas é, antes, uma intencionalidade, um esforço deliberado para relacionar o novo conhecimento a conhecimentos prévios, mais inclusivos, mais diferenciados (Moreira, 2008, p.20).

Neste estudo, interessou-nos refletir sobre alguns recursos didáticos a serem utilizados para o ensino da matemática, que despertem interesse, tornem as aulas mais prazerosas, menos monótonas, e aplicáveis no cotidiano do aluno. Assim, apresentamos neste trabalho sugestões e possibilidades de recursos didáticos numa perspectiva interdisciplinar para que o professor possa preparar, melhorar ou aprimorar a aula que será dada. Nesse sentido, destacamos que o aparato dos recursos didáticos, quando bem planejados, desenvolvidos e administrados pelo professor de matemática, produz no alunado a motivação com intencionalidade para a aquisição do conhecimento da disciplina.

Para tanto, o texto está dividido em cinco seções, sendo a primeira, esta introdução; a segunda, considerações sobre o ensino da matemática na educação infantil; a terceira discorremos sobre os recursos e estratégias interdisciplinares de ensino; a quarta o ensino da matemática com o auxílio da tecnologia na pandemia do covid 19; e a quinta seção a conclusão.

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Jean Piaget (1973), um dos pensadores que mais influenciou o século XX, o conhecimento se dá progressivamente pela própria criança, ou por aquele que o constrói, esse processo é denominado de construtivismo. Sua teoria é centrada no desenvolvimento natural da criança, que vai se modificando, conforme as etapas do desenvolvimento. Assim, Piaget defende, que não se pode exigir ou forçar a criança a aprender o que ela ainda não tem condições de absorver, nesse sentido, para auxiliar a criança ao aprendizado, convém respeitar as etapas de seu desenvolvimento intelectual, proporcionando a adaptação natural.

No caso do aprendizado da matemática, é muito importante que o professor da educação infantil e/ou ensino fundamental, esteja devidamente fundamentado na compreensão apresentada nos estudos de Piaget sobre o conhecimento da infância e o seu desenvolvimento intelectual. No que tange às etapas do desenvolvimento infantil, Piaget define, que a criança desenvolve um período denominado de ‘Operações concretas’, o qual corresponde ao período de 7 a 12 anos. Trata-se de uma etapa onde as operações mentais realizadas são a partir de objetos concretos, de coisas visíveis, palpáveis, por exemplo: água, madeira, plantas, animais, tudo o que poderá ser manipulado e não com conceitos abstratos. É nesse intuito, que defendemos a observância do benefício proporcionado pelo uso dos recursos didáticos.

Alguns pesquisadores, dentre eles Costoldi e Polinarski (2009), asseguram que os recursos didáticos despertam mais a atenção de crianças do que de adultos, a exemplo os jogos, sendo estes mais utilizados no ensino fundamental por despertar nas crianças o sentido da brincadeira, ou de competição.

[...] os recursos didáticos surtem maior efeito nas aulas apresentadas aos alunos do ensino fundamental (séries iniciais), por serem ainda crianças e se interessarem muito mais por aulas diferentes, torna-se mais fácil para uma criança se envolver mais durante a aula com recurso pelo “espírito de brincadeira” que ela ainda possui. (COSTOLDI e POLINARSKI, 2009, p. 4).

Contudo, advertimos que isso não significa dizer que os diversificados recursos didáticos não possam ser utilizados por alunos de uma faixa etária mais elevada, uma vez que o professor tem a possibilidade de adequação do conteúdo, a qualquer público que se disponha a trabalhar.

O certo é que o professor de matemática, seja das séries iniciais seja de séries mais avançadas, precisará levar em conta as etapas do desenvolvimento infantil, de modo a compreender as implicações de tal desenvolvimento no processo de aprendizagem e na aquisição do conteúdo, por exemplo, no caso do ensino para crianças menores em questões que envolvam conteúdo matemáticos como raciocínio, lógica, seriação, relação simétrica, classificação, etc. o docente deve prontamente se questionar: Que estratégia de ensino-aprendizagem está mais adequada a ser usada que respeite a maturidade dessa faixa etária?

3. RECURSOS E ESTRATÉGIAS INTERDISCIPLINARES DE ENSINO

A seguir destacamos alguns princípios como recursos e estratégias que podem auxiliar o professor ou o educador infantil, na introdução de tarefas envolvendo a matemática.

a) Princípios matemáticos na contação de histórias, fábulas ou leituras:

As historietas são muito importantes para a aquisição de algumas habilidades matemáticas. Elas são recursos capazes de proporcionar significado, transcender os limites, trabalhar a imaginação, a superação de adversidades, transmitir herança cultural e, também, conhecimentos matemáticos à medida que prende sua atenção e desperta curiosidade.

[...] a vida é desconcertante para a criança, ela necessita mais ainda que lhe seja dada a oportunidade de entender a si própria nesse mundo complexo com o qual deve aprender a lidar. Para que possa fazê-lo, precisa que a ajudem a dar um sentido coerente ao seu turbilhão de sentimentos. Necessita de ideias sobre como colocar ordem na sua casa interior, e com base nisso, poder criar ordem na sua vida (BETTELHEIM, 2013, p.12).

Se por exemplo a criança está em idade escolar do maternal/ alfabetização, ou a mãe ou a professora, naturalmente poderão fazer uso das fábulas ou contos infantis, e se apropriar de princípios matemáticos, sociais, dentre outros, por exemplo:

- O conto clássico da “Branca de Neve e os 7 anões”, o número sete se apresenta como um item matemático relevante que se materializa ao longo de todo o mencionado conto; diz respeito a quantidade e também de qualidade, onde cada anão tem uma característica de personalidade específica, e pode auxiliar a criança em suas percepções psicológicas (positivas e negativas de identificação e seu crescimento interior).

- O conto dos “Três porquinhos”, o número três se apresenta como um item matemático; diz respeito novamente à quantidade; quantidade de porquinhos, quantidade de vezes que o lobo soprou contra as três casinhas, além de outros princípios aparecem, tais como, força, energia, solidez *versus* fragilidade das casas, etc. encontrados nessa estória infantil.

Quando o professor, mãe, pai ou educador pedem a criança/adolescente abrir o livro/revista em determinada página, faz-se uso dos números, nesse momento é instigante também sabermos quantas páginas foram lidas? quantas páginas ainda faltam ler? Nesse momento, estimulamos que a criança desenvolva duas operações básicas da matemática: a adição e a subtração.

b) Princípios matemáticos nos desenhos infantis:

É muito comum que a criança tenha a fase da garatuja onde pouco se compreende o que o aluno quis apresentar por meio dos seus rabiscos. Entretanto, nessa mesma ocasião, a criança pode já estar iniciando pegar o lápis grafite, o lápis de cor, ou mesmo a caneta e lhe é solicitado que desenhe por exemplo, uma figura humana. Logo, a criança pode até ensinar desenhar uma cabeça e uns pauzinhos, mas ao realizar tal figura, provavelmente ela desenhará a cabeça arredondada ou oval, manifestando assim sua compreensão advinda, ainda que superficialmente, da figura geométrica do círculo. Caso o aluno for desenhar uma casa, a escola, uma igreja ou outros traços geométricos podem ser ali apresentados a ela, tais como: A reta, o losango, o quadrado, o retângulo, e assim por diante.

c) Princípios matemáticos em finanças:

Toda criança pode ser estimulada desde cedo, à educação financeira, assimilando princípios da economia do lar. Assim, o uso de cofres, também é uma ótima ideia para o estímulo para a matemática, contar as moedas, somar os valores, quanto falta para comprar um brinquedo, um livro, e assim por diante. Isso ajudará tanto no entendimento matemático como nas finanças.

d) Princípios matemáticos envolvendo tempo:

Super importante também é envolver a criança no aprendizado sobre a fator “tempo”. Saber quanto tempo falta para um determinado desenho, filme ou minissérie acabar? A que horas é o intervalo? Quanto tempo terei para brincar com os meus amigos? Isso estimula o aprendizado da matemática, a disciplina e a noção de tempo.

e) Princípios matemáticos através de enigmas:

Quem nunca brincou de enigma? Podemos usar tal brincadeira para estimular e aprender algumas operações matemáticas. Um enigma interessante envolve um princípio básico da multiplicação. Vejamos: tente multiplicar

todos os números do teclado. Qual o número que será encontrado? A resposta é zero, porque o teclado tem 10 números e entre eles o zero, e na multiplicação todo número multiplicado por zero o resultado será zero! Nisso o aluno fixará uma regra da matemática que é a multiplicação por zero.

f) Princípios matemáticos através dos jogos e brincadeiras:

Em âmbito das aulas de matemática, quando apresentado jogos e brincadeiras para resolver questões ou problemas matemáticos, verifica-se que a aula se torna mais participativa. Neste momento não somente o cognitivo para o aprendizado matemático é instigado, mas outras características emocionais são trabalhadas, pois cada ser humano tem uma chave de motivação. Uns são motivados por gostarem de competição, outros por gostarem de regras, outros por gostarem de trabalhar em grupo, enfim, diversas são as motivações.

Se por outro lado, a criança está brincando de “31 alerta”, sabe-se que nesse tipo de brincadeira, envolve o raciocínio numérico sequencial na ordem crescente de 01 até o número 31, ocasião final na qual a pessoa que está conferindo, poderá sair à procura dos seus coleguinhos que estão escondidos.

A exemplo do jogo 21, que é uma tentativa de chegar na quantidade do número 21. Conforme a numeração das cartas, que o jogador recebe ou detém, ganha aquele que ao somar (aí o uso da soma uma das operações básicas da matemática) as cartas o resultado deve ser próximo ou igual ao número 21.

O que podemos observar é que nas diversas faixas etárias o jogo e a brincadeira são remetidos ao prazer. Então, porque não introduzir na educação matemática jogos e brincadeiras? A matemática sendo dissociada da chamada ‘matéria difícil’, ou que é privilégio de poucos entendê-la e associada a algo agradável, estimula e quebra bloqueios.

Kishimoto (1994), analisa a associação jogo e brincadeira ao lazer e ao ser introduzido na educação pode ser entendida como algo que não se deva levar a sério, é nesse momento que o professor deve planejar a atividade a ser trabalhada com a turma, pois a finalidade não é somente o lazer, mas o entendimento matemático por trás. Fazendo disso o dispositivo ele passa a ser parte da aula e não apenas uma atividade recreativa.

Conforme estabelece Brousseau (2008), em sua obra “Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino”:

[...] um dispositivo como um meio material (as peças de um jogo, um desafio, um problema, um exercício, fichas, etc.) e as regras de interação com esse dispositivo, alegando que somente ocorre aprendizagem pela adaptação do sujeito que assimila o meio criado, ao longo do processo, (Brousseau, 2008).

4.0 ENSINO DA MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DA TECNOLOGIA NA PANDEMIA DO COVID 19

O momento, atual, que o mundo está vivendo é pandêmico. A pandemia do COVID 19¹ exigiu que o aluno e o professor fossem inseridos no processo de ensino-aprendizagem em salas virtuais, acessadas em qualquer lugar, forçando adaptações no dia a dia tanto do aluno quanto do professor. Ambos tinham a vida profissional separada da vida privada, com as aulas *on-line*, viram-se forçados a fazer da sua casa, a própria sala de aula. Por conta disso, professor e aluno passaram a fazer uso de diversos recursos didáticos, entre eles, os que utilizam a tecnologia digital.

Vejam o que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na competência geral de número 5:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Utilizar a tecnologia no ensino da matemática foi um diferencial por conta do COVID-19, que levou o ensino presencial ao ensino emergencial remoto - ERE, e submeteu a população em geral a uma exposição excessiva à luz azul-violeta. Então, porque não resgatar as atividades manuais através dos materiais de aprendizagem? É possível fazer isso em uma aula remota? Respondendo a essas perguntas chegamos a conclusão, que não é somente possível

¹Segundo a Organização Mundial da Saúde, a pandemia denominada de COVID 19 é uma doença com surgimento identificado na cidade de Wuhan, na China, em dezembro de 2019, provocada pelo vírus CORONA, cujo os sintomas produzem infecções respiratórias de propagação rápida no mundo todo, cuja maior afetação é em pacientes com comorbidades e de baixa imunidade, e seu contágio vem sendo prevenido pelo distanciamento social e vacinação de toda a população acima de 16 anos.

como é importantíssimo para o docente esse tipo de material de aprendizagem, pois com essas atividades ele detém a atenção do aluno, que no ambiente remoto está sujeito a diversos meios de distração.

5. CONCLUSÃO

O aprendizado da matemática com o uso desses vários recursos didáticos apresentados acima, favorecem a criança a assimilar os conteúdos de modo predominantemente lúdico, o que acaba por diminuir o tom da obrigatoriedade curricular do estilo formal. Nas diversas situações de aprendizagem é fundamental, que o educador desenvolva condições para ligar os conhecimentos que o aluno já possui da matemática, com os novos conhecimentos, inclusive de obter experiências que apontam para a aplicabilidade cotidiana.

Os recursos didáticos na matemática, tanto para o aluno do ensino infantil quanto para o aluno em séries avançadas, possibilitam a construção de pontes fazendo conexões permitindo o desenvolvimento cognitivo com as atividades e com todos da sala de aula, criando um ambiente propício à socialização das informações, despertando nos estudantes a curiosidade, a capacidade de observar, de questionar, a vontade de participar das atividades e sobretudo a aplicabilidade no cotidiano.

REFERÊNCIAS

- BETTELHEIM, Bruno. **A Psicanálise dos Contos de Fadas**. São Paulo: Paz e Terra, 2013.
- BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008. 128p.
- CASTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. **A utilização de Recursos didático-pedagógicos na motivação da aprendizagem**. In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 1, Ponta Grossa, 2009. Anais do I SINECT. Disponível em: http://www.sinct.com.br/anais2009/artigos/8%20Ensinodecienciasnasseriesiniciais/Ensinodecienciasnasseriesinicias_Artigo2.pdf. Acesso em: 21 de janeiro 2022.
- KISHIMOTO, Tizuco Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeiras e a educação**. 4ª Ed. São Paulo, Editora Cortez: 2000.
- MOREIRA, M.A. **A Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel**. In: MASINI, E.F.D.; MOREIRA, M.A(Org.), **Aprendizagem Significativa: condições para a ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos**. São Paulo: Vetor, 2008.
- PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro. José Olympio, 1973.
- SAMPAIO, Jäder dos Reis. **O Maslow desconhecido: uma revisão de seus principais trabalhos sobre motivação**. Revista de Administração da USP, São Paulo, v. 44, n.1, p. 5-16, jan./mar. 2009.
- SOUZA, S. E. **O uso de recursos didáticos no ensino escolar**. In: I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XII Semana de Pedagogia da UEM, Maringá, 2007.



SOBRE ANÉIS DE INTEIROS E APLICAÇÕES EM COMUNICAÇÕES

de Souza, Juliana, j089486@dac.unicamp.br¹
Costa, Sueli I. R., sueli@unicamp.br²

¹ IMECC - UNICAMP

² IMECC - UNICAMP

Resumo: Neste trabalho apresentaremos propriedades de teoria dos números estendida a anéis de inteiros nos números complexos e quatérnios motivados por aplicações na área de comunicações. Em particular, estudamos os inteiros Gaussianos, de Eisenstein e de Hurwitz e sua aplicabilidade na codificação de índice usando reticulados.

Palavra-chave: Anéis de Inteiros, Teoria dos Números, Números Complexos, Números Quatérnios, Códigos de índice.

INTRODUÇÃO

A teoria dos números estuda propriedades importantes e interessantes dos números inteiros e suas generalizações não por coincidência, possui contribuições dos mais célebres matemáticos da história da humanidade. O estudo desta teoria pode ser expandido para outros anéis de inteiros tanto no conjunto dos números complexos quanto no conjunto dos quatérnios.

Dentre as diversas aplicações que este ramo da matemática possui destacamos o uso em teoria da informação, mas especificamente na transmissão de mensagens utilizando codificação de índice. A codificação de índice, introduzida pela primeira vez por Birk e Kol (1998), faz uso de técnicas de comunicação que exploram as informações laterais (ou secundárias) do receptor para melhorar a eficiência da transmissão e tem como objetivo realizar a codificação conjunta de mensagens para atender a todas as demandas dos receptores enquanto transmite as mensagens na maior taxa possível.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Apresentamos na Seção 1 resultados preliminares sobre anéis de inteiros nos complexos e nos quatérnios e na Seção 2 uma breve exposição do problema de codificação de índice e de como podemos utilizar reticulados construídos através de números complexos e quatérnios para construir “bons” códigos reticulados de índice.

1. ANÉIS DE INTEIROS COMPLEXOS E QUATERNIÔNICOS

Introduzimos a seguir definições e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. As principais referências são [1], [4], [5], [8] e [10].

1.1. Definições iniciais

Como o conjunto dos números complexos \mathbb{C} pode ser visto como uma extensão dos números reais \mathbb{R} , uma pergunta que pode ser feita é se existe algum conjunto que possua uma estrutura semelhante a \mathbb{Z} dentro dos números complexos.

Para isso vamos definir, o conjunto dos números inteiros Gaussianos, denotados por $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$, como

$$\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{\alpha = a_1 + a_2\mathbf{i}; a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad (1)$$

com $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. A operação de adição neste conjunto é feita componente a componente enquanto a multiplicação é realizada da mesma forma que em \mathbb{C} , assim, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ com $\alpha = a_1 + a_2\mathbf{i}$ e $\beta = b_1 + b_2\mathbf{i}$ temos

$$\alpha \cdot \beta = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i},$$

onde os símbolos de $+$ e \cdot no lado esquerdo da igualdade representam as operações usuais em \mathbb{Z} .

Além dos inteiros Gaussianos, podemos definir também, o conjunto dos inteiros de Eisenstein, denotado por $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$, como

$$\mathbb{Z}[\mathbf{w}] = \{\alpha = a_1 + a_2\mathbf{w}; a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad (2)$$

onde $\mathbf{w} = \frac{-1 + \sqrt{3}\mathbf{i}}{2}$ é a unidade de Eisenstein - uma das raízes cúbicas da unidade. Novamente, a adição é feita componente a componente e a multiplicação é induzida de \mathbb{C} da seguinte forma:

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ com $\alpha = a_1 + a_2\mathbf{w}$ e $\beta = b_1 + b_2\mathbf{w}$ temos que

$$\alpha \cdot \beta = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2)\mathbf{w}.$$

Assim como em \mathbb{Z} , temos que as operações de adição e multiplicação definidas acima obedecem as propriedades que fazem de $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ um anel de inteiros.

Diremos que o conjugado de α é novamente induzido de \mathbb{C} e portanto, se $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ então $\alpha^* = a_1 - a_2\mathbf{i} \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e se $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ então $\alpha^* = (a_1 - a_2) - a_2\mathbf{w} \in \mathbb{Z}[\mathbf{w}]$, temos também que se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) então $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$. Além disso a norma de $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) é dada por $N(\alpha) = \alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$, e o valor absoluto de $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) é dado por $|\alpha| = \sqrt{\alpha\alpha^*}$. É importante frisar que $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ enquanto $|\alpha| \in \mathbb{R}$ e, o inverso de $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) é dado por $\alpha^{-1} = \alpha^*/N(\alpha)$.

Uma *unidade* em $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e em $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ é todo elemento que possui norma 1, temos portanto 4 unidades no conjunto dos inteiros Gaussianos $U_{\mathbb{Z}[\mathbf{i}]} = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}\}$ e 6 unidades no conjunto dos inteiros de Eisenstein $U_{\mathbb{Z}[\mathbf{w}]} = \{\pm 1, \pm \mathbf{w}, \pm \mathbf{w}^2\}$.

Vejam agora quando a divisão nestes conjunto é inteira e como definir um algoritmo para estabelecer a divisão com resto.

Para isso sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$), diremos que β *divide* α e escrevemos $\beta|\alpha$, se existir algum $\gamma \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) tal que $\alpha = \beta \cdot \gamma$.

Em $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ é possível realizar a divisão com resto análoga a divisão euclidiana em \mathbb{Z} .

Teorema 1 (Divisão euclidiana [8]). *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$), com $\beta \neq 0$. Então existem $\gamma, \rho \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) tais que*

$$\alpha = \beta\gamma + \rho \text{ com } N(\rho) < N(\beta). \quad (3)$$

É importante ressaltar que nestes conjuntos a divisão com resto é única a menos de multiplicação por uma das unidades.

Podemos agora definir o MDC entre dois inteiros Gaussianos (ou de Eisenstein). Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$), com $\beta \neq 0$ então dizemos que $\text{MDC}(\alpha, \beta) = \delta, \delta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) se $\delta|\alpha$ e $\delta|\beta$ e, se $\delta'|\alpha$ e $\delta'|\beta$ tivermos $N(\delta') \leq N(\delta)$.

Temos que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) são ditos **primos entre si**, ou **relativamente primos**, ou ainda **coprímos** quando seus fatores comuns são apenas as unidades $\pm 1, \pm \mathbf{i}$ em $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ou $\pm 1, \pm \mathbf{w}, \pm \mathbf{w}^2$ em $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$. Podemos agora definir o algoritmo de Euclides para o cálculo de um MDC.

Teorema 2 (Algoritmo de Euclides [8]). *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) ambos não nulos. Aplicando de maneira recursiva a divisão euclidiana, iniciando com α, β e posteriormente com o divisor e o resto das equações subsequentes*

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta\gamma_1 + \rho_1, & N(\rho_1) < N(\beta) \\ \beta &= \rho_1\gamma_2 + \rho_2, & N(\rho_2) < N(\rho_1) \\ \rho_1 &= \rho_2\gamma_3 + \rho_3, & N(\rho_3) < N(\rho_2) \\ &\dots & \dots \end{aligned}$$

O último resto diferente de zero é divisível por todos os divisores comuns de α e β e é o máximo divisor comum de α e β .

Uma observação importante a ser feita é que, assim como na divisão euclidiana, o cálculo do MDC também é único a menos de multiplicação por uma das unidades.

1.2. Quatérnios inteiros de Hurwitz

O conjunto dos quatérnios¹,

$$\mathbb{H} = \{Q = \sigma_1 + \sigma_2\mathbf{j}; \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}\} = \{Q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}; q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}, \quad (4)$$

¹Em homenagem ao matemático e físico Sir William Rowan Hamilton, é denotado por \mathbb{H}

estende o conjunto dos números complexos pela adição de uma componente de valor complexo a qual é multiplicada pela unidade imaginária j . Assim, a parte real do quatérnio é $Re(Q) = q_1$ e a parte imaginária é representada pela terna $Im(Q) = (q_2, q_3, q_4)$. As unidades imaginárias do quatérnio são dadas por \mathbf{i}, \mathbf{j} e $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$. As relações entre estas unidades são descritas pelas equações de Hamilton,

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}, \quad \text{e} \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1. \quad (5)$$

Vemos portanto que a multiplicação de dois quatérnios é, em geral, não comutativa. Por analogia aos números complexos, o conjugado de um quatérnio $Q \in \mathbb{H}$ é definido por $Q^* = q_1 - q_2\mathbf{i} - q_3\mathbf{j} - q_4\mathbf{k}$. Sua norma é definida por $N(Q) = QQ^* = Q^*Q$ e seu valor absoluto definido por $|Q| = \sqrt{N(Q)}$.

A adição é calculada componente a componente enquanto a multiplicação de dois quatérnios $P, Q \in \mathbb{H}$ com $P = p_1 + p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ e $Q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ é calculada por (5)

$$P \cdot Q = (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) + (p_1q_2 - p_2q_1 - p_3q_4 - p_4q_3)\mathbf{i} + (p_1q_3 - p_2q_4 - p_3q_1 - p_4q_2)\mathbf{j} + (p_1q_4 - p_2q_3 - p_3q_2 - p_4q_1)\mathbf{k}.$$

O inverso de um quatérnio $Q \in \mathbb{H}$ é definido da mesma forma que nos complexos por $Q^{-1} = Q^*/N(Q)$. Sejam $P, Q \in \mathbb{H}$ podemos então realizar a divisão de P por Q multiplicando o inverso de Q à esquerda, $P/Q = Q^{-1}P$, ou à direita, $P/Q = PQ^{-1}$, em geral essas operações fornecem resultados distintos.

No conjunto dos quatérnios \mathbb{H} podemos explorar dois subconjuntos especiais. O primeiro deles é o conjunto dos inteiros de Lipschitz.

$$\mathcal{L} = \{Q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}; q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Z}\}, \quad (6)$$

Os inteiros de Lipschitz seguem a mesma ideia dos inteiros gaussianos. Porém, neste conjunto a divisão com resto deixa de ser euclidiana ([1], p.55), uma vez que ao realizar a divisão de dois quatérnios de Lipschitz (à esquerda ou à direita) podemos obter a norma do resto igual a norma do divisor.

Dessa forma, não será possível definir o algoritmo de Euclides para calcular o MDC de dois inteiros de Lipschitz, uma vez que o argumento empregado no algoritmo depende da redução sucessiva da norma, que se torna inviável pela igualdade das normas. Mesmo assim, este problema pode ser contornado.

Assim definimos o conjunto dos inteiros de Hurwitz, como o conjunto dos quatérnios com entradas todas inteiras ou com entradas “meio-inteiras”, isto é, $q_i/2$ com q_i ímpar, $i = 1, 2, 3, 4$, ou seja,

$$\mathcal{H} = \left\{ Q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}; (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{Z}^4 \cup \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right)^4 \right\}. \quad (7)$$

\mathcal{H} é fechado para adição e multiplicação cujas operações são definidas dos quatérnios. Podemos portanto, assim como em $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$, definir as unidades em \mathcal{H} como os elementos que possuem norma 1. São 24 as unidades de Hurwitz, sendo 8 delas dadas por inteiros de Lipschitz, $\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}$ e outras 16 unidades obtidas das combinações de sinais de $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\mathbf{i}}{2} \pm \frac{\mathbf{j}}{2} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}$.

A divisibilidade é definida da mesma maneira que em $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e em $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$, lembrando que, por conta da não comutatividade na multiplicação dos quatérnios, operar uma divisão à esquerda e à direita em geral fornecem resultados diferentes. Assim, dizemos que um inteiro de Hurwitz A divide B à esquerda (respectivamente à direita) e escrevemos $A|B$ (respec. $A|B$) se existe um quatérnio Q tal que $B = AQ$ (respec. $B = QA$).

Desta forma a divisão euclidiana, o MDC e o algoritmo de Euclides entre dois quatérnios de Hurwitz são obtidos de forma análoga a de $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$, e os resultados serão únicos a menos de multiplicação por uma das unidades.

1.3. Números Primos nos Complexos e nos Quatérnios

Queremos agora definir os números primos em $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$, $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ e em \mathcal{H} . Para isso, vamos relacioná-los com os números primos em \mathbb{Z} através do seguinte resultado:

Teorema 3 ([5]). *Se a norma de um inteiro Gaussiano (ou de Eisenstein) é um número inteiro primo, então este número é um primo Gaussiano (ou de Eisenstein).*

A recíproca deste teorema não é verdadeira, mas outros resultados ajudam a obter tais números. No conjunto dos inteiros Gaussianos temos:

Teorema 4 ([10]). *Todo primo π em $\mathbb{Z}[i]$ é múltiplo da unidade dos seguintes números*

- (i) $(1 + i)$
- (ii) π e π^* , onde $N(\pi) = p$ é um inteiro primo com $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- (iii) p , onde p é um inteiro um primo com $p \equiv 3 \pmod{4}$.

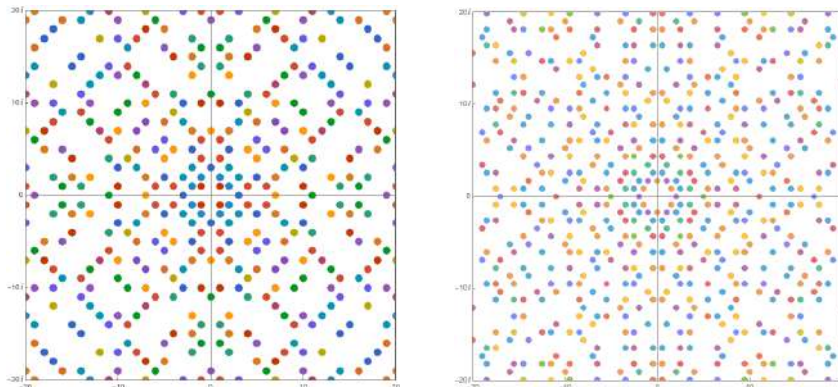
No conjunto dos inteiros de Eisenstein temos:

Teorema 5 ([5]). *Todo primo π em $\mathbb{Z}[\omega]$ é um múltiplo da unidade dos seguintes números:*

- (i) $1 - \omega$
- (ii) π ou π^* , onde $N(\pi) = p$ é um inteiro primo com $p \equiv 1 \pmod{3}$
- (iii) p , onde p é um inteiro primo com $p \equiv 2 \pmod{3}$.

Os primos Gaussianos e de Eisenstein possuem uma interpretação geométrica ([6]) que pode ser dada analisando as normas de cada um dos tipos de primos e seus múltiplos pela unidade de cada conjunto como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1: Interpretação Geométrica dos primos Gaussianos (à esquerda) e dos primos de Eisenstein (à direita)



Já nos quatérnios inteiros de Hurwitz temos do Teorema dos quatro quadrados de Lagrange que,

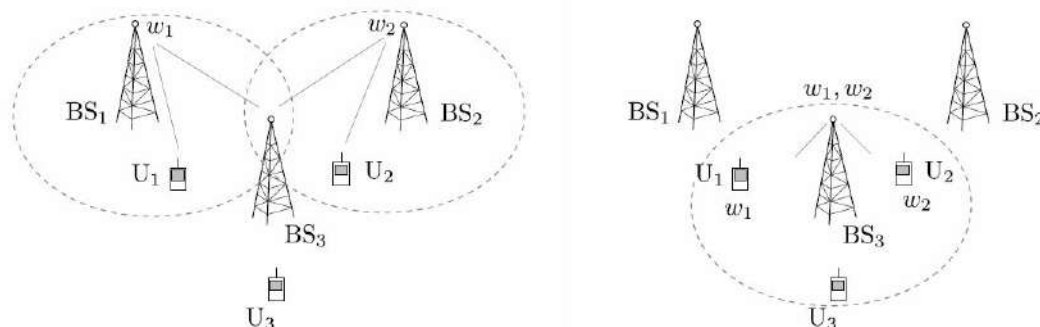
Teorema 6 ([4]). *$P \in \mathcal{H}$ é um quatérnio primo se, e somente se, $N(P) = p$ é primo em \mathbb{Z} .*

2. APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE CODIFICAÇÃO DE ÍNDICE

2.1. O Problema de Codificação de Índice

O problema clássico de codificação de índice ([3] e [9]) consiste de um remetente com K mensagens independentes w_1, \dots, w_K e receptores que demandam um subconjunto dessas mensagens enquanto conhecem os valores de um subconjunto diferente de mensagens. A este conhecimento prévio dos receptores chamamos de *informação lateral*. Consideramos aqui a versão desse problema com ruído, onde a transmissão é feita através de um canal com ruído auditivo Gaussiano branco, o canal AWGN.

Figura 2: Transmissão de mensagem com receptores que possuem informação lateral. Fonte: [7].



A Figura 2 ilustra um caso especial de codificação de índice em um canal AWGN em que os receptores demandam todas as mensagens. Esta é uma rede de retransmissão sem fio com duas fontes BS_1 e BS_2 , um repetidor BS_3 e três receptores U_1 , U_2 e U_3 . A transmissão precisa ocorrer em duas fases, pois os receptores não estão no alcance de transmissão de todas as fontes. Na primeira fase, BS_1 e BS_2 transmitem w_1 e w_2 , respectivamente. U_1 recebe w_1 , U_2 recebeu w_2 e BS_3 , que está no alcance de transmissão de BS_1 e BS_2 , recebeu ambos. Na segunda fase, podemos realizar a codificação de índice transformando as informações laterais que U_1 e U_2 possuem em ganho de desempenho e atender a demanda de todos receptores. O objetivo na codificação de índice é transmitir um pacote de mensagens com menor comprimento possível que atenda a demanda de todos os receptores.

2.2. Reticulados Construídos em Anéis de Inteiros para Codificação de Índice

Um reticulado Λ é um subgrupo aditivo discreto de \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n ou \mathbb{H}^n . Consideramos os reticulados $\Lambda = \{G.x; x \in \mathbb{D}^n\}$, onde a matriz $G, n \times n$ de posto completo é chamada matriz geradora de Λ ([2]) e \mathbb{D} é um dos anéis de inteiros, \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ (ou $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$) e \mathcal{H} , em \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{H} , respectivamente.

Queremos utilizar reticulados para construir “bons” códigos de índice utilizando os anéis de inteiros apresentados ao longo deste texto.

Sejam k reticulados $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ tais que possuam um subreticulado em comum $\Lambda_g \subset \Lambda_j, j = 1, \dots, k$. Vamos utilizar os conjuntos $\Lambda_1/\Lambda_g, \dots, \Lambda_k/\Lambda_g$ (constelações), como alfabetos W_1, \dots, W_k de k mensagens da fonte.

Um código reticulado de índice \mathcal{C} para k mensagens é formado por k constelações $\Lambda_1/\Lambda_g, \dots, \Lambda_k/\Lambda_g$, como definidas acima, e uma aplicação bijetiva φ dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \Lambda_1/\Lambda_g \times \dots \times \Lambda_k/\Lambda_g &\rightarrow \mathcal{C} \\ (w_1, \dots, w_k) &\rightarrow (w_1 + \dots + w_k) \pmod{\Lambda_g}, \end{aligned}$$

com $w_j \in \Lambda_j/\Lambda_g$ e \mathcal{C} sendo todos os valores possíveis para $w = \varphi(w_1, \dots, w_k)$.

Como mostrado em ([7]), podemos utilizar o Teorema Chinês dos Restos aplicado aos conjuntos de $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ e $\mathbb{Z}[\mathbf{w}]$ para construir boas constelações para os códigos reticulados de índice, com ganho de informação lateral máximo. Os ingredientes para tal construção são k números relativamente primos p_1, \dots, p_k e um reticulado arbitrário Λ . Usamos versões escalonadas de Λ para obter $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ e Λ_g onde os coeficientes são tomados do Teorema Chinês dos Restos. Em nossa pesquisa, em andamento, buscamos a construção desses códigos utilizando o conjunto dos inteiros de Hurwitz.

REFERÊNCIAS

- [1] CONWAY, J. H., AND SMITH, D. A. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. AK Peters/CRC Press, 2003.
- [2] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. *Sphere packings, lattices and groups*, vol. 290. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] COSTA, S.; OGGIER, F., ET AL. *Lattices Applied to Coding for Reliable and Secure Communications*. Springer, 2017.
- [4] DAVIDOFF, G. P., SARNAK, P., AND VALETTE, A. *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, vol. 55. Cambridge university press Cambridge, 2003.
- [5] IRELAND, K., AND ROSEN, M. *A classical introduction to modern number theory. 1990*, vol. 16. 1990.
- [6] KNILL, O. Some experiments in number theory. *arXiv preprint arXiv:1606.05971* (2016).
- [7] NATARAJAN, L., HONG, Y., AND VITERBO, E. Lattice index coding. *IEEE Transactions on Information Theory* 61, 12 (2015), 6505–6525.
- [8] ROSEN KENNETH, H. *Elementary number theory and its applications*. Addison-Wiley Publishing Company, 1984.
- [9] SOUZA, A. P. Sobre constelações de voronoi para códigos em reticulados e problemas de codificação de índice, 2021.
- [10] WEINTRAUB, S. H. *Factorization: unique and otherwise*. CRC Press, 2008.



SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDO's DE PRIMEIRA ORDEM PELO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Silva, Josiane Reis, josianereis576@gmail.com¹
Costa, Manuel de Jesus dos Santos, manuelsc@uol.com.br²
Lima, Rômulo Correa, rcl@ufpa.br³

¹Mestranda do Programa de Pós Graduação em Matemática e Estatística - Universidade Federal do Pará

²Professor do Curso de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT - Universidade Federal do Pará – Abaetetuba

³Professor do Curso de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT - Universidade Federal do Pará - Abaetetuba

Resumo: O objetivo desse trabalho foi verificar a aplicabilidade do método de Runge-Kutta utilizando o programa excel para estimar as soluções das equações diferenciais de primeira ordem. Foram apresentados inicialmente os conceitos relacionados as equações diferenciais, em seguida, a formulação matemática que define uma equação diferencial linear de primeira ordem e definiu-se o problema de valor inicial (PVI). Em relação à abordagem numérica foi apresentado o método de Runge-Kutta de quarta ordem para a solução do modelo que determina a idade de um fóssil, nesse experimento fez-se uma comparação qualitativa entre a solução analítica e numérica da equação diferencial que a modela seguida de uma análise quantitativa através do erro relativo percentual. Finalizando o experimento, apresentou-se uma solução de uma equação que admite solução exclusivamente numérica. Nestes testes, o método de Runge-Kutta de quarta ordem apresentou desempenho satisfatório.

Palavras-chave: Equações diferenciais de primeira ordem. Runge-Kutta. Programa excel. Análise numérica.

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral registra ao longo de sua história as contribuições de muitos matemáticos. Foram Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que deram início aos estudos das equações diferenciais simultaneamente com os estudos do cálculo diferencial e integral, ambos motivados por problemas físicos (ARAÚJO, 2011).

De acordo Araújo (2011), resolver uma equação diferencial consistia, inicialmente, em determinar uma solução explícita em termo de funções elementares. Porém, por volta do século XIX, observou-se que esse método restringia bastante o número de equações possíveis de serem resolvidas, motivando assim a busca de novos métodos de resolução através de séries de funções e do Teorema de Existência e Unicidade. Por outro lado, as equações diferenciais que não podiam ser resolvidas analiticamente levaram os matemáticos a estudarem métodos de aproximação numérica e, com o desenvolvimento dos computadores aumentou o número de problemas que podiam ser investigados numericamente (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação diferencial é, necessariamente, uma equação que compreende as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma ou mais variáveis independentes.

1.1 Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem

Uma equação diferencial é classificada como ordinária se tem somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a somente uma variável independente (equação diferencial ordinária – EDO). É chamada linear quando ambos os lados da equação têm funções lineares e a potência do termo independente e de suas derivadas é sempre 1, também é classificada quanto sua ordem, nesse caso têm-se as de primeira ordem que são as EDO's que têm suas derivadas de maior ordem sendo 1. Com isso, uma equação linear de primeira ordem pode ser escrita da seguinte forma (BOYCE e DIPRIMA, 2006):

$$\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (1)$$

onde as funções arbitrárias a_0 e g dependem de x e são contínuas em um dado intervalo I . A equação (1) é dita homogênea se $g(x) = 0$, porém se $g(x) \neq 0$ então é chamada de equação não-homogênea. O procedimento algébrico para resolver a equação (1) é o fator integrante que determina a seguinte solução:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)g(x) dx. \quad (2)$$

1.2. Problema de Valor Inicial

Sabe-se que uma equação diferencial não possui solução única e para distinguir uma solução das demais, precisa-se de condições específicas. Geralmente, uma equação de ordem n , exige n condições adicionais para ter uma única solução. Neste sentido, seja uma equação de ordem n , se a função, assim como suas derivadas até ordem $n - 1$ são especificadas em um mesmo ponto, tem-se um *problema de valor inicial* (PVI). O sistema a seguir representa um PVI com $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde x_0 e y_0 são valores dados.

2. MÉTODO NUMÉRICO DE RUNGE-KUTTA – RK

A estratégia básica dos métodos de Runge-Kutta é utilizar os métodos baseados na série de Taylor e ao mesmo tempo eliminando seu maior complicador, ou seja, o cálculo das derivadas que tornam os referidos métodos dispendioso computacionalmente ou até mesmo impraticáveis. Dessa forma, os métodos de Runge-Kutta, em geral satisfazem as seguintes propriedades:

- são de passo único h ;
- não exigem o cálculo da derivada de uma função ϕ , mas necessita-se avaliar tal função em vários pontos;
- após expandir $f(x, y)$ por série de Taylor em torno de um determinado ponto (x_0, y_0) e agrupar os termos semelhantes, sua expressão coincide com a do método de série de Taylor de mesma ordem.

Os métodos de RK possuem muitas variações, contudo, todas podem ser representadas analiticamente pela forma geral (CHAPRA e CANALE, 2016):

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (3)$$

onde $\phi(x_i, y_i, h)$, $i = 1, 2, \dots, n$, é denominada função incremento, a qual geometricamente representa inclinação em um determinado intervalo I . Em seguida tem-se a variação para o método de Runge Kutta de quarta ordem (RK-4).

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_j, y_j), k_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), k_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \text{ e } k_4 = f(x_j + h, y_j + hk_3).$$

3. PROBLEMATIZAÇÃO E EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

Os modelos matemáticos podem ser apresentados (de maneira geral), através de uma formulação ou equação que apresenta características fundamentais de um determinado sistema em função de termos matemáticos, os mesmos surgem em várias áreas do conhecimento científico, suas interpretações influenciam na tomada de decisões, controlando sistemas dos mais simples aos mais complexos. Neste sentido, será abordado 1 (um) problema contextualizado, o mesmo será modelado por uma equação diferencial de primeira ordem. Destaca-se que o problema aplicado foi retirado de Zill (2016).

3.1. Datação da Idade de um Fóssil

É considerado um fóssil os vestígios ou restos de seres vivos de períodos geológicos anteriores. Durante o processo de sedimentação das rochas, acontece a fossilização. No século XX foi descoberta a desintegração radioativa que auxiliou na datação de idades das rochas. Esse procedimento se baseou na teoria de meia-vida, isto é, passado os anos da meia-vida, a massa do elemento químico reduz-se pela metade através da desintegração radioativa. (FUTUYMA, 2002). O carbono-14 (C^{14}), ou radiocarbono, é um isótopo radioativo natural do elemento carbono essencial na determinação da idade de fósseis e artefatos de diversos tipos. O C^{14} apresenta uma meia-vida de aproximadamente 5730 anos. Essa técnica possui algumas limitações, estima-se que a técnica garante uma margem de certeza para objetos que tenham entre 100 e 40000 anos de idade (FARIAS, 2002).

Assim, problemas que envolve datação, por exemplo, a idade de um fóssil, podem ser modelados através da quantificação do C^{14} . Na modelagem utilizada considera-se $g(x) = 0$ na equação (1) com $a_0(x) = \alpha$.

Problema: Um osso fossilizado foi encontrado e pesquisadores determinaram que a idade do fóssil é de 30000 anos. Neste contexto, estime a quantidade de C^{14} presente nesse fóssil.

3.2. Soluções para o Problema

Para estimar a solução do problema será utilizada uma EDO da seguinte forma:

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A. \quad (4)$$

Para responder o questionamento do problema necessita-se inicialmente definir um PVI. Nessas condições, considera-se $A(0) = 1$, salientando que nesse momento a massa do C^{14} ainda se encontra em 100%. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\alpha A \\ A(0) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

3.2.1. Solução analítica

Aplicando a técnica analítica do fator integrante para (4), determina-se a seguinte solução:

$$A(t) = C \cdot e^{-\alpha t}. \quad (6)$$

inserindo o PVI em (6), obtêm-se:

$$C = 1$$

com o valor da constante C determinada, substitui-se tal valor em (6), resultando:

$$A = e^{-\alpha t}. \quad (7)$$

Analisando (7), percebe-se ainda a necessidade de encontrar o valor de α para que o problema em questão seja solucionado. Para tanto, utilizou-se a condição da meia-vida do C^{14} , a qual em termos matemáticos consiste em $A(5730) = \frac{1}{2}$, caracterizando que a massa inicial é reduzida pela metade, atribuindo tal informação em (7), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= e^{-\alpha \cdot 5730}, \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -5730\alpha, \end{aligned}$$

assim

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-5730} = 0,000120968 = 1,20968 \cdot 10^{-4}, \quad (8)$$

assim, substituindo (8) em (7), obtêm-se:

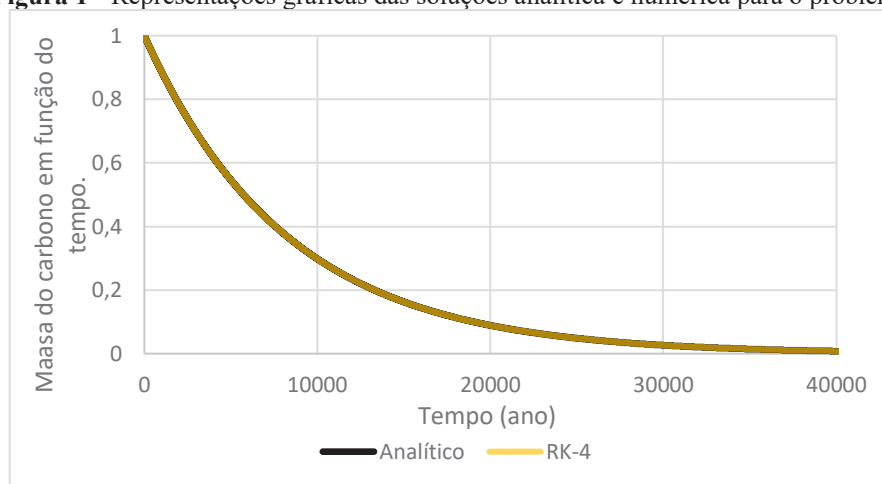
$$A(t) = e^{-0,000120968t}, \quad (9)$$

finalmente, utilizando (9) é possível responder que a quantidade de C^{14} que ainda existe no fóssil depois de 30000 anos é aproximadamente:

$$A(30000) = e^{(-0,000120968) \cdot 30000} = 0,0265417. \quad (10)$$

Assim, o fóssil encontrado tem aproximadamente 0,0265417 da sua massa inicial. Este resultado é mostrado na Figura 1, bem como a solução numérica utilizando o método de RK-4, onde observa-se o comportamento dos gráficos em que, aparentemente, um sobrepõe ao outro. No problema em questão, para estimar o resultado numérico utilizou-se um passo $h = 3$ e para os gráficos em geral contou-se com o auxílio computacional do programa excel.

Figura 1 - Representações gráficas das soluções analítica e numérica para o problema.

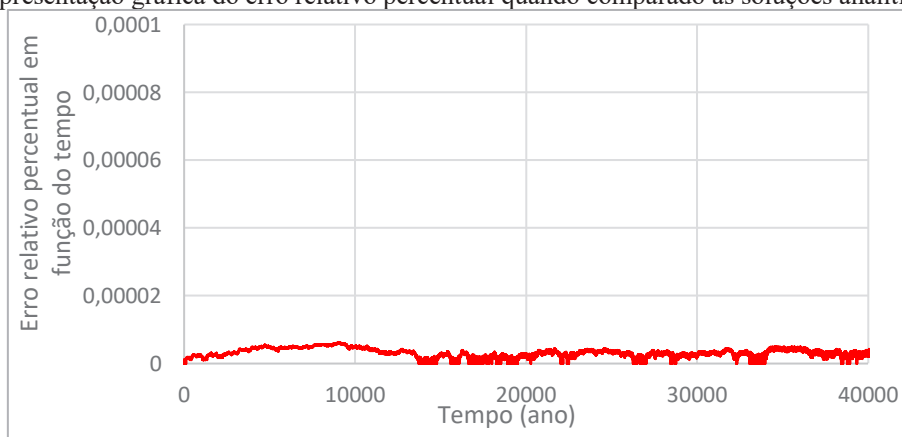


Fonte: Autoria própria.

3.2.2. Comparação do resultado

Observa-se na Figura 1 que aparentemente o processo numérico coincide com o resultado analítico, no entanto, para quantificar tal observação usa-se a estratégia dos erros relativos percentuais utilizando uma janela temporal que varia de 0 (ano) a 400000 (anos) (Figura 2).

Figura 2 - Representação gráfica do erro relativo percentual quando comparado as soluções analítica e numérica.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se a acurácia do RK-4, pois apresentou bom desempenho na estimativa numérica da solução, com erro percentual menor que 0,00002.

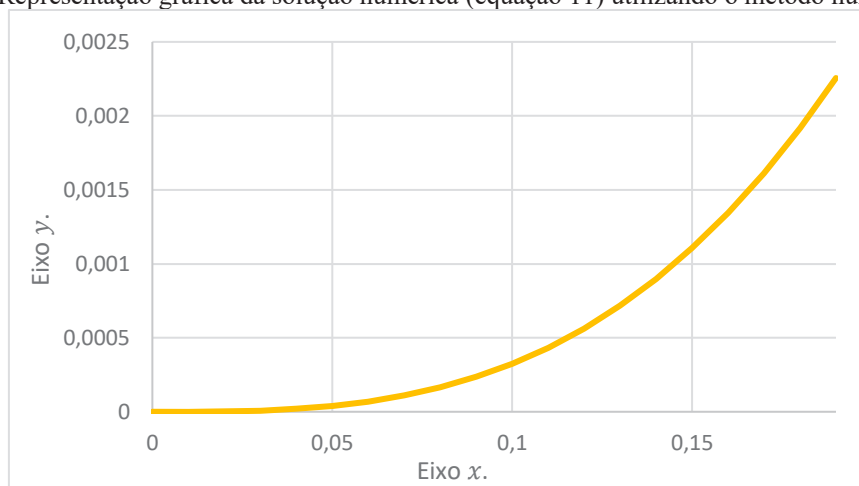
4. EDO SEM SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para finalizar as experimentações numéricas do presente trabalho, será estimada a solução de uma EDO de primeira ordem, a qual admite apenas solução numérica, qual seja (BARROSO et al., 1987):

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2. \tag{11}$$

Para a solução da equação (11), será utilizado o RK-4 em virtude da análise anterior acerca de seu desempenho, ratificados através do conceito do erro relativo percentual. Para estimar essa solução, considerou-se um passo $h = 0,01$ com PVI sendo $y(0) = 0$. O resultado obtido visualiza-se na Figura 3.

Figura 3 - Representação gráfica da solução numérica (equação 11) utilizando o método numérico RK-4.



Fonte: Autoria própria.

4.1. Análise do resultado

Para efeito de informação, verificou-se que a partir da 19ª (décima nona) iteração a solução de (11) apresenta um comportamento de crescimento muito elevado em relação a sua imagem, fato este oculto na impossibilidade de resolvê-la analiticamente. Por apresentar um bom desempenho, como visto no trabalho, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é o mais utilizado.

5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho foi usado o método numérico RK-4 e com o auxílio do programa Excel foi observada a acurácia do método ao comparar com o resultado analítico, assim o método numérico também foi usado para estimar a solução de uma EDO de primeira ordem que não admitia solução analítica. Com isso, observa-se como o programa auxiliou nessa observação e como o excel é de fácil acesso, permite que pesquisadores façam suas análises sem muito custo computacional, pois nesse caso seria impraticável obter cálculos manualmente, bem como uma confirmação visual dos estudos por meio dos gráficos.

6. REFERÊNCIAS

ARAÚJO: Joselito Elias de. Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Tecnológicas, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Paraíba, 2011.

BARROSO, Leônidas Conceição et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações). 2a ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Métodos Numéricos para Engenharia. 7ª ed. McGraw Hill Brasil, 2016.

FARIAS, Robison Fernandes. A química do tempo: carbono 14. QNESC, v.16, [S.l.], 2002.

FUTUYMA, Douglas J. Biologia evolutiva. 2ª ed. Ribeirão Preto: FUNPEC-PR, 2002.

ZILL, Dennis G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. 3ª ed. São Paulo. Cengage Learning, 2016.



UM JOGO MATEMÁTICO DESENVOLVIDO A PARTIR DO CONCEITO INTUITIVO DE PROBABILIDADES

Pontes, Edel Alexandre Silva, edel.pontes@ifal.edu.br¹
Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos, bruno.silva@im.ufal.br²
De Oliveira, Elinelson Gomes, elielson.olivera@ifal.edu.br³
Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura, helloyne@hotmail.com⁴
Freitas, Esther Nascimento Soares de, esther.freitas@ifal.edu.br⁵
Bastos, Tamara Moraes, tamara.bastos@ifal.edu.br⁶

¹Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo
²Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo
³Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo
⁴Instituto Federal de Alagoas Campus Maceió
⁵Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo
⁶Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

Resumo: Diversas pesquisas em educação matemática são realizadas, anualmente, no intuito de apresentar novas metodologias para o ensino de matemática na educação básica. Este trabalho objetivou apresentar uma proposta pedagógica para o ato de ensinar e aprender matemática, através de um jogo matemático, pertencente a um produto educacional produzido pelo grupo de pesquisa GALC, chamado jogo de dados de seis faces para probabilidades, cujo pré-requisito para seu entendimento é a ideia intuitiva de probabilidades. Metodologicamente, a pesquisa experimental foi realizada com seis alunos voluntários do curso técnico em informática do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo, da qual sua finalidade era dispor o emprego do jogo para os envolvidos, de maneira que eles pudessem explicar matematicamente os resultados observados e esperados do jogo. Os resultados obtidos foram extremamente satisfatórios e causaram bastante curiosidade dos envolvidos na busca pela solução ótima. Espera-se que este trabalho possa significar uma proposta incentivadora a outros educadores e pesquisadores para o fortalecimento de ensinar e aprender matemática através de novas metodologias, particularmente por jogos.

Palavras-chave: Jogos matemáticos. Ensino e Aprendizagem de matemática. Probabilidades.

INTRODUÇÃO

É inadmissível ocorrer uma transformação científica e tecnológica no mundo atual conectado a uma grande deformidade exibida nas instituições de ensino no manejo em preparar a matemática como um instrumento indispensável para o desenvolvimento metacognitivo do sujeito envolvido. Ao longo da história da educação, a escola vem sofrendo diversas mudanças estruturais, contextuais e metodológicas para acompanhar o desenvolvimento da sociedade. Uma das ciências que mais sofreu com essa transformação educacional foi a matemática.

O emprego repetido de novas tecnologias para o ensino e aprendizagem de matemática tem constituído uma saída estratégica para abrandar as desconexões entre o que se estuda na escola e o que se leva propriamente para a vida. Não almejamos indicar mudanças excêntricas e nem tão pouco ser o salvador do saber e do conhecimento, especialmente quando a questão em jogo é a ciência que elucida os fenômenos das coisas e da natureza por seus complicados e extravagantes modelos, mas ter a envergadura de decompor o modelo clássico de ensino e aprendizagem de matemática, a partir de uma proposta motivadora e hábil.

Este estudo descritivo e experimental foi efetivado pelos membros do GALC (Geometria, Álgebra, Lógica e Combinatória), Grupo de Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, vinculado ao Instituto Federal de Alagoas, que tem como proposta pesquisar e expor novas metodologias e práticas inovadoras para o ensino e aprendizagem de matemática.

Desta forma, este trabalho objetivou apresentar uma proposta pedagógica para o ato de ensinar e aprender matemática, através de um jogo matemático, pertencente a um produto educacional produzido pelo grupo de pesquisa GALC, chamado jogo de dados de seis faces para probabilidades, cujo pré-requisito para seu entendimento é a ideia intuitiva de probabilidades. Metodologicamente, para constatação da eficácia do modelo recomendado foi realizada uma pesquisa experimental com cinco alunos do curso técnico de informática do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo.

METODOLOGIA

Neste estudo foi realizada uma pesquisa experimental com cinco alunos do curso técnico de Informática do Instituto Federal de Alagoas – Campus Rio Largo com o objetivo de investigar o jogo dos dados de seis faces para as probabilidades. Este jogo é dividido em três partes: a. O jogo do três, no lançamento de um dado. b. O jogo do sete ou onze, no lançamento de dois dados. c. O jogo do quatro ou dez ou quinze, no lançamento de três dados.

Cada participante deve ter, em mãos, três dados (hexaedro). A regra do jogo consistia em lançar um, dois e três dados, de forma que não ocorresse (jogador será eliminado) face três, soma sete ou soma onze e soma quatro ou soma dez ou soma quinze, respectivamente. O vencedor é aquele que alcançasse chegar mais longe na quantidade de arremesso, para cada parte do jogo proposto. Observa-se que os jogos são independentes.

O desígnio era que cada jogador pudesse, intuitivamente, tentar explicar esse fenômeno dos lançamentos de dados por probabilidades. Qual seria dos três jogos aquele que possui maior probabilidade de sucesso nos arremessos, sem a ocorrência dos números eliminatórios?

Da Silva e Kodama (2004) afirmam que alunos com dificuldades de aprendizagem vão gradualmente transformando a imagem assustadora do ato de apreciar um desafio, tendo uma experiência em que aprender é uma atividade atraente e desafiadora. **Títulos e Subtítulos das Seções**

CONCLUSÕES

A respeito à aprendizagem de noção intuitiva das probabilidades, pode-se assegurar que os jogos dos dados permitiram que os alunos ampliassem a criatividade e despertasse interesse em discutir novas práticas para o ensino e aprendizagem de matemática. Durante o decorrer dos jogos foi percebido que as dificuldades apresentadas no desenvolver das jogadas, puderam ser imediatamente explicadas com a interferência do professor.

Ao final da atividade proposta, percebeu-se que os alunos estavam mais motivados e prontos para novos desafios. A proposta metodológica por meio de um produto educacional matemático, em particular os jogos dos dados, estimula o desejo do sujeito a explorar, analisar e jogar, de forma a acreditar em suas intuições. A educação carece estabelecer seus conhecimentos e saberes, partindo das necessidades e interesses dos alunos, no intuito de fortalecer seu desenvolvimento cognitivo e na formação do indivíduo como cidadão.

A utilização de jogos como uma prática escolar eficiente, no processo de ensino e aprendizagem de matemática, é bastante salutar e aproxima o aprendiz de seu cotidiano, em busca de exitosos resultados educacionais. Por intermédio dos jogos matemáticos é possível criar um ambiente propício para estimular jovens aprendizes a desenvolver o gosto pela matemática, estimulando suas habilidades, competências e intuições. A empregabilidade de jogos nas aulas de matemática tem como objetivo alterar a rotina da classe e conduzir o aluno a um ambiente motivador e divertido, de forma a despertar o pensamento matemático do sujeito envolvido.

Espera-se que este trabalho possa significar uma proposta incentivadora a outros educadores e pesquisadores para o fortalecimento de ensinar e aprender matemática através de novas metodologias, particularmente por jogos.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Eliane Vigneron Barreto. As novas tecnologias e o ensinoaprendizagem. VÉRTICES, Rio de Janeiro, v. 10, p. 63-71, 2008.

ASCOLI, Cleonice Claudete Brancher; BRANCHER, Vantoir Roberto. Jogos matemáticos: algumas reflexões sobre os processos de ensino e aprendizagem. Acedido em, v. 17, 2006.

DA SILVA, Aparecida Francisco; KODAMA, Helia Matiko Yano. Jogos no ensino da Matemática. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, p. 1-19, 2004.

FIORENTINI, Dario et al. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.

Boletim da SBEM-SP, v. 4, n. 7, 1990. MOURA, Paula Cristina; VIAMONTE, Ana Júlia. Jogos matemáticos como recurso didático. Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa, 2006.

PONTES, Edel Alexandre Silva. INDAGAÇÕES DE UM PROFESSOR-PESQUISADOR SOBRE O PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. RACE-Revista da Administração, v. 2, p. 11-20, 2018.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. Revista Sítio Novo, v. 2, n. 2, p. 44- 56, 2018.

PONTES, Edel Alexandre Silva; DA SILVA, Luciano Martins. Aritmética modular na interpretação de sistemas codificados no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Revista de Ciência e Inovação, v. 5, n. 1, 2020.

PONTES, Edel Alexandre Silva; PONTES, Edel Guilherme Silva. Isomorfismo Básico Estrutural na Resolução de Problemas: A Similaridade entre a equação $x + y + z = 15$, o Jogo da Velha e o Quadrado Mágico no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática. Revista Psicologia & Saberes, v. 9, n. 17, p. 31-38, 2020.

PONTES, Edel Alexandre Silva et al. Verificação Experimental de um Produto Educacional: um jogo matemático desenvolvido a partir da ideia intuitiva de uma progressão aritmética. Revista Psicologia & Saberes, v. 9, n. 18, p. 114-122, 2020.

TAVARES, Romero. Aprendizagem significativa. Revista conceitos, v. 10, p. 55-60, 2004



UM REPASSO SOBRE AS FORMAS ANALÍTICA E GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Pereira, J.G., jaqueline.pereira@cameta.ufpa.br¹
Silva, J.R.S., julioroberto@ufpa.br¹

¹Universidade Federal do Pará - Campus Universitário do Tocantins-Cametá, CEP. 68.400-000, Cametá -PA, Brazil

Resumo: Neste trabalho apresentamos um resumo do Trabalho de Conclusão de Curso da discente¹ que teve como objetivo o repasso de um dos principais resultados da Análise Funcional, que é o Teorema de Hahn-Banach, em sua forma analítica e formas geométricas, destacando algumas aplicações e demonstrações. Para tanto, apresentamos conceitos básicos e definições necessárias da Álgebra Linear, que são pré-requisitos para o entendimento deste Teorema.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach, Análise Funcional, Lema de Zorn.

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional consiste no estudo de espaços de funções, sendo definida por Botelho et al. (2011) como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach, e dos operadores lineares contínuos entre eles. Este ramo da matemática faz uso de diversos conceitos da Álgebra Linear sendo considerada por muitos autores, em particular Botelho et al. (2011), como sendo uma Álgebra Linear em dimensão infinita. Porém, mesmo sendo uma área que generalize a Álgebra Linear, não está presente nas disciplinas da graduação. Por conseguinte, alunos que tem interesse em estudos de algum de seus tópicos precisam recorrer a livros que geralmente apresentam uma linguagem mais complexa.

Dessa forma, buscamos apresentar um repasso de um dos mais importantes resultados da Análise Funcional, o Teorema de Hahn-Banach, com algumas de suas aplicações, afim de incentivar estudos na graduação nesta área. Trata-se de um resumo dos principais capítulos apresentados no Trabalho de Conclusão de Curso da discente¹ e está dividido em três Tópicos. O primeiro apresenta resultados preliminares da Álgebra Linear contendo definições, teoremas e lemas básicos. O tópico seguinte é dedicado ao Teorema de Hahn-Banach nas suas formas analítica e geométricas, bem como os conceitos mencionados na sua formulação. Por fim, apresentamos como aplicação alguns dos primeiros resultados referentes ao teorema, que geralmente são apresentados em forma de corolários.

1 PRELIMINARES

Começaremos apresentando os principais resultados da Álgebra Linear que serão fundamentais para a compreensão do Teorema de Hahn-Banach e de seus corolários. Enfatizamos a importância do leitor rever conceitos mais específicos da área da Álgebra linear como a ideia de vetor e escalar, base e dimensão, espaços vetoriais, dentre outros, que podem ser encontrados nas referências citadas a seguir. Os estudos para este tópico foram pesquisados em diversos livros e trabalhos científicos, principalmente com base em Coelho (2001) e Lages (1995).

A primeira definição que veremos é o de Funcional Linear. Funcionais lineares são transformações lineares do tipo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, funções cujo contradomínio é o conjunto dos números reais.

Definição 1 *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear sobre o espaço E se*

$$\begin{aligned}f(u+v) &= f(u) + f(v) \text{ para todo } u, v \in E \\f(\alpha u) &= \alpha f(u) \text{ para todo } u \in E \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

¹PEREIRA, Jaqueline Gomes. UM REPASSO SOBRE AS FORMAS ANALÍTICA E GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES. 2022. 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará, Cametá, 2022.

Seja E um espaço vetorial, designaremos por E^* o conjunto das formas lineares sobre E denominado dual algébrico de E .

Caso E seja normado, definimos ainda E' como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares limitados definidos em E , munidos das mesmas operações usuais de soma e multiplicação por escalar de funções. Então E' também é um espaço vetorial e é chamado de dual topológico de E .

Definição 2 *Seja E um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_E$ e seja $f \in E^*$. Se*

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| < +\infty$$

dizemos que f é limitada.

Em alguns momentos usaremos de forma equivalente funcional limitado e funcional contínuo, pois a limitação da forma implica na contiuidade da mesma, como mostrado na proposição a seguir, que resulta diretamente de um teorema referente a transformações lineares considerando dois espaços vetoriais normados. A demonstração dessa proposição pode ser verificada em Cavalcanti (2011).

Proposição 1 *Sejam E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. São equivalentes:*

- (a) *f é limitada;*
- (b) *f é contínua no ponto $x = 0$;*
- (c) *f é contínua em E .*

Definição 3 *Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Uma função $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser um funcional sublinear se satisfaz:*

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \text{ para todo } x, y \in E \\ p(\lambda x) &= \lambda p(x) \text{ para todo } x \in E \text{ e } \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Observe que todo funcional linear é em particular um funcional sublinear, mas nem todo funcional sublinear é linear.

2 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Existem muitas formas de enunciar o Teorema de Hahn-Banach, podendo considerar o caso real, complexo, versões vetoriais, entre outros. Para nossa pesquisa vamos nos limitar ao caso real e indicamos como referência Cavalcanti (2011) para a consulta das demonstrações, que serão omitidas considerando que o foco desse trabalho está nas aplicações.

2.1 Forma Analítica

A forma analítica do Teorema de Hahn-Banach é um importante resultado da Análise Funcional que trata de extensões (ou prolongamentos) de funcionais definidos em subespaços a todo espaço vetorial. Para tanto, precisamos entender o significado matemático de Prolongamento.

Definição 4 *Seja E um espaço vetorial, G um subespaço de E e g uma forma linear em G , isto é, $g \in G^*$. Dizemos que uma forma linear h é um prolongamento de g se $h(x) = g(x)$, para todo $x \in G$.*

Agora podemos enunciar a forma analítica do Teorema. Para sua demonstração é utilizada uma importante ferramenta chamada Lema de Zorn, o qual define que dado um conjunto parcialmente ordenado onde todo subconjunto totalmente ordenado possui um limitante superior então esse conjunto admite um elemento maximal.

Teorema 1 (Hahn-Banach - Forma Analítica) *Sejam E um espaço vetorial e p um funcional positivamente homogêneo e subaditivo, definido em E . Se G é um subespaço próprio de E , $g \in G^*$ e $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$, então existe um prolongamento h de g a E tal que $h(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.*

2.2 Forma Geométrica

As formas geométricas desse teorema tratam da separação de conjuntos convexos usando hiperplanos e são comumente conhecidas como Teoremas de Separação de Hahn-Banach.

Dizemos que um conjunto C é convexo se

$$[tx + (1-t)y] \in C, \text{ para todo } x, y \in C \text{ e para todo } t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Definição 5 Seja E um espaço vetorial real. Um hiperplano afim de E é um conjunto da forma

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\alpha)$$

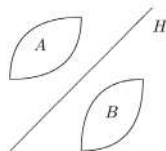
onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in E^*$ tal que f não é identicamente nula. Neste caso, dizemos que H é um hiperplano da equação $[f = \alpha]$.

Para entendermos o enunciado das formas geométricas do teorema de Hahn-Banach, precisamos conhecer o significado de sentido lato e estrito.

Dizemos que o hiperplano H de equação $[f = a]$ separa A e B , com A e B contido no espaço vetorial normado E , no sentido lato (generalizado) se $f(x) \leq \alpha$, para todo $x \in A$ e $f(y) \geq \alpha$ para todo $y \in B$. Dizemos que o hiperplano H separa A e B no sentido estrito se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$, para todo $x \in A$ e $f(y) \geq \alpha + \varepsilon$.

Essa separação significa, geometricamente, que A e B se situam em lados opostos de H .

Figura 1: H separa A e B



Teorema 2 (1ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) Sejam E um espaço vetorial normado e $A, B \in E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido lato.

Teorema 3 (2ª Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) Sejam E um espaço vetorial normado, $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A for fechado e B for um compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.

3 APLICAÇÕES

As aplicações do Teorema de Hahn-Banach vão muito além da Análise Funcional, podendo ser aplicado em outras áreas da matemática, por exemplo, na Análise Complexa, Teoria da Medida, Teoria do Controle, Programação Convexa e Teoria dos Jogos. Além de ultrapassar as barreiras da matemática, tendo aplicações à Termodinâmica. As referências para estas aplicações podem ser encontradas em Botelho et al. (2011).

Neste Tópico abordaremos algumas das primeiras consequências do Teorema de Hahn-Banach, que também podem ser encontradas em Cavalcanti (2011) em forma de corolários, as quais se configuram em grandes ferramentas no estudo da Análise Funcional.

Corolário 1 Sejam E um espaço vetorial normado, G um subespaço de E e $g \in G'$. Então, existe um prolongamento f de g tal que $f \in E'$ e $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

Demonstração: Definindo-se

$$p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|, \quad x \in E,$$

temos que

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\| = p(x), \quad \forall x \in G.$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach existe um prolongamento f de g a todo E tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Contudo, temos também que

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = \|g\|_{G'} \|-x\| = p(x), \quad \forall x \in E.$$

Consequentemente,

$$|f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

o que implica,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \|g\|_{G'},$$

ou seja,

$$\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}.$$

Por outro lado, como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$, temos que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| \geq \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |g(x)| = \|g\|_{G'}.$$

Das duas últimas desigualdades acima concluímos que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. ■

Observação: Notação: Dados $f \in E'$ e $x \in E$, $f(x)$ será denotado de $\langle f, x \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ é o produto interno da dualidade E', E .

O seguinte corolário garante que dado um número real positivo α é possível encontrar um funcional f_0 em E' e um vetor x_0 em X , tal que $\langle f_0, x_0 \rangle = \alpha$.

Corolário 2 *Seja E um espaço vetorial normado. Então, para cada $x_0 \in E$, existe uma forma $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|$ e $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.*

Demonstração: Seja $x_0 = 0$, temos que $f_0 \equiv 0$ satisfaz o desejado. Seja $x_0 \neq 0$ e $G := \mathbb{R}x_0 = \{tx_0; t \in \mathbb{R}\}$. Definimos $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\sup_{x \in G, \|x\|=1} |g(x)| = \sup_{t \in \mathbb{R}, |t| = \frac{1}{\|x_0\|}} |t\|x_0\|^2 = \|x_0\|.$$

Sendo g claramente linear, resulta que $g \in G'$ e $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$. Pelo Corolário 1 existe um prolongamento f_0 de g a E tal que $f_0 \in E'$ e $\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|$. Além disso, como $x_0 \in G$, temos $\langle f_0, x_0 \rangle = \langle g, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$. Seja E um espaço normado. De um modo geral, se designa para cada $x_0 \in E$ o conjunto

$$F(x_0) = \{f_0 \in E'; \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2 = \|f_0\|^2\},$$

que é normalmente chamado de conjunto dualidade de x_0 . ■

Observação: Pelo Corolário 2 resulta imediatamente que $F(x_0) \neq \emptyset$ para todo $x_0 \in E$. Além disso, se E' é estritamente convexo (o que é sempre verdade se E é um espaço de Hilbert, ou se $E = L^p(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, por exemplo), então $F(x_0)$ é um conjunto unitário.

Corolário 3 *Seja E um espaço vetorial normado. Então, para todo $x \in E$, tal que $f \in E'$, se tem*

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Demonstração: Se $x = 0$, o resultado segue trivialmente posto que $\langle f, x \rangle = 0$, para todo $f \in E'$. Seja, então, $x \neq 0$ e consideremos $f \in E'$ tal que $\|f\| \leq 1$. Então,

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{E'} \|x\| \Rightarrow \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|. \quad (2)$$

Por outro lado, pelo corolário 2, existe uma forma $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x\|$ e $\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$, ou seja, $f_0 \in F(x)$. Definamos $f_1 = \frac{f_0}{\|x\|}$. Então, $\|f_1\|_{E'} = 1$ e $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$. Portanto, para $f \in E'$,

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \geq |\langle f_1, x \rangle| = \|x\|. \quad (3)$$

Combinando 2 e 3 temos o desejado. ■

Corolário 4 *Sejam E um espaço vetorial e F um subespaço de E tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe $f \in E'$, $f \neq 0$ (não identicamente nula) tal que $\langle f, x \rangle = 0$, para todo $x \in F$.*

Demonstração: Seja $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin \overline{F}$. Como F é subespaço de E temos que \overline{F} também o é e, consequentemente é convexo. Logo, \overline{F} é convexo e fechado; $\{x_0\}$ é convexo e compacto de $\overline{F} \cap \{x_0\} = \emptyset$. Pela 2ª Forma geométrica do teorema de Hahn-Banach, existe um hiperplano fechado que separa \overline{F} e $\{x_0\}$ no sentido estrito, isto é, existem $f \in E'$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \text{ para todo } x \in \overline{F} \text{ e } f(x_0) \geq \alpha + \varepsilon, \text{ para algum } \varepsilon > 0.$$

Em particular,

$$f(x) < \alpha < f(x_0), \text{ para todo } x \in F.$$

Considerando $g = f|_F$, concluímos que $g(x) < \alpha$ para todo $x \in F$ o que implica que $g \equiv 0$, ou seja, $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in F$, o que encerra a prova. ■

CONCLUSÕES

O Teorema de Hahn-Banach é uma importante ferramenta da Análise Funcional capaz de resolver uma grande variedade de problemas, o que justifica a importância de pesquisas nessa área.

Para tanto, apresentamos um repasso do Teorema em sua forma analítica e formas geométricas, destacando algumas de suas aplicações (corolários) e demonstrações. Ademais, destacamos as principais definições da Álgebra Linear e outros conceitos necessários para sua compreensão.

Desta forma, dada a importância do Teorema de Hahn-Banach para a Análise Funcional, esperamos que este trabalho sirva como acervo e possa encorajar futuros estudos na graduação envolvendo este tema.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. Fundamentos de análise funcional. SBM, 2011.

CAVALCANTI, Marcelo M.; CAVALCANTI, VN Domingos; KOMORNIK, Vilmos. Introdução a análise funcional. Eduem, Maringá, 2011.

COELHO, Flávio Ulhoa. Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34. Edusp, 2001.

LAGES, Elon. Álgebra linear. IMPA, Rio de Janeiro, 1995.



UMA BUSCA PELA APRENDIZAGEM CRIATIVA ATRAVÉS DO USO DE SOFTWARES DE MODELAGEM 3D

Abreu Ramos, Augusto Cezar, email: abreuramos3@gmail.com
Dos Passos Neri Junior, Edilson, email: edilson_neri@yahoo.com.br

Afiliação Autor 1: Universidade Federal do Pará
Afiliação Autor 2: Universidade Federal do Pará

Resumo: *Os modelos de ensino buscam por formas mais atuais a cada dia, dada a globalização e a democratização da informação que esta trouxe com a ascensão do uso das Tecnologias da Informação. Na busca por novas metodologias de ensino que venham a tanger coisas do cotidiano, temos este resumo tratando da utilização da cultura maker em parceria com os softwares de modelagem, a fim de auxiliar no ensino e aprendizagem da matemática.*

Palavras-chave: *Maker, OpenSCAD, SketchUP, Modelagem, Ensino.*

INTRODUÇÃO

A ciência do ensino e aprendizagem matemática, em todas suas vertentes, traz consigo várias variáveis envolvidas nesse processo e com isso se tem a importância intrínseca do docente ter de forma clara em sua mente todas as principais características por trás dessa ciência. O conhecer do aluno, de seu ciclo social, do seu eixo familiar e do seu suporte em geral é fundamental para que esse possa se programar da melhor forma possível, a fim de que o aluno tenha o melhor desenvolvimento possível através daquilo que está sendo ensinado. O ensino contextualizado é uma das principais ferramentas que o docente tem, além desta, é impossível se utilizar apenas de papel e caneta quando falamos de ensino nos dias de hoje, dada a imersão tecnológica a qual o mundo se encontra. Com a globalização, fugir do uso de computadores como recurso pedagógico é como ir contra a maré. O docente por anos teve como ferramenta apenas o quadro negro, giz e a si mesmo, claro, é de fundamental importância que o docente tenha domínio daquilo que está apresentando, dado que a Tecnologia da Informação não vem para substituir os docentes, mas para ajudar este como um facilitador do ensino.

A tecnologia da informação em sala de aula no ensino contemporâneo

O Brasil começou a utilizar de forma tardia a tecnologia da informação em sala de aula, embora tivéssemos autores com D'Ambrosio e Barros (1988); apontando o uso do computador como enorme facilitador para o professor em sala de aula e enfatizando a necessidade da formulação de métodos pedagógicos inovadores que pudessem suprir desafios encontrados nos dias atuais. Com o passar dos anos, temos vários autores justificando o uso da tecnologia da informação em sala de aula, como Kampff (2006) que nos diz que desde os primórdios o homem produz tecnologias a fim de suprir suas necessidades, a partir deste pensamento, temos que o uso das TIC's (Tecnologias da informação) em sala de aula, não como necessariamente um luxo, mas sim, como uma necessidade. No que tange o contemporâneo, é visível que existe uma desatualização dos profissionais docentes em relação a

novas ferramentas de ensino, onde estes muitas vezes se recusam a mudar sua forma de ensinar, às vezes por relutância em novos formatos, dificuldades adaptacionais às novas metodologias e etc. Para aqueles profissionais que já utilizam da tecnologia da informação atualmente em sala, percebemos que este uso ainda é embrionário, que está sendo gestado aos poucos, levando em consideração a grande gama de possibilidades que a tecnologia da informação oferece. No ano de 2020, devido a pandemia de Covid-19 percebemos um parto prematuro do uso da Tecnologia da Informação em sala de aula, o que demonstrou que as Tic 's não são um luxo em sala de aula, mas sim, uma necessidade. Embora tenha acontecido uma grande evolução no uso de Tecnologia da informação, tanto no ensino fundamental e médio, quanto no ensino superior, ainda vemos docentes e alunos se aproveitando de poucas ferramentas que muitas vezes estão apenas ligadas a comunicação. Outras ferramentas que se tornaram bem presentes em sala em uma tentativa de busca pelo lúdico e informacional, visando o ensino fundamental e médio são o kahoot (plataforma online que oferece diferentes tipos de Quiz que podem ser montados pelo participante) e o Scratch (plataforma online que oferece ao usuário a possibilidade de montar jogos e animações), quando no máximo, se tem o uso do Geogebra. Durante o ensino e a aprendizagem o docente se vê muitas vezes com dificuldades em passar algum conceito para alguns estudantes, dado os diferentes tipos de pessoas, um exemplo disso é a Geometria, onde o autor Lorenzato (1995) nos diz em seu livro “Porque não ensinar Geometria” que a Geometria está por toda parte, mas é necessário a primeiro momento conseguir enxergar esta, onde mora uma das maiores dificuldades do estudante, que é o representar, onde este aprender a representar pode ser muitas vezes sanado a partir da utilização de softwares e outros. Logo, o uso das Tic 's em sala de aula não vem apenas como catalisador educacional, como diversificação metodológica do ensino, recurso imersivo pedagógico, mas como uma necessidade educacional a partir do recorrente uso dos softwares no dia-a-dia de todos.

A cultura maker

A partir da crise econômica e escassez de trabalhadores devido ao grande número de mortos pós Segunda Guerra Mundial, trouxe a população estadunidense a optar por fazer seus próprios objetos e serviços, onde nascia assim de certa forma o movimento “Do it yourself”, que no português seria algo como “faça você mesmo”. Desde esse momento, esse movimento continuou a ser expandido, ganhando como forte aliado a Tecnologia da Informação. Um forte propagador deste movimento foi a revista “Make”, publicada pela primeira vez no início do século XXI, e com essa e o avanço da tecnologia nasce o que conhecemos contemporaneamente como “cultura maker”. A cultura maker também conhecida como “movimento maker”, tem ascendência a partir do movimento “Do it yourself”, onde “maker” vem do verbo “to make”, que em português seria “fazer”. A cultura maker trás como pilares a criatividade, sustentabilidade, democratização da informação a fim mostrar que todos podem fazer e que a informação deve ser de todos, sustentabilidade, empreendedorismo e o ensino, a fim de incentivar as pessoas a não dependerem tanto de outras pessoas e de industriais, quando estas podem fazer suas próprias coisas. Ao redor do mundo existem várias feiras de encontros de cultura maker, assim como sites e vídeos que trabalham sobre o assunto, além de feiras, existem espalhados pelo mundo os FABLABs, que são oficinas de cultura maker. Esses makerspaces tem vários formatos. Muitos pesquisadores consideram o movimento maker como uma nova revolução industrial.

O uso da cultura maker como aliada em sala de aula

A comunidade escolar de modo geral já tem colocado a cultura maker de forma indireta na educação há anos, porém, sem este nome diretamente. Quando a escola promove feiras de ciência para os alunos, acaba promovendo que esses trabalhem como makers, assim como nas feiras makers que acontecem pelo mundo. Dentre as várias formas de metodologias e ferramentas pedagógicas que podem ser adotadas no ensino, a cultura maker acaba por abranger várias dessas, onde tomamos problemas reais e apresentamos aos alunos esses problemas a fim de que os alunos possam resolver esse com alguma coisa que esses possuam. Além de ferramentas e outros, a cultura maker incorporou como ferramenta também o uso das tecnologias da informação, além das impressoras 3D, com isso, temos o papel da escola de incorporar essas evoluções do mundo a forma de apresentar os assuntos ao aluno.

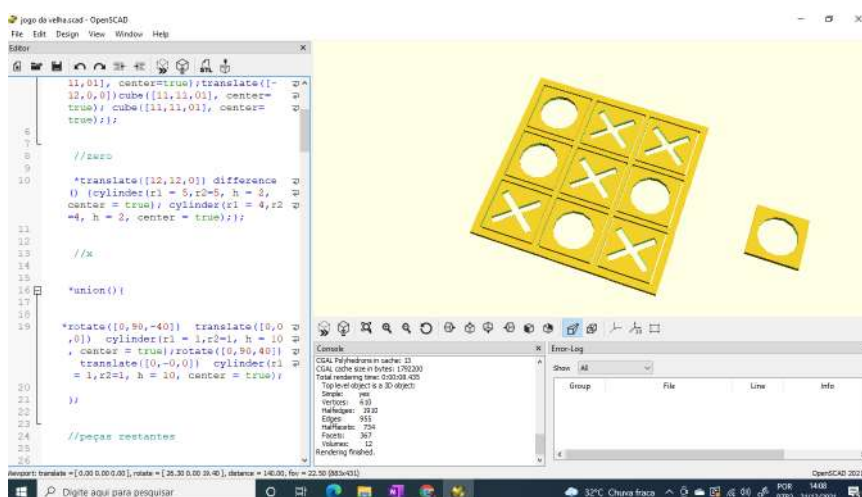
A cultura maker no ensino da matemática

O uso dos softwares em sala de aula é algo que tem tomado grande proporção, atualmente, quando falamos de matemática em sala de aula a nível de fundamental e ensino médio, temos softwares como Geogebra, Scratch, kahoot e dentre outros, porém, quando se fala de cultura maker associada a matemática, acaba por haver uma separação em relação ao uso de softwares. A cultura maker quando associada ao uso de matemática em sala de aula a nível de ensino fundamental e médio fica por muitas vezes limitada a maquetes, jogos e outros, mas essa não utiliza do auxílio da tecnologia da informação por muitas vezes como o da própria impressora 3d. Softwares de modelagem 3d e outros que por muitas vezes são julgados “complexos” para estudantes de níveis menores ao superior, o que acaba por muitas vezes limitar o desenvolvimento desses estudantes. Essas limitações vão de contra o pensamento de Piaget, que trazia visão de que o desenvolvimento de um ser humano mora justamente quando colocamos esse fora de sua zona de conforto. Além do auxílio no desenvolvimento cognitivo do aluno, além do desenvolvimento educacional, a implementação do uso de softwares de modelagem 3D junto a cultura maker trás para esse um novo panorama sobre aquele assunto e sobre como o mundo vem se desenvolvendo. Um dos maiores vilões no ensino da Geometria Espacial, que estuda formas em três dimensões de objetos geométricos e suas relações, é a visualização destes objetos e de como estes interagem com outros objetos. Os softwares de modelagem 3D suprem essas deficiências do ensino, as limitações que por muitas vezes dificultam o trabalho do professor.

Exemplos de softwares de modelagem 3D e aplicações que esses podem apresentar em sala de aula

Partindo do uso da cultura maker que busca sanar problemas com criatividade, sustentabilidade e outros pilares, junto ao uso das Tecnologia da Informação na busca por uma metodologia de ensino inovadora que colha bons frutos, temos o uso do software de modelagem 3D “OpenSCAD”. O OpenSCAD é um software de código aberto para a criação de sólidos 3D em CAD. É um modelador baseado somente em scripts e usa sua própria linguagem de descrição; as partes podem ser visualizadas, mas não podem ser interativamente selecionadas ou modificadas com o mouse na janela de visualização 3D, essas só podem ser alteradas por programação. O OpenSCAD é um software atualmente conhecido principalmente por engenheiros e outros profissionais que necessitam trabalhar com modelagem 3D. O uso em sala de aula desse, além da representação de sólidos e as interações que esses sólidos podem ter, interações com outros sólidos ou perfurações e etc, mas também temos o uso desse em junção com a impressora 3D, a fim de construir novas coisas como ferramentas, jogos ou itens que podem ser utilizados no dia-a-dia.

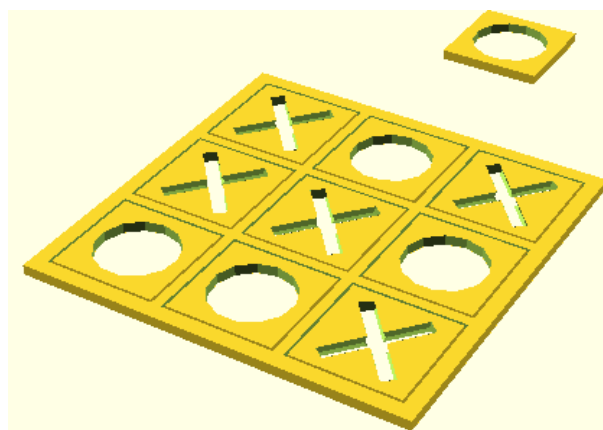
Figura 1



interface do OpenSCAD

Uma das utilizações que podemos exemplificar é construção de um jogo, como o conhecido jogo da velha. Nesta construção simples os alunos trabalham conceitos como plano cartesiano para a localização das peças no OpenSCAD, conceitos de Geometria como polígonos, formas, além de área e volume. Além dos citados, existem também os benefícios de uma familiarização mais precoce do ensino de programação, dada a programação que está envolvida no OpenSCAD.

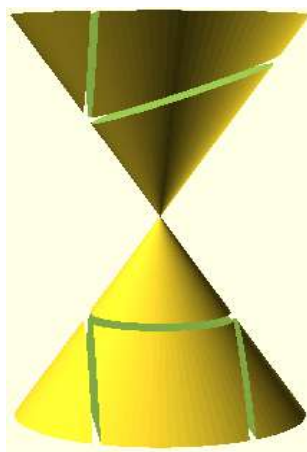
Figura 2



Jogo da velha em forma de tabuleiro modelado no OpenSCAD

Outro exemplo de utilização do software OpenSCAD em sala de aula é no uso e construção de sólidos e das interações que estão ligadas a esses, como exemplo um duplo cone seccionado no ensino de cônicas em Geometria Analítica.

Figura 3



Duplo com seções que representam as cônicas

Um segundo software de modelagem 3D que pode ser trabalhado, porém, com fins um pouco mais específicos, mas de uma forma lúdica é o software “SketchUp”. O SketchUp é um software próprio para a criação de modelos em 3D no computador. O SketchUp está disponível em duas versões: a versão profissional, Pro, e a versão gratuita, Make, possuindo também uma plataforma online para modelagem 3d. Atualmente o SketchUp é um software extremamente utilizado por profissionais de arquitetura e paisagismo, além de design. Diferente do OpenSCAD, este

PÔSTERES

exibe uma interface mais dinâmica, onde alterações podem ser feitas pelo cursor do mouse ou pela barra de ferramentas. É normal que durante o ensino básico façamos tarefas como “como é a sua casa?” ou “desenhe uma casa”. O OpenSCAD permite ir além. Visando isto é através de uma atividade lúdica que envolve a cultura maker, matemática, programação e outras coisas que trazem vários benefícios para qualquer ser humano, temos como exemplo de atividade no SketchUP uma maquete 3D da provável casa mais conhecida do mundo, a casa da família Simpsons do desenho “OS Simpsons”.

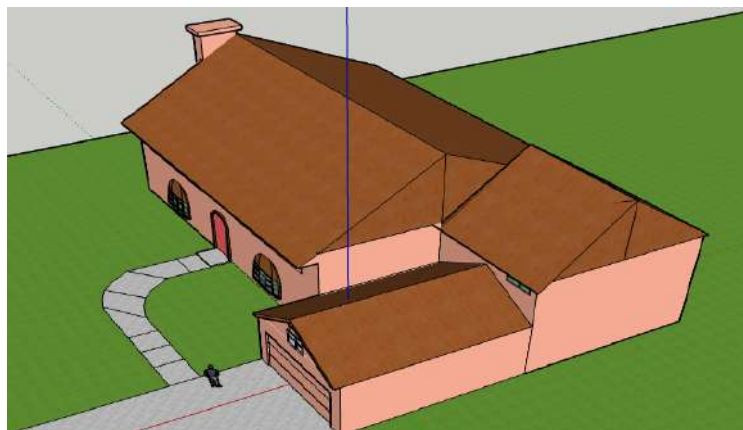
Figura 4



Casa dos Simpsons no SketchUP vista pela frente

O software permite a verificação apenas da planta, como as medidas das paredes e proporções em geral utilizadas.

Figura 5



Casa dos Simpsons no SketchUP vista por uma diagonal superior

CONCLUSÕES

O uso da cultura maker associado à utilização dos softwares de modelagem 3D como recurso educacional são sem dúvidas a aceitação pela modernização cuja a qual a sociedade tem caminhado com passos largos, tomando que impressoras 3D e softwares de modelagem tem se tornado cada vez mais comuns a todos. O Brasil teve uma aceitação tardia da utilização da Tecnologia da informação como ferramenta pedagógica e esta falha não deveria ser repetida.

REFERÊNCIAS

LORENZATO, S. **Porque não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4, 1995. Disponível em:<

http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf>.

Acesso em: 14 nov. 2020.

BARROS, Jorge Pedro Dalledonne de; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Computadores, escola e sociedade**. São Paulo: Scipione, 1988.

KAMPPF , Adriana Justin Cerveira. **Tecnologia da informação e comunicação na educação**. Curitiba: IESDE, 2006.



USO DE TABELAS E TEIAS DE CONGRUÊNCIA PARA RESOLUÇÕES DE QUESTÕES DO ENEM

NETO, Oséas Guimarães Ferreira, oseas.neto3234@escola.seduc.pa.gov.br¹

NUNES, Marly dos Anjos, marlynunes@ufpa.br²

ROZAL, Edilene Farias, lenefarias@ufpa.br³

¹Secretaria de Educação do Estado do Pará

²Universidade Federal do Pará

³Universidade Federal do Pará

Resumo: *Esse trabalho apresenta duas opções de registros de representação nas resoluções de questões do Exame Nacional do Ensino Médio que envolvam divisibilidade, através do uso de tabelas e da teia de congruências, capacitando o aluno a promover uma ligação entre habilidades e competências presentes na matriz de referência do exame, com conteúdos presentes nos eixos Números e Álgebra contidos na BNCC, além disso, os registros possibilitam a apresentação da notação de congruência modular, o que amplia o seu uso e importância para outros cenários, oportunizando uma conexão entre os vários níveis de ensino. Assim, apresentamos esses registros que podem ser utilizados como instrumentos de ensino, permitindo generalizações que viabilizem uma ascensão no aprendizado e no desempenho dos alunos que irão prestar as futuras edições do ENEM.*

Palavras-chave: *Tabela, Teia de Congruência, ENEM, Critérios de Divisibilidade e Congruência Modular*

INTRODUÇÃO

Ao longo de quinze anos trabalhando com pré-vestibular, sempre encontrei muitos alunos com grandes dificuldades nos processos de divisão exigida em exames como o Enem. Esses entraves me incomodavam, pois questionava, como um aluno que vai realizar o vestibular não sabe executar uma divisão com resto, fazer uma simplificação ou diferenciar um MMC de um MDC? Com o tempo criamos estratégias metodológicas para atenuar esses problemas, promovendo oficinas de matemática básica, onde revisava os conteúdos do ensino fundamental II, com ênfase nos conteúdos divisibilidade do 6º e 7º anos.

Essas oficinas são oferecidas aos alunos que estão no último ano do ensino médio, sendo assim, além da notação convencional de divisibilidade, também usamos a notação de congruências, pois entendemos que a mesma pode ser rapidamente absorvida pelos estudantes, uma vez que tal notação oferece uma generalização de todo o processo de divisibilidade.

As aplicações que usamos são do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e são discutidas sobre duas perspectivas com o propósito de relacionar os conteúdos, primeiro envolvendo critérios de divisibilidade no ensino fundamental II, com ênfase nas duas primeiras séries do ensino fundamental maior e depois estudamos usando congruência modular.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2018, distribui os conteúdos de Matemática em 5 unidades temáticas; Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. O foco do nosso trabalho está na unidade Números, uma vez que praticamente todos os conteúdos de Aritmética neste ciclo de ensino concentram-se nessa unidade. Dessa forma, para o eixo dos Números, espera-se que o aluno ao concluir os anos finais do ensino fundamental, tenha domínio e clareza sobre esse eixo de conhecimento, mas na prática a realidade tem sido outra.

“Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante no currículo do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final dessa fase de formação, com um conhecimento insuficiente sobre como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações.” (BRASIL, 1998, p.95)

No entanto, dentro do contexto escolar o que se percebe é uma abordagem do eixo de Números voltada principalmente para a resolução de algoritmos, com escassa ênfase ao olhar qualitativo, investigativo e associativo em torno das propriedades que os envolvem. É no início do fundamental II, que assuntos importantes da Aritmética, tais como: múltiplos, divisores, divisão euclidiana, critérios de divisibilidade, mmc e mdc são apresentados, porém o que se verifica na prática é que essa apresentação está voltada apenas a exposição simples de um conjunto de regras e cálculos desconectados de situações cotidianas, concretas, não proporcionando ao aluno percepções de implicações gerais que seus conceitos e ideias podem proporcionar.

Sendo assim, algumas das relações mais significativas no conjunto dos números inteiros, em torno das operações e validações de propriedades numéricas, são praticamente inexploradas no contexto regular da sala de aula. Um exemplo pode ser encontrado na operação de divisão euclidiana, pois não se observa a exploração sobre a condição de existência e unicidade do quociente e do resto em caráter associativo a outras ideias aritméticas, como o papel do quociente numa sequência de múltiplos e divisores de um número inteiro ou mesmo o comportamento cíclico dos restos.

Essas implicações convergem para uma preocupação concreta sobre o ensino da matemática, no que se configura uma abordagem fragmentada e independente dos tópicos presentes no eixo Números do currículo. Com essa abordagem verifica-se a causa de uma série de paradigmas e insucessos relacionados ao interesse e aprendizagem matemática. Portanto, neste trabalho usamos resoluções que possibilitam uma relação entre essas formas de registro, no sentido de que,

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir a possibilidade de passar de um registro a outro. (DUVAL, 2003, p. 14-15)

Sob outra perspectiva, a abstração do raciocínio hipotético, a transposição da linguagem verbal para a simbólica, própria da matemática, as transformações de padrões percebidos em generalizações, a comparação entre grandezas, são bases também para o tratamento e aprendizado algébrico. Desse modo, para que se possa sair de casos particulares e conseguir observar e estabelecer algumas relações, tais como, a igualdade ou de equivalência, de modo a manipular operações e propriedades numéricas para que se possa formular uma ideia geral, é necessário que se conheça, domine, entenda e aplique com segurança conceitos já estabelecidos, isto é, necessita-se que a relação entre os conhecimentos aritméticos resulte de forma associativa e contínua na construção da base algébrica.

Assim, percebemos que mediante esse olhar diferenciado e reflexivo sobre alguns conteúdos e processos aritméticos, em especial, divisibilidade e congruência modular, estamos atendendo a uma demanda significativa do ensino da matemática, promovendo tanto uma melhor percepção e domínio das bases aritméticas, quanto a construção de uma linearidade direta e associativa ao uso algébrico, conseqüentemente, ampliando os subsídios para o alcance das habilidades e competências do currículo de Matemática do ciclo básico especificados na BNCC e que são necessários em exames como o ENEM.

OBJETIVOS

Geral:

Apresentar algumas resoluções de itens do ENEM usando tabelas e a teia de congruências que possam ser usadas no ensino básico, oferecendo aos professores deste ciclo uma fonte de pesquisa para a elaboração e produção de aulas que proporcionem uma base mais sólida dos fundamentos da matemática elementar.

Específicos:

- Capacitar o aluno a estabelecer relações de generalização dos processos de divisibilidades;
- Apresentar a notação de congruência modular, com ênfase as propriedades operatórias e as generalizações;
- Promover métodos alternativos de resoluções que busquem relacionar os critérios de divisibilidade com congruência modular.

APLICAÇÕES

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é construído a partir de um conjunto de habilidades e competências que visam avaliar os conhecimentos dos candidatos, dessa forma todos os anos a prova tem a mesma estrutura, pois se baseia nos mesmos critérios, isso possibilita que ano após ano, várias questões que apresentam a mesma sequência de habilidades e competências sejam resolvidas com as mesmas estruturas matemáticas. Deste modo, as ferramentas que apresentamos nesse trabalho podem ser utilizadas em muitas questões do Enem de vários anos. Apresentaremos por completo apenas uma questão nesse momento, para respeitar o limite de páginas do evento.

ENEM-2014 - Divisão Euclidiana

Uma loja decide premiar seus clientes. Cada cliente receberá um dos seis possíveis brindes disponíveis, conforme sua ordem de chegada na loja. Os brindes a serem distribuídos são: uma bola, um chaveiro, uma caneta, um refrigerante, um sorvete e um CD, nessa ordem. O primeiro cliente da loja recebe uma bola, o segundo recebe um chaveiro, o terceiro recebe uma caneta, o quarto recebe um refrigerante, o quinto recebe um sorvete, o sexto recebe um CD, o sétimo recebe uma bola, o oitavo recebe um chaveiro, e assim sucessivamente, segundo a ordem dos brindes. O milésimo cliente receberá de brinde um(a)

- (a) bola.
- (b) caneta.
- (c) refrigerante.
- (d) sorvete.
- (e) CD.

Solução.

Note que como a quantidade de brindes é muito elevada, continuar a distribuição até que se chegue no número 1000 não é recomendado. Perceba também que a variedade de itens oferecidos é seis, portanto, vamos analisar essa situação usando apenas o critério de divisibilidade do 6, isto é, uma congruência módulo 6. Para que um número seja divisível por 6 ele precisa ser divisível por dois e por três simultaneamente.

Podemos usar tabelas ou mesmo uma figura para ajudar na resolução da questão e ao fazermos uso desses mecanismos estamos utilizando as ferramentas de congruência modular. Além disso, o uso da tabela e da figura ampliam os horizontes de aplicabilidade dos critérios de divisibilidade e da própria congruência.

Tabela 01 – Distribuição da Quantidade de Brindes

Bola	1	7	13	19	...	991	997
Chaveiro	2	8	14	20	...	992	998
Caneta	3	9	15	21	...	993	999
Refrigerante	4	10	16	22	...	994	1000
Sorvete	5	11	17	23	...	995	
CD	6	12	18	24	...	996	

Fonte: Os autores.

Note que o simples fato de montar a tabela já faz com que o aluno observe que se a quantidade de brindes a serem distribuídas for um número par (critério de divisibilidade do 2), o último brinde só poderá ser o chaveiro, o refrigerante ou o CD, pois são os únicos que deixam um resto par na divisão euclidiana. Essa simples análise já elimina três alternativas da questão. Na sequência vamos usar o critério de divisibilidade do três, isto é, para que um número seja divisível por três a soma dos seus algarismos deve ser um múltiplo de três. Como a soma dos algarismos do número 1000 é 1, então o resto da divisão euclidiana será 1, portanto o milésimo brinde será aquele que deixa resto um quando dividido por 3 e das opções restantes observamos que o CD deixa resto zero, o refrigerante deixa resto 1 e o chaveiro deixa resto 2, logo o milésimo brinde será o refrigerante, alternativa letra (c).

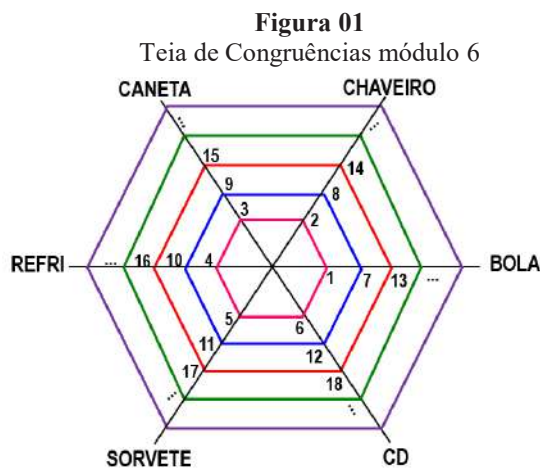
Tabela 02 – Generalização da Quantidade de Brindes distribuídos

Bola	Chaveiro	Caneta	Refrigerante	Sorvete	CD
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$6q + 1$	$6q + 2$	$6q + 3$	$6q + 4$	$6q + 5$	$6q$

Fonte: Os Autores

Ao analisar as tabelas o aluno irá observar que por maior que seja a quantidade de brindes N , ele só precisará trabalhar com o resto da divisão e/ou observar a paridade, assim ele notará que se o resto for 1 o milésimo brinde será uma bola, isto é $N \equiv 1 \pmod{6}$, se o resto for 2, o referido brinde será o chaveiro, ou seja, $N \equiv 2 \pmod{6}$, se o resto for 3 será a caneta, $N \equiv 3 \pmod{6}$, se o resto for 4 será o refrigerante, $N \equiv 4 \pmod{6}$, se o resto for 5 será o sorvete $N \equiv 5 \pmod{6}$ e por fim se o resto for zero, $N \equiv 0 \pmod{6}$, será o CD. Nota-se também que a tabela 02, permite uma generalização, que valerá para qualquer quantidade N de brindes, possibilitando ao aluno estender este raciocínio para outras aplicações.

Outra forma de ilustrar a divisão euclidiana é usando figuras em formato de ‘teias de aranha’. Esse método surgiu de uma questão aplicada na prova da OBMEP, além disso, conseguimos distribuir as congruências por cada um dos brindes, isto é, a Bola ficará com todas as $N \equiv 1 \pmod{6}$, já a Chaveiro ficará com todas as $N \equiv 2 \pmod{6}$, a Caneta com $N \equiv 3 \pmod{6}$, o Refrigerante com $N \equiv 4 \pmod{6}$, o sorvete com $N \equiv 5 \pmod{6}$ e por fim o CD com as $N \equiv 0 \pmod{6}$. A esse modelo de ilustração denominamos de “Teia de Congruências”, denominação essa que compõe o título desse trabalho.



Fonte: Os Autores

CONCLUSÕES

As resoluções que apresentamos na questão exposta acima, proporcionam um olhar mais prático e concreto ao aluno, uma vez que ela surge em questões comuns em diversos exames seletivos, o que facilitará o envolvimento do aluno. Em aplicações como essa, seja usando as tabelas ou a teia de congruências, observamos a generalização que essas resoluções oferecem, pois elas ampliam e conectam conteúdos como divisão euclidiana e critérios de divisibilidade, além disso, também possibilitam o contato do aluno com as congruências modulares, isso tudo de uma maneira clara, simples e objetiva. A mobilização desses diferentes registros de representação, defendido por (DUVAL, 2003) cria uma ligação entre os conteúdos aritméticos e algébricos, favorecendo um ambiente de familiaridade e de fluxo contínuo entre várias habilidades e competências presentes na matriz de referência do Enem, o que permite um alcance dos objetivos propostos neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R.; FEITOSA, S. **OBMEP – Banco de Questões 2017**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

BRASIL, *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em 01 de março de 2022.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p.11-33. In MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

GUIMARÃES, O. *Aplicações de Divisibilidade e Congruência Modular: do Ensino Básico ao Superior*. Dissertação (Mestrado/ PROFMAT) - Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Pará – Faculdade de Matemática. Bragança. 2021.

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2011. 169 p

LACERDA, J. C. A. **Praticando a Aritmética**. Rio de Janeiro, 8º Edição. Editora XYZ, 2014.



VERIFICANDO A POSSÍVEL OCORRÊNCIA DA LEI DE NEWCOMB-BENFORD PARA O APARECIMENTO DE LETRAS EM OBRAS LITERÁRIAS LUSÓFONAS

Dias, Diego Nonato, diegonbd.eso@gmail.com¹
¹ Uninter

Resumo:

No decorrer das épocas, a lei de Newcomb-Benford vem ajudando a sociedade de várias formas, principalmente a evitar crimes ligados a fraudes no setor público e privado. Porém, seu funcionamento é exclusivo para o tratamento de dígitos numéricos. A pergunta que suscitou este trabalho é: será que ela pode ser usada para o tratamento de outros tipos de dados, como letras de textos e afins? Neste trabalho, a proposta é observar se a lei de Newcomb-Benford também pode ser usada para medir a frequência de aparecimento de letras em textos lusófonos famosos. Durante a implementação dessa pesquisa, verificou-se que, de fato, a lei de Newcomb-Benford possui algum tipo de relação com letras também, mas, para ela ser usada para esse fim, é necessário que passe por ajustes.

Palavras-chave: Lei de Newcomb-Benford, Letras, Textos.

INTRODUÇÃO

De acordo com [Cunha \(2013\)](#), no século XIX, Simon Benford percebeu um fenômeno interessante que ocorria com livros sobre logaritmos: as primeiras páginas eram mais usadas do que as últimas, evidenciado então que a frequência de aparecimento de alguns dígitos numéricos é bem maior do que outros. Porém, apenas no século XX esse fenômeno ganhou relevância, graças a Frank Benford, que verificou a sua ocorrência não apenas em livros, mas também em dados referentes a débitos de energia, bolsa de valores, mortalidade e natalidade de recém-nascidos, entre outros.

A esse fenômeno foi dado o nome de lei de Newcomb-Benford, a qual pode ser expressa pela seguinte equação:

$$w = \log_{10}(x + 1) - \log_{10}(x) \quad (1)$$

Segundo [Pinkham \(1961\)](#), a [equação 1](#) não sofre mudanças de escala, o que a torna uma ferramenta bastante poderosa para análises da veracidade dos dados nas instâncias públicas e privadas, como apontado por [Huxley \(2001\)](#), [Ashcroft, Bae e Norvell \(2002\)](#) e [Kumar e Bhattacharya \(2002\)](#).

Porém, apesar da importância desse fenômeno, ele é limitado a ser utilizado com dados numéricos. Diante disso, é importante se perguntar se ele também pode ser válido para dados textuais, como letras.

Assim sendo, neste trabalho, a proposta é verificar a ocorrência da lei de Newcomb-Benford em letras de livros famosos da literatura lusófonas os quais seriam: “Senhora” ([ALENCAR, 1994](#)), “Os sertões” ([DA CUNHA, 2021](#)), “Dom Casmurro” ([DE ASSIS, 2018](#)), “O cortiço” ([AZEVEDO, 1997](#)); “Memórias de um sargento de milícias” ([DE ALMEIDA, 2003](#)); “Memórias póstumas de Brás Cubas” ([DE ASSIS, 1998](#)), “Os lusíadas” ([CAMÕES, 1818](#)), “O primo Basílio” ([QUEIROZ, 2017](#)) e “Capitães da areia” ([AMADO, 2008](#)).

A escolha dessas obras deu-se devido ao grande número de páginas que possuem, obviamente contendo uma quantidade gigantesca de letras que poderiam ser usadas como amostras para uma pesquisa de caráter quantitativo, tornando, assim, mais preciso o processo de verificação.

METODOLOGIA

Primeiramente, foi feita uma busca sobre a disponibilidade em PDF das obras em questão. Após isso, essas obras foram copiadas e coladas no Word. Então, foi utilizada a ferramenta “localizar” do Word para identificar o número de ocorrências de cada uma das letras nas obras. As letras pesquisadas foram: a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m; n; o; p; q; r; s; t; u; v; w; x; y; z.

Com isso, foi feita uma porcentagem em cima da ocorrência de cada letra nessas obras e, em seguida, foi retirada uma média dessas porcentagens. Usando-se essa média no Excel, foi desenvolvida uma linha de tendência a partir desses dados.

Por último, comparou-se essa linha de tendência com a lei de Newcomb-Benford usando o Python.

RESULTADOS E DISCURSÕES

Usando a [tabela 1](#), pode-se verificar alguns achados de interessante. A primeira é que, contra o senso comum das pessoas lusófonas, nem todas as vogais são as letras mais utilizadas em um texto, como no caso do “i” e “u”. Outro achado interessante é que as letras “w”, “k” e “y” possuem aproximadamente 0% de presença nas obras analisadas.

Tabela 1. Porcentagem (%) de ocorrência da letra por obra literária

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
A	13.03	12.88	13.88	12.16	13.08	11.92	13.15	13.36	13.37
B	1.03	0.83	1.14	0.94	0.91	0.93	0.8	1.5	1.15
C	3	3.22	3.23	3.13	2.99	2.75	2.99	3	2.9
D	5.22	4.61	5.13	4.42	4.75	4.78	5.12	4.53	5.05
E	11	12.05	11.74	11.5	12.12	12.3	11.98	10.86	11.46
F	0.96	0.95	1.04	0.95	1	1.18	0.89	0.89	0.98
G	1.27	1.06	1.24	1.14	0.88	1.39	1.03	1.06	1.25
H	0.87	1.32	1.46	1.21	1.24	1	1.42	1.57	1.28
I	5.86	6.11	5.5	6.1	5.62	4.86	5.5	5.39	5.09
J	0.24	0.32	0.38	0.28	0.29	0.4	0.37	0.49	0.42
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	5.86	2.63	2.92	2.8	2.86	2.36	2.51	3.11	2.6
M	2.86	5.15	4.5	4.77	4.41	4.12	4.71	4.11	4.52
N	4.17	4.66	0	4.51	4.7	5.2	4.65	4.32	4.58
O	9.60	9.9	3.82	9.54	9.56	10.47	9.99	9.51	10.59
P	2.4	2.63	2.57	2.3	2.42	2.16	2.6	2.12	2.67
Q	0.74	1.4	2.2	1.16	1.19	1.59	1.39	0.97	1.18
R	6.75	5.98	7.7	5.87	6.39	6.53	6.18	6.01	6.66
S	8.55	7.81	7.06	7	7.46	8	7.04	7.18	6.87
T	4.64	4.09	4.1	4.03	3.9	4.63	4	3.98	3.8
U	3.21	4.64	4.42	4.48	4.47	4.09	4.34	4.43	4.31
V	1.61	1.66	1.68	1.66	1.61	1.65	1.62	1.69	1.68
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X	0.26	0.28	0.25	0.32	0.36	0.14	0.18	0.22	0.2
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02
Z	0.31	0.44	0.48	0.41	0.4	0.35	0.47	0.49	0.49

Tabela 2. Identificação de cada obra usada

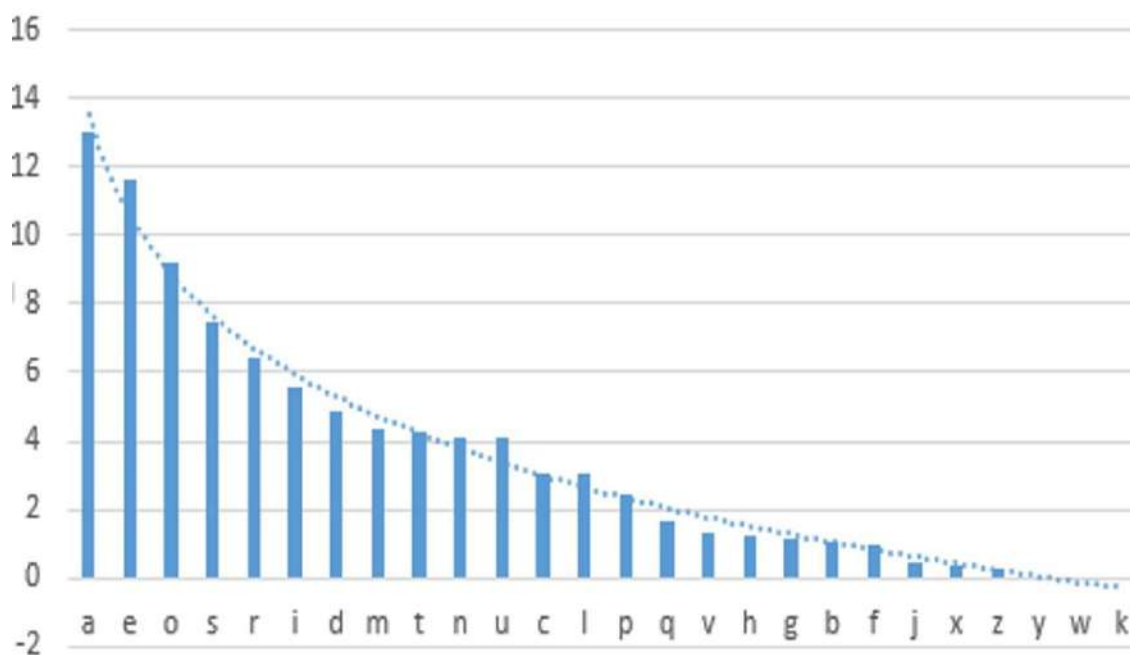
Identificação	Obra
I	Os sertões
II	Dom Casmurro
III	O cortiço
IV	Memórias póstumas de Brás Cubas
V	Senhora
VI	Os lusíadas
VII	Memórias de um sargento de milícias

VIII	O primo Basílio
IX	Capitães da areia

A [figura 1](#) demonstra que a média da porcentagem de ocorrência de cada letra possui um comportamento logaritmo, o que é um bom indicio de que a lei de Newcomb-Benford pode ter alguma relação com as letras de textos. O tal comportamento logaritmo se apresenta na linha de tendência da mesma figura produzida no Excel, na forma da [equação 2](#):

$$y = -4,252 \cdot \ln(x) + 13,558 \quad (2)$$

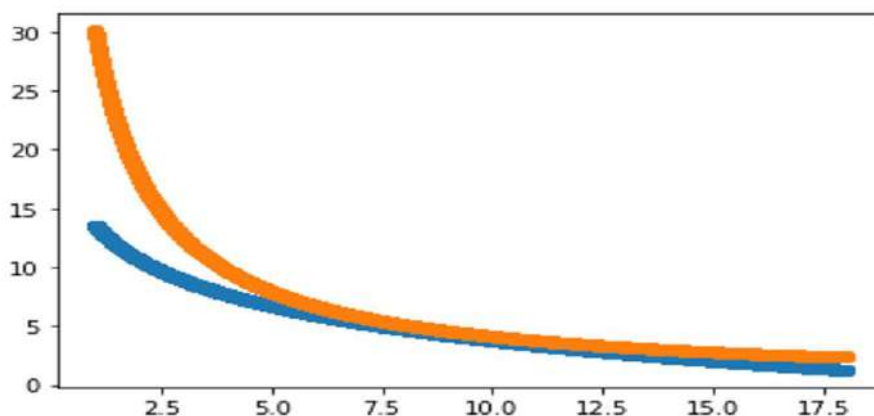
Figura 1. Média da porcentagem (%) de ocorrência por letra



Observando a [figura 2](#), podemos concluir que a [equação 2](#) tem um comportamento bastante parecido com a [equação 1](#), principalmente quando analisamos o seguinte intervalo:

$$6 \leq x \leq 12$$

Figura 2. Comparação gráfica entre a equação 1 (laranja) e a equação 2 (azul)



CONCLUSÕES

Em relação à [figura 1](#), é importante salientar que esse uso mínimo de “w”, “k” e “y” apenas ocorre no âmbito da língua portuguesa, sendo necessária a replicação dessa metodologia para obras estadunidenses, inglesas, alemãs, entre outras.

A replicação dessa metodologia em obras literárias de outras línguas também se faz necessária para verificar se a [equação 2](#) ou a distribuição da [figura 1](#) se repete. Caso ocorra uma repetição, então se pode, num futuro próximo, ajustar de forma mais precisa a lei de Newcomb-Benford para uma melhor análise da frequência de aparecimento de letras.

Tais análises podem fomentar novas formas de firmar ou não a veracidade de dados utilizados no âmbito empresarial, científico, político, entre outros. Além disso, podem existir novas perspectivas do uso da lei de Newcomb-Benford, principalmente na área das ciências relacionadas a linguagens e códigos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, J. **Senhora**. São Paulo: Spicione, 1994. Disponível em: <https://bds.unb.br/handle/123456789/587>. Acesso em: 22 fev. 2022.

AMADO, Jorge. **Capitães da areia**. São Paulo: Companhia das Letras, 2008. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=FDJ1_r4MCIEC&oi=fnd&pg=PT5&dq=capit%C3%A3es+da+areia+pdf&ots=BBHT0mYsxZ&sig=Fb2o_szyYn2UaZUNdadFypOqhkY#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 22 fev. 2022.

ASHCROFT, P.; BAE, B.; NORVELL, J. Application of digital analysis in the audit. **Today's CPA**, v. 5, p. 1-16, 2002. Disponível em: <https://www.csub.edu/~bbae/publication/digital%20analysis%20in%20audit.todays%20cpa%202002.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2022.

AZEVEDO, Aluísio. O cortiço. 30. ed. São Paulo: Ática, 1997. (Bom Livro). Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=2018. Acesso em: 22 fev. 2016.

CAMÕES, Luís Vaz. **Os Lusíadas**: poema épico. Didot, 1818. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=ZFRUAAAacAAJ&oi=fnd&pg=PP11&dq=os+lusiadas+pdf&ots=YIPuzcmgTM&sig=YjPRi3PZbdFv_ePuSJFZxbmP35s#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 22 fev. 2022.

CUNHA, F. C. R. **Aplicações da lei Newcomb-Benford à auditoria de obras públicas**. 2013. 485p. Dissertação (Mestrado em Regulação e Gestão de Negócios) – Universidade de Brasília, DF, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/16379>. Acesso em: 22 fev. 2022.

DA CUNHA, Euclides. **Os sertões**. Jandira: Principis, 2021. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=JNY7EAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT3&dq=os+sert%C3%B5es+pdf&ots=0L15KrfF9q&sig=FytzzYK2qpzILHUUbQoot8bCE0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 22 fev. 2022.

DE ALMEIDA, Manuel Antonio. **Memórias de um sargento de milícias**. São Paulo: Ateliê Editorial, 2003. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=G3f4399bVU0C&oi=fnd&pg=PA61&dq=Mem%C3%B3rias+de+um+Sargento+de+Mil%C3%A7arias+pdf&ots=7MNGamkAzs&sig=5j6tdDBzhy3SKD2HGQma2xZ_wLc#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 22 fev. 2022.

DE ASSIS, Machado. **Dom Casmurro**. Melhoramentos, 2018. Disponível em: São Paulo: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=Z6djDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT11&dq=dom+casmurro+pdf&ots=GvkvCbDlkt&sig=EbL10BWS054vKu5ibyYiNXvDz4#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 22 fev. 2022.

DE ASSIS, Machado. **Memórias póstumas de Brás Cubas**. Ateliê Editorial, 1998. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt->

[BR&lr=&id=VgNt7B1rDpYC&oi=fnd&pg=PA15&dq=mem%C3%B3rias+p%C3%B3stumas+de+br%C3%A1s+cubas+pdf&ots=9iv55AnEw6&sig=QRex9Pos-gN_XB9QJfl6xJkBL5o#v=onepage&q&f=false](#). Acesso em: 22 fev. 2022.

HUXLEY, S. J. **Why Benford's Law works and how to do digit analysis on spreadsheets**. São Francisco: University of San Francisco, 2001.

KUMAR, K.; BHATTACHARYA, S. Benford's law and its application in financial fraud detection. **Advances in Financial Planning and Forecasting**, v. 11, p. 57-70, 2002. Disponível em: <https://research.bond.edu.au/en/publications/benfords-law-and-its-application-in-financial-fraud-detection>. Acesso em: 22 fev. 2022..

PINKHAM, R. S. On the distribution of first significant digits. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 32, n. 4, p. 1223-1230, 1961. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2237922>. Acesso em: 22 fev. 2022.

QUEIROZ, E. **O primo Basílio**. Brasília: Domínio Público, 2017. Disponível em: <https://bds.unb.br/handle/123456789/953>. Acesso em: 22 fev. 2022.



VERIFICAÇÃO DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES MATEMÁTICAS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO NA CIDADE DE RIO LARGO

Pontes, Edel Alexandre Silva, edel.pontes@ifal.edu.br¹
Silva, Bruno Henrique Macêdo dos Santos, bruno.silva@im.ufal.br²
De Oliveira, Elinelson Gomes, elielson.olivera@ifal.edu.br³
Amorim, Helloyne Roberta Eloi Moura, helloyne@hotmail.com⁴
Bastos, Tamara Moraes, tamara.bastos@ifal.edu.br⁵
Lira, Lidianne Leite e, lidianne.lira@ifal.edu.br⁶

¹Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

²Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

³Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

⁴Instituto Federal de Alagoas Campus Maceió

⁵Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

⁶Instituto Federal de Alagoas Campus Rio Largo

Resumo: *A escola deverá, cada vez mais, lançar técnicas que privilegiem, não só a aprendizagem de conteúdos, mas também a aprendizagem de estratégias de adequação a situações novas. Conhecer as habilidades matemáticas dos indivíduos é de fato uma tarefa primordial para chegarmos a uma educação pautada no conhecimento científico estabelecido como fundamental para o progresso da humanidade. A escolha do tema fundamenta-se, exatamente, na investigação e avaliação do desempenho intelectual – habilidades matemáticas - dos estudantes do ensino médio de uma escola pública na cidade de Rio Largo, e a relação desse desempenho com as suas características sociodemográficas. Metodologicamente, foram selecionados 30 estudantes do primeiro ano do ensino médio para o estudo de campo. Foi aplicado um questionário sociodemográfico, com questões abertas e fechadas, pois através desse instrumento pode-se traçar o perfil dos estudantes envolvidos. O software SPSS e a planilha do Excel foram utilizados para tabulação, análise dos dados e tomada de decisão. Espera-se apresentar para a comunidade científica um trabalho, por intermédio das habilidades numérica, espacial e verbal, que vise dar uma resposta para o entendimento de um dos problemas que mais aflige a área de educação: a dificuldade na aprendizagem de matemática.*

Palavras-chave: *Habilidades Matemáticas; Raciocínio Lógico; Ensino Médio.*

INTRODUÇÃO

O mundo contemporâneo caracteriza por crescentes e rápidas alterações, quando a todo o momento aparecem situações que é preciso analisar, interpretar, resolver e tomar decisões eficientes e objetivas. A sociedade busca pessoas com grande capacidade de adaptação, aptas a aprender novas técnicas, capazes de formular problemas decorrentes de situações com que se deparem e de resolvê-los com habilidade, ou seja, indivíduos que pensam de uma forma versátil, crítica, eficaz e criativa.

Diversos estudos são realizados em Educação Matemática e Psicologia com vistas a compreender e medir as habilidades matemáticas de estudantes do ensino médio. Segundo Pontes (2019), na situação educacional atual,

com uma sociedade modificável, é indispensável total e incondicional ajustamento das escolas aos novos modelos de tecnologia, de maneira que o aluno aprendiz permaneça motivado e curioso na escola que convive. É necessário repensar no modelo atual de ensino, de forma que o aluno seja o centro de todo o modelo educacional, de modo a apreciar suas habilidades, criatividade, intuição e autoconhecimento.

Neumann Garcia (1995) resumiu as características das habilidades matemáticas da seguinte forma: as habilidades são específicas (são habilidades para uma determinada classe de atividades). A habilidade é um conceito dinâmico (desenvolvem-se durante a realização da atividade adequada). As habilidades são transitórias ou provisórias. O progresso e o sucesso na execução de uma atividade dependem de um complexo de habilidades e não de uma habilidade tomada isoladamente. Um alto desempenho em uma atividade pode ser produzido por diferentes combinações de habilidades. Uma deficiência em uma habilidade pode ser compensada por outra habilidade (é possível obter um desempenho excepcional mesmo que o indivíduo apresente fraquezas ou deficiências em relação a alguma habilidade).

Talizina (1985) afirma que não pode haver conhecimento sem habilidade, sem o saber-fazer. O conhecimento não pode ser separado do saber-fazer, porque sempre saber é saber fazer alguma coisa. Para Rodrigues, Carnelli e Formica (2005) representar, comparar, resolver, estimar, operar, selecionar, argumentar, reconhecer estruturas, aproximar, calcular, raciocinar, simbolizar e justificar representam habilidades matemáticas, o saber-fazer. A escola deverá, cada vez mais, lançar técnicas que privilegiem, não só a aprendizagem de conteúdos, mas também a aprendizagem de estratégias de adequação a situações novas. Conhecer as habilidades matemáticas dos indivíduos é de fato uma tarefa primordial para chegarmos a uma educação pautada no conhecimento científico estabelecido como fundamental para o progresso da humanidade.

A escolha do tema fundamenta-se, exatamente, na investigação e avaliação do desempenho intelectual – habilidades matemáticas - dos estudantes do ensino médio de uma escola pública na cidade de Rio Largo, e a relação desse desempenho com as suas características sociodemográficas. Este trabalho tem como objetivo testar a capacidade cognitiva dos estudantes utilizando diversos tipos de problemas que exijam aptidões distintas, como também utilizar para diferentes tarefas a inteligência geral e as habilidades específicas.

METODOLOGIA

Esta investigação foi desenvolvida por meio de um estudo comparativo de aspectos quantitativo e qualitativo. Foram selecionados, aleatoriamente, 30 estudantes do primeiro ano de ensino médio de uma escola pública na cidade de Rio Largo para o estudo de campo. Foi aplicado um questionário sociodemográfico, com questões abertas e fechadas, pois através desse instrumento pode-se traçar o perfil dos estudantes envolvidos. As variáveis envolvidas foram: sexo, idade, se gosta de matemática, a importância da matemática para sua vida, disciplina que mais gosta, disciplina que menos gosta, como gostaria de aprender matemática e o grau de motivação para estudar matemática. Um teste de Habilidades matemáticas foi aplicado, no intuito de medir as habilidades verbal, numérica e espacial dos estudantes. O teste é composto de 15 questões subdividido em três habilidades matemáticas: numérica, espacial e verbal. Foi utilizado o software SPSS e a planilha do Excel, para tabulação, análise dos dados e tomada de decisão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é uma ciência da natureza e por ter característica abstrata e de linguagem complexa faz-se dela uma referência de mais alta ordem para a compreensão dos fenômenos e efeitos do universo e do processo de construção do conhecimento. Diversas pesquisas são realizadas em Educação Matemática para identificar o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes da Educação Básica. Várias propostas são apontadas como soluções efetivas e funcionais para compreender esse problema educacional crônico.

Acredita-se que projetos dessa natureza possam contribuir para que a escola encontre meios de minimizar as defasagens entre a prática pedagógica de ensinar matemática e as habilidades matemáticas dos alunos envolvidos.

REFERÊNCIAS

LORENA, Angela Bernardo de; CASTRO-CANEGUIM, Janaina de Fátima; CARMO, João dos Santos. Habilidades numéricas básicas: Algumas contribuições da análise do comportamento. Estudos de Psicologia (Natal), v. 18, n. 3, p. 439-446, 2013.

NEUMANN GARCIA, V. J. N. (1995). Um estudo Exploratório sobre as Relações entre o Conceito de Automatismo da Teoria do Processamento de Informações de Sternberg e o Conceito de Pensamento

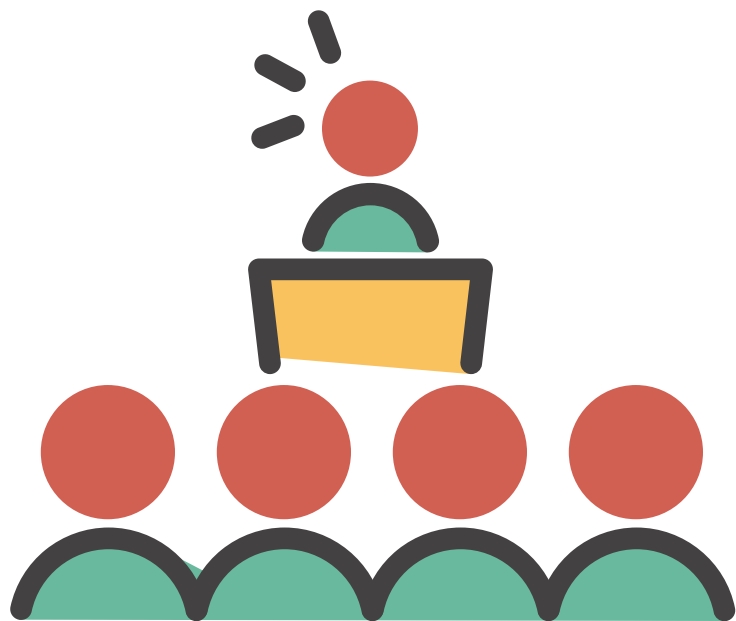
Resumido na Teoria das Habilidades Matemáticas de Krutetskii. Campinas, SP: Dissertação de Mestrado: FE/UNICAMP.

PONTES, E. A. S. et al. Abordagens Imprescindíveis no Ensino Contextualizado de Matemática nas Séries Iniciais da Educação Básica. RACE-Revista da Administração, v. 1, p. 3-15, 2018.

PONTES, E. A. S. A Capacidade de Gerar Soluções Eficientes e Adequadas no Processo Ensino e Aprendizagem de Matemática. Revista Psicologia & Saberes, v.8, n. 10, p. 193-205, 2019.

RODRÍGUEZ, Mabel; CARNELLI, Gustavo; FORMICA, Alberto. Una evaluación de habilidades matemáticas. Revista SUMA (48), p. 33-43, 2005.

TALIZINA, N. Conferencias sobre Los fundamentos de la enseñanza superior, Dpto. de Estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior, Universidad de La Habana, Cuba, 1985.



Comunicações Orais



A IMPORTÂNCIA DO LABORATÓRIO PEDAGÓGICO PARA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

LÍDIA ALVES, NATHANE LIMA E MARLY NUNES

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. **PREFÁCIO**
2. **INTRODUÇÃO**
3. **OBJETIVO**
4. **2.1 OBJETIVO GERAL**
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS
5. **RECURSOS METODOLÓGICOS**
6. **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

PREFÁCIO

Este trabalho mostra a importância do Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática, do campus de Bragança da Universidade Federal do Pará, destacando a aprendizagem matemática e o quanto está contribuindo para a formação acadêmica de seus discentes, trabalhando a ludicidade e outras ferramentas para o ensino e aprendizagem dos graduandos em matemática e que esta forma de ensino não seja limitada apenas ao ambiente acadêmico.

INTRODUÇÃO

Para muitas pessoas a aprendizagem matemática ainda é um obstáculo a se superar, seja no ensino básico ou superior, muito dos conceitos matemáticos ainda são considerados abstratos demais, porém uma forma de suavizar esses conceitos matemáticos se dá através do lúdico. Nesse ínterim, este trabalho visa apresentar a relevância e eficácia do laboratório na matemática. Brodin (1978, p.10) destaca que o laboratório: “... é o elo que falta entre o mundo abstrato dos pensamentos e idéias o mundo concreto das realidades físicas. O papel do laboratório é, portanto, o de conectar dois mundos, o da teoria e o da prática”.

Além disso, Porto (2006, p.22), apresentando as ideias de Kant diz que: “O ensino deve ser, ao mesmo tempo, prático e reflexivo, ou seja, o estudante deve ser levado a refletir sobre a atividade que esteja realizando”.

Logo, o ensino atrelado a prática é imprescindível para a absorção de conhecimento. Observando que a Matemática é uma ciência temida e compreendida pela sociedade, o trabalho em questão é fundamental para que o aluno tenha a percepção de que a matemática pode ser entendida através da diversão, amenizando a imagem negativa adquirida ao longo da vida estudantil.

As dificuldades e percepções negativas perduram do ensino básico ao superior. Percebemos as dificuldades dos graduandos através dos altos índices de reprovação e da evasão nos cursos de matemática. Diante disso, percebemos a importância de um laboratório pedagógico para aprendizagem que com sua dinâmica trará estímulo e motivação os discentes.

Para contribuir com o ensino e aprendizagem da matemática, contemplando professores e alunos através da vinculação teoria e prática, implementou-se um laboratório de matemática denominado LAPINMAT cujo objetivo pedagógico é elaborar e construir objetos e/ou jogos matemáticos cuja teoria esteja voltada para algum conteúdo da graduação, além disso valoriza experiência que contempla a física e a matemática. Já o objetivo tecnológico seria o 2 de fornecer, através do laboratório de informática, uma ferramenta tecnológica com a utilização de softwares (GeoGebra, Texstudio, Matlab, Maple) que valorizem o ensino e aprendizagem da matemática.

Até o presente momento, o laboratório pedagógico criou 11 objetos dentre eles, alguns jogos. Ressaltamos o baralho do cálculo e o dominó dos restos e o carteadado da divisibilidade e congruência, contemplando disciplinas como cálculos diferenciais e integrais, e a teoria dos números.

Em contra partida, devido a ausência de recursos financeiros e estrutura, o laboratório de informática ainda se encontra na fase de planejamento. Porém, no ambiente pedagógico, disponhamos de sete computadores disponíveis para o uso dos discentes, cujos programas instalados são, textudios, winplot, Geogebra, wingeon como recurso.

Segundo D' Ambrósio (1993, p. 7):

“Não poderíamos simplesmente falar em Educação Matemática como o estudo e o desenvolvimento de técnicas ou modos mais eficientes de se ensinar Matemática? Ou como estudos de ensino e aprendizagem da Matemática? Ou como metodologia de seu ensino no sentido amplo? Claro, não se pode negar que a Educação Matemática aborda todos esses e inúmeros outros desafios da Educação e, portanto, é tudo isso.”

Dessa maneira, além de considerar os materiais produzidos e os equipamentos dispostos no laboratório, entendemos que a educação matemática consiste, também, em inovar com técnicas eficazes para o ensino e buscar métodos a fim de elucidar conceitos matemáticos e assim contribuir na aprendizagem matemática de alunos do ensino fundamental, médio e graduação.

Diante disso, ressaltamos que é possível reinventar o processo de ensino. O Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática busca métodos de elucidar conceitos matemáticos e trazer para a comunidade acadêmica meios que contribuam para o ensino e aprendizagem de conteúdos ensinados durante graduação. Sendo assim, buscamos desenvolver jogos e ferramentas para serem usadas durante as aulas, mas que não se limitassem ao ambiente

OBJETIVO

2.1 OBJETIVO GERAL

Criar um diálogo entre conhecimento teórico e um instrumento de trabalho e pesquisa dinâmico através da elaboração e criação de materiais pedagógicos, proporcionando novos instrumentos, em a tecnologia (softwares) e outras tendências da Educação Matemática.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar o laboratório pedagógico de informática (LAPINMAT) como um espaço imprescindível que vise promover o desenvolvimento de estudos, pesquisa e produção científica na área da matemática e áreas afins;
- Elaborar estratégias que viabilizam a criação de objetos e/ou jogos matemáticos;
- Estimular os docentes a utilizarem recursos didáticos em suas aulas, de modo a promover um ensino diferenciado e dinâmico;
- Motivar os alunos através dos objetivos e softwares matemáticos, contemplando uma aprendizagem significativa.

RECUSOS METODOLOGICOS

O Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAPINMAT) foi elaborado e planejado de modo a possibilitar trabalho dos conteúdos matemáticos de forma interativo, permitindo que professores e alunos possam conjectura, experimentar, concluir e aprender a aprender, promovendo articulação entre teoria e a prática. Sendo assim, vamos elencar alguns dos objetos e/ou jogos que foram pensados, discutidos e confeccionados pelos alunos (voluntários) do laboratório.

Dominó dos Restos Disciplina contemplada: Teoria dos Números

Descrição: O jogo dispõe de 36 peças, no formato similar ao do dominó tradicional, contendo nas peças carrões os restos que variam de 0 a 7, nas peças restantes contendo a divisibilidade e as congruências modulares.

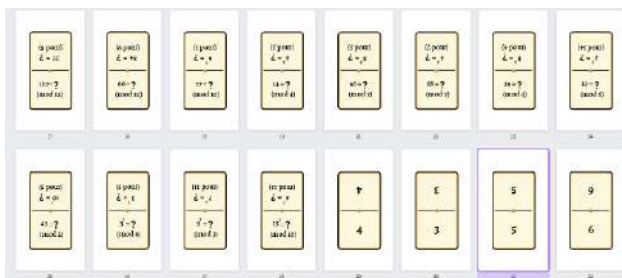


Figura 1: Dominó dos Resto

Baralho do Cálculo

Disciplina contemplada: Cálculo diferencial e integral I

Descrição: utiliza-se 2 baralhos compostos por 56 cartas, com 6 naipes de 9 cartas cada e 2 cartas coringas.



FIGURA 2: Baralho do Cálculo

Bingo das Geometrias

Disciplinas contempladas: Geometria Plana, Espacial e Analítica

Descrição: 10 cartelas e 58 pedras (26 planas, 14 espaciais e 18 analíticas).

BINGO DAS GEOMETRIAS				
Geometria Plana	Geometria Plana	Geometria Espacial	Geometria Espacial	Geometria Analítica
$s(a) + s(b) + s(c) + s(d)$	$A = \frac{Dd}{2}$	l^2	$\frac{\pi r^2 h}{3}$	$y - y_0 = m(x - x_0)$
$a^2 + b^2 = c^2$	$A = \pi r^2$	$a \cdot b \cdot c$	$ \sqrt{3} $	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
l^2	$s(a) + s(b) + s(c) + s(d) + s(e)$	π	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$
$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$	$C = 2\pi r$	$\pi r^2 h$	$a \cap \beta = \emptyset$	$d_p = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
$A = \frac{(B + b)h}{2}$	$4l$	$\frac{4\pi r^3}{3}$	$\frac{l^2 h}{3}$	$\frac{x}{r} + \frac{z}{r} = 1$

FIGURA 3: Bingo das Geometria

Segue na tabela 1 alguns itens que se encontra no laboratório a disposição dos alunos e dos professores da graduação.

TABELA 1: Inventário do LAPINMAT

Item	Quantidade
Computadores	7
Quadro magnético	1
Impressora Multifuncional	1
Datashow	1
Tela para projeção	1
Baralho do cálculo	1
Torre de Hanói	2
Ábaco aberto com 5 hastes	2
Kit Geométrico do professor MDF e pinus com régua 1m	2
Sólidos Geométricos Acrílico 20pcs	1
Jogos de adição	1
Kit Esquadros e transferidor MDF do professor	2
Sólidos Geométricos confeccionados com palitos	1
Dominó matemático	2
Carteado da divisibilidade e congruência	1
Dominó dos restos	1
Bingo das geometrias	1
Tabuleiro de Galton	1

Na tabela acima também podemos encontrar mais alguns objetos, tais como Tabuleiro de Galton, a torre de Hanói e alguns sólidos geométricos ressaltamos ainda que a utilização de computadores, impressora, datashow e tela para projeção auxiliam a produção e pesquisa dos alunos da faculdade de matemática, favorecendo alunos que não possuem os materiais necessários para realizar suas atividades acadêmicas.



FIGURA 4: Materias didático-pedagógicos

RESULTADOS

Até o presente momento, o laboratório possibilitou aos discentes agregar conhecimento tanto nos temas matemáticos quanto na prática docente, voltada para a elaboração e confecção dos materiais. Além disso, o estímulo e a motivação de conectar a teoria com uma prática dinâmica. Em relação aos docentes disponibilizamos estes recursos a serem utilizados em sala de aula, e quanto aos discentes em geral, o laboratório é um suporte de ensino e aprendizagem.

CONCLUSÃO

Diante disto, a implantação de um laboratório em um campus universitário é imprescindível para incentivar a produtividade e criatividade de alunos acadêmicos, agregando assim conhecimento matemático, pedagógico, além de aprimorar o raciocínio lógico e os vínculos sociais. Os resultados também envolvem ter a oportunidade, através dos materiais produzidos, de compartilhar conhecimento e contribuir de forma significativa para mudar o cenário de reprovação e de rejeição da matemática em diferentes fases da vida estudantil. Levar para a sala de aula materiais que atraiam os alunos e os façam querer ir em busca do conhecimento deve ser visto por todos como fundamental e a falta de recursos para isso não pode ser um impedimento para o avanço de um aluno do ensino fundamental, médio ou superior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRODIN, G. The role of the laboratory in education of industrial physicists and electrical engineers, [S.I.: s.n.], 1978.
- [2] D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: uma visão do estudo da arte. Vol. 4. 1993.
- [3] PORTO, Leonardo Sartori. Filosofia da Educação. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2006.



**ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DE LIVROS DIDÁTICOS:
UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DE
MATEMÁTICA**

**EMILY DA COSTA MADEIRA, ÉRICA LETICIA DA SILVA
MADEIRA E FRANCO DEYVIS LIMA DE SENA**

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1 Introdução

2 A TAD

3 Descrição da análise

4 Considerações

Referências

INTRODUÇÃO

Evidencia-se que o presente recorte tem origem no desenvolvimento de um Trabalho de Conclusão de Curso, fruto de experiências vivenciadas no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA) - Campus X, no Grupo Colaborativo de Educação Matemática e Educação Afro-Brasileira (GCEM-EAB) e de estágios propiciados no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) e Residência Pedagógica. Nesses ambientes foram desenvolvidas diversas atividades a respeito da formação docente e oportunizado contato com objetos e teorias da Educação Matemática. De tal modo, após perpassar pela disciplina de Geometria Euclidiana e constituir afinidade com o objeto matemático estudado, considerou-se relevante investigar sobre esse conteúdo, sua importância e como ele está proposto nos livros didáticos destinados à educação básica.

Optou-se assim pela abordagem do 6º Ano do Ensino Fundamental, por se considerar pertinente a investigação de como esse tema é preparado/tratado em materiais didáticos destinados à alunos que estão transitando dos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º) para os anos finais (6º ao 9º). De mesmo modo, como afirma Lajolo [6], existe elevada relevância desses materiais em países como o Brasil devido suas condições educacionais, onde "uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina". Assim, esses materiais tornam-se recursos importantes para o professor.

Considerando esses aspectos e evidenciando novamente a afinidade ao estudo da Didática da Matemática, buscou-se uma teoria para fundamentar a

análise do conteúdo de Geometria Euclidiana presente no livro didático utilizado na escola onde fora proporcionado estágio da Residência Pedagógica. Adotou-se assim a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard [3], especificamente a Análise Praxeológica, por tratar-se de uma perspectiva teórica e metodológica que permite uma forma sistemática de análise ao observar as praxeologias de Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD).

Pontua-se também que após investigação sobre diferentes perspectivas de pensamento geométrico, optou-se pelo uso dos níveis de Pensamento Geométrico do modelo de van Hiele [9], pois, ponderou-se que essa perspectiva se encontrava em conformidade ao ano escolar que o livro analisado fora destinado.

Diante do que foi exposto, almejou-se responder: de que forma a Geometria Euclidiana está organizada no livro didático do 6^o Ano do Ensino Fundamental e como essa abordagem é verificada quanto ao desenvolvimento do Pensamento Geométrico? Para atingir esse objetivo, descreve-se de forma sucinta aspectos relativos a fundamentação teórica elencada, isto é, elementos fundamentais da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e, em seguida, os resultados obtidos após análise do livro selecionado e conclusão.

A TAD

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), usualmente utilizada como perspectiva teórica e/ou metodológica em pesquisas na área da Didática da Matemática, foi desenvolvida por Yves Chevallard desde meados da década de 1990 e pode ser entendida como uma evolução do conceito de transposição didática.

Para Almouloud [1] a investigação feita na TAD, o termo "praxeologia" vem do grego práxis+logos onde seus significados são respectivamente prática+razão e seu intuito é analisar as organizações praxeológicas. Essas praxeologias, também chamadas de organizações relacionadas a um determinado saber matemático, podem ser de duas espécies: matemáticas e didáticas, "as organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira como se faz essa construção".

Dessa forma, Santos [8] discorre que, para que se possa descrever e modelar o procedimento intencional do processo ensino e aprendizagem, em termos das praxeologias, que são compostas pelas organizações matemática (OM) e organizações didáticas (OD), Chevallard as divide em dois blocos: Práxis e Logos. O bloco Práxis é denominado de saber-fazer o qual se encarrega de investigar técnicas para resolver determinados tipos de tarefas; o bloco Logos é denominado apenas de saber o qual se encarrega de investigar as justificativas das técnicas que são as tecnologias e teorias.

Em suma, sobre os blocos práxis (saber-fazer) e logos (saber), tem-se que para resolver um Tipo de tarefa (T) se faz necessária uma técnica (t), que necessita de uma tecnologia (θ) para justifica-la e essa tecnologia requer uma

justificativa ainda mais formal, denominada como teoria (Θ). Forma-se assim uma praxeologia $[T, t, \theta, \Theta]$.

Diante do exposto sobre as noções da TAD, especificamente das organizações praxeológicas, trona-se importante delinear as especificidades inerentes ao processo de análise das OM e OD.

As OM são relativas à realidade matemática que se pode construir para desenvolvê-la em sala de aula. Chevallard [3] expõem que essa praxeologia nasce da necessidade de resolver uma determinada tarefa matemática já bem definida, ou seja, refere-se à realização ou resolução de atividades matemáticas que são compostas por tipos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, e que em suma, são objetos matemáticos e a serem estudados/construídos. Diante disso, o professor ou pesquisador, no momento da análise de uma organização ou praxeologia matemática de um documento oficial, pode fazer uso dos critérios estabelecidos por Chevallard em relação à análise de tarefa, técnica, tecnologia e teoria para aprofundar a sua avaliação acerca dos objetos matemáticos em estudo.

Para Chevallard [3], uma OD, diferente da OM, não surge da necessidade de apenas resolver uma determinada tarefa matemática bem definida, mas sim de como está sendo construída ou realizada essa determinada tarefa. O autor ainda exemplifica que enquanto uma OM pede para somente resolver uma equação do 1º grau a OD se encarrega de estudar questões relacionadas a "como realizar o ensino da resolução de equação do 1º grau com uma incógnita".

De acordo com Almouloud [1], para fazer a análise de uma OD é preciso que "se conheça a teoria que sustenta o tema de estudo, visto que, como toda organização praxeológica, ela se articula em tipos de tarefas (geralmente cooperativas), em técnicas, em tecnologias e teorias". Essa organização, como descreve o autor, introduz a noção de momento, em que "os momentos didáticos são, primeiramente, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica".

Quando se tem a intenção de descrever uma OD em torno de um objeto matemático, há a existência de determinados tipos de momentos (ou momentos didáticos) que estão presentes nesse processo. Dessa forma, o autor propõe seis momentos didáticos para possibilitar a descrição de uma organização didática,

salientando que elas podem ocorrer de forma simultânea, uma vez que, não existe uma sequência definida para isso e podem que podem se repetir no decorrer da investigação. Ao investigar os momentos propostos por Chevallard [3], o docente ou pesquisador pode descrever uma OD com maior eficácia.

DESCRIÇÃO DA ANÁLISE

Para efeito de esclarecimento da análise efetuada, revela-se que se buscou analisar um livro didático que estivesse em uso nas escolas do município de Igarapé-Açu (PA), onde está situado o Campus X da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Assim, fora selecionada a coleção "A Conquista da Matemática" [5], todavia, dado o limite de tempo para execução e relato do presente trabalho, optou-se por analisar apenas a unidade 3, referente a Figuras Geométricas.

De início e para situar sobre a abordagem do objeto matemático frente aos critérios de análise e teoria adotada, considerou-se relevante para a construção da presente pesquisa o levantamento literário sobre trabalhos que abordam a temática, ou parte dela, o que propiciou delineamento de estudos e objetivos da pesquisa. A partir disso, discorreu-se sobre a relevância da Geometria Euclidiana na educação básica e o desenvolvimento de Pensamento Geométrico, observada a perspectiva do modelo de van Hiele que discorre sobre os níveis de Visualização ou Reconhecimento (nível 1), Análise (nível 2), Dedução Informal ou Abstração (nível 3), Dedução formal (nível 4) e Rigor (nível 5).

Buscou-se assim identificar como a geometria é abordada em documentos oficiais norteadores ao ensino fundamental brasileiro, como a Base Nacional Comum Curricular [2] e o Documento Curricular do Estado do Pará [7], que auxiliaram reflexão acerca das habilidades relativas ao objeto matemático. Em seguida, a partir da fundamentação teórica assumida, foram identificados 23 Tipos de tarefas, resolvidas a partir de 22 técnicas, justificadas por 19 tecnologias e somente 1 teoria, nesse caso a Geometria Euclidiana. Destaca-se, porém, que: na organização $*[T_6, t_5, \theta_5, \Theta_1]$ houve repetição da técnica e tecnologia

anterior abordadas para resolução do Tipo de tarefa proposto; Na organização $**[T_{10}, t_9, \theta_5, \Theta_1]$ e $[T_{10}, t_9, \theta_8, \Theta_1]$ ocorreu uso de duas tecnologias anteriormente abordadas para resolução por meio de uma nova técnica; e na $***[T_{14}, t_{13}, \theta_6, \Theta_1]$, $[T_{14}, t_{13}, \theta_9, \Theta_1]$ e $[T_{14}, t_{13}, \theta_{10}, \Theta_1]$, houve necessidade de uso de três tecnologias anteriormente abordadas que fundamentam uma nova técnica.

Sobre os níveis de Pensamento Geométrico requeridos nos Tipos de tarefas, foram identificados necessidade de mobilização de 4 níveis: 7 tipos de tarefa de nível 1; 7 tipos de tarefa com nível 2; 7 tipos de tarefa com nível 3; e 2 tipos de tarefa de nível 4. Concorde-se com Costa [4], ao expressar que nos primeiros níveis de pensamento (1 ao 3) não há necessidade de "[...] argumentos dedutivos que justifiquem as propriedades das figuras e que fundamentem as relações inferenciais entre essas singularidades geométricas" e somente leva-se a dedução no nível 4, em que foram encontrados apenas dois tipos de tarefas e pensamento hipotético-dedutivo no nível 5, não encontrado na análise. Apesar disso, considera-se que organização apresentou caráter relevante aos níveis de Pensamento Geométrico, uma vez que o público alvo é o 6^o Ano do Ensino Fundamental.

Ao que se refere a análise das OD, verificou-se que conteúdo e atividades são apresentados no livro de forma estruturada com foco no contexto de situações realísticas aos alunos e faz uso de uma linguagem acessível, ou seja, simples e compreensível. De forma sintética, a organização do livro segue uma ordem de apresentação de conteúdo seguido de atividade, os enunciados apresentam variedade de contextos e representações, distribuídos em nível crescente de complexidade.

CONSIDERAÇÕES

Destaca-se que em cada tópico da unidade do livro didático são dispostas orientações aos docentes, como formas de proceder com as atividades, de incentivo para organização dos alunos em equipes, para desenvolver percepção própria, formas de introduzir um novo conteúdo, alerta para possíveis dúvidas, entre outras perspectivas de orientação para desenvolvimento do conteúdo em sala de aula. Retomando aos níveis de Pensamento Geométrico na análise das OD, salienta-se que há necessidade de verificação das perspectivas levantadas na prática de fato utilizadas em sala de aula. Como relata Costa [4] sobre o modelo van Hiele, "[...] para o aluno avançar de um nível "menos elaborado" para um nível "mais elaborado" é imprescindível que ele passe por cinco fases de aprendizagem.

Apesar das orientações didáticas destinadas aos docentes poderem contribuir para organização de planos de ação em sala, e métodos para viabilizar que os alunos desenvolvam níveis mais complexos de pensamento geométrico, nota-se que a análise exclusiva do material impresso não permite verificação dos processos que permeiam o aprendizado dos alunos.

Em relação as tendências da educação matemática elencadas no material didático, houve apenas uma contextualização histórica que não necessariamente leva a caracteriza-la como uma tendência metodológica para o ensino do conteúdo, mas apenas um elemento pré-textual para uma breve localização histórica do objeto matemático, que não é trabalhado nas tarefas que o seguem. Salienta-se que não foram abordadas na unidade as tendências elencadas nas orientações iniciais aos professores, como Modelagem, Resolução de Problemas, Tecnologias e Comunicação, ou mesmo um trabalho que de fato

utilize a perspectiva da história da matemática.

Sobre as habilidades da BNCC [2] indicadas na unidade sobre Figuras Geométricas, verificou-se que são contempladas OM e OD suficientes para desenvolver a habilidade de "(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial" e possibilidade para "(EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas" [5]. Assim como das competências a que se propõe sobre a mobilização de "conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para que se possam resolver os desafios do cotidiano, dentro e fora dos espaços escolares" e "relacionadas a objetos de conhecimento que, por sua vez, são organizados em unidades temáticas" [5].

Pondera-se ainda que, embora não explorada, existe na unidade a abertura para desenvolvimento e institucionalização de habilidades para "(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais" [2].

Diante disso, considera-se que objetivo de pesquisa foi parcialmente alcançado, pois, fora apresentado por meio da análise praxeológica efetuada a forma como a Geometria Euclidiana é apresentada no 6^o Ano do Ensino Fundamental e da possibilidade de desenvolvimento do Pensamento Geométrico inerente as OD e OM analisadas. Vale, entretanto, revelar que é necessária uma análise de todas as unidades que tratam sobre o objeto matemático em uma coleção completa de livros didáticos para que de fato ocorra uma compreensão aprofundada de como a geometria é tratada na educação básica.

Ademais, a presente pesquisa pode contribuir para reflexões sobre a formação inicial e continuada de professores a partir da exposição da Teoria Antropológica do Didático, especialmente da análise praxeológica fundamentada com critérios bem delineados, para percepção das possibilidades e potencialidades dessa ferramenta para compreensão, reflexão e adaptação de atividades e abordagens para contribuir aos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALMOULOU, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Paraná: UFPR.
- [2] BRASIL. (2017). *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.
- [3] CHEVALLARD, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19, nº 2, pp. 221-266.
- [4] COSTA, A. P. (2019). *A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis*. Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- [5] JÚNIOR, J. R. G. e CASTRUCCI, B. (2018). *A conquista da matemática: 6º ano do ensino fundamental: anos finais*. 4 ed, São Paulo, Editora FTD.
- [6] LAJOLO, M. P. (1996). *Livro didático: um (quase) manual didático*. Brasília, p. 3-7.
- [7] PARÁ. (2019). *Documento Curricular do Estado do Pará: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. 2ª Edição revisada e publicada pela Secretaria de Estado de Educação do Pará.

- [8] SANTOS, S. P. (2020). *A teoria antropológica do didático: condições e restrições relevadas pelas teses e dissertações defendidas no Brasil na área da educação matemática*. Tese apresentada no programa de pós-graduação em ensino, filosofia e histórias das ciências, UFBA, Salvador.
- [9] VAN HIELE, P. M. (1999). *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*. Teaching Children Mathematics 6.



APLICAÇÕES DE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA

MODULAR: DO ENSINO BÁSICO AO SUPERIOR

**APLICAÇÕES DE DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA MODULAR: DO
ENSINO BÁSICO AO SUPERIOR**

OSÉAS GUIMARÃES, MARLY NUNES E EDILENE FARIAS

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. **Prefácio**
2. **Introdução**
3. **Referencial Teórico**
4. **Aplicações**
5. **Conclusão**
6. **Referências Bibliográficas**

PREFÁCIO

Este trabalho apresenta aplicações que serão resolvidas usando os critérios de divisibilidade e congruência modular, partindo das dificuldades encontradas nos alunos do ano final do ensino médio nos conteúdos do eixo Números do ensino fundamental II. Nosso objetivo ao explorar essas aplicações destacando as relações entre os critérios de divisibilidade e a congruência modular é o de solucionar essas dificuldades ainda no ensino fundamental, especificamente no 6º e 7º anos, dentro dos parâmetros da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de oferecer uma fonte de pesquisa para professores do ensino básico e que possa ser usada também no ensino superior. Usando uma pesquisa bibliográfica iniciamos nossa pesquisa com a fundamentação teórica acerca do conjunto dos números inteiros e definimos divisão euclidiana explorando os principais critérios de divisibilidade, evidenciando o seu uso nas equações diofantinas e a sua relação com a congruência modular. Obtendo como resultado oito aplicações que foram tratadas usando as duas linguagens de maneira que possibilite a criação de alternativas didáticas que relacionem os conteúdos aritméticos e algébricos nos dois ciclos de ensino. As aplicações sugeridas convergem para uma abordagem que relaciona os conteúdos de divisibilidade e congruência modular em situações práticas que reforçam as necessidades de uma atenção a esses assuntos para a formação matemática.

BRAGANÇA, JUNHO de 2022

Oséas Guimarães

Marly Nunes

Edilene Farias

INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos adotar a Teoria Elementar dos números, com ênfase aos processos de divisibilidade e de congruência modular, uma vez que são esses os conhecimentos apresentados aos alunos no início do ciclo fundamental II, 6º e 7º anos, eles irão servir de base para as outras áreas e séries subsequentes da matemática, isto é, esses conhecimentos compõem a matemática necessária e indispensável para qualquer cidadão.

Ao longo de quinze anos trabalhando com pré-vestibular, sempre encontrei muitos alunos com grandes dificuldades nos processos de divisão e na transposição da linguagem verbal para a simbólica exigida em exames como o Enem. Esses entraves me incomodavam, pois me questionava, como um aluno que vai realizar o vestibular não sabe executar uma divisão com resto, fazer uma simplificação, organizar uma equação de duas variáveis ou diferenciar um MMC de um MDC? Com o tempo criei estratégias metodológicas para atenuar esses problemas, promovendo oficinas de matemática básica, onde revisava os conteúdos do ensino fundamental II, com ênfase nos conteúdos de 6º e 7º anos.

Em 2019 entrei para o quadro de professores da rede pública do Estado do Pará, foi nesse momento que tive o meu primeiro contato com o ciclo do fundamental II, permitindo assim observar e vivenciar os problemas encontrados no ensino médio e nas turmas de pré-vestibular. No mesmo ano, passei para o mestrado PROFMAT, outra experiência transformadora na minha vida, pois era a oportunidade de verificar se aqueles problemas que enfrentávamos com os alunos no ciclo básico poderiam proporcionar alternativas no ensino superior.

Diante de tais experiências foi natural então nos perguntarmos:

De que forma é possível minimizar as dificuldades de divisibilidade e de transposição de linguagens no Ensino Médio ainda no fundamental com o uso de aplicações dos critérios de divisibilidade e de congruência modular?

É possível fazer uma relação através dessas aplicações entre os critérios de divisibilidade e congruência modular no ensino superior?

A experiência que estava tendo como docente do ciclo básico e discente na pós-graduação se tornou uma oportunidade para entender, refletir e preparar alternativas que viessem de encontro a essa problemática. Nesse momento percebemos que os critérios de divisibilidade eram a peça central nesse procedimento, pois além de dinamizar a divisão, também possibilitava a resolução de equações diofantinas, oferecendo um entendimento prático e contextualizado das congruências modulares.

2

REFERENCIAL TEÓRICO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 distribui os conteúdos de Matemática em 5 unidades temáticas; Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. O foco do nosso trabalho está na unidade Números, uma vez que praticamente todos os conteúdos de Aritmética neste ciclo de ensino se concentram nessa unidade.

“A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.” (BRASIL, BNCC, 2018. p.270)

Nessa estrutura curricular, a construção da ideia de números, suas propriedades e operações são abordadas dentro de uma visão de progressão vertical em torno dos objetos de conhecimento e habilidades apresentadas ao longo dos eixos, de forma que as construções e procedimentos acerca dos conceitos sejam conectados e ampliados ao longo de todo o processo. Dessa forma, para o eixo dos Números, espera-se que o aluno ao concluir os anos finais do ensino fundamental, tenha domínio e clareza sobre esse eixo de conhecimento, mas na prática a realidade tem sido outra.

“Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante no currículo do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final dessa fase de formação, com um conhecimento insuficiente sobre como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações.” (BRASIL, 1998, p.95)

No entanto, dentro do contexto escolar o que se percebe é uma abordagem do eixo de Números voltada principalmente para a resolução de algoritmos, com escassa ênfase ao olhar qualitativo, investigativo e associativo em torno das propriedades que os envolvem. É no 6º ano, que assuntos importantes da Aritmética, tais como múltiplos, divisores, divisão euclidiana e critérios de divisibilidade são apresentados, sendo no 7º ano ampliados com o mmc, o mdc, módulo, potenciação e radiciação de um número inteiro, porém o que se verifica na prática é que essa apresentação está voltada apenas a exposição simples de um conjunto de regras e cálculos desconectados de situações cotidianas, concretas, não proporcionando ao aluno percepções de implicações gerais que seus conceitos e ideias podem proporcionar.

Sendo assim, algumas das relações mais significativas no conjunto dos números inteiros, em torno das operações e validações de propriedades numéricas, são praticamente inexploradas no contexto regular da sala de aula. Um exemplo pode ser encontrado na operação de divisão euclidiana, pois não se observa a exploração sobre a condição de existência e unicidade do quociente e do resto em caráter associativo a outras ideias aritméticas, como o papel do quociente numa sequência de múltiplos e divisores de um número inteiro ou mesmo o comportamento cíclico dos restos. A abordagem do sistema de numeração decimal configura outro exemplo, uma vez que tal conteúdo acaba se restringindo ao reconhecimento de ordens e classes numéricas e ao valor posicional de um algarismo, sem qualquer vinculação ou exploração de seu uso no entendimento de relações de igualdade, equivalência e propriedades relacionadas as operações básicas.

Ampliando o nosso olhar sobre os aspectos aritméticos, temos a oportunidade de uma reflexão sobre a abordagem desses assuntos no ambiente escolar e acadêmico, pois a partir de uma pesquisa de natureza aplicada, com uma abordagem qualitativa, utilizando procedimentos técnicos de análise bibliográfica e documental, realizada no primeiro momento no 6º e 7º anos do ensino fundamental e posteriormente na pós-graduação, podemos contribuir na elaboração de hipóteses, comparações e formulações mais abrangentes na utilização dos números e suas construções. Essas implicações convergem para uma preocupação concreta sobre o ensino da matemática, no que se configura uma abordagem fragmentado e independente dos tópicos presentes no eixo Números do currículo. Com essa abordagem verifica-se a causa de uma série de paradigmas e insucessos relacionados ao interesse e aprendizagem matemática. Portanto, neste trabalho usamos aplicações que possibilitam uma relação entre essas formas de registro, no sentido de que

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir a possibilidade de passar de um registro a outro. (DUVAL, 2003, p. 14-15)

Sob outra perspectiva, a abstração do raciocínio hipotético, a transposição da linguagem verbal para a simbólica, própria da matemática, as transformações de padrões percebidos em generalizações, a comparação entre grandezas, são bases para o tratamento e aprendizado algébrico. Desse modo, para que se possa sair de casos particulares e conseguir observar e estabelecer algumas relações, tais como a de igualdade ou de equivalência, de modo a manipular operações e propriedades numéricas para que se possa formular uma ideia geral, é necessário que se conheça, domine, entenda e aplique com segurança conceitos já estabelecidos, isto é, necessita-se que a relação entre os conhecimentos aritméticos resulte de forma associativa e contínua na construção da base algébrica, pois é nesse campos que se encontram as equações diofantinas, também foco deste trabalho.

Segundo (BRASIL, 2017), o eixo Álgebra presente no currículo de matemática, tem como finalidade a construção do pensamento algébrico e ressalta o caráter contributivo e relacional do eixo de Números nessa construção. Como afirma (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 159) “devemos buscar é a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada na outra”.

Nessa lógica, compreende-se que a abordagem aplicada em alguns tópicos da Teoria dos Números, presentes no currículo de Matemática, pode ser vista como uma ferramenta de alto poder construtivo no processo de transição sem rupturas, entre a Aritmética e a Álgebra. Com isso, também se interfere diretamente em questões como o resultado no processo de ensino aprendido, pois segundo (GIL, 2008.118f) a relação entre Aritmética e a Álgebra pode também justificar as dificuldades apresentadas pelos alunos no aprendizado de matemática. Ainda acrescenta que, em observação e reflexão sobre a introdução e tratamento aplicado ao ensino de Álgebra, percebe-se que alguns dos procedimentos algébricos escolhidos são contraditórios ou diferentes aos aritméticos dos quais os alunos estavam acostumados, esse cenário acentua-se ao fato dos alunos muitas vezes acumularem e carregarem para as situações de aprendizado atual, dificuldades herdadas em contextos aritméticos anteriores.

Assim, percebemos que mediante esse olhar diferenciado e reflexivo sobre alguns conteúdos e processos aritméticos, em especial, divisibilidade e congruência modular, estamos atendendo a uma demanda significativa do ensino da matemática, promovendo tanto uma melhor percepção e domínio das bases aritméticas, quanto a construção de uma linearidade direta e

associativa ao uso algébrico, conseqüentemente, ampliando os subsídios para o alcance das competências do currículo de Matemática do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, especificados na BNCC.

3

APLICAÇÕES

Aplicação 01. Divisão Euclidiana

Cinco amigas ganham um pacote de balas e começam a dividir: Uma para Alice, uma para Bia, uma para Carla, uma para Dani e uma para Ester; novamente uma para Alice, uma para Bia, uma para Carla, uma para Dani e uma para Ester; e assim por diante até que termine as 1.786 balas que haviam no pacote. Qual das cinco meninas recebeu a última bala?

Solução.

Note que como a quantidade de balas é muito elevada, continuar a distribuição até que se chegue no número 1.786 não é recomendado. Perceba também que a quantidade de amigas que irá dividir as balas é cinco, portanto, vamos analisar essa situação usando apenas o critério de divisibilidade do 5, isto é, uma congruência módulo 5. Para que um número seja divisível por 5, o algarismo das unidades deve ser zero ou cinco, e como o algarismo das unidades na aplicação proposta é o 6, significa dizer que estamos uma unidade a mais de um ciclo completo, logo quem receberá a última bala será a mesma pessoa que recebeu a primeira, portanto, a Alice. Podemos também usar tabelas ou mesmo uma figura para ajudar na resolução da questão e ao fazermos uso desses mecanismos estamos utilizando as ferramentas de congruência modular. Além disso, o uso da tabela e da figura ampliam os horizontes de aplicabilidade dos critérios de divisibilidade e da própria congruência.

Tabela 01 – Distribuição da Quantidade de Balas

Alice	1	6	11	16	...	1781	1786
Bia	2	7	12	17	...	1782	
Carla	3	8	13	18	...	1783	
Dani	4	9	14	19	...	1784	
Ester	5	10	15	20	...	1785	

COMUNICAÇÕES ORAIS

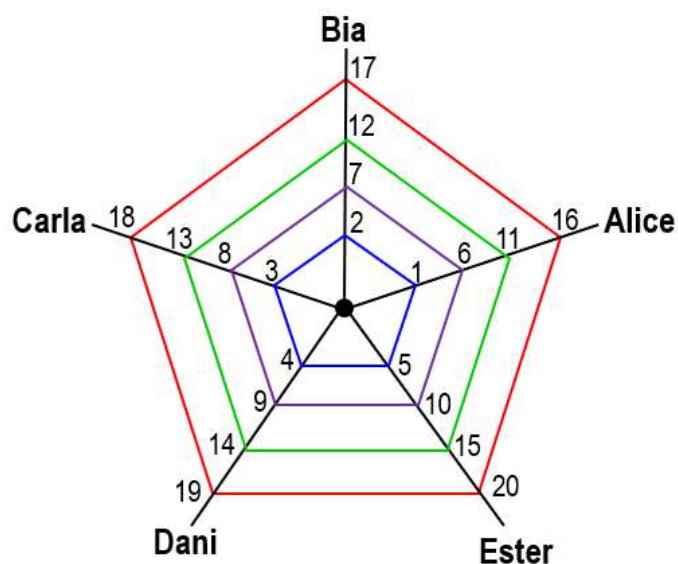
Tabela 02 – Generalização da Quantidade de Balas distribuídas

Alice	Bia	Carla	Dani	Ester
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$5q + 1$	$5q + 2$	$5q + 3$	$5q + 4$	$5q$

Fonte: O Próprio Autor

Ao analisar as tabelas o aluno irá observar que por maior que seja a quantidade de balas N , ele só precisará trabalhar com o algarismo das unidades, assim ele notará que se o número tiver 1 ou 6 como último algarismo, quem receberá a última bala será a Alice, isto é, $6 \equiv 1 \equiv 1 \pmod{5}$. Se o algarismo das unidades fosse o 2 ou 7, quem receberia a última bala seria a Bia, $7 \equiv 2 \equiv 2 \pmod{5}$, se fosse 3 ou 8, seria a Carla, $8 \equiv 3 \equiv 3 \pmod{5}$, se fosse 4 ou 9, seria a Dani, $9 \equiv 4 \equiv 4 \pmod{5}$ e finalmente, se o número tiver como algarismo das unidades o 0 ou 5, a última bala é da menina Ester, $5 \equiv 0 \equiv 0 \pmod{5}$. Nota-se também que a tabela 05, permite uma generalização, que valerá para qualquer quantidade N de balas, possibilitando ao aluno estender este raciocínio para outras aplicações.

Figura 01 – Teia de Congruências módulo 5



Fonte: O Próprio Autor.

Outra forma de ilustrar a divisão euclidiana é usando figuras em formato de teias de aranha. Esse método surgiu de uma questão aplicada na prova da OBMEP, além disso, conseguimos distribuir as congruências por cada uma das amigas, isto é, Alice ficará com todas as $N \equiv 1 \pmod{5}$, já a Bia ficará com todas as $N \equiv 2 \pmod{5}$, a Carla com $N \equiv 3 \pmod{5}$, a Dani

com $N \equiv 4 \pmod{5}$ e por fim a Ester com as $N \equiv 0 \pmod{5}$. A esse modelo de ilustração denominamos de “Teia de Congruências”.

Aplicação 02. Sistema de Congruências.

Daniela e Manuel são irmãos e juntos têm mais de trinta e menos de oitenta livros. Um dia eles foram arrumar os livros no armário, quando separavam de 2 em 2 sempre sobrava 1, quando separavam de 3 em 3 sempre sobrava 2 e quando separavam de 5 em 5 sempre sobravam 4. Qual é a quantidade de livros que os irmãos possuem?

Solução:

Esse é o típico problema em que a análise dos critérios de divisibilidade é suficiente para solucionarmos a questão, sem ter que fazer uso de ferramentas mais elaboradas, como o Teorema Chinês dos Restos ou mesmo das congruências, por exemplo.

Note que estamos em busca de um número N , em que, $30 < N < 80$. Usando o critério de divisibilidade do 2, observamos que o número procurado é ímpar, pois separados de 2 em 2 sobra 1, ou seja, o algarismo das unidades só pode ser $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. No entanto, ao usarmos o critério de divisibilidade do 5, observamos que N não pode ter como algarismo das unidades o 5, pois se assim o fosse, o número N seria divisível por 5, o que não ocorre, logo devemos descartar o 5 do conjunto dos últimos algarismos, restando apenas $\{1, 3, 7, 9\}$. No entanto, ao analisarmos que o número N deixa resto 4 quando dividido por 5, evidenciamos que esse número só pode ter como algarismo das unidades o 4 ou o 9, mas o 4 se descarta pelo fato do número procurado ser ímpar, então concluímos que o número procurado tem o nove como último algarismo, descartando assim o $\{1, 3, 7\}$ da posição de algarismo das unidades.

Então, as possibilidades para o número N são 39, 49, 59, 69, 79. Para finalmente chegarmos ao valor procurado, vamos usar o critério de divisibilidade do 3, isto é, para que um número seja divisível por 3 a soma dos seus algarismos precisa ser múltiplo de 3. Como N deixa resto 2 quando dividido por 3, descartamos o $39 = 3.13 + 0$ e o $69 = 3.23 + 0$, que já que eles são múltiplos de 3, ou seja, $3|39$ e $3|69$, já o 49 e o 79 são descartado por deixarem resto 1 quando divididos por 3, $49 = 3.16 + 1$ e $79 = 3.26 + 1$, portanto o número de livros procurado é $N = 59$, já que $5 + 9 = 14$ e $14 = 3.4 + 2$ deixa resto 2 quando dividido por 3.

Vamos agora resolver utilizando o Teorema Chinês dos Restos, teorema abordado na componente curricular de Aritmética no ensino superior.

Escrevendo na forma de um sistema de congruências, temos

$$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod{2} \\ N \equiv 2 \pmod{3} \\ N \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Nesse caso, temos que $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $M_1 = 3 \cdot 5 = 15$, $M_2 = 2 \cdot 5 = 10$ e ainda $M_3 = 2 \cdot 3 = 6$. Por outro lado, $y_1 = 3$, $y_2 = 4$ e $y_3 = 6$ são soluções, respectivamente, das congruências $Y \equiv 1 \pmod{2}$, $Y \equiv 1 \pmod{3}$ e $Y \equiv 1 \pmod{5}$. Portanto, uma solução módulo $M = 30$ é dada por $N = M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + M_3y_3c_3$, isto é, $N = 269$.

Como $30 < N < 80$, temos que

$$269 \equiv 269 - 30 \equiv 239 \pmod{30}$$

$$239 \equiv 239 - 30 \equiv 209 \pmod{30}$$

$$209 \equiv 209 - 30 \equiv 179 \pmod{30}$$

$$179 \equiv 179 - 30 \equiv 149 \pmod{30}$$

$$149 \equiv 149 - 30 \equiv 119 \pmod{30}$$

$$119 \equiv 119 - 30 \equiv 89 \pmod{30}$$

$$89 \equiv 89 - 30 \equiv 59 \pmod{30}$$

Portanto, os irmãos possuem 59 livros.

Aplicação 03. Equações Diofantinas

Uma fábrica de gelo precisa entregar 26 toneladas de gelo para um barco. A entrega será efetuada usando os dois caminhões da fábrica, um deles com capacidade para transportar 3 toneladas, e o outro com capacidade para 2 toneladas. Se, em cada viagem, os caminhões estiverem preenchidos com sua capacidade máxima, e os dois caminhões forem utilizados na entrega, de quantas maneiras diferentes a entrega pode ser feita?

Solução:

Vamos chamar de x o número de viagens dadas pelo caminhão que transporta 3 toneladas e de y o que transporta 2 toneladas, assim montamos a equação $3x + 2y = 26$, onde $x, y \in \mathbb{N}$.

Isolando uma das variáveis da equação $3x + 2y = 26$, obtemos

$$3x = 26 - 2y$$

$$3x = 2(13 - y)$$

$$x = 2 \cdot \frac{(13-y)}{3}$$

$$x = 2 \cdot k, \text{ sendo } k = \frac{13-y}{3}$$

Sendo $x, y \in \mathbb{N}$, note que $0 < y < 13$, assim estamos em busca dos valores de y , que ao serem subtraídos de 13, tornam-se divisíveis por 3, isto é, $3 \mid (13 - y)$. Dessa forma, o primeiro valor de y é 1, pois, $3 \mid (13 - 1)$, e em sendo $y = 1$, o valor de x é 8, pois $x = 2.4 = 8$.

O segundo valor possível para y seria 4, o que iria gerar um $x = 2.3 = 6$. O terceiro valor para y seria 7, o que produziria um $x = 2.2 = 4$, e por fim poderíamos ter um $y = 10$, gerando assim um $x = 2$. Totalizando 4 possibilidades de entrega.

Essas possibilidades podem ser organizadas em uma tabela.

Tabela 03 – Análise das possibilidades de entrega por inspeção da variável y

y	k	$x = 2 \cdot k$
1	4	8
4	3	6
7	2	4
10	1	2

Fonte: O Próprio Autor

Caso tivéssemos optado por isolar a variável y , teríamos:

$$3x + 2y = 26$$

$$2y = 26 - 3x$$

$$2y = 26 - 3x$$

$$y = \frac{(26-3x)}{2}$$

Sendo $x, y \in \mathbb{N}$, note que $2 \mid (26 - 3x)$, assim podemos usar a paridade para afirmar que x será necessariamente um número par, já que ele está sendo multiplicado por um número ímpar e a diferença entre $(26 - 3x)$, precisar ser par, já que é divisível por 2. Outro aspecto importante é que $x < 10$, pois $3x = 30$ e $(26 - 30) \notin \mathbb{N}$, assim a variável x , é um número par compreendido entre 2 e 8, ou seja, $x = \{2, 4, 6, 8\}$. Logo, os valores y são 10, 7, 4 e 1. Organizando na tabela, encontramos as mesmas 4 possibilidades de entrega.

Tabela 04 – Análise das possibilidades de entrega por inspeção da variável x

x	y
2	10
4	7
6	4
8	1

Fonte: O Próprio Autor

COMUNICAÇÕES ORAIS

Temos a possibilidade de resolver essa equação diofantina com o uso das congruências.

$$3x + 2y = 26 \Rightarrow 3x + 2y - 26 = 0$$

Fazendo cada termo da equação congruência módulo 2, e em seguida usando a proposição 32, item (e), obtemos

$$3x \equiv x \pmod{2}$$

$$2y \equiv 0 \pmod{2}$$

$$-26 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$3x + 2y - 26 \equiv x \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{2}$$

O que nos fornece os valores de $x = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2k\}$, porém devemos atentar para o fato da variável x representar a quantidade de viagens realizadas pelo caminhão de 3 toneladas. Como o comando deixa claro que o caminhão será usado excluimos o valor $x = 0$, assim como todos os valores de $x \geq 10$, pois dez viagens representariam um valor acima das 26 toneladas transportadas, o que possibilita apenas 4 valores para x , sendo eles $x = \{2, 4, 6, 8\}$. Agora vamos fazer cada termo da equação congruência módulo 3, e em seguida usaremos novamente a proposição 32, item (e), obtemos

$$3x \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2y \equiv -y \pmod{3}$$

$$-26 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3x + 2y - 26 \equiv -y + 1 \pmod{3}$$

$$y \equiv 1 \pmod{3}$$

O que nos fornece os valores de $y = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 3k + 1\}$, porém devemos atentar para o fato da variável y representar a quantidade de viagens realizadas pelo caminhão de 2 toneladas. Como o comando deixa claro que o caminhão será usado excluimos os valores $y \geq 13$, pois treze viagens representariam o valor total da carga por apenas um caminhão e como sabemos os dois veículos são usados, o que possibilita apenas 4 valores para y , sendo eles $y = \{1, 4, 7, 10\}$.

Tabela 05 – Análise das possibilidades de entrega por congruência

x	$3x$	y	$2y$	$3x + 2y$	$= 26$
8	24	1	2	$24 + 2$	$= 26$
6	18	4	8	$18 + 8$	$= 26$
4	12	7	14	$12 + 14$	$= 26$
2	6	10	20	$6 + 20$	$= 26$

Fonte: O Próprio Autor

Nessa última aplicação destacamos a relação entre divisibilidade, equações diofantinas e congruências, uma vez que as mesmas podem ser resolvidas através do algoritmo de Euclides ou por congruência, e ao fazermos uso dos conceitos de múltiplo, divisor e os critérios de divisibilidade do 2 e do 3, possibilitamos mais uma vez a ligação entre os conteúdos aritméticos e algébricos defendida por (LINS; 1997), criando um ambiente de familiaridade e de fluxo contínuo entre os eixos de Números e Álgebra, exposta na BNCC (2018).

4

CONCLUSÃO

Encontramos com muita frequência no ensino médio alunos que não dominam os principais critérios de divisibilidade e que não conseguem realizar a transposição da linguagem verbal para a simbólica, pensando nisso já inserimos em nossos planejamentos anuais revisões de temas aritméticos do ensino fundamental, é nesse momento que os conteúdos são novamente apresentados aos alunos, porém essa nova abordagem é rápida e busca apenas aspectos pontuais, não permitindo uma ligação entre divisibilidade e outros assuntos, sejam eles aritméticos ou algébricos.

Dessa forma, observamos que a melhor maneira de minimizarmos esse problema é solucionar essas dificuldades ainda no ensino fundamental, especificamente no 6º e 7º anos. No entanto, essa abordagem não deve ser feita de forma mecânica, produzindo apenas uma memorização rápida de tópicos isolados, precisamos inserir aplicações que possibilitem uma ampliação do uso da divisibilidade, permitindo uma ligação entre divisão euclidiana e critérios de divisibilidade, criando uma continuidade entre os aspectos aritméticos e algébricos que favoreçam a transposição da linguagem verbal para a simbólica matemática.

Usando uma linguagem compatível ao ciclo de ensino, apresentamos aplicações que capacitam os alunos a estabelecer uma conexão entre os critérios de divisibilidade, a divisão euclidiana, o uso de divisores e múltiplos, o mmc e o mdc, a operação de radiciação e equações lineares com até duas variáveis, além disso é apresentado ao aluno a notação de congruência modular, notação essa que não oferece dificuldades por tratar-se de uma simplificação de todo o processo de divisão com restos. As aplicações expostas nesse trabalho são feitas em diferentes

linguagens, com o auxílio de tabelas e da teia de congruências, o que possibilitou a generalização de muitos resultados o que beneficia a transposição de linguagens pelos alunos. Portanto, essas aplicações configuram uma excelente oportunidade de solução para as dificuldades encontradas no ensino médio.

Outro ponto de destaque nessas aplicações é a relação entre os tópicos trabalhados no ensino fundamental e os conteúdos abordados na disciplina Aritmética na pós-graduação, gerando exemplos que relacionam conteúdos como divisibilidade, equações diofantinas e congruências, sendo este último tópico, fundamental para a utilização do Teorema de Fermat, do Teorema de Euler e o Teorema Chinês dos Restos. A utilização dessas aplicações no ensino superior oferece aos discentes deste ciclo uma relação entre os critérios de divisibilidade e a teoria das congruências modulares permitindo uma ligação entre a teoria e a prática.

A utilização dessas aplicações também configura a possibilidade de criação ou de reavaliação de sequências didáticas no ensino fundamental, reforçando a ligação entre as unidades temáticas Números e Álgebra. Além disso, essas aplicações configuram uma fonte de pesquisa para professores do ensino básico e para alunos do ensino superior que desejarem estabelecer uma relação entre estes conteúdos nestes ciclos de ensino. As relações oferecidas nas aplicações propostas nesse estudo têm como limites a relação entre os aspectos aritméticos e algébricos, porém isso pode ser transposto em futuros trabalhos sejam eles dentro desses campos ou com a inserção da unidade Geometria.

6

REFERÊNCIAS

- [1] **BRASIL**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. P. 90-148.
- [2] **BRASIL**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 03/10/2021.
- [3] BRUXELAS, A. C. **Aritmética modular e aplicações: criptografia RSA e calendário perpétuo**. Dissertação (Mestrado/PROFMAT) - Apresentada como dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em:

[https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-22012021-](https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-22012021-113841/publico/AnaCatarinaBruxelas_revisada.pdf)

[113841/publico/AnaCatarinaBruxelas_revisada.pdf](https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-22012021-113841/publico/AnaCatarinaBruxelas_revisada.pdf). Acesso em 06/10/2021.

- [4] DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p.11-33. In MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, 2003.
- [5] GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. Dissertação (Mestrado) – Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado, Pontifícia Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Física, Porto Alegre, 2008. 118f. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf>. Acesso em: 04/10/2021.
- [6] HEFEZ, A. **Aritmética**: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [7] LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 6. ed. Campinas-SP: Papyrus, 1997.



20 a 24 junho de 2022

UFPA – Belém/Pará

**APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DUPLAS NO CÁLCULO DE
MASSA, MOMENTO E CENTRO DE GRAVIDADE COM
DISTRIBUIÇÃO DE MASSA**

ALANA SEIXAS, DIEGO PINHEIRO E MARLY NUNES

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. **Prefácio**
2. **Introdução**
3. **Referencial Teórico**
4. **Materiais e Métodos**
5. **Resultados e Discussões**
6. **Conclusão**
7. **Referências Bibliográficas**

PREFÁCIO

O ensino de conceitos matemáticos não atrelados a situações reais presentes no dia a dia do aluno, causam a noção de não aplicabilidade e complexibilidade para a compreensão. Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de ensino superior, as definições são colocadas geralmente de forma abstrata, interferindo diretamente e negativamente no processo de ensino-aprendizagem desses graduandos. Mediante a isto, este trabalho tem como objetivo utilizar definições de integrais duplas, para calcular a massa, momento e centro de gravidade de figuras não regulares, feitas de placas de ferro galvanizado, e com distribuição de massa permanente, como forma de unificar a teoria e prática, e servindo de facilitador tanto para o docente mostrar a aplicabilidade de conceitos, com materiais concretos, tanto para o discente, devido o estímulo causado por compreender a existência de diversas outras aplicações.

BRAGANÇA, JUNHO de 2022

Alana Seixas

Diego Pinheiro

Marly Nunes

INTRODUÇÃO

A formação superior nas diversas áreas de exatas permite absorver regras, teoremas e propriedades matemáticas às vezes fora do contexto do aluno e com uma visão de aplicação muito restrita e que se mostra distante da realidade vivenciada pelo discente em sua experiência de vida. Neste sentido, este trabalho tem por objetivo propor uma aplicação prática de integrais de superfícies, estudadas em cálculo diferencial integral II, que consiste no desenvolvimento de cálculos de massa, momento e centro de gravidade, bastante difundidos nos livros de cálculo, mas pouco trabalhados na prática no sentido experimental. E, a partir da teoria confeccionar os materiais tais como base de madeira com pinos metálicos e placas metálicas de densidades de massa constante em formatos geométricos usuais, a fim de sustenta-los em seus centros de gravidades encontrados na figura e confirmados através dos cálculos. Essa aplicação torna possível a interdisciplinaridade contextualizando a matemática com aplicações na mecânica dos sólidos, assunto estudado em diversas engenharias assim como em cursos de física.

REFERENCIAL TEÓRICO

Sabe-se que o ensino de Matemática, muitas vezes, apresenta-se de maneira descontextualizada (FERNANDES, 2006), o que pode não favorecer a aprendizagem do aluno, dificultando o estabelecimento de relações com o objeto do conhecimento. Trabalhar o cálculo diferencial integral de uma forma descontextualizada pode gerar um sentimento de não aplicabilidade assim como torna difícil à abstração e transcendência do aluno ao estudar esses assuntos. Nesse sentido propomos o estudo prático do cálculo de integrais duplas aplicando ao cálculo de massa, momento e centro de gravidade de superfícies planas.

Tomemos uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ finita com uma distribuição de densidade de massa superficial (massa por unidade de superfície) $\delta(x, y)$, para todo $(x, y) \in D$.

A massa da região D denotada $m(D)$, será a integral dupla da função densidade de massa $\delta(x, y)$, sobre o domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ denotada por

$$m(D) = \iint_D \delta(x, y) dA \quad (1)$$

Usando as considerações acima para o cálculo da massa de uma região D limitada com distribuição de densidade $\delta(x, y)$. Os momentos $M_{x=x_0}$ e $M_{y=y_0}$ de massa da região D em relação aos eixos de referência x_0 e y_0 serão dadas respectivamente por

$$M_{x=x_0} = \iint_D \delta(x, y)(x - x_0) dA \quad (2)$$

e

$$M_{y=y_0} = \iint_D \delta(x, y)(y - y_0) dA \quad (3)$$

Quando $M_{x=x_0}$ é zero concluímos que a superfície D está sobre o eixo de equilíbrio em x e isso vale também para $M_{y=y_0}$. Se concomitantemente

$M_{x=x_0}$ e $M_{y=y_0}$ são iguais a zero, o centro de gravidade $G(x_g, y_g)$ de D será a intercessão entre as retas $x = x_0$ e $y = y_0$.

As coordenadas do centro de gravidade $G(x_g, y_g)$ de D serão expressas da seguinte forma

$$x_g = \frac{M_{x=0}}{m(D)} = \frac{\iint_D \delta(x,y)x dA}{\iint_D \delta(x,y) dA} \quad (4)$$

e

$$y_g = \frac{M_{y=0}}{m(D)} = \frac{\iint_D \delta(x,y)y dA}{\iint_D \delta(x,y) dA} \quad (5)$$

Quando uma região D é a composição de duas outras regiões conhecidas $D1$ e $D2$, de modo que $D = D1 + D2$, podemos definir $G(x_g, y_g)$ da região composta utilizando o somatório dos momentos de massa de cada região e o somatório das massas de cada região aplicando diretamente as equações (4) e (5) para definir o centro de gravidade.

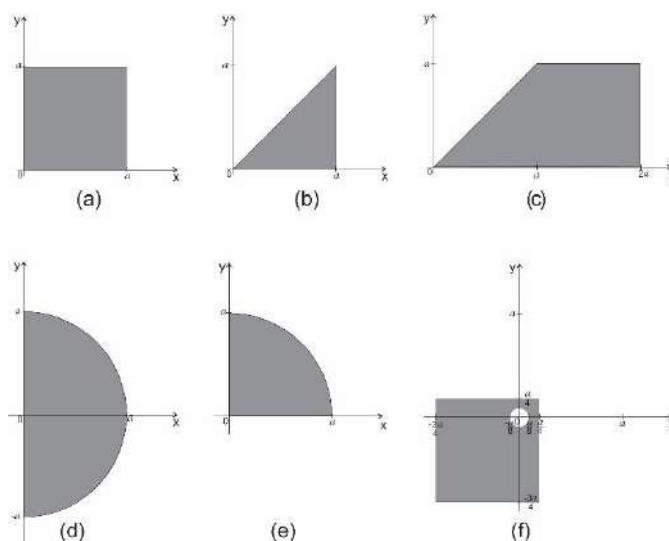
MATERIAIS E MÉTODOS

Para a produção dos materiais a serem expostos no experimento (Figura 1), foram confeccionadas bases de madeira com pinos metálicos para sustentação das peças, além disso, foi realizado cortes das figuras geométricas na placa de ferro galvanizado e traçadas retas sobre a mesma de acordo com os cálculos desenvolvidos nesse trabalho. O resultado prático do experimento se deu de tal forma que as peças estão equilibradas em seus centros de massa, como mostra a figura 2.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tendo em vista o conteúdo prático das integrais duplas e a consulta ao referencial teórico, escolhemos seis figuras geométricas usuais no cálculo e na geometria: Quadrado, triângulo retângulo, semicírculo, quadrante circular, trapézio retângulo e quadrado com furo circular, conforme Figura 1.

Figura 1: Geometria das Figuras



(Fonte: Os autores)

Assumiremos que $a = 0,2m$ tendo em vista que no experimento prático utilizou-se chapas de ferro galvanizado de $1,0mm$ de espessura e densidade de massa constante de $\delta(x, y) = 3,375 Kg/m^2$. Realizando o cálculo da massa, momentos e centro de massa obtivemos os seguintes resultados.

Para o quadrado de lado a (Figura 1 (a)), determinamos através dos cálculos das equações (1), (2), (3), (4) e (5) os respectivos resultados, $m(D) = 0,135Kg$ e $G = (10,10)$. No triângulo retângulo de lados iguais a a (Figura 1 (b)), obtivemos $m(D) = 0,065Kg$ e $G = (13,33,6,66)$. Para o trapézio retângulo de base maior $2a$, altura e base menor iguais a a (Figura 1 (c)) obtivemos $m(D) = 0,202Kg$ e $G = (24,44,8,88)$. No Semicírculo de raio a (Figura 1 (d)), obtivemos $m(D) = 0,212Kg$ e $G = (8,48,0)$. Para o quadrante circular de raio a (Figura 1 (e)), obtivemos $m(D) = 0,106Kg$ e $G = (8,48,8,48)$. E por fim, para o quadrado de lado a com um furo circular de raio $\frac{a}{8}$ (Figura 1 (f)) determinamos $m(D) = 0,128Kg$ e $G = (-5,15,-5,25)$. É importante ressaltar que todos os valores de massa calculados foram comparados com os obtidos através da pesagem em uma balança de precisão onde tivemos uma boa aproximação entre o valor teórico e o medido.

Por outro lado, traçamos as retas $x = x_0$ e $y = y_0$ de acordo com os cálculos desenvolvidos para cada placa metálica, e tivemos como resultado, que a interseção entre essas retas, $G(x_g, y_g)$, é o centro de massa. Sendo assim, podemos fazer uma comparação entre os cálculos obtidos o qual nos favoreceu o equilíbrio das peças em seus centros de massa.

Figura 2: Placas equilibradas em seus centros de massa ou de gravidade



(Fonte: Os autores)

CONCLUSÃO

Com a aplicação prática do cálculo integral podemos notar que conceitos como massa, momento e centro de gravidade tornam-se muito mais palpáveis quando experimentamos o fazer e não somente o calcular. Resultou, também, o desenvolvimento de habilidades como escolha de material, corte de precisão, medição de massa em balança, abstração do plano cartesiano e escolha adequada de coordenadas (retangulares ou polares) considerando a geometria da placa analisada. Acreditamos que esse trabalho apresenta um conteúdo diferenciado no campo experimental e teórico agregando competências aos alunos e professores que de fato aplicarem esta metodologia em suas aulas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Castro, B. C. Algumas aplicações de integral dupla–Universidade Federal do Sergipe. Disponível em:
[http://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalago.](http://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalago)

[2] FERNANDES, S. S. A contextualização no ensino de Matemática - um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do Distrito.

[3] STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.



AS LEIS DE KEPLER: UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO DEDUÇÕES ALGÉBRICAS E APLICAÇÕES NO GEOGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO

Josué Coelho de Freitas

20/06/2022

*Meus sinceros agradecimentos a todos que fizeram parte direto ou indiretamente dessa conquista que tange na realização deste trabalho.
A Deus, meus pais, minha esposa e minhas filhas que tanto amo.*

Sumário

Prefácio

1 Introdução

1.1 AS LEIS DE KEPLER

1.1.1 Primeira Lei de Kepler

1.1.2 Segunda Lei de Kepler

1.1.3 Terceira Lei de Kepler

1.2 APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

1.2.1 Simulação da equação geral das cônicas no geoGebra

1.3 Simulação das três leis de Kepler no GeoGebra

1.3.1 Primeira lei de Kepler (lei das órbitas)

1.3.2 Segunda lei de Kepler (lei das áreas)

1.3.3 Terceira lei de Kepler (lei dos períodos)

1.4 CONCLUSÕES

Referências

Prefácio

O presente trabalho aborda o conhecimento da Matemática utilizado pelo alemão astrônomo e matemático Johannes Kepler, que serviram de base para o seu estudo astronômico, ao fundamentar suas leis universais no século XVII, e tendo esse trabalho o objetivo de oferecer ao aluno do ensino médio uma proposta inovadora que contempla o estudo algébrico e geométrico dessas leis, através de suas deduções matemáticas, com o auxílio do conhecimento da Física, bem como a utilização do software matemático gratuito GeoGebra, servindo como ferramenta facilitadora da aprendizagem desse conteúdo na Física. São simulações ilustrativas que o GeoGebra nos auxilia para desenvolver tanto a álgebra quanto a geometria nas três leis de Kepler. E para garantir o sucesso dessa atividade é necessário que a escola disponha de um laboratório de informática educativa (LIED) para que o professor venha desenvolver com os alunos, tanto a manipulação do software matemático quanto o desenvolvimento do lúdico no processo de ensino e aprendizagem.

BELÉM, JUNHO de 2022

Josué Coelho de Freitas

Introdução

A necessidade dessa proposta metodológica parte da dificuldade encontrada pelos alunos do ensino médio, ao assimilar o estudo das cônicas em Geometria Analítica, e conseqüentemente, na Física, quando eles se deparam com as leis da mecânica celeste imposta por Johannes Kepler, onde as cônicas servem de base para a análise dedutiva dessas leis.

Dessa forma, apresentamos como iniciativa didática, nas aulas de Matemática e Física, uma ferramenta que possa auxiliar na compreensão e entendimento desse tópico matemático o GeoGebra.

O Geogebra é um software matemático gratuito que nos possibilita de realizar uma infinidade de construções geométricas com auxílios de pontos, retas, polígonos, dentre outros, além de expor em uma mesma interface o dinamismo da figura geométrica em 2D ou 3D, bem como a leitura algébrica de um mesmo problema matemático.

Ao darmos destaque ao estudo Kepler no século XVII, levamos o aluno a compreender que, através de suas bases matemáticas e astronômicas, Kepler provocou uma revolução científica na história da Astronomia, devido ao rompimento com o sistema geocêntrico de Cláudio Ptolomeu, que antes era defendido pela sociedade científica e pela Igreja. Suas leis são aceitas até hoje na Astronomia e servem de suporte para calcular o período e o raio da órbita de um corpo celeste, mesmo que ele não faça parte do nosso Sistema Solar.

1.1. AS LEIS DE KEPLER

O astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571–1630) tornou-se discípulo do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe para corroborar às suas teorias científicas, no que diz respeito ao sistema heliocêntrico defendido pelo astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico no século XVI. E ao estudar a órbita de Marte por cerca de trinta anos, pôde elaborar as três leis da mecânica celeste. São elas: Primeira Lei (Lei das Órbitas), Segunda Lei (Lei das Áreas) e Terceira Lei (Lei dos Períodos).

1.1.1. Primeira Lei de Kepler

Os anos de 1608 e 1609 foram importantes para Kepler estudar a distância entre o Sol e Marte e passar a concluir que a órbita de Marte deveria ser uma elipse. Então ele se baseia nas cônicas do matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga do século II a.C, servindo de alicerce para Kepler explicar as órbitas dos corpos celestes. E depois de várias tentativas errôneas, ele parte de um estudo trigonométrico, conforme a figura a seguir, para desenvolver a 1ª lei, conhecida por Lei das Órbitas.

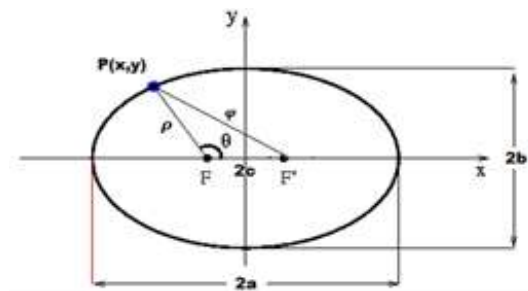


Figura 1.1: Distância entre P e F' na elipse.

Kepler, então, deduz a equação polar das cônicas, através do estudo de uma elipse, para a determinação do raio vetor (ρ). Sabendo-se que a elipse é um conjunto de pontos equidistantes de dois focos F (lugar geométrico do Sol) e F' separados pela distância focal $2c$, onde a é o semieixo maior e e é a

excentricidade $\left(e = \frac{c}{a}\right)$. Ele adota um ponto qualquer $P(x, y)$ na elipse, onde se encontra neste instante um corpo celeste que pode ser dado por $P(\rho, \theta)$ e θ é conhecido por anomalia verdadeira. Bem como φ é a distância entre P e F' , e b é o semieixo menor.

Pela lei dos cossenos no triângulo $\triangle PF'F$, tem-se que:

$$\varphi^2 = \rho^2 + (2.c)^2 - 2.\rho.(2.c).\cos \theta$$

Então, tem-se que:

$$\varphi^2 = \rho^2 + 4.c^2 - 4.\rho.c.\cos \theta$$

Pela definição da elipse tem-se que:

$$\varphi + \rho = 2a$$

Ficando então $\varphi = 2a - \rho$.

Substituindo vem:

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4.a^2.c^2 - 4.\rho.c.\cos \theta$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença, fica:

$$4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4.c^2 - 4.\rho.c.\cos \theta$$

Se $4a^2 - 4.c^2 = 4a\rho - 4.\rho.c.\cos \theta$, então dividimos a expressão por 4, ficando:

$$a^2 - c^2 = \rho(a - c.\cos \theta)$$

Se $a^2 - c^2 = b^2$, então: $\rho = \frac{b^2}{a - c.\cos \theta}$. Ao dividir a expressão por a , fica:

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e.\cos \theta}$$

Considerando que $\frac{b^2}{a} = k$ (parâmetro de Kepler), então temos que a equação geral das cônicas é definida por:

$$\rho = \frac{k}{1 - e.\cos \theta}$$

Generalizando, as seções cônicas podem ser descritas pela equação acima, que para surpresa de Kepler, essa primeira lei satisfaz não só elipses, como também circunferências, hipérbolas e parábolas, de acordo com os valores que e irá assumir.

- No caso da elipse $e < 1$. São as órbitas da Lua e dos planetas;
- No caso da circunferência: $e = 0$. São as órbitas dos satélites artificiais;
- No caso da parábola: $e = 1$. São as órbitas dos cometas e asteroides;
- No caso da hipérbole: $e > 1$. São os voos planetários que utilizam a gravidade assistida.

A partir do longo estudo pela órbita de Marte, Kepler então generaliza e descreve sua primeira lei astronômica através de uma carta a um amigo teólogo e astrônomo alemão, conhecido por David Fabricius, afirmando: **"Todos os planetas do Sistema Solar descrevem uma órbita elíptica em torno do Sol, e este ocupa um dos focos dessa elipse"** .

1.1.2. Segunda Lei de Kepler

Kepler já estava conformado que só a Matemática não era suficiente para explicar a órbita oval dos planetas, e que haveria uma explicação de cunho eminentemente físico para os resultados obtidos. Foi daí que ele utilizou a grandeza física momento angular para desenvolver a 2ª lei denominada Lei das Áreas.

O momento angular (\vec{L}) é uma constante dada pelo produto vetorial entre o raio vetor (\vec{r}) e o momento linear (\vec{p}). Algebricamente, tem-se que: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Mas \vec{p} é dado pelo produto entre a massa do corpo mais leve (m) e sua velocidade (\vec{v}). Ou seja, $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Logo: $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$.

De acordo com a figura a seguir, iremos deduzir tal Lei.

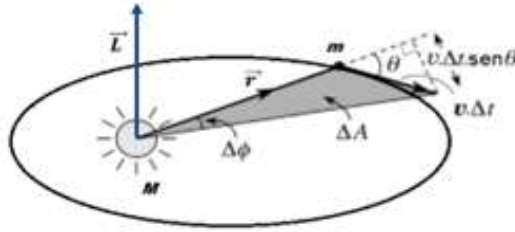


Figura 1.2: Raio vetor varrendo uma área na elipse.

Considera-se dr o deslocamento linear dado por: $dr = v \cdot \Delta t \cdot \sin \theta$

Se θ tende a $\frac{\pi}{2}$, então: $\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Como a área delimitada (ΔA) na figura 2 é um triângulo, então: $\Delta A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times dr| \rightarrow \Delta A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v} \cdot \Delta t \cdot \sin \theta| \rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{m}$. Daí vem: $\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\vec{L}}{m} \cdot \Delta t \right|$. Logo,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\vec{L}}{2 \cdot m}$$

Kepler mostra que \vec{L} e m são constantes do movimento. E a razão $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ é denominada de velocidade areal (ou areolar) do planeta, que corresponde à área varrida pelo raio vetor que une o planeta ao Sol por intervalo de tempo.

Dessa forma, Kepler denomina sua segunda lei como Lei das Áreas e a publica em 1609, afirmando que: **“O raio vetor (segmento de reta que liga um planeta ao Sol) “varre” áreas iguais em intervalos de tempos iguais”**.

1.1.3. Terceira Lei de Kepler

Depois de 10 anos da elaboração das duas primeiras leis, ou seja, em 1619, Kepler busca uma harmonia em seus estudos e publica a sua terceira lei astronômica. Essa lei é conhecida por Lei dos Períodos. Seu estudo se dá pela

avalição das coordenadas cartesianas da elipse formada por um planeta que situa no ponto $P(x, y)$ e o Sol se encontra no foco F_2 , conforme a figura 3.

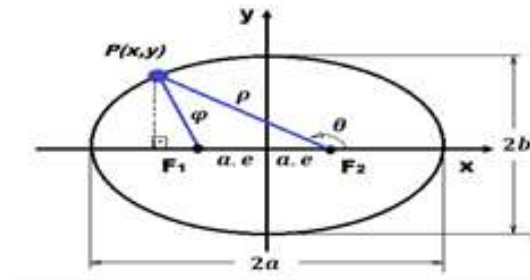


Figura 1.3: Elipse em coordenadas cartesianas.

Kepler utiliza, então, o teorema de Pitágoras e dispõe de duas equações:

$$\rho^2 = (x + a.e)^2 + y^2 \text{ e } \varphi^2 = (x - a.e)^2 + y^2$$

Ao subtrair as duas equações tem-se que:

$$\rho^2 - \varphi^2 = (x + a.e)^2 + y^2 - ((x - a.e)^2 + y^2)$$

No desenvolvimento dessa equação chega-se em: $\rho^2 - \varphi^2 = 4.a.e.x$. Mas $\rho = 2a - \varphi$. Então, desenvolvendo essa equação, obtém-se: $y^2 + x^2 \cdot (1 - e^2) = a^2 \cdot (1 - e^2)$.

Em uma elipse temos a seguinte relação pitagórica: $b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$. Ao substituir esse valor na equação anterior fica: $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$. A área de uma elipse é dada por: $A = \pi \cdot a \cdot b$.

Se considerarmos que a resultante centrípeta (\vec{R}_{CTP}) do planeta é a força gravitacional (\vec{F}_{GVT}), onde $\vec{R}_{CTP} = \frac{m \cdot \vec{v}^2}{\rho}$ e $\vec{F}_{GVT} = \frac{G \cdot M \cdot m}{\rho^2}$, então:

$$\frac{m \cdot \vec{v}^2}{\rho} = \frac{G \cdot M \cdot m}{\rho^2} \longrightarrow \vec{v}^2 = \frac{GM}{\rho}$$

Pela definição de momento angular, tem-se que: $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$, para: $\vec{r} = \rho$, então: $\frac{\vec{L}^2}{m^2} = G \cdot M \cdot \rho$.

Na primeira lei de Kepler, obteve-se que: $\rho = \frac{k}{1 - e \cdot \cos \theta}$ ou $\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 - e \cdot \cos \theta}$. Sabe-se que ρ está em função de θ . Ao considerar que $\theta = 90^\circ$, tem-se que $\cos 90^\circ = 0$. Então: $\rho = a \cdot (1 - e^2)$. Agora fazemos: $\frac{\vec{L}^2}{m^2} = G \cdot M \cdot a \cdot (1 - e^2)$. Na segunda lei de Kepler, obteve-se que:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\vec{L}}{2 \cdot m}$$

Desenvolvendo a equação anterior chegamos em: $G \cdot M \cdot a \cdot (1 - e^2) = \frac{4 \cdot \Delta A^2}{\Delta t^2}$. Sabendo-se que $\Delta A = A$ (área da elipse), então:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

A terceira lei estabelece o seguinte: **“O quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse que representa a órbita do planeta”**.

1.2. APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

O GeoGebra é um software que foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter em 2001 na linguagem Java. Com ele, o aluno terá a possibilidade de desenvolver o lúdico, através da criação de simuladores. O GeoGebra nos possibilita de executarmos uma situação-problema em Matemática, onde as janelas de visualização podem nos mostrar simultaneamente o tripé matemático: álgebra, geometria e aritmética, de acordo com a figura 4.

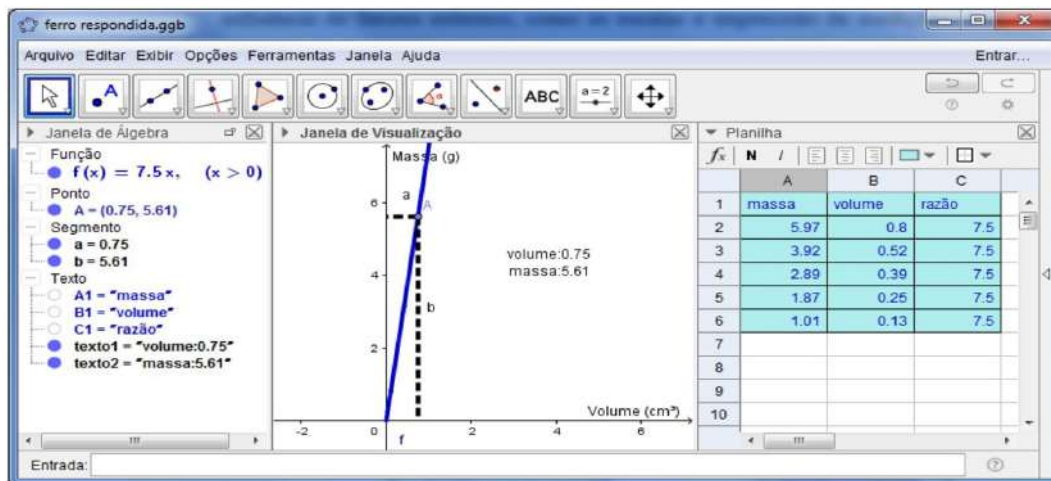


Figura 1.4: Interface do GeoGebra atendendo o tripé da Matemática

1.2.1. Simulação da equação geral das cônicas no geoGebra

O simulador permite com que o aluno altere o semieixo maior (a), a excentricidade (e) e o ângulo θ , para determinar o raio-vetor (ρ), que é a distância entre o Sol e o corpo celeste, e visualize as cônicas seguintes: circunferência, elipse, hipérbole e parábola.

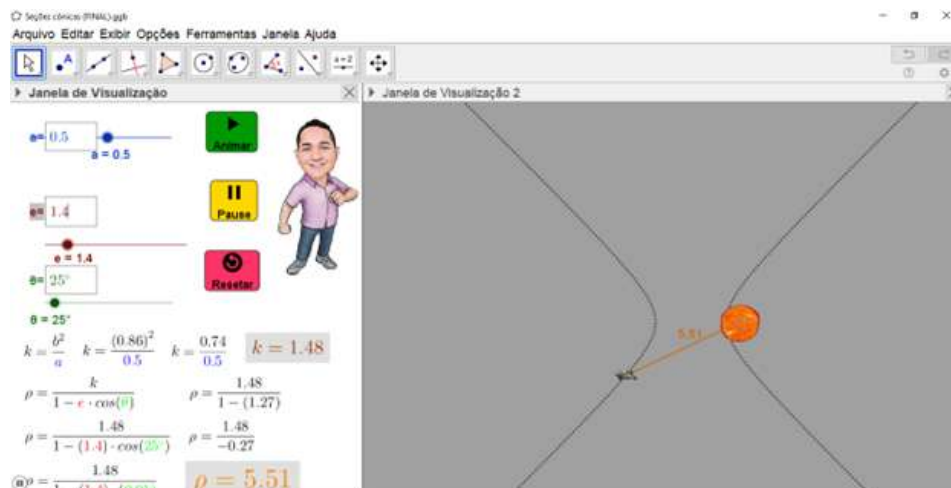


Figura 1.5: Simulador da equação geral das cônicas.

1.3. Simulação das três leis de Kepler no GeoGebra

Esse simulador faz com que o aluno desenvolva as três leis, através dos botões expostos na janela de visualização 1, possibilitando o aluno de buscar um estudo detalhado das diversas situações que Kepler buscou mostrar à sociedade científica, de forma geométrica, enfatizando, através da janela de visualização 2 o lúdico da exposição das três leis astronômicas.

1.3.1. Primeira lei de Kepler (lei das órbitas)

A figura 1.5 mostra a primeira lei de Kepler (lei das órbitas), enfatizando a propriedade elíptica que afirma que um ponto qualquer na elipse, ligado aos seus focos, gera duas distâncias cuja soma é constante, bem como a velocidade vetorial variando conforme o afélio e o periélio.

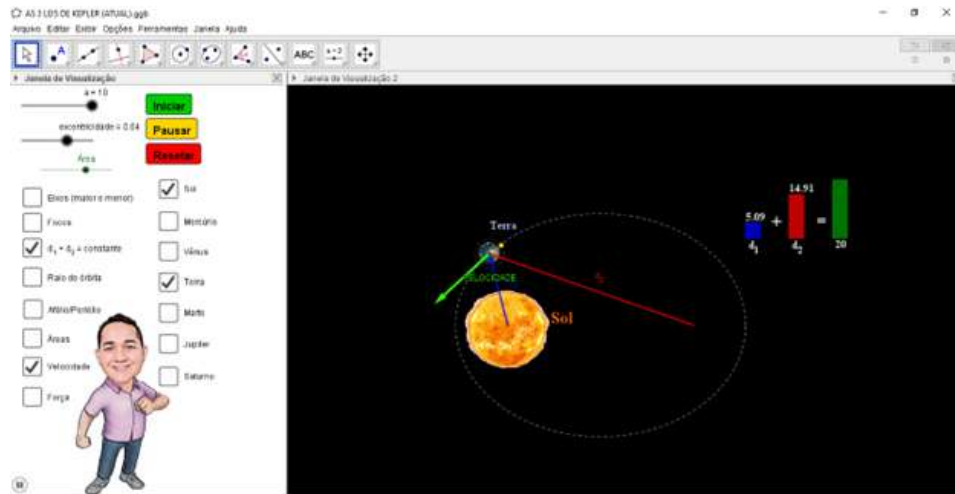


Figura 1.6: Simulador da 1ª lei de Kepler.

1.3.2. Segunda lei de Kepler (lei das áreas)

O simulador expõe a representação do raio-vetor varrendo áreas iguais em intervalos de tempos iguais, com os botões do raio da órbita e de área, conforme a figura 1.7.

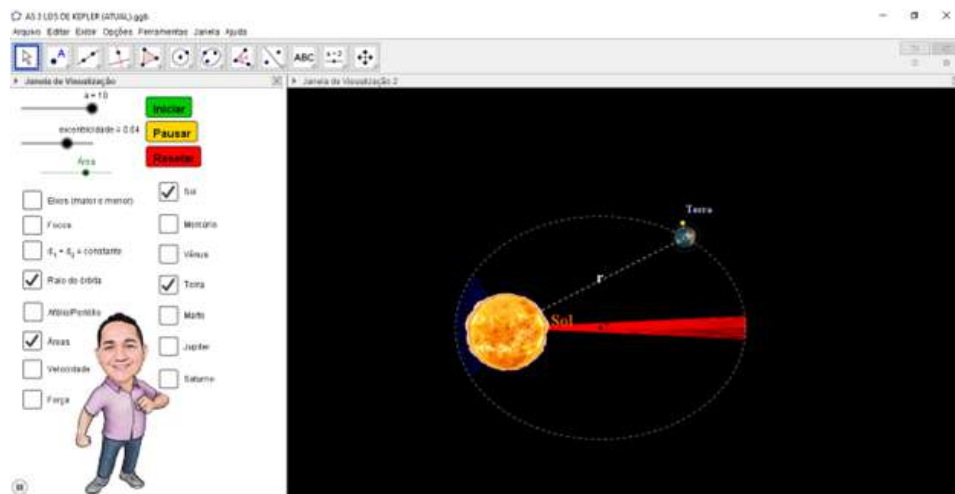


Figura 1.7: Simulador da 2ª lei de Kepler.

1.3.3. Terceira lei de Kepler (lei dos períodos)

O simulador representa a relação de proporcionalidade entre o quadrado do período e o cubo do raio médio da órbita dos seis primeiros planetas do Sistema Solar, conforme a figura 1.8.

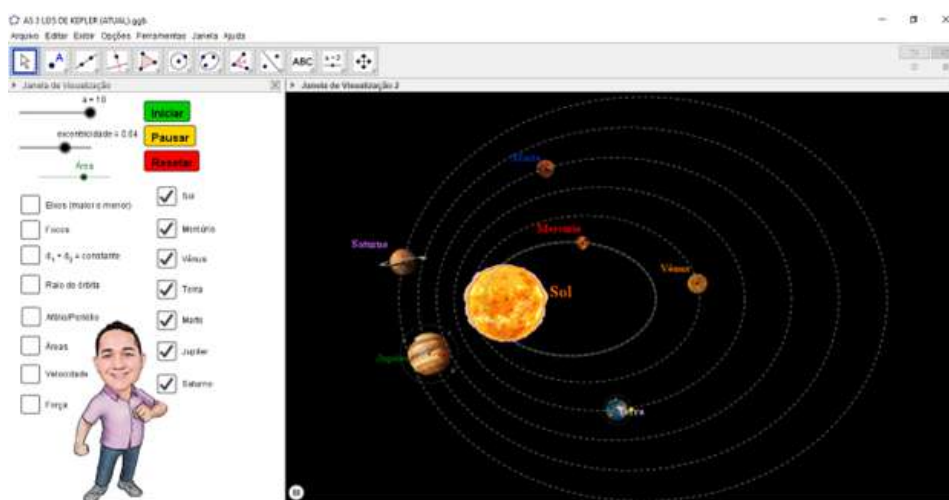


Figura 1.8: Simulador da 2ª lei de Kepler.

1.4. CONCLUSÕES

De acordo com as nossas vivências e experiências em sala de aula, na condição de professor de matemática, sabemos quanto é desafiador o papel do professor em ensinar Matemática e Física, à medida que tentamos sair do mundo da abstração para a praticidade dos conteúdos matemáticos abrangentes na educação básica do ensino público. Por conta dessa situação é que pensamos na utilização do GeoGebra nas aulas.

Os resultados com o uso dessas ferramentas didático-tecnológicas no ensino médio são satisfatórios, visto que as aulas dos professores de matemática e física se tornam mais dinâmicas e compreensíveis para os alunos, a fim de que eles adquiram mais estímulos em aprender a Geometria e as leis universais, bem como conseguir interligar a teoria à prática dos conteúdos abordados.

BARALHO DO CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE
MATERIAL DIDÁTICO PARA A COMPONENTE DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

JÚLIA SANTA BRÍGIDA, DIEGO SILVA E MARLY NUNES

20 A 24 DE JUNHO DE 2022



BARALHO DO CÁLCULO: UMA PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA A COMPONENTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

JÚLIA SANTA BRÍGIDA, DIEGO SILVA E MARLY NUNES

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. **Prefácio**
2. **Introdução**
 - 1.1. Objetivo geral
 - 1.2. Objetivos específicos
3. **Procedimentos metodológicos**
4. **As regras do jogo**
5. **Conclusões**
6. **Referências bibliográficas**

PREFÁCIO

Este trabalho pretende propor aos professores do ensino superior um material didático elaborado pelos voluntários do projeto LAPINMAT, denominado baralho do cálculo, que une o lúdico com o ensino de conteúdos voltados para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, como estratégia para construção de habilidades que possibilite conhecer funções elementares, seus gráficos e ainda a resolução de suas derivadas e integrais. As cartas do baralho são compostas por naipes¹ que envolvem os conceitos abordados em aula, permitindo ao aluno buscar e relacionar características próprias das funções. O mesmo foi criado e testado pelos participantes do projeto para ser aplicado em sala de aula da graduação. Assim, apresentamos uma ferramenta lúdica que pode contribuir com os docentes, ocasionando uma melhoria na qualidade do ensino.

¹ Naipes é o termo que nomeia os símbolos gráficos que compõem o baralho de cartas. Os naipes dele são: espadas, paus, copas e ouros.

INTRODUÇÃO

Na academia de educação matemática, pouco se vê metodologias de ensino na matemática que colaboram para a aprendizagem. Como resultado, as várias disciplinas que possuem conceitos abstratos, quando não acompanhadas por métodos que auxiliam na compreensão dos mesmos, tornam-se enfadonhas para os alunos. Diante disso, observamos a possibilidade de apresentar um mecanismo que auxilie neste processo, conforme Mendonça (2010, p.06), o lúdico

[...] possibilita transformar os envolvidos no aprendizado (discentes e docentes) em sujeitos do processo de construção do conhecimento, colocando a realidade o cotidiano do aluno como elemento chave para o estudo da disciplina e conhecimentos envolvidos nessa área. Como consequências, algumas mudanças na forma de ver e encaminhar a aula, a relação professor-aluno e a avaliação deverão ser modificadas no âmbito desta proposta.

Um desses meios lúdicos são os jogos, que servem como ferramenta didática, motivando e instigando o pensamento crítico, além de sanar dúvidas que podem aparecer no decorrer do aprendizado e fazer com que as aulas se tornem mais atrativas e interessantes. Assim, o presente trabalho consiste em compreender a relevância dos jogos como metodologia, uma vez que, o aluno se torna ativo e apresenta melhorias no desenvolvimento das competências e na criatividade, ao interagir e se expressar compartilhando ideias e conhecimento.

Com a aprovação do Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAPINMAT) da Universidade Federal do Pará (UFPA) – Campus Bragança, tem-se o objetivo de produzir materiais didáticos para serem utilizados em atividades matemáticas, pensou-se em estratégias que facilitassem o processo de aprendizagem dos discentes e que servisse como complemento para as disciplinas estudadas. Por esse motivo, pensamos na elaboração de jogos que ajudem a elucidar conceitos matemáticos e fornecer à comunidade acadêmica meios de contribuir com o ensino e aprendizagem de conteúdos ensinados na graduação.

Com base na proposta do laboratório foram elaborados diversos materiais didático-pedagógicos, dentre esses o jogo apresentado neste trabalho denominado “baralho do cálculo”, com o propósito de ser um

suporte metodológico para o ensino de matemática e também fornecer habilidades variadas como atenção, interação, memória, raciocínio lógico, planejamento e tomada de decisão. O baralho do cálculo poderá ser utilizado pelas universidades que possuem o curso de licenciatura em matemática e por aquelas que possuem como disciplina do curso o cálculo diferencial e integral. Segundo Smole, “o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática” (2008, p.9), ou seja, o docente ao inserir esse jogo em suas aulas com a finalidade de contemplar o assunto ministrado, deixará suas aulas mais dinâmicas e o mais próximo da realidade dos discentes.

A escolha do tema se deu devido à importância da disciplina de cálculo infinitesimal no curso de licenciatura em matemática, e também, a parte inicial da mesma, que aborda os conteúdos de limite, derivada e integral, que são de suma importância para disciplinas posteriores. Além de ser considerada uma das mais difíceis do curso ela possui um alto índice de reprovação acadêmica. Segundo dados da área do aluno do SIGAA (Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas) UFPa, por exemplo uma turma de matemática do Campus Bragança obteve um nível de reprovação de 65,9% na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

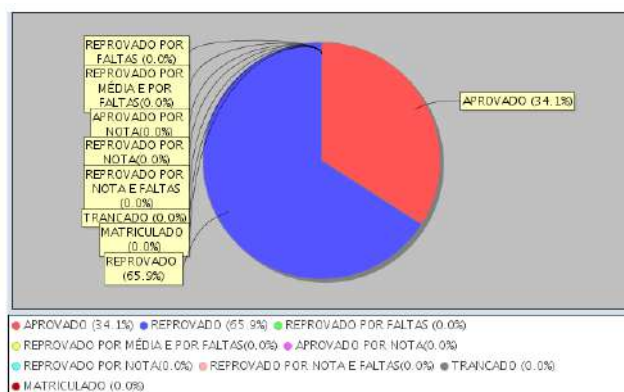


Figura 1: Nível de aprovação e reprovação em Cálculo I

Podemos nos perguntar “mas por que dentre tantos jogos escolher o baralho?”. De acordo com alguns estudiosos sua origem se deu no século X, na China, e por ser um jogo milenar se tornou popular entre as pessoas de idades variadas, tornando-se uma forma de passatempo e diversão. Nos momentos de descontração (intervalos), observa-se na universidade rodas de alunos utilizando jogos de cartas como lazer e percebe-se o interesse a esse tipo de recreação através dos diálogos descontraídos, entusiasmos e competitividade saudável.

Em decorrência disso, por que não unificar aprendizagem a diversão? Segundo Oliveira e Passos (2013, p. 77) “o ensino-aprendizagem de matemática por meio da metodologia da resolução de problemas e da utilização de jogos possibilita aos estudantes a criação de estratégias

para resolução de situações problemas, a apropriação de conceitos matemáticos”. Dessa forma, o ensino aprendizagem deixa de ser tão

carregado e passa a ser visto de uma maneira mais divertida, seja pelo aluno e até mesmo para o professor.

1.1. OBJETIVO GERAL

Realizar a descrição de um material didático como produto educacional, destinado a melhoria na qualidade de ensino da educação superior, que foi produzido pelos discentes voluntários ao programa LAPINMAT 2019.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Mostrar que há uma relação do ensino e aprendizagem com a ludicidade, por meio do uso do baralho como ferramenta metodológica;
- Estimular o desenvolvimento das habilidades de investigação dos conceitos matemáticos presentes no jogo;
- Motivar nos discentes o interesse pelo conteúdo, através da aplicabilidade em momentos de descontração, com a criação de estratégias no jogo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A idealização do baralho do cálculo ocorreu por meio do método de pesquisa participante, viável ao referido laboratório devido ao quantitativo de 10 voluntários, alunos do curso de licenciatura em matemática do Campus Bragança das turmas 2018 e 2019. A produção realizou-se após reuniões presenciais de debate sobre o jogo e a possível relação com a matemática, para que assim pudéssemos unir a diversão e o ensino. O processo pode ser descrito em 4 etapas principais: a compreensão do jogo, a integração à matemática, os testes do protótipo e por fim a construção do design das cartas.

As ideias primordiais a respeito do baralho surgiram a partir de observações dos integrantes do LAPINMAT a um baralho normal. Primeiramente, nos reunimos em sala para jogar e tentar entender o funcionamento do jogo de cartas, devido a isso nos perguntávamos “quais os critérios para a criação de jogos de ternas, de acordo com as cartas que se tinha em mão?” e conforme se era jogado, era-se pensado “como devo encaixar a matemática neste jogo?” daí surgiu a ideia de trocar os quatro naipes do baralho (ouros, paus, copas, espadas) por tópicos matemáticos que seriam eles: função, seu gráfico, sua derivada e sua integral; pensou-se também em substituir as treze cartas de um naipe por treze funções e nos naipes seguintes seus respectivos gráficos, derivadas e integrais, porém posteriormente foi aumentado os números de “naipes” para seis (incluindo a derivada no ponto e a integral definida) e diminuído o número de cartas de cada naipe para nove, conseqüentemente teria que se pensar quais seriam as nove funções elementares para se colocar no baralho.



Figura 2: Reunião com os voluntários no LAPINMAT

No segundo momento, definimos as funções que determinam as cartas do naipe. Cada voluntário pesquisou as particularidades de uma determinada função, o que resultou nas propostas: constante, afim, quadrática, cúbica, exponencial, cosseno, seno, tangente e logarítmica. Diante das características particulares das mesmas, decidimos que o próximo naipe seria referente aos gráficos, respectivamente. Adiante, pensamos em incluir limite, porém como queríamos incluir derivadas, que são definidas por limites, optamos pela segunda possibilidade. Seguindo essa linha, decidimos trabalhar com a integral, e também, para ampliar o conteúdo, incluímos a derivada no ponto e a integral definida.

Em seguida, iniciamos os primeiros testes com as cartas. A princípio, construímos as mesmas com materiais de baixo custo, como papel cartão e canetas, de forma manual e nos reunimos para construir as estratégias do jogo. Após, decidimos como poderiam ser formados os jogos a cada 3 cartas, na ordem dos naipes: função, gráfico, derivada, derivada no ponto, integral e integral definida; essa escolha é devido a sequência dos tópicos abordados em aula. De modo que, a relação entre as mesmas é de que obrigatoriamente pertençam à mesma função.

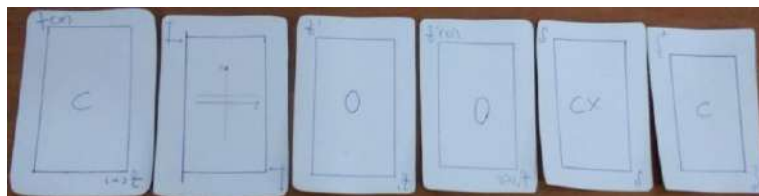


Figura 3: Cartas de cada naipe da função constante

Assim como no baralho casual existe o joker², no baralho do cálculo também foi pensado em uma carta com a mesma funcionalidade. No início pensou-se em uma carta que, como no baralho, não pertencesse a nenhum naipe, mas que a mesma se referisse a todos eles, então desenhamos e

²O joker, também conhecido como o louco ou bobo, é uma carta especial que pode assumir o valor de outras. Sendo usada para completar um jogo (terna), conjunto de 3 cartas.

criamos toda a estética da carta, daí surgiam duas opções, que possivelmente seriam as coringas do novo baralho.

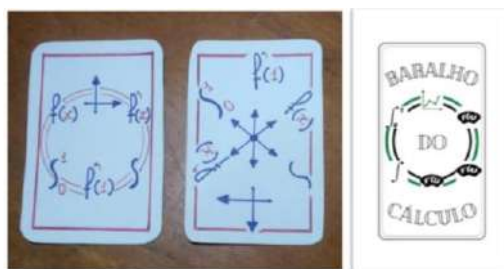


Figura 4 Designer manual das primeiras cartas coringas

Paralelamente, a fim de trabalhar com a paridade das funções presentes no jogo, pensou-se em criar a carta “Paridade?” como uma espécie de bônus, o jogador empossado da mesma poderia usá-la como o joker para formar uma terna, porém ao bater, a pessoa que usasse a carta, teria que classificar a função (par, ímpar ou sem paridade), sendo assim o jogo só seria válido se a resposta (sobre a paridade da função) estivesse correta. Posteriormente foi pensado sobre as cartas coringa e paridade e chegamos a uma conclusão de que teria muitas cartas bônus, já que seriam duas joker e duas paridade para cada baralho, assim decidimos que a carta paridade seria a carta coringa do jogo.

Por fim, elaboramos os modelos finais no aplicativo Canva disponibilizado para *androids*, *Ios* e também de forma online no site do canva, disponível em: <https://www.canva.com>

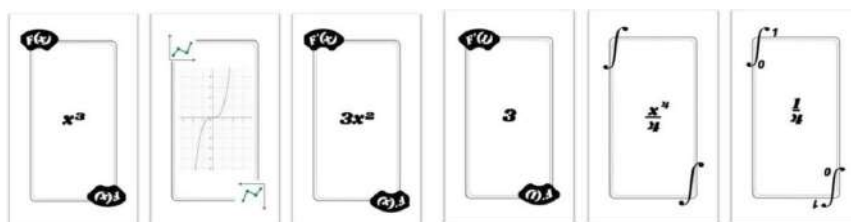


Figura 5: Designer final das cartas

AS REGRAS DO JOGO

- Utiliza-se 2 baralhos compostos por 56 cartas, com 6 naipes (sequência: função, gráfico, derivada, derivada no ponto, integral e integral definida) de 9 cartas (referentes as funções: constante, afim, quadrática, cúbica, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica) cada e 2 cartas coringas (cartas “paridade?”);
- A partida pode ser disputada por 2 a 8 participantes ou pode-se formar grupos (com 2 a 4 pessoas) para a disputa, permitindo a socialização do conteúdo e a criação de estratégias;
- O objetivo do jogador é formar 3 ternas, cujas cartas seguem a ordem dos naipes e sejam da mesma função;
- Escolhe-se um dos participantes para embaralhar e distribuir 9 cartas para cada um, em sentido anti-horário e com as faces voltadas para baixo. A sobra das cartas (maço) é colocada sobre a mesa;
- O jogador que está imediatamente à direita do que distribuiu inicia a partida comprando uma carta do maço e faz o descarte de acordo com sua estratégia para formação das ternas;
- Os demais repetem o processo de forma que todos joguem e tenham sempre 9 cartas em mãos, podendo comprar do maço ou a última da pilha de descarte;
- Se algum dos jogadores possuir o coringa, este pode usá-lo desde que já possua 2 cartas propicias para a formação de uma terna, porém ao bater deve-se classificar a paridade da função referente ao jogo;
- Vale dizer que o jogador que estiver armado, isto é, faltando apenas uma carta para bater, este pode usar o descarte de qualquer um dos outros não necessariamente o de seu antecessor;
- Ganha quem formar primeiro as 3 ternas e se utilizar o coringa tem-se que seguir corretamente a sua regra;
- Se um jogador afirmar ter batido e os demais atestarem o contrário, este ficará impedido de bater (na partida) usando qualquer que seja o descarte.

CONCLUSÕES

O material aqui proposto ainda não passou por aplicações em sala de aula e como o propósito deste trabalho é compartilhar um meio metodológico que contribua com o professor em sala de aula, acreditamos ser uma alternativa lúdica, que pode apresentar melhorias na qualidade do ensino na graduação. A importância da disciplina de cálculo diferencial e integral I nos levou a produzir este baralho, de forma que fosse possível associar a diversão com o aprender, de algo que por vezes tornou-se um temor para o aluno da matemática, passe a ser um novo conhecimento esclarecido. Dessa forma, que o baralho possa proporcionar aos graduandos o despertar para interesse na área do cálculo infinitesimal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MENDONÇA, S. **A matemática nas turmas de PROEJA: O lúdico como facilitador da aprendizagem.** *Holos*. v.3, ano 26. p.136-149. Natal. Rio Grande do Norte. 2010. Disponível em: <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/434>. Acesso em: 27 fev. 2022.
- [2] OLIVEIRA, S; PASSOS, C. **Jogos e resolução de problemas na formação continuada e em aulas de matemática nos anos iniciais.** *Acta Scientiae*, Canoas-RS, v. 15, n. 1, p. 76-92, jan./abr. 2013.
- [3] FLEMMING, D; GONÇALVEZ, M. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [4] MALTA, I; PESCO, S; LOPES, H; **Cálculo a uma variável: Uma introdução ao cálculo v.1.** Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2002.
- [5] SMOLE, K. S. **Jogos Matemáticos: de 1º ao 3º ano [et al.].** Porto Alegre: Artmed, 2008.



BINGO DAS GEOMETRIAS: UM ESTÍMULO PARA O ENSINO ATRAVÉS DO LÚDICO

JOSÉ BRITO, ALANA SEIXAS E MARLY NUNES

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. Prefácio
2. Introdução
3. Objetivo
 - 2.1 Objetivo Geral
 - 2.2 Objetivo Específico
4. Metodologia
5. Regras do jogo
6. Conclusão
7. Referências bibliográficas

PREFÁCIO

O presente trabalho pretende mostrar uma estratégia de ensino através de um jogo, denominado Bingo das Geometrias, de modo a contribuir com uma aprendizagem significativa, vinculando a teoria e a prática no processo de ensino e aprendizagem. Baseada em uma das áreas da matemática, a geometria e em particular, a geometria plana, espacial e analítica, permitindo aprimorar as habilidades através dos conceitos que regem estas subáreas. Assim, apresentamos uma proposta que possibilite o discernimento de uma matemática aplicável e divertida, além de servir como instrumento de um ensino que foi pensado em um laboratório de matemática (LAPINMAT) para ser implementado em sala de aula.

BRAGANÇA, JUNHO de 2022

José Brito

Alana Seixas

Marly Nunes

INTRODUÇÃO

Trabalhar conteúdos matemáticos com quaisquer que seja o nível de ensino ainda divide opiniões entre muitas pessoas, uma das falas recorrentes em discursos que afirmam a dificuldade do ensino-aprendizagem da matemática é retratar sobre seus conceitos que são tão abstratos, essa perspectiva equivocada se dá devido diversos fatores, dentre eles, a metodologia de ensino que grande parte dos professores utilizam, fazendo uso somente de métodos tradicionais dentro da sala de aula, como a falta de contexto com a qual a matemática está inserida no processo de ensino-aprendizagem, o que causa de fato uma grande probabilidade de não assimilação de seus conceitos, ora. Então, porque não utilizarmos de ferramentas que auxiliem em uma resolução ou pelo menos suavização dessa problemática. “As preocupações com um ensino de matemática de qualidade desde a Educação Infantil são cada vez mais frequentes e são inúmeros os estudos que indicam caminhos para com que o aluno dessa faixa escolar tenha oportunidades de iniciar de forma adequado seus primeiros contatos com essa disciplina” SMOLE. et al (2000, p. 09). Diante disto, “A contextualização dos objetos matemáticos podem estimular os alunos para que se sintam motivados a aprender, principalmente quando envolve um contexto diferente do puramente matemático - tão enfatizado pela perspectiva formalista” (LUCCAS e BATISTA, 2008).

Falando sobre a Geometria, em noções de espaço, área, formas, pode ser apresentado desde às crianças nos anos iniciais de vida, através de brinquedos educativos que se baseiam em encaixar uma peça geométrica em seu respectivo lugar ou formar desenhos utilizando formas geométricas, estimulando-as às noções de espaço. Ainda que não tenha contato com suas definições, até mais a frente os ser apresentado as denominações dessas figuras, o cálculo de sua área, perímetro e o cálculo de volume, dentre diversas relações geométricas existentes.

Podemos perceber nos anos iniciais que há a utilização de jogos lúdicos e atrativos afim de desenvolver interesse na criança para aquele estudo, mesmo que para ela seja visto apenas como brincadeira, pode-se gerar um 2 estímulo em seu desenvolvimento cognitivo e ao decorrer dos anos seguintes. Desde o básico até o médio, os jogos ainda podem ser utilizados de forma bem livre para facilitar o ensino desses alunos.

Estamos supondo que os alunos dos anos iniciais ao médio passaram por um ensino lúdico e atrativo dos conteúdos matemáticos, para que chegando nos cursos superiores ele consiga absorver com propriedade uma grande quantidade de fórmulas, teoremas, proposições e entre outros conceitos de matemática pura, mas sabemos que muitos desses discentes estão vindo de um contexto completamente diferente, onde o quantitativo é mais prezado pelas instituições do que o qualitativo. Porém se observarmos que o trabalho lúdico da matemática nesses anos anteriores ao ensino superior, é bem recebido pelos alunos, porque não utilizar dessas ferramentas também no ensino acadêmico, vale ressaltar a fala de Dourado (2017. p. 36), “Neste sentido, defendemos a importância da construção de novas tecnologias didáticas, capazes de inserir gradualmente os educandos no mundo acadêmico.” No caso desse trabalho, o jogo voltado para o ensino da geometria.

Dessa forma, este trabalho foi desenvolvido “a partir dos encontros” do Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAPINMAT), que sabendo das lacunas na metodologia de ensino, estuda como unificar a matemática ao cotidiano, objetivando a confecção de materiais que auxiliem tanto o corpo docente que teria um recurso didático a sua disposição, possibilitando trabalhar com materiais pedagógicos, e rejuvenescendo alguns métodos ultrapassados de ensino, quanto também aos discentes, que poderão ter acesso ao ensino da matemática de forma mais clara, dinâmica e através de jogos, comumente presentes no cotidiano, mantendo inclusive, grande parte das regras do modelo tradicional afim de facilitar a compreensão. Além disso o ensino da matemática ao lúdico, ensinando de forma dinâmica e divertida, visando abranger grande parte dos alunos que possuem aversão a disciplina de forma significativa e prejudicial, tendo em vista que a matemática engloba desde os fenômenos mais triviais aos mais complexos, presentes no dia a dia.

Deste modo, foi feito o Bingo da Geometria, assim surgem duas indagações, “Mas porque utilizar como material didático o bingo?” e “porque associar com a geometria?”. Para nosso primeiro questionamento observamos que o bingo é muito popular por todo o Brasil, jogado com cartelas de números distribuídos em colunas nomeadas com as letras das palavras “BINGO”, com cada coluna possuindo 5 números; são sorteadas pedras com valores de 1 a 75 e quem preencher o bingo conforme a regra preestabelecida ganha o jogo o contemplado geralmente recebe um prêmio, motivo que leva muitos a jogarem bingo, então pensamos porque não atrair os alunos com essa premissa, de que o bingo está vinculado a um possível prêmio, no caso um entendimento mais lúdico de fórmulas matemáticas, ou quem sabe um estímulo de valor simbólico. Respondendo à questão posterior ao do bingo, resolvemos trabalhar a geometria por ela sempre está vinculada nas disciplinas desde os inícios das atividades escolares e pela sua ampla possibilidade de aplicações, já que as formas geométricas estão ao todo redor.

OBJETIVO

2.1 OBJETIVO GERAL

Vincular a geometria através de sala de aula e a praticidade obtida com o jogo “Bingo das Geometrias”, contribuindo com um ensino diferenciado e uma aprendizagem significativa.

2.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

- Apresentar o “Bingo das Geometrias” como um recurso pedagógico que favorece o elo entre o ensino da teoria e uma aprendizagem satisfatória.
- Mostrar que o jogo pode ser inserido nas componentes que contemple a geometria, podendo ser utilizado como uma dinâmica de fixação.
- Aproveitar do jogo para fazer uma avaliação diagnóstica dos discentes, observado habilidades e competências.
- Motivar os alunos através de estímulos lúdicos que contemplem o bingo e a geometria.

METODOLOGIA

Dentre os objetos e/ou jogos matemáticos propostos pelo laboratório de matemática (LAPINMAT), ressaltamos neste trabalho o Bingo das Geometrias, que contempla o conteúdo geométrico (plano, espacial e analítico) e o recurso metodológico (bingo), fornecendo habilidades como percepção dos objetos geométricos a partir de sua área, altura, volume e outras fórmulas; familiaridade com a escrita de tais fórmulas através da repetição do sorteio das peças; lembrar ou aprender conceitos como arestas, segmentos, lado, altura e entre outras estruturas semelhantes.

1ª etapa

A proposta inicial para o jogo era englobar várias funções de diversas áreas da matemática como Geometria, Trigonometria, Cálculo Diferencial e Integral, Análise Combinatória e Lógica. Portanto fizemos um protótipo de jogo com duas cartelas, cuja as respostas eram colocadas viradas para baixo em peças separadas, semelhante ao jogo da memória, e cada jogador em sua vez viraria uma peça, e caso tivesse a resposta em sua cartela tinha a oportunidade a uma nova rodada, caso não tivesse era a vez do outro jogador e vence o jogo quem completasse a cartela primeiro.

2ª etapa

Diante de várias rodadas do jogo foram encontradas algumas lacunas, como o fato do bingo ser viável de ser jogado apenas por turmas do ensino superior que já estudaram todas as componentes. Logo turmas calouras possivelmente não estariam aptas para o bingo, o que reduziria o público alvo, foi então que surgiram ideias de como poderíamos abranger um quantitativo maior de pessoas. Assim delimitamos a disciplina que seria contemplada com o jogo, e escolhemos a geometria (plana, espacial e analítica), e ajustamos as regras convencionais do bingo tradicional para o nosso jogo.

3ª etapa

Fizemos uma revisão bibliográfica acerca das fórmulas mais conhecidas da Geometria, separando-as em planas, espaciais e analíticas, e nomeamos este instrumento didático como Bingo das Geometrias.

4ª etapa

Elaboramos as cartelas que foram dispostas no formato 5x5, onde as duas primeiras colunas são relacionadas a geometria plana, a terceira e quarta coluna a geometria espacial, e a última e quinta coluna com os conteúdos da geometria analítica, e no centro da cartela substituímos o que no bingo é chamado de free, pela logo do Laboratório Pedagógico e Informática de Matemática (LAPINMAT) da UFPA campus Bragança. Vale ressaltar que na figura 1 ainda está com um símbolo do protótipo inicial.

5ª etapa

Para as cartelas utilizamos de permutações sem repetições para dispor as colunas já citadas com os conteúdos de Geometria em suas respectivas posições que estabelecemos na quarta etapa, e para as pedras do bingo foram feitos recortes em papel com o resultado dos problemas dispostos nas cartelas.

Figura 1: Bingo das Geometrias

BINGO DAS GEOMETRIAS				
Geometria Plana	Geometria Plana	Geometria Espacial	Geometria Espacial	Geometria Analítica
$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$	$A = \frac{Dd}{2}$	l^3	$\frac{\pi r^2 h}{3}$	$y - y_0 = m(x - x_0)$
$a^2 + b^2 = c^2$	$A = \pi r^2$	$a \cdot b \cdot c$	$l\sqrt{3}$	$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$
l^2	$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360^\circ$	π	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$
$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$	$C = 2\pi r$	$\pi r^2 h$	$\alpha \cap \beta = \emptyset$	$d_{AB} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$
$A = \frac{(B + b)h}{2}$	$4l$	$\frac{4\pi r^3}{3}$	$\frac{l^2 h}{3}$	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

(Fonte: Os autores)

REGRAS DO JOGO

Objetivo geral do jogo: O Bingo das Geometrias é semelhante ao bingo convencional, cujo objetivo do jogo é completar as cartelas pelas regras que forem preestabelecidas, como quina horizontal ou vertical, ou cartela cheia. Preenchendo com as pedras que vão sendo sorteadas, e aquele que primeiro atingir o objetivo ganha; os dois bingos se diferenciam apenas nas pedras e nas disposições das cartelas, enquanto no bingo comumente são sorteados números de 1 a 75, que também estão distribuídos nas cartelas; no Bingo das Geometrias temos fórmulas distribuídas nas cartelas, e as pedras do sorteio são as respostas dessas questões; e podendo ser jogado de duas maneiras, o modo de jogo rápido e o completo; é indicado que se joguem em grupos de até 4 pessoas em uma turma de 40 alunos.

Modo de jogo rápido: Ganhará aquele grupo ou jogador, que primeiro completar de maneira correta quinas verticais ou horizontais com as peças que forem sorteadas aleatoriamente.

Modo de jogo completo: Ganhará aquele grupo ou jogador, que primeiro completar de maneira correta toda a cartela com as peças que forem sorteadas aleatoriamente.

Público alvo: Discentes e docentes, que já tenham desfrutado anteriormente da teoria relacionada a Geometria.

Composição: 10 cartelas e 58 pedras (26 planas, 14 espaciais e 18 analíticas)

Instruções: **1.** Pode ser jogado por 2 ou até 10 grupos com 4 alunos em sala de aula, em outro ambiente pode se jogar com no mínimo 3 pessoas, onde 2 ficam com cartelas e o outro fica sendo o cantador, que é responsável por sortear e cantar as pedras do bingo. **2.** Cada grupo receberá de forma aleatória sua cartela distribuída pelo cantador (professor). **3.** O jogo inicia quando o cantador (professor) começa a sacudir um recipiente contendo as pedras de modo a cantar as pedras retiradas. **4.** Cada jogador ou grupo deve marcar (com pedrinhas, milho, fichas, etc..) na cartela caso sua pedra tenha sido cantada. **5.** No caso de jogo completo, ganha o jogador ou grupo que preencher de modo correto sua cartela. **6.** É necessário que o cantador (professor) certifique de que realmente as pedras que saíram contemplem o jogo completo apresentado.

CONCLUSÃO

Reconhecemos que por se tratar de um bingo, a aleatoriedade das peças retiradas e a cartela que os jogadores escolherem influenciará bastante no jogo. Porém com o processo de visualizar as fórmulas e relacionar com os seus resultados corretos, o discente vai aprimorando com o decorrer de sua participação no jogo seus conhecimentos voltados ao estudo da Geometria, e assim facilitando seus conhecimentos sobre essa área da matemática. Podemos observar a relevância do trabalho e do instrumento aqui descrito, para o ensino aprendizagem das Geometrias, pois deixam as aulas atrativas e despertam o raciocínio lógico.

Pretendemos apresentar e aplicar este recurso como atividade com os alunos da graduação, em especial discentes do curso de matemática, de modo a ratificar nosso arcabouço teórico quanto a eficácia na utilização deste material.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DOURADO, I. P. (2017). Mediação didática no Ensino Superior—inventividade, níveis de abstração e o uso da metáfora como recurso didático no ensino de sociologia. *Revista Brasileira de Ensino Superior*.
- [2] LUCCAS, S. e BATISTA, I. L. (2008). A importância da contextualização e da descontextualização no ensino de Matemática: uma análise epistemológica. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*.
- [3] SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. e CÂNDIDO, P. (2000). *Brincadeiras Infantis nas Aulas de Matemática – V1: Coleção Matemática de 0 a 6*. Penso Editora.



CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS NO PLANO

ÂNDSON J.S. ALMDEIDA

20/06/2022 - 24/06/2022

SUMÁRIO

1 Resultados Gerais

2 Isometrias do Plano

Referências

RESULTADOS GERAIS

Definição 1.1. Seja uma função $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que satisfaça a propriedade de $\forall x, y \in \mathbb{R}^n |J(x) - J(y)| = |x - y|$ é uma isometria de \mathbb{R}^n .

Provaremos primeiro que o conjunto $M_n = \{J | J \text{ é uma isometria de } \mathbb{R}^n\}$ é um grupo.

Teorema 1.2. *As translações são Isometrias.*

Demonstração.

$$\|T_v(x) - T_v(y)\| = \|(x + v) - (y + v)\| = \|x - y\|$$

□

Teorema 1.3. *As transformações lineares ortogonais (que preservam produto interno) são isometrias.*

Demonstração. $\langle J(x - y), J(x - y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \|J(x - y)\|^2 = \|x - y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|J(x - y)\| = \|x - y\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|J(x) - J(y)\| = \|x - y\|$$

□

Teorema 1.4. *Seja uma isometria $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria com $J(0) = 0$. Então ela é um operador linear ortogonal.*

Demonstração.

$$\|J(x) - J(0)\| = \|x - 0\| \Rightarrow \|J(x)\| = \|x\| \quad (1.1)$$

Pela definição de isometria, segue que

$$\begin{aligned} \|J(x) - J(y)\|^2 &= \|x - y\|^2 \\ \langle J(x) - J(y), J(x) - J(y) \rangle &= \langle x - y, x - y \rangle \\ \|J(x)\|^2 + \|J(y)\|^2 - 2\langle J(x), J(y) \rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Usando (1.1)

$$\langle J(x), J(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (1.2)$$

é uma transformação que preserva produto internos.

Veriviquemos a linearidade.

$$\begin{aligned} \|J(x) + J(y) - J(x + y)\|^2 &= \\ = \|J(x) + J(y)\|^2 + \|J(x + y)\|^2 - 2\langle J(x) + J(y), J(x + y) \rangle &= \\ = \|J(x) + J(y)\|^2 + \|x + y\|^2 - 2\langle x, x + y \rangle - 2\langle y, x + y \rangle &= \\ = \|J(x) + J(y)\|^2 + \|x + y\|^2 - 2\langle x + y, x + y \rangle &= \\ = \|J(x) + J(y)\|^2 - \|x + y\|^2 &= \\ = \|J(x)\|^2 + \|J(y)\|^2 + \langle J(x), J(y) \rangle - \|x + y\|^2 &= \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle - \|x + y\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Assim temos

$$J(x + y) = J(x) + J(y) \quad (1.3)$$

Agora

$$\begin{aligned} \|\lambda J(x) - J(\lambda x)\|^2 &= \langle \lambda J(x) - J(\lambda x), \lambda J(x) - J(\lambda x) \rangle = \\ = \|\lambda J(x)\|^2 + \|J(\lambda x)\|^2 - 2\langle \lambda J(x), J(\lambda x) \rangle &= \\ = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|\lambda x\|^2 - 2\lambda \langle x, \lambda x \rangle &= \\ = 2\lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda^2 \langle x, x \rangle &= 0 \end{aligned}$$

E obtemos

$$J(\lambda x) = \lambda J(x) \quad (1.4)$$

Concluindo a demonstração. \square

Teorema 1.5. *A composta de duas isometrias $J \circ L$ é uma isometria.*

Demonstração.

$$\|J(L(x)) - J(L(y))\| = \|L(x) - L(y)\| = \|x - y\|$$

$$\|(J \circ L)(x) - (J \circ L)(y)\| = \|x - y\|$$

\square

Teorema 1.6. *Toda isometria $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser escrita como $J = T_v \circ R$, com T_v uma translação e R uma transformação linear ortogonal, além disso, esta decomposição é única.*

Demonstração. Tomemos $v = J(0)$. Temos que $R(x) = T_{-v}J = J(x) - v$ é uma isometria e $R(0) = 0$, logo é uma transformação linear ortogonal, com isso

$$J(x) = v + R(x) = T_v R(x)$$

como queríamos. A unicidade é imediata. \square

O próximo é provavelmente o resultado mais importante desta seção.

Teorema 1.7. *Toda isometria $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bijetora.*

Demonstração. A injetividade é imediata pois $\|J(x) - J(y)\| = 0 \Rightarrow \|x - y\| = 0$. Para obtermos a sobrejetividade, temos o teorema do núcleo e da imagem da álgebra linear, assim para toda transformação linear ortogonal $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, como seu Kernel é $\{0\}$ sua imagem deve possuir dimensão n , logo, ser sobrejetora. As translações são bijetoras, uma vez que $\|(x + v) - (y + v)\| = 0 \Rightarrow \|x - y\| = 0$, e como a composta de duas bijeções é uma bijeção, toda isometria de \mathbb{R}^n será bijetora. \square

Corolário 1.8. *Toda isometria $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui inversa $J^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sua inversa é uma isometria.*

Demonstração. A existência da inversa vem de J ser uma bijeção. Temos

$$\|J(J^{-1}(x)) - J(J^{-1}(y))\| = \|J^{-1}(x) - J^{-1}(y)\|$$

$$\|x - y\| = \|J^{-1}(x) - J^{-1}(y)\|$$

□

Teorema 1.9. *O conjunto $M_n = \{J \mid J \text{ é uma isometria de } \mathbb{R}^n\}$ munido com a operação de composição de funções é um grupo.*

Teorema 1.10. *São homomorfismos :*

(i) *A projeção $\pi : M_n \rightarrow M_n$, dada por $\pi(T_v R) = R$*

(ii) *A função $\sigma : M_n \rightarrow \{-1, 1\}$ dada por $\sigma(J) = (\det \circ \pi)(J)$.*

Uma última propriedade que merece ser enunciada é a seguinte.

Proposição 1.11. $RT_v = T_{Rv}R$

Demonstração.

$$RT_v(u) = R(T_v u) = R(u + v) = R(u) + R(v) = T_{Rv}R(u)$$

□

ISOMETRIAS DO PLANO

Teorema 2.1. *Seja $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear ortogonal com $\det(R) = 1$, então R é da forma $R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Escrevamos $R = [a_{ij}]$. Como $\det(R) = 1$ temos a equação $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$.

Por ser um operador ortogonal, temos $R^{-1} = R^T$ e assim $RR^T = I$, de onde obtemos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12} & a_{22}^2 + a_{21}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos assim o sistema

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$$

$$a_{22}^2 + a_{21}^2 = 1$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$$

$$a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12} = 0$$

Ao resolvermos esse sistema, obtemos as relações $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$ e $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, logo, podemos tomar $a_{11} = \cos(\theta)$ e $a_{21} = \sin(\theta)$ \square

Chamamos esse tipo por rotações. Representaremos as rotações por R_θ .

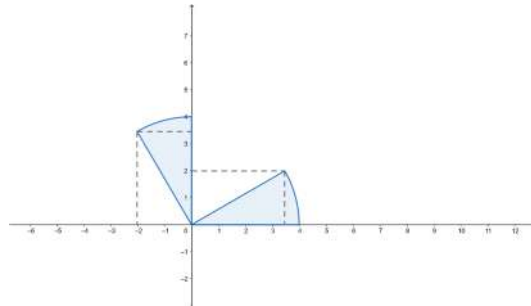


Figura 2.1: Exemplo de rotação agindo sobre a base canônica

Proposição 2.2. $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$, obtido de forma imediata a partir das fórmulas para a soma do cosseno e do seno.

Teorema 2.3. Seja uma isometria $T_v R_\theta$, se $\theta \neq 0$ então $T_v R_\theta$ é uma rotação em torno de algum ponto.

Demonstração. Consideremos se R possui um ponto fixo estudando o sistema $v + R(u) = u \Leftrightarrow v = (I - R)u$. Calculemos $\det(I - R)$:

$$I - R = \begin{bmatrix} 1 - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\det(I - R) = (1 - \cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2$$

$$\det(I - R) = 1 + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 - 2\cos(\theta)$$

$$\det(I - R) = 2 - 2\cos(\theta)$$

Para $\theta \neq 0$ temos $\det(I - R) \neq 0$, assim R possui um ponto fixo. Mudando o sistema de coordenadas podemos tomar o ponto fixo de R como sendo 0, o que implica que R é uma rotação. \square

Chamaremos a reflexão em torno do eixo- x por $r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

O interesse em r se dá pelo seguinte resultado

Proposição 2.4. Seja uma transformação ortogonal P com $\det(P) = -1$. Então $P = R_\theta r$ para algum θ

Demonstração. Temos $r^2 = I$, desse modo $P = Prr \Rightarrow \det(P) = \det(Pr) \det(r) \Rightarrow -1 = \det(Pr)(-1) \Rightarrow \det(Pr) = 1$ e portanto $Pr = R_\theta$ para algum θ . \square

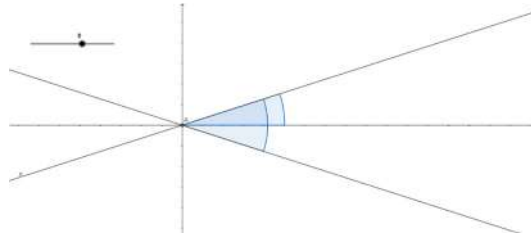


Figura 2.2: Exemplo de reflexão seguida de rotação

O interesse na proposição acima se dá porque $R_\theta r$ equivale a uma reflexão em torno da reta $\cos(\frac{\theta}{2})y = \sin(\frac{\theta}{2})x$, devido a considerações geométricas.

Já classificamos as isometrias J tais que $\sigma(J) = 1$. Para poder classificar as com orientação negativa, devemos saber em que situação elas possuem pontos fixos, pois desse modo podemos mudar as coordenadas e tomar este ponto fixo como sendo 0. Dado $J = T_v P$, podemos mudar as coordenadas e considerar $P = r$

$$T_v r(u) = u \Rightarrow r(u) = u - v \Rightarrow (u_1, -u_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

De onde obtemos que $v_1 = 0$, de modo que $T_v P$ é uma reflexão somente quando v é ortogonal a reta de reflexão de P .

Teorema 2.5. *Classificamos as isometrias no plano em quatro tipos*

(i) $\sigma(J) = 1$ são translações ou reflexões

(ii) $\sigma(J) = -1$ são reflexões ou um quarto tipo, que chamamos glide.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] *ARTIN, M. (2010). Algebra. Pearson.*
- [2] *GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. (2015). Elementos de álgebra IMPA.*
- [3] *LIMA, E.L. (2014). Álgebra Linear. IMPA.*



DINÂMICA DE LIMITE SINGULAR E ATRADORES
PARA EQUAÇÕES DE ONDA ACOPLADAS

RONAL Q. CALJARO, MIRELSON M. FREITAS, MAURO
L. SANTOS E ANDERSON A. RAMOS

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

*Dedico este trabalho a minha querida parceira
Isabel.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Preliminares, Hipótese e Identidades de Energia

1.1 Preliminares

1.2 Hipótese

1.3 Identidades de Energia

2 Boa colocação do problema e existência do Atrator Global

2.0.1 Boa colocação

2.0.2 Atrator Global

3 Limite Singular e Semicontinuidade Superior

3.0.1 Limite singular

3.0.2 Semicontinuidade

Referências

PREFÁCIO

Neste trabalho abordaremos o problema de limite singular para duas equações de onda conectadas em paralelo quando o coeficiente de acoplamento de mola tende para infinito. Mais precisamente, nosso interesse é saber como obtemos a equação de onda única e como resolvemos este problema no contexto de duas equações de onda acopladas conectadas em paralelo.

Muitos autores estudaram o comportamento assintótico de soluções para equações de ondas acopladas em paralelo incorporando efeitos dissipativos. Por exemplo, Najafi e Wang [15] consideraram o seguinte sistema uni-dimensional de equações de onda acopladas em paralelo com molas e amortecedores viscosos

$$\begin{cases} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(u_t - v_t) = 0, & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_{tt} - c_2^2 v_{xx} - \alpha(u - v) - \beta(u_t - v_t) = 0, & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

onde as constantes de acoplamento $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são coeficientes de amortecimento e mola, respectivamente. Eles provaram a estabilidade exponencial do sistema (1) considerando diferentes condições de contorno e velocidades de propagação de ondas. Cálculos numéricos foram apresentados para confirmar os resultados teóricos. Najafi [16] considerou o sistema de duas equações hiperbólicas acopladas em paralelo

$$\begin{cases} u_{tt} - c_1^2 \Delta u + l(u - v) = 0, & \text{em } \Omega_u \times (0, \infty), \\ v_{tt} - c_2^2 \Delta v + l(v - u) = 0, & \text{em } \Omega_v \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2)$$

onde $l > 0$ é a constante de mola distribuída. Ele estudou estimativas para estabilidade exponencial e decaimento da energia do sistema (2). Para isso, soluções com decaimento uniforme sobre regiões limitadas foram obtidas em

\mathbb{R}^n ($n \leq 3$). Najafi, Sarhangi e Wang [17] consideraram o seguinte sistema unidimensional de equações de onda (o qual foi projetado a servir como um modelo matemático para o controle de sistemas de suspensão)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \alpha(v - u), & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \\ v_{tt} - c^2 v_{xx} = \alpha(u - v), & \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3)$$

onde $\alpha > 0$ é a constante de mola distribuída. Eles estudaram estabilidade do sistema (3) com condições de fronteira fixas e livres. determinaram as configurações adequadas para os controles de feedback e as condições sob as quais o decaimento exponencial uniforme é atingido para a energia de cordas acopladas vibrantes em paralelo para todas as condições iniciais. Rajaram e Najafi [19] consideraram o seguinte sistema de duas equações de onda acopladas conectadas em paralelo em \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u - \alpha(v - u) - \beta(v_t - u_t) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ v_{tt} - c^2 \Delta v - \alpha(u - v) - \beta(u_t - v_t) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4)$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são constantes de mola e amortecimento, respectivamente. Eles provaram que para o sistema (4) apesar do amortecedor distribuído existe um subespaço de estados que é instável. Provaram um resultado de controlabilidade exata com controles de fronteira Dirichlet sem restrições nos parâmetros de acoplamento.

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico de soluções do seguinte sistema amortecido de equações de ondas acopladas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + g_1(u_t) + f_1(u, v) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ v_{tt} - v_{xx} - \alpha(u - v) + g_2(v_t) + f_2(u, v) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = 0, & t > 0, \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)), & \text{em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)), & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (5)$$

onde $g_1(u_t)$ e $g_2(v_t)$ representam os termos de damping não lineares, α é o coeficiente de acoplamento da mola, f_1 e f_2 são termos de fonte não lineares.

DINÂMICA DE LIMITE SINGULAR E ATRADORES PARA EQUAÇÕES DE ONDA ACOPLADAS VII

Nosso objetivo é obter a existência e propriedades do atrator global para o problema (5). O principal resultado desta seção é investigar o comportamento assintótico do atrator global quando o coeficiente de mola α tende ao infinito. Mais precisamente, provamos que quando $\alpha \rightarrow +\infty$, a família de atratores do problema (5) converge no sentido da semicontinuidade superior para o atrator global da seguinte equação de onda simple com damping não linear.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(u_t) + f(u) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (6)$$

O problema limite (6) pode ser obtido (formalmente) como segue: Primeiramente, somamos as equações em (5) e depois coloque $v = u$. Em segundo lugar, assumamos a condição de compatibilidade

$$f_1(u, u) = f_2(u, u) = f(u), \quad \text{e } g_2(u_t) = g_1(u_t) = g(u_t). \quad (7)$$

Este procedimento formal fornece a equação de onda (6).

As principais características do trabalho são resumidas a seguir:

- (i) Considerando o sistema (5) com damping não linear atuando nas duas equações de onda, provamos a existência do atrator global. Também provamos que o sistema é gradiente e daí que o atrator global é caracterizado pela variedade instável de um conjunto de soluções estacionárias.
- (ii) Provamos que o nosso sistema é quase-estável estabelecendo a desigualdade de estabilizabilidade uniformemente em α . Então concluímos a regularidade e dimensão fractal finita do atrator global.
- (iii) Provamos a convergência de soluções do sistema (5) em um intervalo de tempo finito no limite $\alpha \rightarrow +\infty$. Mais precisamente, provamos que a solução (u^α, v^α) das duas equações de onda (5) converge (em algum sentido) quando $\alpha \rightarrow +\infty$ para uma função (u, u) onde u resolve a equação de onda única (6).

- (iv) Estabelecemos a relação entre o atrator global do sistema (5) e o atrator global da equação de onda limite (6). Mais precisamente, provamos que a família de atratores globais \mathcal{A}_α do problema (5) converge no sentido da semicontinuidade superior para o atrator global \mathcal{A}_∞ da equação de onda (6) com $\alpha \rightarrow +\infty$ em um espaço de fase adequado.
- (v) A principal dificuldade aqui é obter estimativas uniformes para o atrator global \mathcal{A}_α do problema (5) com relação ao coeficiente de mola α . Para obter estimativas usamos a estrutura gradiente para construir um conjunto absorvente limitado uniformemente com relação ao parâmetro α .

Este trabalho deu novas contribuições para a teoria relacionada com a dinâmica não linear de duas ondas acopladas, e teve como resultado um artigo publicado [8].

BELÉM, JUNHO de 2022

Ronal Quispe Caljaro
Mirelson Martins Freitas
Mauro Lima Santos
Anderson de Jesus Araújo Ramos

PRELIMINARES, HIPÓTESE E IDENTIDADES DE ENERGIA

1.1. PRELIMINARES

As seguintes notações serão usadas no resto da seção:

$$\|u\|_q = \|u\|_{L^q(0,L)}, \quad q \geq 1, \quad \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{L^q(0,L)}.$$

Em $H_0^1(0, L)$ temos a desigualdade de Poincaré

$$\lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \|u_x\|_2^2, \quad \forall u \in H_0^1(0, L), \quad (1.1)$$

onde $\lambda_1 > 0$ é a constante de Poincaré (o menor autovalor de $-\partial_{xx}$). Portanto, $\|u\|_{H_0^1(0,L)} = \|u_x\|_2$ define uma norma em $H_0^1(0, L)$. Nossa análise é dada no seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L). \quad (1.2)$$

Este é um espaço de Hilbert munido com produto interno. Dados $z, \tilde{z} \in \mathcal{H}$ definimos o produto interno

$$(z, \tilde{z}) = \langle u', \tilde{u}' \rangle + \langle v', \tilde{v}' \rangle + \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \langle v_x, \tilde{v}_x \rangle + \alpha \langle u - v, \tilde{u} - \tilde{v} \rangle. \quad (1.3)$$

A norma induzida por esse produto interno é dada por

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \alpha \|u - v\|_2^2, \quad (1.4)$$

para todo $z = (u, v, \varphi, \psi) \in \mathcal{H}$.

1.2. HIPÓTESE

Consideramos as seguintes hipótese sobre os termos não lineares.

(i) Existe uma função $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nabla F = (f_1, f_2), \quad (1.5)$$

e $f_i, i = 1, 2$ são funções satisfazendo

$$|\nabla f_i(u, v)| \leq \beta_0 \left(1 + |u|^{\theta-1} + |v|^{\theta-1}\right), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

com $f_i(0, 0) = 0$, $\beta_0 > 0$ e $\theta \geq 1$. Além disso, suponhamos que existem constantes $\beta_1 \geq 0$, $m_f > 0$ tal que

$$F(u, v) \geq -\beta_1 (|u|^2 + |v|^2) - m_f, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

e

$$\nabla F(u, v) \cdot (u, v) - F(u, v) \geq -\beta_1 (|u|^2 + |v|^2) - m_f, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

onde $0 \leq \beta_1 < \frac{\lambda_1}{2}$, $\lambda_1 > 0$ denota a constante de Poincaré (o menor autovalor de $-\partial_x^2$).

(ii) Seja $g_i \in C^1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$ são funções monótonas crescentes com $g_i(0) = 0$ e existem constantes $m_i, M_i > 0$ tal que

$$m_i \leq g_i'(s) \leq M_i, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Observemos que a suposição (1.9) implica automaticamente a propriedade de monotonicidade, isto é,

$$(g_i(u) - g_i(v))(u - v) \geq m_i |u - v|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

1.3. IDENTIDADES DE ENERGIA

A energia linear do sistema, ao longo de uma solução (u, v, u_t, v_t) , é definida por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.11)$$

A contribuição dos termos de força implica na seguinte identidade

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \int_0^L F(u, v) dx, \quad (1.12)$$

onde (1.12) é a energia total do sistema.

A propriedade dissipativa do sistema (5) segue do lema abaixo.

Lema 1.1. *O funcional de energia associado à solução forte do sistema (5) satisfaz*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = - \int_0^L (g_1(u_t) u_t + g_2(v_t) v_t) dx \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (1.13)$$

Além disso, existem constantes positivas C_0, C_1 tal que

$$C_0 \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_1 \leq \mathcal{E}(t) \leq C_2 \left(1 + \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1}\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.14)$$

Demonstração: Multiplicando a primeira e a segunda equação em (5) por u_t e v_t , integrando por partes sobre $[0, L]$, usando (1.7) e a desigualdade de Poincaré não é difícil obter

$$\int_0^L F(u, v) dx \geq -\beta_1 (\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2) - Lm_f \geq -\frac{\beta_1}{\lambda_1} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - Lm_f,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u, v) dx &\geq \frac{1}{2} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{\beta_1}{\lambda_1} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - Lm_f \\ \mathcal{E}(t) &\geq C_0 \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - Lm_f, \end{aligned}$$

onde

$$C_0 = \frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} > 0 \text{ e } C_1 = Lm_f. \quad (1.15)$$

Consequentemente, a primeira desigualdade em (1.14) é provada.

Por outro lado, pela hipótese (1.6) e pelo fato de que $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^p(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L F(u, v) dx \leq C \left(\|u_x\|_2^{\theta+1} + \|v_x\|_2^{\theta+1} + 1 \right) \leq C \left((\|u_x\|_2 + \|v_x\|_2)^{\theta+1} + 1 \right).$$

Assim, usando a última estimativa vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u, v) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left((\|u_x\|_2 + \|v_x\|_2)^{\theta+1} + 1 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left(\|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1} + 1 \right) \\ &\leq C \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1} + C \left(\|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1} + 1 \right), \end{aligned}$$

onde concluímos que existe $C > 0$ satisfazendo a segunda desigualdade em (1.14). Portanto a prova está completa. ■

BOA COLOCAÇÃO DO PROBLEMA E EXISTÊNCIA DO ATRATOR GLOBAL

Nesta seção, mostraremos a existência de soluções fortes e fracas globais do sistema (5). A prova será feita pela teoria de semigrupos não lineares e operadores monótonos maximais (ver [5, 3]).

O problema (5) pode ser escrito como um problema de Cauchy abstrato da forma

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} + (\mathcal{A} + \mathcal{B})z(t) = \mathcal{F}(z(t)), & t > 0 \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $z(t) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ e $z_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)$, é a condição inicial, e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} -\varphi \\ -\psi \\ -u_{xx} + \alpha(u - v) \\ -v_{xx} - \alpha(u - v) \end{pmatrix}.$$

O domínio de \mathcal{A} é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{V} = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L),$$

$\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operador não linear é definido por

$$\mathcal{B}z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1(\varphi) \\ g_2(\psi) \end{pmatrix}$$

e $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é a função força definida por

$$\mathcal{F}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_1(u, v) \\ -f_2(u, v) \end{pmatrix}.$$

2.0.1. BOA COLOCAÇÃO

Teorema 2.1. *Suponha que as hipóteses (i) – (iii) são verdadeiras, então temos:*

(i) *Se a condição inicial $z_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (2.1) tem uma única solução fraca $z(t) \in C([0, \infty); \mathcal{H})$ com $z(0) = z_0$ dado por*

$$z(t) = e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})t} z_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)(\mathcal{A}+\mathcal{B})} \mathcal{F}(z(\tau)) d\tau.$$

(ii) *Se $z^1(t)$ e $z^2(t)$ são duas soluções fracas do problema (2.1) então existe uma constante positiva $C_0 = C(z^1(0), z^2(0))$, tal que*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{C_0 T} \|z^1(0) - z^2(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

(iii) *Se $z_0 \in D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, então a solução fraca acima é uma solução forte.*

Demonstração: A demonstração do Teorema será feita em 3 passos.

Passo 1: Soluções locais. Não é difícil provar que o operador \mathbb{A} é monótono maximal e \mathcal{F} localmente Lipschitz, então para todo $z_0 \in D(\mathbb{A})$ existe $t_{max} \leq \infty$ e uma única solução forte z para (2.1) definida no intervalo $[0, t_{max})$ por ([5], Teorema 7.2). Além disso, se $z_0 \in \mathcal{H}$, (2.1) tem uma única solução fraca $z \in C([0, t_{max}); \mathcal{H})$ e tais soluções satisfazem $\limsup_{t \rightarrow t_{max}^-} \|z(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty$, desde que se tenha $t_{max} < \infty$.

Passo 2: Soluções globais. Seja z uma solução forte definida em $[0, t_{max})$. Então temos

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0), \quad \forall t \in [0, t_{max}) \quad (2.3)$$

por (1.13). Portanto,

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{(\mathcal{E}(0) + C_1)}{C_0}, \quad \forall t \in [0, t_{max}). \quad (2.4)$$

seguinto da primeira desigualdade em (1.14). Por argumentos de densidade, a desigualdade (2.4) também é válido para soluções fracas. Portanto $t_{max} = \infty$.

Passo 3: Dependência contínua Seja $z^1 = (u^1, v^1, u_t^1, v_t^1)$ e $z^2 = (u^2, v^2, u_t^2, v_t^2)$ duas soluções fracas de (2.1). Então

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| e^{t\mathbb{A}} (z^1(0) - z^2(0)) \right\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \left\| e^{(t-s)\mathbb{A}} (\mathcal{F}(z^1(s)) - \mathcal{F}(z^2(s))) \right\|_{\mathcal{H}} ds$$

Usando o fato de que \mathcal{F} é localmente Lipschitz, temos que existe uma constante positiva $C_0 = C(\|z^1(0)\|_{\mathcal{H}}, \|z^2(0)\|_{\mathcal{H}})$ tal que

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|z^1(0) - z^2(0)\|_{\mathcal{H}} + C_0 \int_0^t \|z^1(s) - z^2(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, concluímos que

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{C_0 T} \|z^1(0) - z^2(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall t \in [0, T],$$

o qual prova a dependência contínua de soluções fracas. ■

A partir da boa colocção do problema, observemos que (5) define um sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$, onde \mathcal{H} é dado por (1.2), e $S_\alpha(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um semigrupo fortemente contínuo dado por

$$S_\alpha(t) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

onde $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ é a única solução fraca do sistema (5) com dados iniciais $z_0 = (u_0, v_0, v_1, p_1) \in \mathcal{H}$.

2.0.2. ATRATOR GLOBAL

O principal resultado da dinâmica de longo tempo é dado pelo seguinte teorema

Teorema 2.2. *Suponha que as afirmações do teorema 2.1 são verdadeiras e $\alpha \in [0, 1]$. Então:*

(i) *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é quase-estável (uniformemente em α) em qualquer conjunto positivamente invariante limitado $B \subset \mathcal{H}$.*

(ii) *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ possui um único atrator global compacto $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{H}$, o qual é caracterizado pela variedade instável $\mathcal{A}_\alpha = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$ do conjunto de soluções estacionárias*

$$\mathcal{N}_\alpha = \left\{ (u, v, 0, 0) \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} -u_{xx} + \alpha(u - v) + f_1(u, v) = 0 \\ -v_{xx} + \alpha(u - v) + f_2(u, v) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

(iii) *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ tem um conjunto absorvente limitado \mathcal{B} independente de α . Em particular,*

$$\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}, \quad \forall \alpha \in \Lambda.$$

(iv) *O atrator \mathcal{A}_α tem dimensão de Hausdorff e fractal finita $\dim_{\mathcal{H}}^f \mathcal{A}_\alpha$.*

(v) *O atrator global \mathcal{A}_α é limitado em*

$$\mathcal{V} = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))^2 \times (H_0^1(0, L))^2.$$

Além disso, cada trajetória $z = (u, v, u_t, v_t)$ em \mathcal{A}_α satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (\|u_t(t)\|_2^2 + \|v_t(t)\|_2^2 + \|u_x(t)\|_2^2 + \|v_x(t)\|_2^2 + \alpha \|u(t) - v(t)\|_2^2) \leq R_1, \quad (2.6)$$

e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (\|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|v_{tt}(t)\|_2^2 + \|u_{xt}(t)\|_2^2 + \|v_{xt}(t)\|_2^2 + \alpha \|u_t(t) - v_t(t)\|_2^2) \leq R_1, \quad (2.7)$$

para alguma constante $R_1 > 0$ independente de $\alpha \in [0, 1]$.

Lema 2.3. *Suponha que as hipóteses (i) – (iii) são verdadeiras. Então o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é gradiente, isto é, existe uma função de Lyapunov estrita Φ definida em \mathcal{H} . Além disso,*

$$\Phi(z) \rightarrow \infty \iff \|z\|_H \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Demonstração: Para demonstrar que o sistema dinâmico é gradiente devemos provar que existe um funcional de Lyapunov estrito sobre o espaço \mathcal{H} . Vamos definir a função $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por

$$\Phi(S_\alpha(t)z) = \frac{1}{2} \|(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u(t), v(t)) dx. \quad (2.9)$$

De (1.13) temos

$$\frac{d}{dt} \Phi(S_\alpha(t)z) = - \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t) dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.10)$$

o que mostra que $t \mapsto \Phi(S_\alpha(t)z)$ é uma função não crescente.

Agora suponhamos que $\Phi(S_\alpha(t)z) = \Phi(z)$, $\forall t \geq 0$. Então (2.10) implica que

$$- \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t) dx = \frac{d}{dt} \Phi(z) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Usando (1.9), temos

$$m_1 \|u_t\|^2 + m_2 \|v_t\|^2 \leq \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t) dx.$$

Daí, deduzimos que

$$\|u_t\|_2^2 = \|v_t\|_2^2 = 0.$$

Então, para todo $T > 0$ deduzimos que

$$u_t = v_t = 0 \quad \text{q.s. em } (0, L) \times (0, T)$$

Portanto $z = (u_0, v_0, 0, 0)$ é uma solução estacionária de $S_\alpha(t)$. Isso prova que Φ é uma função estrita de Lyapunov.

Agora, pela segunda desigualdade em (1.14), temos

$$\Phi(z) \leq C_2 \left(1 + \|z\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1}\right). \quad (2.11)$$

Considerando a última estimativa e tomando $\Phi(z) \rightarrow +\infty$ temos $\|z\|_{\mathcal{H}} \rightarrow +\infty$. Por outro lado, da primeira desigualdade em (1.14) temos

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{C_0} (\Phi(z) + C_1),$$

de onde concluímos que $\|z\|_{\mathcal{H}} \rightarrow +\infty$ implica que $\Phi(z) \rightarrow +\infty$, provando (2.8). Portanto a prova está completa. ■

Lema 2.4. *Suponha que as hipóteses (i) – (iii) são verdadeiras. Então o conjunto \mathcal{N}_α de soluções estacionárias de $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é limitado em \mathcal{H} uniformemente em α .*

Demonstração: Seja $z \in \mathcal{N}_\alpha$ tomado arbitrariamente. Sabemos que $z = (u, v, 0, 0)$ e z satisfaz o sistema

$$\begin{cases} -u_{xx} + \alpha(u - v) + f_1(u, v) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ -v_{xx} - \alpha(u - v) + f_2(u, v) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T). \end{cases} \quad (2.12)$$

Multiplicando a primeira equação em (2.12) por u e a segunda equação por v , respectivamente, somando e integrando sobre $(0, L)$, temos

$$\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \alpha \|u - v\|_2^2 = - \int_0^L \nabla F(u, v) \cdot (u, v) dx.$$

Usando, a desigualdade de Poincaré, (1.7) e (1.8), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} - \int_0^L \nabla F(u, v) \cdot (u, v) dx &\leq 2\beta_1 (\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2) + 2m_FL \\ &\leq \frac{2\beta_1}{\lambda_1} (\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2) + 2m_FL \\ &\leq \frac{2\beta_1}{\lambda_1} (\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \alpha \|u - v\|_2^2) + 2m_FL, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e portanto, usando (1.15),

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{2\beta_1}{\lambda_1} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 + 2m_FL \\ \left(1 - \frac{2\beta_1}{\lambda_1}\right) \|z\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2m_FL \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{\lambda_1}\right) \|z\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq m_FL \\ C_0 \|z\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq m_FL. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A demonstração está completa. ■

O teorema a seguir desempenha um papel importante para provar a existência de um atrator global e suas propriedades. Usualmente é conhecida como desigualdade de estabilidade.

Teorema 2.5. *Suponha que as hipóteses (i) – (iii) são verdadeiras. Seja $B \subset \mathcal{H}$ um conjunto invariante e positivamente limitado e sejam $S_\alpha(t)z^i = (u^i(t), v^i(t), u_t^i(t), v_t^i(t))$, $i = 1, 2$ soluções fracas de (5) com condições iniciais $z^i \in B$. Então, existem constantes ϑ_B , η_B , $C_B > 0$ dependendo de B mas, independentes de α , tal que*

$$E(t) \leq \vartheta_B E(0) e^{-\eta_B t} + C_B \sup_{s \in [0, t]} (\|u(s)\|_{2\theta}^2 + \|v(s)\|_{2\theta}^2), \quad (2.15)$$

para todo $t \geq 0$, onde $u = u^1 - u^2$ e $v = v^1 - v^2$.

Demonstração: Para $u = u^1 - u^2$ e $v = v^1 - v^2$ adotaremos as seguintes notações

$$F_i(u, v) = f_i(u^1, v^1) - f_i(u^2, v^2), \quad G_1(u_t) = g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2), \quad G_2(v_t) = g_2(v_t^1) - g_2(v_t^2).$$

Então, (u, v, u_t, v_t) resolve o sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + G_1(u_t) + F_1(u, v) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ v_{tt} - v_{xx} - \alpha(u - v) + G_2(v_t) + F_2(u, v) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = 0, & t > 0, \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)), & \text{em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)), & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (2.16)$$

Multiplicando a primeira e segunda equação em (2.16) por u e v e integrando

por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T E(t) dt &= \frac{1}{2} \left[\int_0^L (u_t u + v_t v) dx \right]_0^T + \int_0^T \int_0^L (|u_t|^2 + |v_t|^2) dx dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (G_1(u_t) u + G_2(v_t) v) dx dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (F_1(u, v) u + F_2(u, v) v) dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Vamos estimar o lado direito de (2.17). Usando as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^L (u_t u + v_t v) dx \right| &\leq \|u_t\|_2 \|u\|_2 + \|v_t\|_2 \|v\|_2 \\
 &\leq \frac{1}{2} (\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2) + \frac{1}{2\lambda_1} (\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2) \\
 &\leq \frac{1}{2} (\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2) + \frac{1}{2\lambda_1} (\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \alpha \|u - v\|_2^2) \\
 &\leq CE(t),
 \end{aligned}$$

onde $C = \max \{\lambda_1^{-1}, 1\}$. Assim, existe uma constante $C > 0$, independente de α , tal que

$$\left[\int_0^L (u_t u + v_t v) dx \right]_0^T \leq C (E(0) + E(T)). \tag{2.18}$$

Usando (1.9) e a desigualdade de Young, existe $C > 0$, independente de α ,

talque

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L G_1(u_t) u dx dt &\leq M_1 \int_0^T \int_0^L |u_t| |u| dx dt \\
&\leq M_1 \int_0^T \int_0^L [\epsilon |u|^2 + C_\epsilon |u_t|^2] dx dt \\
&\leq C_\epsilon \int_0^T \int_0^L |u_t|^2 dx dt + \epsilon \int_0^T \|u_x\|^2 dt \\
&\leq C_\epsilon \int_0^T \int_0^L G_1(u_t) u_t dx dt + \epsilon \int_0^T E(t) dt.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\int_0^T \int_0^L G_2(v_t) v dx dt \leq C_\epsilon \int_0^T \int_0^L G_2(v_t) v_t dx dt + \epsilon \int_0^T E(t) dt.$$

Então, as duas últimas desigualdades implicam

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (G_1(u_t) u + G_2(v_t) v) dx dt &\leq C_\epsilon \int_0^T \int_0^L (G_1(u_t) u_t + G_2(v_t) v_t) dx dt \\
&\quad + \epsilon \int_0^T E(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando (1.6), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (F_1(u, v) u + F_2(u, v) v) dx dt &\leq C_B \int_0^T (\|u\|_{2\theta} + \|v\|_{2\theta}) (\|u_x\|_2 + \|v_x\|_2) dt \\
&\leq C_{B,\epsilon} \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt \\
&\quad + \epsilon \int_0^T (\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2) dt \\
&\leq C_{B,\epsilon} \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt \\
&\quad + \epsilon \int_0^T E(t) dt,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

para alguma constante $C_{B,\epsilon} > 0$ dependendo de B, ϵ mas independente de α . Combinando as estimativas (2.18)-(2.20) e escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que existe $C, C_B > 0$ independente de α tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &\leq C(E(T) + E(0)) \\ &+ C \int_0^T \int_0^L (G_1(u_t) u_t + G_2(v_t) v_t) dx dt \\ &+ C_B \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Agora, multiplicamos a primeira e a segunda equação em (2.16) por u_t e v_t , e integrando por partes sobre $[0, L] \times [s, T]$ de modo que

$$\begin{aligned} &\int_s^T \int_0^L (G_1(u_t) u_t + G_2(v_t) v_t) dx dt \\ &= E(s) - E(T) - \int_0^T \int_0^L (F_1(u, v) u_t + F_2(u, v) v_t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para qualquer $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (F_1(u, v) u_t + F_2(u, v) v_t) dx dt &\leq C_B \int_0^T (\|u\|_{2\theta} + \|v\|_{2\theta}) (\|u_t\|_2 + \|v_t\|_2) dt \\ &\leq C_{B,\epsilon} \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt \\ &+ \epsilon \int_0^T E(t) dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Agora usamos (2.22) e (2.23), temos

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^T (G_1(u_t) u_t + G_2(v_t) v_t) dx dt &\leq E(0) + E(T) + \epsilon \int_0^T E(t) dt \\ &+ C_{B,\epsilon} \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em seguida, combinamos estimativas (2.21) e (2.24) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno com o qual obtemos

$$\int_0^T E(t) dt \leq C(E(T) + E(0)) + C_B \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt. \quad (2.25)$$

Agora, integramos (2.22) em relação a s de modo que

$$\begin{aligned} TE(T) &= \int_0^T E(t) dt - \int_0^T \int_s^T (G_1(u_t) u_t + G_2(v_t) v_t) dt ds \\ &\quad - \int_0^T \int_s^T \int_0^L (F_1(u, v) u_t + F_2(u, v) v_t) dx dt ds. \end{aligned}$$

Pela estimativa (2.23) e pelo fato de que $G_1(u_t) u_t + G_2(v_t) v_t > 0$, o seguinte é imediato

$$TE(T) \leq 2 \int_0^T E(t) dt + C_{B,T} \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt. \quad (2.26)$$

substituindo a estimativa (2.25) em (2.26) obtemos

$$TE(T) \leq C(E(T) + E(0)) + C_{B,T} \int_0^T (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2) dt,$$

onde as constantes $C, C_{B,T} > 0$ independentes de α . Escolhemos $T > 2C$ deduzimos que

$$E(T) \leq \gamma_T E(0) + C_{B,T} \sup_{s \in [0, T]} (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2), \quad (2.27)$$

onde

$$\gamma_T = \frac{C}{T - C} < 1.$$

Definindo

$$\chi_m = \sup_{s \in [mT, (m+1)T]} (\|u(s)\|_{2\theta}^2 + \|v(s)\|_{2\theta}^2), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

a estimativa (2.27) podemos reescrever como

$$E(T) \leq \gamma_T E(0) + C_{B,T} \chi_0.$$

Ao iterar a estimativa acima em intervalos $[mT, (m+1)T]$, $m \in \mathbb{N}$, deduzimos

$$\begin{aligned} E(mT) &\leq \gamma_T^m E(0) + C_{B,T} \sum_{k=1}^m \gamma_T^{m+1-k} \chi_{k-1} \\ &\leq \gamma_T^m E(0) + \frac{C_{B,T}}{1 - \gamma_T} \sup_{s \in [0, mT]} (\|u(s)\|_{2\theta}^2 + \|v(s)\|_{2\theta}^2). \end{aligned}$$

Para qualquer $t \geq 0$, existem $m \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, T)$ tal que $t = mT + r$. Então

$$E(t) \leq E(mT) \leq \gamma_T^{-1} \gamma_T^{\frac{1}{T}} E(0) + \frac{C_{B,T}}{1 - \gamma_T} \sup_{s \in [0, mT]} (\|u(s)\|_{2\theta}^2 + \|v(s)\|_{2\theta}^2).$$

Portanto,

$$E(t) \leq \vartheta_B E(0) e^{-\eta_B t} + C_B \sup_{s \in [0, mT]} (\|u(s)\|_{2\theta}^2 + \|v(s)\|_{2\theta}^2), \quad \forall t \geq 0,$$

com

$$\vartheta_B = \gamma_T^{-1}, \quad \eta_B = -\frac{\ln(\gamma_T)}{T}, \quad C_B = \frac{C_{B,T}}{1 - \gamma_T}.$$

A prova está completa. ■

Demonstração do Teorema (2.2).

- (i) Consideremos um conjunto positivamente invariante limitado $B \subset \mathcal{H}$ em relação a $S_\alpha(t)$, onde $S_\alpha(t) z^i = (u^i(t), v^i(t), u_t^i, v_t^i)$ para $z^i \in B$, $i = 1, 2$. Definimos também $u = u^1 - u^2$, $v = v^1 - v^2$, como antes. Segue de (2.2) que

$$\|S_\alpha(t) z^1 - S_\alpha(t) z^2\|_{\mathcal{H}} \leq a(t) \|z^1 - z^2\|_{\mathcal{H}} \quad (2.28)$$

com $a(t) = e^{C_0 t}$. Seja $X = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, e definimos a semi-norma

$$n_X := (\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Dado que a imersão unidimensional $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^{2\theta}(0, L)$ é compacta, então sabemos que n_X é semi-norma compacta em X .

Pela estimativa (2.15) deduzimos que

$$\|S_\alpha(t)z^1 - S_\alpha(t)z^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(t)\|z^1 - z^2\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{s \in [0,t]} [n_X(u(s), v(s))]^2, \quad (2.29)$$

onde $b(t) = \vartheta_B e^{-\eta_B t}$ e $c(t) = C_B$. claramente

$$b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0.$$

Dado que $B \subset \mathcal{H}$ é limitado, sabemos que $c(t)$ é limitado localmente em $[0, \infty)$. Então, com tudo isso, temos que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é quase-estável num conjunto positivamente invariante limitado $B \subset \mathcal{H}$ por ([6], Definição 7.9.2).

- (ii) Dado que o sistema $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é quase-estável, aplicando a proposição 7.9.4 em [6], então $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é assintoticamente suave. Assim, pelos lemas (2.3) e (2.4) e usando o corolário 7.5.7 em [6], sabemos que $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ tem um atrator global compacto dado por $\mathcal{A}_\alpha = \mathbb{M}_+(\mathcal{N}_{(\alpha)})$.
- (iii) Seja Φ o funcional de Lyapunov dado em (2.9). Por (1.14) e a observação 7.5.8 em [6], temos

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{\sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha} \Phi(z) + C_1}{C_0} \\ &\leq \frac{\sup_{z \in \mathcal{N}} \Phi(z) + C_1}{C_0} \\ &\leq \frac{C_2 \left(1 + \sup_{z \in \mathcal{N}} \|z\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1}\right) + C_1}{C_0}. \end{aligned}$$

Portanto, por (2.14), concluímos que existe uma constante $R > 0$ independente de α tal que

$$\sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha} \|z\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R.$$

Portanto, a bola fechada $\mathcal{B} = B(0, R_0)$ em \mathcal{H} de centro 0 e raio $R_0 > R$ é um conjunto absorvente limitado independente de $\alpha \in \Lambda$.

- (iv) De cima, $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é quase-estável no atrator \mathcal{A}_α . Assim, usando o teorema 7.9.6 em [6], sabemos que o atrator \mathcal{A}_α tem dimensão fractal finita.
- (v) Dado que o sistema $(\mathcal{H}, S_\alpha(t))$ é quase-estável no atrator \mathcal{A}_α com $c_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} c(t) = C_B < \infty$ segue do Teorema 7.9.8 em [6] que qualquer trajetória completa $z = (u, v, u_t, v_t)$ em \mathcal{A}_α tem as seguintes propriedades de regularidade

$$\begin{aligned} u_t, v_t &\in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(0, L)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(0, L)), \\ u_{tt}, v_{tt} &\in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(0, L)). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Em particular, existe $R > 0$ tal que

$$\|(u_t, v_t)\|_{H_0^1 \times H_0^1}^2 + \|(u_{tt}, v_{tt})\|_{L^2 \times L^2}^2 \leq R^2.$$

Usando (5) temos

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} + \alpha(u - v) + a_1(x)g_1(u_t) + f_1(u, v), \\ v_{xx} &= v_{tt} - \alpha(u - v) + a_2(x)g_2(v_t) + f_2(u, v). \end{aligned}$$

Assim, notemos que os termos não lineares são contínuos, com o qual concluímos que existe uma constante $R' > 0$ tal que

$$\|(u, v)\|_{H^2 \cap H_0^1}^2 \leq R'.$$

Portanto, (2.6) é satisfeito. Dado que o atrator global \mathcal{A}_α também pode ser caracterizado por

$$\mathcal{A}_\alpha = \{z(0); z \text{ é uma trajetória completa limitada de } S_\alpha(t)\},$$

concluímos que \mathcal{A}_α é limitada em \mathcal{H}_1 . De (iii) sabemos que o atrator \mathcal{A}_α é uniformemente limitado em \mathcal{H} em relação a α , então a estimativa (2.6) é satisfeita. Sabemos que, em particular, $(\mathcal{H}, S(t))$ é quase-estável em $B = \mathcal{A}_\alpha$, a constante $C_{\mathcal{A}_\alpha}$ é uniformemente limitada com relação a α . Além disso, uma vez que a imersão compacta $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$ é

independente de α se segue do Teorema 7.9.8 em [6] a regularidade (2.30) e existe $R_1 > 0$ independente de α tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (\|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|v_{tt}(t)\|_2^2 + \|u_{xt}(t)\|_2^2 + \|v_{xt}(t)\|_2^2 + \alpha \|u_t(t) - v_t(t)\|_2^2) \leq R_1,$$

e portanto, (2.7) é satisfeita. A prova esta completa.



LIMITE SINGULAR E SEMICONTINUIDADE SUPERIOR

O próximo resultado trata da semicontinuidade superior do atrator \mathcal{A}_α para o parâmetro $\alpha \rightarrow +\infty$. O análise de boa-colocação da equação de onda (6) é estudado no espaço de Hilbert

$$H_\infty = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L).$$

Pelos mesmos argumentos da prova do Teorema (2.2) o sistema dinâmico $(H_\infty, S_\infty(t))$ gerado pela equação de onda (6) tem um atrator global $A_\infty \subset H_\infty$.

3.0.1. LIMITE SINGULAR

O seguinte resultado fornece uma relação entre as soluções dos problemas (5) e (6).

Teorema 3.1. *Suponha que as hipóteses (i) – (iii) são verdadeiras. Seja $\alpha \rightarrow +\infty$ uma sequência de números positivos e $z^n = (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n)$ solução fraca para (5) com $\alpha = \alpha_n$ e condição inicial $z_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1) \in \mathcal{H}$ satisfazendo a relação*

$$v_0 = u_0 \in H_0^1(0, L). \quad (3.1)$$

Então para qualquer intervalo de tempo $[0, T]$ temos

$$\begin{cases} (u^n, v^n) \rightarrow (u, u) & \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; (H_0^1(0, L))^2), \\ (u_t^n, v_t^n) \rightarrow (u_t, u_t) & \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; (L^2(0, L))^2), \end{cases}$$

onde $u(t)$ é uma solução fraca para o problema (6) com condição inicial $u(0) = v_0$ e $u_t(0) = v_1$.

Demonstração: Seja $\mathcal{E}^n(t)$ denota a energia $\mathcal{E}(t)$ para a solução z^n . Usando a estimativa (1.14) e o fato de que $\mathcal{E}^n(t)$ é uma função não-crescente, obtemos

$$\|(u^n, v^n, u_t^n, v_t^n)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{\mathcal{E}^n(0) + C_1}{C_0} \leq \frac{C_2(1 + \|(u_0, v_0, u_1, v_1)\|_{\mathcal{H}}^{\theta+1}) + C_1}{C_0}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde as constantes C_1 e C_2 não dependem de α_n . Por (3.1) concluímos que $\|(u_0, v_0, u_1, v_1)\|_{\mathcal{H}}$ também é independente de α_n . Então, usando (1.4), existe uma constante $C > 0$ independente de α_n tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|u_t^n(t)\|_2^2 + \|v_t^n(t)\|_2^2 + \|u_x^n(t)\|_2^2 + \|v_x^n(t)\|_2^2) \leq C,$$

e

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^n(t) - v^n(t)\|_2^2 \leq \frac{C}{\alpha_n} \quad (3.2)$$

para qualquer $T > 0$. Assim, existem funções u, v tal que

$$\begin{cases} (u^n, v^n) \rightarrow (u, v) & \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; (H_0^1(0, L))^2), \\ (u_t^n, v_t^n) \rightarrow (u_t, v_t) & \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; (L^2(0, L))^2). \end{cases} \quad (3.3)$$

Então, dado que a imersão $H_0^1(0, L) \hookrightarrow H^{1-\epsilon}(0, L)$ é compacto, e $H^{1-\epsilon}(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$ para todo $\frac{1}{2} < \epsilon < 1$, então pelo Teorema de compacidade de Aubin, temos uma subsequência

$$(u^n, v^n) \rightarrow (u, v) \quad \text{fortemente em } C(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^2). \quad (3.4)$$

Por (3.2), a primeira convergência de (3.3) e a unicidade do limite fraco concluímos que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \quad u_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \quad \text{e} \quad v = u. \quad (3.5)$$

Então, resta mostrar que $u(t)$ é uma solução fraca para o problema (6) com condição inicial $u(0) = v_0$ e $u_t(0) = v_1$. Primeiramente, observamos que a solução fraca $z^n = (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n)$ satisfaz a seguinte identidade variacional

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_t^n, \varphi \rangle + \frac{d}{dt} \langle v_t^n, \psi \rangle + \langle u_x^n, \varphi_x \rangle + \langle v_x^n, \psi_x \rangle + \alpha_n \langle u^n - v^n, \varphi - \psi \rangle \\ + \langle g_1(u_t^n), \varphi \rangle + \langle g_2(v_t^n), \psi \rangle + \langle f_1(u^n, v^n), \varphi \rangle + \langle f_2(u^n, v^n), \psi \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo $\varphi, \psi \in H_0^1(0, L)$. Usando a primeira convergência em (3.3) vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_x^n + v_x^n, \varphi_x + \psi_x \rangle = \langle u_x + v_x, \varphi_x + \psi_x \rangle.$$

Usando (1.6) e a imersão $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$ deduzimos que

$$\begin{aligned} \langle f_1(u^n, v^n) - f_1(u, v), \varphi \rangle &= \int_0^L (f_1(u^n, v^n) - f_1(u, v)) \varphi dx \\ &\leq C(1 + \|u_x^n\|_2^{\theta-1} + \|v_x^n\|_2^{\theta-1} + \|u_x\|_2^{\theta-1} + \|v_x\|_2^{\theta-1})(\|u^n - u\|_2 + \|v^n - v\|_2) \|\varphi\|_2 \\ &\leq C(1 + \|u_x\|_2^{\theta-1} + \|v_x\|_2^{\theta-1}) \|\varphi\|_2 (\|u^n - u\|_2 + \|v^n - v\|_2) \\ &\leq C(1 + \|u_x\|_2^{\theta-1} + \|v_x\|_2^{\theta-1}) \|\varphi\|_2 (\|u^n - u\|_{H^{1-\epsilon}(0, L)} + \|v^n - v\|_{H^{1-\epsilon}(0, L)}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim por (3.7), (3.4) e (3.5) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_1(u^n, v^n), \varphi \rangle = \langle f_1(u, u), \varphi \rangle = \langle f_1(u), \varphi \rangle.$$

Analogamente, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_2(u^n, v^n), \psi \rangle = \langle f_2(u, u), \psi \rangle = \langle f(u), \varphi \rangle.$$

Usando a segunda convergência de (3.3) e (3.5), encontramos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_1(u_t^n), \varphi \rangle &= \langle g_1(u_t), \varphi \rangle = \langle g(u_t), \varphi \rangle, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_2(v_t^n), \psi \rangle &= \langle g_2(u_t), \psi \rangle = \langle g(u_t), \psi \rangle. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\psi = \varphi$, passando o limite em todos os termos em (3.6) concluímos que

$$\frac{d}{dt} \langle u_t, \varphi \rangle + \langle u_x, \varphi_x \rangle + \langle g(u_t), \varphi \rangle + \langle f(u), \varphi \rangle = 0,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(0, L)$. Assim, $u(t)$ é uma solução fraca da equação de onda (6) com condição inicial $(u(0), u_t(0)) = (v_0, v_1)$. A prova está completa. ■

3.0.2. SEMICONTINUIDADE

Agora enunciaremos e provaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2. *Suponha que as hipóteses (i) – (iii) são verdadeiras. Então, o atrator global \mathcal{A}_α é semicontínua superiormente quando $\alpha \rightarrow +\infty$, isto é,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathcal{H}^\epsilon}(\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\infty) = 0, \quad (3.8)$$

para todo $\frac{1}{2} < \epsilon < 1$, onde $\mathcal{H}^\epsilon = (H^{1-\epsilon}(0, L))^4$ e \mathcal{A}_∞ é uma imersão do atrator $\mathcal{A}_\infty \subset H_\infty$ no espaço de fase \mathcal{H} definido por

$$\mathcal{A}_\infty = \{z_0 = (u_0, u_0, u_1, u_1); (u_0, u_1) \in \mathcal{A}_\infty\}$$

Demonstração: Procedemos por contradição, Suponhamos que (3.8) não é verdadeira. Então, existe um $\epsilon > 0$ e uma sequência $\alpha_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}^\epsilon}(\mathcal{A}_{\alpha_n}, \mathcal{A}_\infty) \geq \epsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, existe uma sequência $\{z_0^n\} \subset \mathcal{A}_{\alpha_n}$ pela compacidade de \mathcal{A}_α tal que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}^\epsilon}(z_0^n, \mathcal{A}_\infty) \geq \epsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Seja $z^n(t) = (u^n(t), v^n(t), u_t^n(t), v_t^n(t))$ uma trajetória completa do atrator global \mathcal{A}_{α_n} tal que $z^n(0) = z_0^n$. Pelo Teorema (2.2)–(v) sabemos que

$$\begin{aligned} \{z^n\} &\text{ é uniformemente limitado em } L^\infty(\mathbb{R}, (H_0^1(0, L))^4), \\ \{z_t^n\} &\text{ é uniformemente limitado em } L^\infty(\mathbb{R}, (L^2(0, L))^4). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Então, pelo Teorema de compacidade de Simon (ver [21]), obtemos uma subsequência $\{z^n\}$ e $z \in C([-T, T]; \mathcal{H}^\epsilon)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [-T, T]} \|z^n(t) - z(t)\|_{\mathcal{H}^\epsilon} = 0. \quad (3.11)$$

Decorre das estimativas (2.6) e (2.7) que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^n(t) - v^n(t)\|_2^2 \leq \frac{C}{\alpha_n} \quad \text{e} \quad \sup_{t \in [0, T]} \|u_t^n(t) - v_t^n(t)\|_2^2 \leq \frac{C}{\alpha_n}.$$

Portanto $z(t) = (u(t), u(t), u_t(t), u_t(t))$ e do Teorema 3.1 deduzimos que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}; H_0^1(0, L)) \quad \text{e} \quad u_t \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2(0, L))$$

e $u(t)$ é solução fraca do problema (6) satisfazendo

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{ \|u_x(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 \} < \infty.$$

Segue que $(u(t), u_t(t))$ é uma trajetória completa limitada para a equação de onda (6). Assim $(u(0), u_t(0)) \in A_\infty$ o qual implica que $z(0) = (u(0), u(0), u_t(0), u_t(0)) \in \mathcal{A}_\infty$. De (3.11) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z^n(0) - z(0)\|_{\mathcal{H}^\epsilon} = 0$$

o qual contradiz (3.9). A prova está completa. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*. Stud. Math. Appl., vol. 25, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [2] V. Barbu, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite-Dimensional Systems*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.
- [3] V. Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Science and Business Media, 2010.
- [4] I. Chueshov, *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*, Springer, Berlin, 2015.
- [5] I. Chueshov, M. Eller and I. Lasiecka, *On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation*, Comm. Partial Differential Equations 27 (2002), 1901–1951.
- [6] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Von Karman Evolution Equations. Well-posedness and Long Time Dynamics*, Springer. New York (2010).
- [7] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Global Attractors for Mindlin-Timoshenko Plates and for Their Kirchhoff Limits*, Milan Journal of Mathematics 74 (2006), 117–138.
- [8] M. M. Freitas, R. Q. Caljaro, M. L. Santos and A. J. A Ramos, *Singular Limit Dynamics and Attractors for Wave Equations Connected in Parallel*, Applied Mathematics & Optimization 85 (2022), 1–19.

- [9] P. G. Geredeli and I. Lasiecka, *Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von Karman plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity*, *Nonlinear Anal.* 91 (2013) 72–92.
- [10] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [11] J. K. Hale and G. Raugel, *Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation*, *J. Differential Equations* 73 (1988) 197–214.
- [12] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 840. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [13] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [14] T. F. Ma and R. N. Monteiro, *Singular limit and long-time dynamics of Bresse systems*, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 49 (4) (2017) 2468–2495.
- [15] M. Najafi and H. Wang, *Exponential stability of wave equations coupled in parallel with viscous damping*, *Proceedings of 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, 15-17 Dec. 1993.
- [16] M. Najafi, G. R. Sarhangi, and H. Wang, *Stabilizability of coupled wave equations in parallel under various boundary conditions*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume: 42, Issue: 9, Sep. 1997.
- [17] M. Najafi, *Energy decay estimate for the boundary stabilization of the coupled wave equations*, *Mathematical and Computer Modelling*, 48 (2008) 1796–1805.
- [18] A. Pazy, *semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [19] R. Rajaram and M. Najafi, *Exact controllability of wave equations in \mathcal{R}^n coupled in parallel*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 356 (2009) 7–12.
- [20] J. C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, volume 28. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [21] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T, B)$* , , Annali di Matematica Pura ed Applicata 146 (4) (1987) 65–96.
- [22] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1995.



ALGUNS AVANÇOS SOBRE A CONJECTURA DE BESSE

HALYSON BALTAZAR

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 Introdução

2 Resultado principal

2.1 Preliminares

2.2 Resultados principais

Referências

PREFÁCIO

Estas notas tem por objetivo nortear a apresentação oral a ser realizada na X Bienal de Matemática, evento este realizado na cidade de Belém/PA entre os dias 20 e 24 de junho de 2022. Todo conteúdo descrito aqui faz parte de pesquisas recentes em matemática pura na área de geometria e os resultados principais que iremos apresentar, os quais podem ser vistos no capítulo 2, fazem parte do artigo [2].

Teresina, junho de 2022

Halysom Baltazar

INTRODUÇÃO

No início do século XX, um matemático alemão chamado David Hilbert, deu uma contribuição muito importante na teoria da relatividade de Albert Einstein. Resumidamente, Hilbert obteve uma nova abordagem para as soluções de campo de Einstein, tal descoberta foi realizada a partir do estudo variacional do funcional curvatura escalar total, que também é conhecido como funcional de Einstein-Hilbert. Destacamos por exemplo, que pontos críticos deste funcional restrito ao espaço das métricas riemannianas de volume unitário são precisamente as métricas Einstein, as quais, como falamos anteriormente são estruturas que apresentam o tensor de Ricci como múltiplo da métrica.

É conhecido que uma dada variedade compacta com métrica riemanniana fixada admite uma métrica com curvatura escalar constante em sua classe conforme, desta forma é natural se questionar o que acontece com os pontos críticos do funcional de Einstein Hilbert quando restrito ao espaço das métricas de volume unitário e curvatura escalar constante. Tal problema foi posto no início dos anos 80 onde conjecturou-se que tais estruturas deverão ser métricas Einstein. A conjectura CPE ou conjectura de Besse, como ficou conhecida na literatura, já teve muitas contribuições importantes mais até o momento o problema original permanece em aberto.

No que segue diremos que uma métrica g é CPE se g é ponto crítico do funcional curvatura escalar total restrito ao espaço das métricas de volume unitário e curvatura escalar constante. Através da equação de Euler-Lagrange, tal ponto crítico deve satisfazer a seguinte equação

$$-\Delta f g + Hess f - f Ric = Ric - \frac{R}{n} g$$

onde f é uma função diferenciável, não constante, sobre a variedade M , além disso, Ric , R , $Hessf$, denotam, respectivamente, a curvatura de Ricci, curvatura escalar e hessiana de f . Com essa terminologia enunciaremos a conjectura de Besse da seguinte forma:

Conjectura 1.1. (*Conjectura de Besse [7]*) *uma métrica CPE é sempre Einstein.*

É importante destacar que se uma métrica CPE não-trivial é Einstein, então tal variedade deve ser precisamente a esfera redonda, isto segue do conhecido teorema de Obata.

RESULTADO PRINCIPAL

Para uma melhor compreensão do estudo de métricas CPE existem muitos trabalhos na literatura que buscam esclarecer o tema com leituras menos técnicas e que deixaremos nas referências para conveniência do leitor, veja por exemplo, [1, 4, 5, 6, 9, 10].

2.1. PRELIMINARES

No que segue, estaremos recordando alguns tensores que surgem no estudo da curvatura de uma variedade Riemanniana. Iniciamos com o tensor de Weyl W que é definido pela seguinte fórmula de decomposição

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - (A \odot g),$$

onde R_{ijkl} denota o tensor curvatura de Riemann e A_{ij} é o tensor de Schouten definido por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij} \right).$$

O símbolo \odot denota o produto de Kulkarni-Nomizu definido como segue

$$\begin{aligned} U \odot V(X, Y, Z, W) &= U(X, Z)V(Y, W) + U(Y, W)V(X, Z) \\ &\quad - U(X, W)V(Y, Z) - U(Y, Z)V(X, W), \end{aligned}$$

onde X, Y, Z, W são campos de vetores suaves em M e U, V são dois $(0, 2)$ -tensores simétricos.

O segundo tensor é o tensor de Cotton C definido por

$$C_{ijk} = (n - 2)(\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}).$$

Note que C_{ijk} é anti-simétrico nos dois primeiros índices e traço nulo em quaisquer dois índices. Os dois tensores definido acima estão relacionados pela fórmula

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}$$

para $n \geq 4$. Diremos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é Bach-flat quando $B_{ij} = 0$. Além disso, é importante relatar a seguinte fórmula para o divergente do tensor de Bach

$$\nabla_i B_{ij} = \frac{(n-4)}{(n-2)^2} C_{iks} R_{ks}.$$

Continuando, temos o tensor de Bach que foi introduzido por Bach no estudo de relatividade conforme. Este é definido em termos das componentes do tensor de Weyl como segue

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k \nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{ikjl}$$

para $n \geq 4$

Restrições sobre estes tensores são alvo de estudo por muitos matemáticos na tentativa de resolver a conjectura CPE.

Existe também um tensor auxiliar de ordem 3 que surge no estudo das métricas CPE. Tal tensor é denotado por T_{ijk} e fica estabelecido a partir da curvatura de Ricci, curvatura escalar e da função potencial de uma métrica CPE. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f). \end{aligned}$$

Destacamos que, quando o tensor T anula então pode-se obter propriedades bem interessantes sobre os níveis da função potencial f . Tais propriedades foram amplamente exploradas no estudo da geometria, não só das métricas CPE, como também, no estudo dos Sólitons de Ricci, métricas quase-Einstein, métricas críticas do funcional volume, entre outras.

2.2. RESULTADOS PRINCIPAIS

A conjectura de Besse, como mencionado na introdução, não está resolvida por completo, entretanto somente respostas parciais existem até o momento. Para nosso caso, citaremos somente algumas envolvendo o tensor de Weyl. Por exemplo, Lafontaine [13] mostrou o caso localmente conformemente plana. Chang, Hwang e Yun melhoraram o resultado anterior provando a conjectura para o caso de curvatura de Weyl harmônica, veja [11, 12] para uma descrição completa. Continuando, Barros, Ribeiro e Leandro [5], estudaram em dimensão 4 o caso da harmonicidade da parte autodual do tensor de Weyl. Ao mesmo tempo, em [15], Qing e Yuan obtiveram resposta positiva para o caso Bach nulo. Mais recentemente, o problema foi explorado pelo próprio autor, Barros, Batista e Viana [3] considerando a curvatura de Weyl radialmente nula. Paralelamente, tivemos o trabalho de Hwang and Yun [16], onde os autores forneceram propriedades de intervalo (gap) sobre a condição de divergência nula no tensor de Bach. Destacamos que o autor também obteve resultados de intervalo em [1].

Aqui, motivado pelas ideias desenvolvidas pelo Catino em seu paper sobre sólitons Ricci (veja referência [8] para mais detalhes) encontraremos uma resposta positiva para esta conjectura assumindo uma condição de pinche pontual, tal estudo encontra-se na referência [2]. Mais precisamente, nosso primeiro resultado será apresentado na seguinte forma:

Teorema 2.1. *A conjectura de Besse é verdadeira para qualquer métrica CPE satisfazendo*

$$|W| \leq \sqrt{\frac{n}{2(n-2)}} \left(\frac{R}{\sqrt{n(n-1)}} - 2|\mathring{Ric}| \right).$$

Por fim apresentaremos uma resposta positiva para conjectura CPE sobre uma condição de ortogonalidade entre o tensor de Weyl e o tensor $Ric \odot Ric$. É imediato verificar que variedades localmente conformemente plana ou Einstein, implicam na condição de ortogonalidade estudada. Além disso, destacamos que tal estudo foi previamente explorado na classificação de sólitons de Ricci

compacto, veja [14] para mais detalhes. Em nossa apresentação, usaremos esta condição de ortogonalidade para provar o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Seja (M^n, g, f) , $n \geq 4$, uma métrica CPE não-trivial. Se o tensor curvatura de Weyl e $\text{Ric} \odot \text{Ric}$ são ortogonais, então M deve ser isométrico a esfera redonda.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BALTAZAR, H.: *On critical point equation of compact manifolds with zero radial Weyl curvature*. *Geom. Dedicata* 202, 337–355 (2019).
- [2] BALTAZAR, H.: *Besse conjecture for compact manifolds with pinched curvature*. *Arch. Math.* 115, 229–239 (2020).
- [3] BALTAZAR, H., BARROS, A., BATISTA, R. and VIANA, E.: *On static manifolds and related critical spaces with zero radial Weyl curvature*. *Monatsh. Math.* 191, no. 3, 449–463 (2020).
- [4] BARROS, A. and RIBEIRO Jr., E.: *Critical point equation on four-dimensional compact manifolds*. *Math. Nachr.* 287, 1618–1623 (2014).
- [5] BARROS, A., LEANDRO, B. and RIBEIRO Jr., E.: *Critical metrics of the total scalar curvature functional on 4-manifolds*. *Math. Nachr.* 288(16), 1814–1821 (2015)
- [6] BENJAMIM, F.: *Remarks on critical point metrics of the total scalar curvature functional*. *Arch. Math. (Basel)* 104, 463–470 (2015).
- [7] BESSE, A.: *Einstein Manifolds*. Springer, Berlin (1987).
- [8] CATINO, G.: *Complete gradient shrinking Ricci solitons with pinched curvature*. *Math. Ann.* 355, 629–635 (2013).
- [9] CHANG, J., HWANG, S. and YUN, G.: *Rigidity of the critical point equation*. *Math. Nachr.* 283, 846–853 (2010).

- [10] CHANG, J., HWANG, S. and YUN, G.: *Critical point metrics of the total scalar curvature*. Bull. Korean Math. Soc. 49, 655–667 (2012).
- [11] CHANG, J., HWANG, S. and YUN, G.: *Total scalar curvature and harmonic curvature*. Taiwan. J. Math. 18, 1439–1458 (2014).
- [12] CHANG, J., HWANG, S. and YUN, G.: Erratum to: *Total scalar curvature and harmonic curvature*. Taiwan. J. Math. 20(3), 699–703 (2016).
- [13] LAFONTAINE, J.: *Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata*. J. Math. Pures Appl. 62, 63–72 (1983)
- [14] LI, F. and ZHOU, J.: *Rigidity characterization of compact Ricci solitons*. J. Korean Math. Soc. 56(6), 1475–1488 (2019)
- [15] QUING, J. and YUAN, W.: *A note on static spaces and related problems*. J. Geom. Phys. 74, 18–27 (2013).
- [16] YUN, G. and HWANG, S.: *Gap theorems on critical point equation of the total scalar curvature with divergence-free Bach tensor*. Taiwanese J. Math. 23, 841–855 (2019).



COMUTATIVIDADE DE GRUPOS FINITOS

YERKO CONTRERAS ROJAS

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Resumo

1 Resumo Expandido

- 1.1 Comutadores e Séries Normais
- 1.2 Grupos Solúveis e Nilpotentes
- 1.3 Conclusões

Referências

RESUMO

Resumo: Um grupo G se diz comutativo ou abeliano se goza da seguinte propriedade: para todo par de elementos a, b no grupo G operar a com b é igual a operar b com a , i.e., $ab = ba$. Esta propriedade tem uma forte influência na estrutura do grupo e muitos problemas em teoria de grupos surgem do fato da operação do grupo não ser comutativa, algumas classes de grupos são definidas através de propriedades que mensuram quão perto está um grupo de ser abeliano é o caso da classe dos grupos solúveis e a classe dos grupos nilpotentes. Teoremas de estrutura de grupos abelianos são bem conhecidos e resultam de utilidade quando estudamos outras classes de grupos que compartilham propriedades com os grupos abelianos. O objetivo desta apresentação é dar uma ideia geral e introdutória de algumas classes de grupos finitos que estão estreitamente relacionadas com o conceito de comutatividade, entre elas definir os grupos solúveis e nilpotentes introduzindo e usando os comutadores.

Palavras-chave: Álgebra, Grupos, grupos abelianos, grupos solúveis, grupos nilpotentes.

Belem, junho de 2022

Yerko Contreras Rojas

RESUMO EXPANDIDO

Em álgebra abstrata estudamos a estrutura de grupos, nesta apresentação introduziremos rapidamente esta estrutura através dos seus axiomas para gerar um espaço comum para estudantes de graduação em matemática que podem ter cursado ou não o curso de álgebra abstrata. Um grupo G é uma estrutura algébrica que consta de um conjunto G e uma operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h, \end{aligned}$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

Associativa: sejam $g_1, g_2, g_3 \in G$ a operação binária \cdot se diz associativa se

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$$

Existência de elemento neutro: seja $e \in G$ dizemos que e é o elemento neutro, respeito à operação \cdot , se para todo $g \in G$ temos que $e \cdot g = g \cdot e = g$.

Existência de inversos: dizemos que G com a operação \cdot goza desta propriedade se para todo elemento $g \in G$ existe $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Um grupo G se diz comutativo ou abeliano se goza da seguinte propriedade: para todo par de elementos a, b no grupo G , operar a com b é igual a operar b com a , i.e., $a \cdot b = b \cdot a$. Esta propriedade tem uma forte influência na estrutura do grupo e muitos problemas em teoria de grupos surgem do fato da operação do grupo não ser comutativa, algumas classes de grupos são definidas através

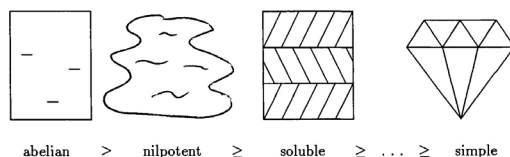


Figura 1.1: Exemplo de comutatividade

de propriedades que mensuram quão perto está um grupo de ser abeliano é o caso da classe dos grupos solúveis e a classe dos grupos nilpotentes. Teoremas de estrutura de grupos abelianos são bem conhecidos e resultam de utilidade quando estudamos outras classes de grupos que compartilham propriedades com os grupos abelianos. O objetivo desta apresentação é dar uma ideia geral e introdutória de algumas classes de grupos finitos que estão estreitamente relacionadas com o conceito de comutatividade, entre elas definir os grupos solúveis e nilpotentes introduzindo e usando os comutadores. Introduziremos a seguir alguns conceitos básicos para definir com eles algumas classes de grupos. Começaremos com o conceito de comutador e propriedades básicas deste. Continuaremos definindo o conceito de série normal, expondo como exemplos deste conceito algumas séries muito conhecidas na teoria de grupos para, com estes exemplos, definir algumas bem conhecidas classes de grupos e algumas medidas (ou comprimentos) associadas aos mesmos.

1.1. COMUTADORES E SÉRIES NORMAIS

A seguir, introduzimos o conceito de comutador, não só com o propósito de dar uma boa introdução a algumas classes de grupos (como os grupos solúveis ou nilpotentes), mas também para introduzir algumas propriedades importantes dos mesmos. Dados dois elementos x e y de um grupo G , denotaremos por $[x, y]$ o comutador de x e y , dado por $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. De forma análoga, dados H e K subconjuntos de G , denotaremos por $[H, K]$ o subgrupo gerado pelos elementos da forma $[h, k]$ com h elemento de H e k um elemento de K , conhecido como o subgrupo comutador de H e K . Exibiremos depois algumas propriedades elementares de comutadores podendo interagir com o

público para demonstrar rapidamente alguma delas.

Sejam x, y, z, t elementos de um grupo G . Então

1. $[x, y] = 1$ se, e somente se, $xy = yx$;
2. $[x, y]^{-1} = [y, x]$;
3. $[x, y]z = [xz, yz]$;
4. $[xy, z] = [x, z]y[y, z] = [x, z][[x, z], y][y, z]$;
5. $[x, yz] = [x, z][x, y]z = [x, z][x, y][[x, y], z]$;
6. $[x, y]z = z[xz, yz]$;
7. $[xy, z] = [x, z][x, y][x, y, z]$;
8. $[xyz, t] = [xy, t][xy, z][xy, z, t]$;
9. $[x, y, z] = [x, y]^{-1}[x, y]z$.

A definição de comutador e as propriedades verificadas pelos mesmos nos permitem definir vários subgrupos muito conhecidos na teoria básica de grupos, assim introduziremos o caso dos subgrupos derivados, definidos indutivamente da seguinte maneira:

$$G^{(0)} = G, G^{(1)} = G' = [G, G] \text{ e } G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$$

Chamamos $G^{(i)}$ de i -ésimo subgrupo derivado de G . Tal construção gera uma cadeia de subgrupos $G, G', G^{(2)} \dots$. Esta série de subgrupos é chamada de série derivada e tem a propriedade que todo elemento dela é normal no grupo G , mas isso não é uma particularidade desta série. Usando o exemplo supracitado definiremos o conceito de série normal. Uma série $1 = G_0, G_1 \dots G_{n-1}, G_n = G$ de subgrupos de G , com a condição de que G_i seja normal em G , para todo $i = 0 \dots n-1$, é chamada uma série normal de G e os grupos quocientes G_i/G_{i-1} são chamados os fatores da série. Algumas séries são classificadas pela natureza dos seus fatores, dedicaremos o que resta para ilustrar alguns importantes exemplos.

1.2. GRUPOS SOLÚVEIS E NILPOTENTES

O primeiro exemplo é o de séries normais finitas com fatores abelianos. Se um grupo G possui uma série de subgrupos com estas características, o grupo é chamado de grupo solúvel. Uma série normal de subgrupos que sempre resulta ter fatores abelianos é a série derivada, definida anteriormente. Esta série existe para qualquer grupo G , logo a condição determinante com respeito à solubilidade do grupo G é o fato de que a série seja finita. Em outras palavras, podemos garantir que G é solúvel se existe n , um número inteiro positivo, tal que $G^{(n)} = 1$, veremos então o que isso representa para os nossos comutadores. Além disso, a condição de finitude da série derivada tem a propriedade particular que resulta ser não só uma condição suficiente para a solubilidade do grupo, mas é também uma condição necessária, motivo pelo qual a série derivada define também o conceito de grupo solúvel. O comprimento da série derivada recebe um nome específico, pelas suas propriedades, pelo qual será abordado separadamente. Uma outra série normal que pode ser definida para todo grupo G é a série central inferior, definimos os termos desta série indutivamente da seguinte maneira:

$$\gamma_1(G) = G; \gamma_2(G) = G' \text{ e } \gamma_i(G) = [\gamma_{(i-1)}(G); G]$$

Todos os fatores desta série são abelianos e a finitude desta série é uma condição suficiente para a solubilidade, mas não necessária. No entanto, esta série junto com a condição de finitude sobre a mesma define uma nova e muito importante classe de grupos, a classe dos grupos nilpotentes. Veremos analogamente o que isso implica para esse objeto introduzido no começo, nossos comutadores.

1.3. CONCLUSÕES

Concluiremos ressaltando a importância da comutatividade e observando como um tópico com o que em princípio temos contacto muito cedo na nossa formação, pode atingir níveis de profundidade que nos levaram a muitos tópicos de pesquisa atual, tentaremos evidenciar a importância da comutatividade para o estudo da teoria de grupos e a álgebra em geral e incentivaremos o estudo desta área nos seus futuros trabalhos de finalização de curso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Gorenstein D., *Finite Groups*, Harper and Row, New York, (1968).
- [2] Khukhro, E.I., *p-Automorphisms of finite p-groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 246 (1998).
- [3] Martin Isaacs, I., *Finite Group Theory*, Volumen 92, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Soc, (2008).
- [4] Robinson D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics Springer, 4th edition, Volumen 80, (1996)
- [5] Rotman J., *Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics Springer, 4th edition (1999).



**DOMINÓ DOS RESTOS: UMA PROPOSTA
METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE DIVISIBILIDADE
E CONGRUÊNCIA MODULAR**

EMILLY BARBOSA, MARLY NUNES E GLENDA QUADROS

DE 20 À 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. Prefácio
2. Introdução
3. Processo Metodológico
4. Referências bibliográficas

PREFÁCIO

O presente trabalho pretende analisar e mostrar o desenvolvimento de um jogo matemático, chamado Dominó dos Restos, como estratégia e alternativa de ensino, que pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo e social do aluno, apontando a relevância do jogo como ferramenta constituinte no processo do aprendizado em sala de aula. Tendo como base a disciplina Teoria dos Números, em especial, o conteúdo de divisibilidade e congruência modular, permitindo o aprimoramento ou desenvolvimento de habilidades e competências dos discentes, como a destreza e o aperfeiçoamento do raciocínio lógico. Servindo como um meio para o docente, de forma que colabore para a fixação do assunto citado acima, com o objetivo de associar toda teoria estudada com a praticidade obtida através do jogo. Assim, apresentamos uma proposta que pode ser utilizada como instrumento de ensino para aulas mais prazerosas e dinâmicas e proporcionando uma aprendizagem satisfatória.

INTRODUÇÃO

Pode-se observar que a matemática é umas das disciplinas ou a disciplina mais temida pelos estudantes, por conta do método que é ensinada, de forma tão abstrata e tradicional faz com que os alunos não consigam entender o que está sendo posto para eles. É natural escutar a seguinte pergunta “Onde vou usar isso?”, pois grande parte dos estudantes não “enxergam” o que é estudado em sala de aula no seu cotidiano. Desta forma, nas escolas o ensino dessa disciplina se torna algo esotérico, ou seja, lida somente com o que é difícil de ser compreendido (CORTELLA, 2015), é preciso meios eficazes e diferentes ao ensinar matemática, que colaborem para o aprendizado do aluno.

Então, em razão disso, quando os alunos iniciam seus estudos na faculdade de matemática, no caso, os graduandos, e se deparam com as disciplinas específicas do curso, acabam se frustrando, pois na maioria das vezes o docente de tal disciplina dispõe de uma metodologia de ensino totalmente voltada para a teoria, e não aborda a sua aplicabilidade no diário do discente. Desta forma, é preciso procurar formas que auxiliem os alunos no entendimento do assunto, e um desses meios são os jogos, que servem como ferramenta para o ensino-aprendizagem, motivando e instigando o pensamento crítico, além de sanar dúvidas que podem aparecer no decorrer do aprendizado e fazer com que as aulas se tornem mais atraentes, lúdicas e interessantes.

Para SMOLE (1996, p.138);

“O jogo propicia situações que, podendo ser comparadas a problemas, exigem soluções vivas, originais, rápidas. Nesse processo, o planejamento, a busca por melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam a aquisição de novas ideias, novos conhecimentos [...]”

Tendo em vista isso, o presente trabalho consiste em compreender a relevância dos jogos como metodologia de ensino e aprendizagem dos alunos no que se refere ao conteúdo ensinado pelo professor, pois por ser um jogo, há mais participação e o aluno se torna ativo, tendo como

consequência as melhorias no desenvolvimento das competências e na criatividade. Para mais, há algumas vantagens dos jogos, eles fazem com que não somente os alunos, mas que todas as pessoas possam interagir e se expressar, trocando ideias e conhecimento, e isso é positivo, pois os alunos terão mais apropriação do conhecimento abordado.

Diante disso, o laboratório pedagógico de informática e matemática o (La π nmat) da Universidade Federal do Pará - UFPA, campus Bragança, pensando nessa problemática e vendo a necessidade de utilizar novos mecanismos, criou como estratégia de ensino o jogo “Dominó dos Restos”, que tem como base o conteúdo de divisibilidade e congruência modular da disciplina Teoria dos Números com o intuito de contribuir para a sua formação de forma significativa e lúdica, despertando a curiosidade em saber que há outros meios que ele pode procurar para aprender aquele determinado assunto.

Com a criação deste jogo, ele poderá ser utilizado não somente pelos discentes que possuem dificuldade em aprender esse assunto, mas também por professores do curso de licenciatura em Matemática que desejam que suas aulas sejam mais proveitosas. Segundo Smole, “o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática” (2008, p. 09), ou seja, os docentes poderão inserir esse jogo em suas aulas para a maior contemplação do assunto ministrado, assim deixarão suas aulas mais dinâmicas e o mais próximo da realidade dos discentes.

Mas você deve estar se perguntando “Por que escolher como tema do dominó, divisibilidade e congruência modular?” e “Por que escolher fazer o jogo dominó?”. Respondendo a primeira pergunta, esse assunto está atrelado a disciplina de Teoria dos Números que é o estudo das propriedades dos números de forma geral, e em particular, dos números inteiros com suas proposições, corolários e teoremas. Entretanto, quando se chega no assunto citado acima, há uma certa limitação por parte dos discentes, eles acabam tendo alguns impasses, por isso, a escolha do tema para esse jogo, para mostrar para os alunos que essa disciplina pode ser vista de outro ângulo.

E respondendo a segunda indagação, segundo alguns estudiosos, o dominó teria sua origem na China, por volta do ano de 1900, e por ser um jogo milenar, se tornou popular entre as crianças, jovens e adultos, tornando-se uma forma de descontração. Além de que, o dominó faz com que as pessoas dialoguem e possam trocar experiências, e também trazer benefícios como a destreza, que pode ser entendido como a capacidade de percepção, por estas razões foi escolhido esse jogo.

Outro ponto, que deve ser analisado quando se faz a utilização desse jogo, são as áreas que podem ser contempladas, como a matemática, já que o jogo tem como tema central essa área, já falado acima; o lúdico, que contribui para a construção do conhecimento através da criatividade e da interação social; o raciocínio lógico, onde o aluno a partir de ideias ou circunstâncias, irá organizar o seu raciocínio para chegar em uma

conclusão, que pode ser obtida por meio da indução, dedução ou abdução. Enfim, podemos observar como o número de possibilidades é ampla quando se usa o jogo como auxílio

PROCESSO METODOLÓGICO

Foi elaborado um planejamento de materiais referidos ao laboratório de matemática, dentre eles o jogo que será o centro do nosso trabalho, chamado “Dominó dos Restos”, cuja base é a disciplina de Teoria dos Números com enfoque na parte de divisibilidade e congruência modular, visando não somente ser o suporte metodológico para o ensino de Matemática, mas também fornecer habilidades variadas, como atenção, interação, memória, raciocínio lógico, planejamento, tomadas de decisão de modo que minimize suas dificuldades.

Segue abaixo as etapas que foram desenvolvidas para efetuar o trabalho:

1ª Etapa - Discutimos acerca do assunto colocado em pauta por um grupo de discentes pertencentes ao laboratório pedagógico de informática e matemática (La π nmat), ou seja, a divisibilidade e congruência modular com a finalidade de criar um material concreto que pudesse ser utilizado em aulas por docentes e para os discentes como forma de aprendizado diferenciado.

2ª Etapa - Pensamos em um jogo que fosse de fácil acesso e que a maioria tivesse conhecimento sobre, assim escolhemos o dominó, onde foram feitas as modificações necessárias para o conteúdo que queríamos esclarecer.

3ª Etapa - Confeccionamos um protótipo do “Dominó dos Restos”, usando papel A4 e papelão com formato retangular em tamanho x por y, onde as peças dos carrões foi escrita os restos e as demais peças continham as congruências modulares. Além disso, foi feito no aplicativo Canva, as peças na forma digital.

4ª Etapa - Testamos o jogo para verificar se, de fato, alcançava nossas expectativas e se conseguiríamos assimilar os conceitos ministrados pelo docente relacionado a esse assunto.

REGRAS DO JOGO

Objetivo: O objetivo é baixar todas as peças primeiro, tendo sido ensinado o assunto de divisibilidade e congruência modular, antes do jogo iniciar, ou fechar o jogo (menos habitual), isto é, quando o jogo fica fechado, não há a possibilidade de baixar mais peças, geralmente acontece quando as duas pontas têm o mesmo número e não existe mais peças com este número na mão dos jogadores.

Descrição: O jogo dispõe de 36 peças, no formato similar ao do dominó tradicional, contendo nas peças carrões os restos que variam de 0 a 7, nas peças restantes contendo a divisibilidade e as congruências modulares.

Público-alvo: Discentes e docentes do curso de matemática ou que tenham a disciplina Teoria dos Números na sua grade curricular.

Composição: 36 peças.

Instruções:

1. Para iniciar o jogo, deverá ter 6 participantes;
2. As peças são embaralhadas por um jogador, com a face voltada para baixo;
3. Cada participante receberá 6 peças;
4. Determina-se qual é a peça de saída, no caso, o participante que tiver a peça 7×7 ;
5. O próximo a jogar será o participante a direita daquele que inicia a partida, caso ele não tenha a peça, o próximo participante poderá jogar, e assim, por diante;
6. O jogador que ficar sem peças na mão, vence o jogo;
7. Caso haja o fechamento do jogo, ou seja, quando os jogadores não possuem a peça para o prosseguimento do jogo, vence quem tiver a menor quantidade de peças;
8. Quem deverá fazer a confirmação do vencedor são os próprios jogadores, no caso os adversários.



Figura 1. Protótipo do jogo Dominó dos Restos

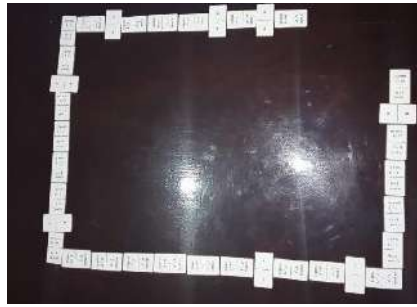


Figura 2. Protótipo do jogo Dominó dos Restos



Figura 3. Jogo Dominó dos Restos na forma digital



Figura 4. Jogo Dominó dos Restos na forma digital

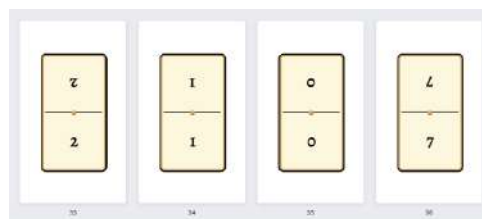


Figura 5. Jogo Dominó dos Restos na forma digital

CONCLUSÕES

Analisando o processo de desenvolvimento deste trabalho, pode-se observar pelos que fazem parte do laboratório de matemática, a importância de se utilizar objetos concretos em sala de aula, pois faz com que o abstrato se torne mais fácil de ser compreendido, fazendo com que as aulas fiquem atrativas, interessantes e lúdicas. Além do mais, desperta no discente o raciocínio lógico matemático, que é necessário para as disciplinas posteriores que trabalham com essa habilidade.

Lembrando que esta é uma proposta que busca resultados reais no Evento da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, a Bienal X, que ocorrerá pela primeira vez na região Norte, em Belém/PA. Queremos propor com esse jogo, como uma alternativa pedagógica voltada para a disciplina de Teoria dos Números, visando a melhoria dos recursos didáticos utilizado pelos docentes, além de sanar dúvidas e obstáculos que podem surgir quando a disciplina é ministrada.

Em pesquisas futuras, pretendemos apresentar essa e outras atividades com alunos da graduação, mais especificamente, discentes do curso de matemática. O trabalho demonstraria a real eficácia da utilização de recursos matemáticos, no caso, os jogos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HEFEZ, A. Aritmética. Sociedade Brasileira de Matemática. 2. Ed. Rio de Janeiro, 2016.
- [2] SELVA, K. R.; CAMARGO, M.: O Jogo Matemático como Recurso para a Construção do Conhecimento. X EGEM - RS, 2009.
- [3] MELO, S. A.; SARDINHA, M. O. B.: Jogos no Ensino e Aprendizagem de Matemática: uma estratégia para aulas mais dinâmicas. Revista F@pciência, Apucarana – PR, 2009.



**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
COMPREENSÕES DO CAMPO DE
PESQUISA FRENTE AO CONTEXTO DA
PANDEMIA DA COVID-19**

**FILIPE CARVALHO SILVA
JOÁS DO NASCIMENTO LIMA
REBECA MACIEL DA SILVA
JÚLIO CÉSAR CARVALHO ALENCAR
JOSÉ MILTON LOPES PINHEIRO**

20/06/2022 — 24/06/2022

“The important thing is not to stop questioning. Curiosity has its own reason for existence. One cannot help but be in awe when he contemplates the mysteries of eternity, of life, of the marvelous structure of reality. It is enough if one tries merely to comprehend a little of this mystery each day.”
Albert Einstein

SUMÁRIO

Prefácio

1 Introdução

- 1.1 A Educação Matemática no Brasil: movimento de constituição
- 1.2 A Pandemia da COVID-19 e suas implicações
- 1.3 Metodologia e procedimentos de pesquisa
- 1.4 Descrição e análise dos textos
 - 1.4.1 Texto 1 - Mudanças na pesquisa em Educação Matemática por conta do COVID-19
 - 1.4.2 Texto 2 - A Educação Matemática Crítica numa sociedade tecnológica em tempos de isolamento social
 - 1.4.3 Texto 3 - Tecnologia e Educação Matemática em tempos de pandemia
 - 1.4.4 Texto 4 - Ensino de Matemática e COVID-19: práticas docentes durante o ensino remoto
 - 1.4.5 Sobre os textos destacados

2 Transcendendo reflexivamente as Unidades Significativas: constituindo Ideias Nucleares

- 2.1 IN1 - Educação Matemática: problemas e dilemas durante a pandemia
- 2.2 IN2 - Atividades matemáticas como auxílio no processo de compreensão da COVID-19

2.3 IN3 - Estratégias e desafios da atuação docente no contexto da pandemia da COVID-19

3 Tecendo uma síntese compreensiva e articulando compreensões finais

Referências

PREFÁCIO

A necessidade de ações para contenção do vírus SARS-CoV-2 impôs uma nova realidade a nossa sociedade. Isolamento social, quarentena, diversas instituições de ensino tendo que adequar suas atividades para atuarem de forma remota, ou encerrando suas atividades, fizeram parte do fatídico cenário que marcou os anos de pandemia. Diante desse contexto, este estudo originou-se de nossa perplexidade ao presenciar as transformações que a pandemia da COVID-19 gerou na sociedade.

O objetivo desta pesquisa é tecer compreensões sobre as implicações da pandemia, trazendo os olhares já lançados pela Educação Matemática. Para tanto, questionamos: como a Educação Matemática configura-se frente a pandemia do COVID-19? Realizamos um estudo bibliográfico retomando as pesquisas produzidas por pesquisadores dessa área durante esse contexto de crise sanitária. Recorremos à fenomenologia como campo teórico/metodológico, com a qual constituímos ideias nucleares, que nos permitiram tecer compreensões sobre a pergunta diretriz.

Dentre os olhares lançados pela Educação Matemática destaca-se a ênfase às tecnologias digitais, tendo como fundo as práticas de sala de aula e a formação de professores. Reafirma-se a relevância do ensino para além da matemática, propondo a tematização da pandemia em sala de aula, para que se possa também desenvolver uma conscientização e uma postura crítica frente a ela e às suas implicações.

IMPERATRIZ, JUNHO de 2022

Filipe Carvalho Silva

INTRODUÇÃO

O Campo de pesquisa em Educação Matemática mostra-se importante por sua preocupação com o processo de ensino e de aprendizagem, propondo uma didática interdisciplinar e transdisciplinar, visando que as compreensões em sala de aula transcendam os conteúdos tacitamente postos, propiciando ao aluno uma postura criativa, independente e questionadora frente às problemáticas que a eles se apresentarem, quer seja em sala de aula, quer seja na sociedade, em seu mundo circundante.

No contexto atual, o que nos cerca e nos afeta é a pandemia causada pela COVID-19, que gerou diversas mudanças no cenário global no ano de 2020. O isolamento social adotado como medida de contenção da propagação do Coronavírus ocasionou profundas transformações na sociedade. Com respeito à Educação, por exemplo, segundo a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), mais de 90% dos estudantes no mundo foram prejudicados pelo fechamento das escolas e universidades. Nesse cenário, várias instituições reformularam suas atividades para que pudessem ocorrer de modo remoto, tendo como objetivo “achatar a curva” de propagação do vírus.

Diante das circunstâncias, iniciaram-se muitas pesquisas científicas acerca do novo Coronavírus. Análises sobre a sua implicação em diversos contextos figuram todos os veículos de comunicação. Como testemunhas das condições às quais a pandemia impôs à sociedade e à educação e como pessoas que vivenciam o ambiente universitário, passamos a questionar: quais as implicações da pandemia no movimento de ensino e aprendizagem de Matemática? Há aprendizagem nesse cenário? O que pode o professor de Matemática? Diante

desse cenário, entendemos que tais indagações podem ser discutidas ao olhar para a área da Educação Matemática, e para os trabalhos já produzidos que tomam a pandemia como tema principal ou de fundo. Uma pergunta situada nessa área e que abarca as demais, pode assim ser posta: *como a Educação Matemática configura-se frente a pandemia do COVID-19?*

O *como* expresso na pergunta solicita uma pesquisa qualitativa, pois ele indica que o estudo é um movimento de compreensão, no qual se assume não saber. Ou seja, o *como* não é a priori, uma hipótese a ser validada, ele se mostra junto ao processo investigativo. Um modo de assim proceder, que aqui assumimos, é a pesquisa fenomenológica.

1.1. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL: MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO

Na sociedade, é comum a reprodução do discurso que “Matemática é para poucos” ou “Matemática é difícil”. Para Skovsmose, em [15], a Educação Matemática se mostra como campo de ensino e de pesquisa que se volta reflexivamente a esses discursos, visando constituir um solo compreensivo sobre o qual os mesmos possam ser ressignificados, mediante processos de ensino e de aprendizagem que possam ser conduzidos também pelos alunos, como protagonistas de seu aprender, podendo se posicionar frente às problemáticas, produzir discursos, criar, criticar. Nesse pensar, a sala de aula de Matemática se apresenta como um cenário para a investigação, no qual o ato investigativo é caminho para a aprendizagem, conforme explicita Skovsmose.

Diante disso, compreende-se a relevância da Educação Matemática, mas, vale ressaltar que embora agora instituída, essa área enfrentou um caminho repleto de dificuldades, mas também de conquistas, as quais entendemos que seja relevante destacar.

No Brasil, Euclides Roxo, professor de Matemática e diretor do Colégio Pedro II, já discutia a necessidade de reformulação do ensino da Matemática durante a década de 1920. O ensino ministrado não acompanhava o cenário de desenvolvimento econômico, social e político. “Nessa época, a preocupação

ultrapassa a abordagem sistemática dos conteúdos, inquietando os educadores questionando-se quanto ao que, para quem e como ensinar”, vide [10]. Lê-se essas inquietações como algumas das primeiras manifestações de uma Educação Matemática como um campo de pesquisa no Brasil.

Segundo Santos, em [10], os debates decorrentes da necessidade de renovação do ensino de Matemática movimentaram professores, pedagogos e responsáveis pela educação nos distintos níveis de ensino no Brasil e no mundo. As inquietações sobre as abordagens do ensino de matemática iniciadas na década de 20 desencadearam no final dos anos 50, o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM) que veio com o objetivo de “solucionar” os problemas de ensino e aprendizagem nessa área, propondo um trabalho desde as primeiras séries (com alunos de 13 e 14 anos) com estruturas algébricas, Teorias dos Conjuntos, Geometria da Transformação, enfatizando a abstração e à simbologia.

Segundo Tambarussi e Klüber, [16], a valorização da abstração e da simbologia matemática durante o MMM, “fez com que não fosse dada importância ao conhecimento prévio do aluno, a sua cultura, fatores sociais, econômicos e, muito menos, era observado se aquele conteúdo 160 ensinado estava tomando significado para quem pretendia aprender: o aluno”. Esse é um dos motivos pelos quais Alves e Silveira, em [1], afirmam o “fracasso” do movimento. No entanto, os mesmos autores afirmam que o MMM implicou importantes contribuições, pois proporcionou que discussões relacionadas ao ensino se tornassem frequentes, além do desenvolvimento dos primeiros eventos e das primeiras revistas voltadas ao ensino de Matemática, o que possibilitou a compreensão das diferenças entre as perspectivas dos matemáticos e dos educadores matemáticos

Traçou-se um longo caminho desde o MMM à consolidação da Educação Matemática como um campo de pesquisa no Brasil. Tal feito, embora tenha se dado num fluxo de discussões, tem um marco em 1988, com a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, durante o Segundo Encontro Nacional de Educação Matemática - II ENEM. Segundo [12] ela surgiu em um momento onde vinham ocorrendo várias iniciativas que proporcionaram seu desenvolvimento, como: a formação de grupos de pesquisa na área, a cons-

tituição de PósGraduações em Educação Matemática, a criação de periódicos e desenvolvimento de congressos, regionais, nacionais e internacionais.

Neste texto, dá-se destaque ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual Paulista, *campus* Rio Claro, que foi pioneiro no Brasil e que desde sua fundação, em 1984, é referência na Educação Matemática brasileira, e mais atualmente, na Educação Matemática internacional.

No prefácio do livro *A Matemática e seu ensino: olhares em Educação Matemática* ([13]), o Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba expõe um pouco da história desse programa. Ele expõe que em 1983, foi selecionada a primeira turma de mestrado, com dez alunos, que iniciaram as disciplinas em março de 1984. Borba afirma que os alunos dessa turma não sabiam o que era uma dissertação, e professores e alunos estavam construindo o que era pesquisa, e como seria estruturada. Os professores vinham de diversas áreas – Matemática, Filosofia, Pedagogia – e, é claro, não havia professor formado em Educação Matemática.

Assim como ao falar de Educação Matemática como campo de pesquisa no Brasil não se pode deixar de falar do PPGEM, da Unesp-Rio Claro, também não se pode deixar falar de um meio pelo qual as primeiras produções nesta região de inquérito foram compartilhadas à sociedade acadêmica e aos professores de Matemática. Há de se falar do BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, periódico dos mais importantes no país e no mundo nessa área, que foi fundado e liderado por mestrandos do PPGEM em 1984/1985. O Boletim teve por missão primeira divulgar a produção em Educação Matemática, expondo-a como região de inquérito e explicitando seus objetivos. Mostrou-se como uma forma de unir a preocupação entre a matemática do “chão” da escola, da favela, do cotidiano, com a Educação Matemática, focando o papel da Matemática e da Educação Matemática na sociedade.

Atualmente, entende-se que a Educação Matemática, enquanto campo de pesquisa, está consolidada e constitui um cenário animador. Ela ganha força com os eventos, que hoje potencializam a divulgação e publicação de pesquisas. Tem-se eventos regionais, tais como o Encontro Mineiro de Educação Matemática (EMEM) e o Encontro Baiano de Educação Matemática (EBEM). Além

dos regionais, tem-se eventos nacionais como: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e Encontro Brasileiro de Pós-graduandos em Educação Matemática (EBRAPEM). Internacionalmente tem-se: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), dentre outros. Nesses eventos são apresentadas pesquisas que geram novas pesquisas, e assim desenvolvem e fortalecem o campo Educação Matemática, bem como ampliam os olhares à sala de aula de Matemática, ao ensino e à aprendizagem.

Outra evidência do crescimento e da consolidação da Educação Matemática no Brasil é a nomeação, no ano de 2018, do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba como coordenador da área de Ensino da CAPES, sendo que o mesmo foi indicado pela maioria dos coordenadores de programas desta área. Tem-se assim uma forte representação da Educação Matemática junto à CAPES o que abre possibilidades de um diálogo sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática junto ao Ministério da Educação (MEC).

Por não ser um campo de pesquisa restrito apenas aos educadores matemáticos, a Educação Matemática abre-se às mais diversas áreas, como: psicologia, sociologia, filosofia, história, pedagogia e tecnologias da informação e da comunicação. Essa pluralidade torna esse campo amplo e complexo, ao mesmo tempo que amplia as possibilidades de discutir e de pensar o ensino e a aprendizagem de Matemática focando a sala de aula, a formação de professores, a diversidade cultural, as solicitações escolares e socioculturais.

Essa abertura proporciona na Educação Matemática a constituição de subáreas, sob perspectivas distintas das quais se visa a Matemática, seu ensino e todo o entorno que o constitui. O texto [11] aponta algumas dessas perspectivas: Filosofia e História da Matemática; Filosofia da Educação Matemática; Educação Matemática Crítica Etnomatemática; Campos Semânticos; História Oral; Inclusão; Resolução de Problemas; Investigação Matemática; Modelagem e Matemática; Comunidade de Prática; Tecnologias da Informação e da Comunicação, Formação de Professores de Matemática; letramento, numeramento e as habilidades matemáticas; algoritmos e os computadores.

Assim, desde os primeiros da área, das primeiras pesquisas, ela foi se constituindo entrelaçada à formação de professores e pesquisadores que assumem

papel relevante na manutenção e ampliação desse próprio movimento de constituição. Movimento que ainda continua, uma vez que a Educação Matemática não se instaura e não se mantém na temporalidade e na historicidade como um campo finito e fechado em si mesmo. Ele é um campo cuja amplitude não se conhece, haja vista que se abre às compreensões e demandas humanas, sociais, históricas e educacionais que estão sempre se renovando e apontando novas possibilidades, novas “tendências” ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Por isso, defende aqui que a Educação Matemática não é e jamais poderá ser axiomatizada.

Portanto, a Educação Matemática possui várias vertentes que possibilitam reflexões significativas, especialmente por ela se atentar à Matemática e a si mesma em diferentes contextos socioculturais, diversificando sua atuação ao passo que se diversifica as relações humanas, as situações problemas e o cenário prático e investigativo que elas abrem. Sendo assim, a Educação Matemática é e está com o contexto atual, sem se desprender da historicidade que acolhe e movimenta esse contexto. Diante desse comportamento, faz-se necessário olhar como esta área se configura frente ao contexto atual imposto pela pandemia da COVID-19, tal como proposto nesta pesquisa.

1.2. A PANDEMIA DA COVID-19 E SUAS IMPLICAÇÕES

Conforme [6], uma *pandemia* é caracterizada como a disseminação de uma doença gerando um elevado número de casos. Esse termo passa a ser usado quando uma epidemia (ocorrência de surtos de uma doença em várias regiões) se espalha por diferentes continentes. A exemplo disso, atualmente, têm-se o novo Coronavírus (SARS-CoV-2), motivador da pandemia de COVID-19, que gerou uma grave crise sanitária mundial que vem provocando profundas transformações na sociedade.

O vírus SARS-CoV-2 é membro da família *Coronaviridae*, responsáveis por várias doenças respiratórias, desde um resfriado comum até doenças mais graves como a MERS - Síndrome Respiratória do Oriente Médio e a Síndrome Respiratória Aguda Grave. O novo Coronavírus invade as células por meio da enzima conversora de angiotensina II que se encontra na mucosa do intes-

tino delgado e no epitélio respiratório inferior. Em casos leves, pode causar febre, fadiga, tosse e dores musculares, e em casos graves podem ocorrer dispnéia (falta de ar), taquipneia (respiração acelerada), dor no tórax e hipoxemia (baixo nível de oxigênio no sangue) podendo levar a óbito — vide [5].

Em função do alto nível de propagação do novo Coronavírus, o pouco conhecimento sobre as formas de transmissão e o papel dos infectados que são assintomáticos na difusão da doença, a falta de vacinas ou tratamento específico e o alto índice de mortes, a Organização Mundial de Saúde (OMS) a decretou Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional. A partir desse momento, governantes, pesquisadores e gestores da saúde, em conjunto, buscaram formas de reduzir o ritmo de expansão do vírus visando evitar o colapso dos sistemas de saúde e permitir o tratamento de casos graves e, conseqüentemente evitar mortes — [2]. Nesse cenário de medo e instabilidade, autoridades de saúde dos principais países afetados aconselharam o isolamento social como principal medida para conter o avanço da doença — [6].

No Brasil, tornou-se necessário o aprimoramento do sistema de vigilância nos três níveis do Sistema Único de Saúde (SUS), melhoramento do uso de indicadores com o intuito de monitorar o desenvolvimento da pandemia no país e o efeito das medidas de controle — distanciamento, isolamento e proteção social, como *lockdown*, a suspensão de serviços e atividades não essenciais ou a restrição dos horários de funcionamento de alguns estabelecimentos —, assim como ampliar a capacidade de testagem para determinar os infectados e a divulgação ampla e transparente desses dados, [2].

Em razão do isolamento, do alto nível de expansão e da taxa de letalidade, a pandemia da COVID-19 tornou-se assunto em diversas reportagens nos diferentes veículos de comunicação. As informações iniciais se centraram nas práticas necessárias quanto aos cuidados, como a utilização de máscaras e o modo correto de higienizar mãos e produtos, em busca de reduzir o contágio. Ainda, faz-se destaque nessa divulgação, a apresentação de dados através de gráficos, tabelas, mapas, assim como de estudos e pesquisas sobre vacinas e tecnologias desenvolvidas para os cuidados com as vítimas hospitalizadas.

Diante de tal contexto, com a suspensão de atividades como as de ensino e, em alguns casos, do expediente presencial em postos de trabalho, várias insti-

tuições tiveram que adequar suas atividades para ocorrerem de modo remoto. Na educação, por exemplo, professores e alunos tiveram que se adequar ao ensino remoto, modo encontrado para dar continuidade às atividades educacionais em meio à pandemia, instituído através da Portaria nº 343, de 17.3.2020 que “dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus - COVID-19” — [4].

As medidas sanitárias frente à pandemia, que envolvem flexibilização de atividades, dentre elas as relacionadas ao ensino, foram discutidas pelo Plenário do Supremo Tribunal Federal (STF), no início de 2020, e por unanimidade foi confirmado que a União deve legislar sobre o tema, no entanto, resguardando a autonomia dos os outros entes: os estados, o Distrito Federal e os municípios. Desde então, estados e municípios, observando as características locais, bem como o avanço local da pandemia, têm decidido por modos distintos de manutenção do ensino, dentre os quais: aulas via rádio e TV, ensino remoto e ensino híbrido.

Os modos pelos quais o ensino e a aprendizagem se realizam nessas modalidades são focos de pesquisas nas diferentes áreas do conhecimento. Neste texto, quer-se focar o olhar lançado pela Educação Matemática, visando destacar o que esse olhar alcança e nos traz quando direcionado ao primeiro ano de pandemia, bem como o que pode abrir como horizonte de compreensão e de possibilidades para o porvir da educação no Brasil.

1.3. METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Para a realização desta pesquisa, adotamos uma postura qualitativa fenomenológica — [3] — mediante estudo bibliográfico que visa compreender *como a Educação Matemática se configura frente a Pandemia de COVID-19*. Pretende-se nessa pesquisa promover um movimento de compreensão, excluindo assim, pressupostos que possam antecipar resultados. Desse modo, as compreensões articuladas nesta pesquisa evidenciam-se no processo investigativo, tomando como solo as pesquisas em Educação Matemática que focam ou que tem como fundo a Pandemia da COVID-19.

O processo de busca do material analisado se deu via *Google Acadêmico*, por meio da associação das palavras-chave: Educação Matemática – Pandemia – COVID-19, considerando os resultados exibidos nas dez primeiras páginas. A busca nos legou poucas produções, tendo em vista que o tema pesquisado é relativamente novo e ainda está sendo objeto de estudo. Uma vez reunidos os textos encontrados, foram analisados cada um deles, descrevendo as abordagens dadas ao tema e o modo como os pesquisadores da Educação Matemática explicitaram a relação dessas abordagens com as implicações da Pandemia.

1.4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS TEXTOS

Na busca por palavras-chave no *Google Acadêmico*, localizamos vinte e oito (28) artigos, sendo que quatorze (14) deles compõem a edição temática “Educação e uso de tecnologias digitais no contexto da pandemia da COVID-19” da revista EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana. Todos os artigos foram publicados em revistas indexadas, com exceção de dois deles, que foram publicados em anais de eventos.

Para facilitar a compreensão do movimento de análise, confirmamos ao leitor o olhar fenomenológico a todos os textos, porém apresentamos neste artigo apenas uma síntese de como se deu tal movimento, devido à sua amplitude. Com esse pensar, entendemos a relevância de trazer ao leitor a síntese de alguns dos textos encontrados. Selecionamos quatro textos, buscando aqueles que apresentassem abordagens distintas.

1.4.1. TEXTO 1 - MUDANÇAS NA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA POR CONTA DO COVID-19

O texto [8], aborda as transformações que estão ocorrendo na educação, principalmente no ensino de Matemática, em função das condições impostas pela pandemia. Os autores relatam como tem se realizado as pesquisas em Educação Matemática e como vem sendo a transição para o ensino remoto, modelo adotado para a continuidade das atividades acadêmicas. A partir da pesquisa bibliográfica realizada e da análise dos artigos encontrados, os autores

concluem que os efeitos da COVID-19 na área de educação serão permanentes, pois introduziram mudanças significativas que conduziram o pensar e a prática sobre o ensino e a aprendizagem.

1.4.2. TEXTO 2 - A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA NUMA SOCIEDADE TECNOLÓGICA EM TEMPOS DE ISOLAMENTO SOCIAL

O texto [9] trata-se de um relato de experiência que propõe um modelo matemático para alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública do Rio de Janeiro, com o intuito de levá-los a refletir sobre a importância do isolamento social e dos hábitos de higiene na contenção do contágio da população pelo novo Coronavírus. O artigo também tem como propósito, com auxílio de fatos do cotidiano, abrir espaço para reflexão sobre a importância da Educação Matemática Crítica em tempo de isolamento social provocado pela pandemia, enfatizando o exercício da cidadania e da democracia. Os autores concluem que é preciso fazer, cada vez mais, uso de propostas criativas e inovadoras, apoiando-se nos recursos tecnológicos disponíveis e acontecimentos sociais, e que os alunos puderam perceber que a Matemática, sob domínio de pessoas intencionalmente voltadas às problemáticas da sociedade, é capaz de realizar transformações significativas.

1.4.3. TEXTO 3 - TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TEMPOS DE PANDEMIA

O texto [17] realiza uma reflexão sobre o impacto das mudanças ocorridas durante a pandemia da COVID19. O autor redireciona o foco às consequências que podem ocorrer na qualidade do ensino de Matemática, apresentando também uma discussão teórica sobre a importância do uso da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem no contexto pandêmico. Por fim, conclui que o profissional de ensino de Matemática deve repensar suas ações em relação à utilização das tecnologias digitais, pois diante desse cenário apresentaram-se não só como recurso necessário à modalidade remota de ensino, mas também como ferramentas significativas ao ensino e à aprendizagem em qualquer ambiente, dentre os quais a sala de aula presencial.

1.4.4. TEXTO 4 - ENSINO DE MATEMÁTICA E COVID-19: PRÁTICAS DOCENTES DURANTE O ENSINO REMOTO

O texto [7], aborda as práticas e os recursos pedagógicos com os quais trabalharam os docentes no ensino de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental de maneira remota. No estudo, os pesquisadores compreenderam no dito pelos investigados que pode se preservar após a pandemia um movimento por parte dos professores de dar continuidade ao processo educativo utilizando recursos tecnológicos, como plataformas de videoconferência, lives entre outros. Destaca-se, ainda, que a pesquisa evidenciou uma carência na preparação dos docentes em relação à utilização de tais ferramentas digitais.

1.4.5. SOBRE OS TEXTOS DESTACADOS

As sínteses aqui apresentadas demonstram diferentes modos pelos quais as atividades e pensamentos da Educação Matemática se fazem presentes em diferentes contextos frente à Pandemia de COVID-19. Contudo, o estudo fenomenológico proposto solicita uma análise dos textos em sua totalidade. Para que ocorra a compreensão dessa análise pelo leitor, entendemos que seria importante a demonstração do processo minucioso em todos os textos, assim como das convergências neles possíveis. Mas, como a estrutura do artigo solicita uma síntese, confirmamos ao leitor a análise fenomenológica de todos os textos, porém apresentamos a explicitação da análise de apenas um deles, do Texto 1, para que se possa entender como ela foi desenvolvida em sua totalidade.

Em cada texto, focamos em entender o exposto e o compreendido nos tópicos de apresentação e análise dos dados de estudo do(s) pesquisador(es), assim como o de considerações finais. Esses são tópicos nos quais o(s) pesquisador(es) expõe(m) suas compreensões mediante análise, e é a elas que nos atentamos. Portanto, não analisamos os referenciais teóricos desses textos, pois eles dizem da pandemia de modo mais geral, sem as correlações que almejamos estudar, aquelas que se realizam com a Educação Matemática. Desenvolvendo a análise fenomenológica, lançamos um olhar atendo para passagens dos textos que entendemos contribuir à compreensão do interrogado, as quais julgamos significativas, e as chamamos de Unidades Significativas (US). Buscando organizá-las,

para que posteriormente pudéssemos estabelecer convergências, e nomeamos cada uma delas. No primeiro texto destacamos as unidades: US1T1 (Unidade Significativa 1, Texto 1), US2T1, US3T1, e assim por diante. Com essa padronização destacamos unidades nos outros textos, como por exemplo, no segundo texto: USIT2, US2T2, US3T3, . . . No Quadro 1, que segue, apresentamos algumas das 15 US destacadas no Texto 1.

Quadro 1: Unidades Significativas do Texto 1

Texto 1 - Mudanças na pesquisa em Educação Matemática por conta do COVID-19

US1T1: possíveis mudanças paradigmáticas na pesquisa em educação matemática que a crise do COVID-19 pode promover.

US2T1: como os pesquisadores em educação matemática vêm realizando pesquisas.

US3T1: as mudanças sociais que o COVID-19 causou nas escolas.

(...)

US13T1: permitiu que professores e gestores vislumbrassem as possibilidades reais de ensino proporcionadas pelos recursos tecnológicos, aprenderam a transitar pelo mundo digital e essa imersão pode contribuir para a elaboração de projetos de ensino com objetivos mais próximos da realidade mundial.

US14T1: A “nova escola”, ou o “novo normal” da escola irá refletir, principalmente nas relações dos pesquisadores da área de Educação Matemática com a escola, os professores, os alunos e a direção.

US15T1: A possibilidade de se “ensinar” a distância tem promovido reflexões sobre o que é realmente importante e que tipo de mudanças são necessárias nas formas de avaliar.

Fonte: os autores.

TRANSCEN- DENDO REFLEXIVAMENTE AS UNIDA- DES SIGNIFICATIVAS: CONSTITUINDO IDEIAS NUCLEARES

No retorno às US, indagando e registrando o que cada uma delas nos dizem em sua individualidade, percebemos que algumas expressavam sentidos que se aproximavam, o que nos permitiu estabelecer convergências, as quais definimos como “sentidos que se mostram”. Ao olhar para os sentidos que emergiram, percebemos que os mesmos, juntamente com as US que os constituem, também convergiam entre si, abrindo possibilidade para articulação do que nomeamos como Ideias Nucleares (IN). Esse movimento, na metodologia fenomenológica, denomina-se por Análise Nomotética, que “entendemos ser o momento de transcender a análise dos dados individuais [...], atentando às convergências e divergências que, uma vez articuladas apontam para “grandes convergências” (PINHEIRO, 2018, P. 97). Na articulação da pesquisa foram destacadas **336** unidades significativas que, ao dialogarem entre si, constituíram **12** *sentidos que se mostram*. Na tabela 1, logo abaixo, apresentamos o movimento de conversão que fez mostrar-se a *Ideia Nuclear 1 (IN1)*, sendo o mesmo movimento realizado na constituição das outras duas IN.

O olhar analítico, buscando por convergência das US fez mostrarem-se dois (2) outros sentidos, quais sejam: *a Modelagem Matemática e a resolução de problemas contextualizados em atividades sobre a COVID-19; Capacidade do GeoGebra de lidar com modelos matemáticos, possibilitando a discussão de problemas sociais relevantes*; que entendemos constituir a **Ideia Nuclear 2**

Tabela 1: Movimento de constituição da Ideia Nuclear 1

Unidades Significativas	Sentidos que se mostram	Ideia Nuclear
US1T1, US2T1, US4T4, US5T4, US6T4, US7T5, US1T6, US8T6, US2T7, US5T10, US6T12, US7T12, US8T12, US1T13, US2T13, US4T13, US5T13, S14T14, US17T14, US5T15, US6T15, US8T15, US13T15, US6T16, US18T17, US19T17, US11T20, US18T20, US29T20, US4T25, US5T25, US6T27, US7T27.	Os desafios da Educação na pandemia	IN1 - Educação Matemática: problemas e dilemas durante a pandemia.
US11T1, US15T1, US3T2, US11T2, US15T3, US3T4, US11T4, US15T4, US3T5, US11T5, US15T5, US3T6, US11T6, US15T6, US1T8, US3T8, US5T8, US6T9, US17T9, US2T24, US5T24, US6T26, US1T28, US3T28, US16T28, US21T28.	Migração do espaço escolar físico para espaços virtuais	
US4T8, US5T8, US6T9, US7T9, US12T9, US13T9, US7T13, US8T17, US1T18, US2T18, US4T20, US5T20, US6T22, US7T25, US1T20, US2T24.	Educação Matemática se apresenta como campo sobre o qual se produz a criticidade e postura pró democracia	
US9T1, US9T2, US9T3, US9T4, US9T5, US9T6, US5T9, US6T9, US7T9, US8T9, US8T12, US1T12, US2T12, US5T17, US6T17, US4T19, US5T19, US6T19, US7T19, US2T20, US3T20, US13T20, US9T21, US10T21, US7T22, US8T22, US15T22, US16T23, US8T27, US10T27, US12T27, US1T28, US2T28, US11T28, US20T28.	Mudanças paradigmáticas na pesquisa em Educação Matemática	
US1T2, US5T2, US12T2, US21T2, US4T9, US5T9, US6T9, US4T11, US5T11, US6T11, US1T13, US2T13, US4T13, US5T13, US6T14, US12T14, US5T2, US12T2, US21T2, US4T9, US5T9, US6T9, US4T15, US6T15, US3T16, US4T16, US9T16, US11T18, US13T18, US5T23, US7T23, US6T25, US7T25, US5T27, US6T28, US7T28.	Uso de tecnologias digitais nos processos escolares e seu impacto no ensino de Matemática	

Fonte: O autor.

(IN2), descrita como: **Atividades matemáticas como auxiliares ao processo de compreensão da COVID-19.**

A composição da Ideia Nuclear 3 (IN3): **Estratégias e desafios da atuação docente no contexto da pandemia da COVID-19**, deu-se pela convergência de cinco (5) sentidos que se mostraram, sendo eles: *Desafios do ensino remoto nas práticas pedagógicas atuais; A necessidade de se contemplar estudos sobre a cibercultura na formação dos docentes; relevância do uso das tecnologias digitais para o trabalho remoto; Processos de ensino e de aprendizagem para contextos híbridos; A inclusão digital de alunos e professores.*

O movimento analítico exposto acima caracteriza a pesquisa fenomenológica; os dados com os quais podemos estabelecer compreensões sobre o fenômeno investigado apresentam-se juntamente ao movimento de pesquisa. Os *sentidos que se mostram* e as *Ideias Nucleares* não são prévios ao estudo, eles surgem ao pesquisador que intencionalmente se põe em ato de interrogar, e se está a interrogar, se posiciona como alguém que busca conhecer.

Sendo assim, as Ideias Nucleares dão-se numa originalidade, por serem constituídas no rigor fenomenológico de pesquisa. Portanto, entendemos que

uma articulação sobre elas é um modo de apresentar ao leitor compreensões sobre a pergunta de pesquisa: *como a Educação Matemática configura-se frente ao COVID-19?* Iniciamos tal articulação pela *Ideia Nuclear 1(IN1)*. Nela, trazemos os *sentidos que se mostram*, em itálico e negrito.

2.1. IN1 - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PROBLEMAS E DILEMAS DURANTE A PANDEMIA

Com o objetivo de contornar as dificuldades causadas pela COVID-19, mudanças se fizeram necessárias nos mais diversos seguimentos da sociedade, isso inclui os contextos escolar e acadêmico. A Educação Matemática enquanto campo de estudo e pesquisa, por exemplo, também precisou se ajustar frente a esta realidade, daí surge a pergunta desta pesquisa. Diante dos problemas e dilemas que nascem ou que se tornam mais evidentes durante a pandemia, a Educação Matemática se reformulou, buscando aportes nos meios tecnológicos e em outras áreas da educação, como a psicologia, a antropologia e a sociologia.

As mudanças paradigmáticas na pesquisa em Educação Matemática, devem-se, especialmente ao modo como as escolas, alunos e professores se organizam em suas atividades concomitantemente aos estudos e ao ensino. Tais mudanças trazem uma grande alteração na estrutura do ensino, transcendendo a fisicalidade da escola e da sala de aula. Com isso, modifica-se também o modelo das investigações em Educação Matemática. Um exemplo é o caso da produção de dados envolvendo colaboradores, onde os pesquisadores têm, muitas vezes, que realizar sua pesquisa de modo remoto, recorrendo ao uso de dispositivos que possibilitem contato virtual entre as pessoas, como lives e videoconferências. Nesse contexto, tanto o pesquisador quanto os pesquisados devem contar com condições mínimas de trabalho, que envolve uma boa conexão com a internet e equipamentos aos quais se aplica, bem como devem conhecer essas ferramentas e como operá-las.

Como sabemos, o ensino de Matemática, requer diversos métodos, recursos e atividades. Para tanto, faz-se relevante compreender as ações realizadas pelos docentes e como as mesmas se configuram diante das novas problemáticas

trazidas pela pandemia, além de questionar e explicitar os *desafios da educação* durante esse período de crise sanitária, para que se possa desenvolver estratégias para melhor lidar com os mesmos. A dificuldade no uso das ferramentas digitais, a falta de interação entre professor e aluno, e a criação de novos métodos para a avaliação, são apenas alguns desses desafios.

As implicações da pandemia na educação são evidentes, principalmente pela inevitabilidade do processo de *migração do espaço escolar físico para espaços virtuais*. Isso nos impôs uma nova realidade, marcada, inicialmente, pelo movimento de compreensão, seguido de estudos de possibilidades para uma sistemática de ensino. Tais estudos são, ainda, afetados pela imprevisibilidade da pandemia, gerando iniciativas descontraídas, como aquelas que determinam retorno de aulas presenciais, que são, quase imediatamente, desautorizadas por decisões judiciais ou políticas.

Nesse movimento de pensar o ensino, indaga-se sobre as metodologias, não podendo apenas projetar o trabalho com algumas consideradas mais efetivas para aprendizagem de determinado conteúdo, mas tendo que vincular a escolha àquelas que sejam viáveis dado o contexto pandêmico, o escolar, e as situações socioculturais dos alunos. Com isso, tem sido explicitado, tal como nos textos aqui analisados, que os professores de Matemática encontram dificuldades para ensinar os conteúdos — exemplos são: a Geometria, onde o desenho e as construções geométricas se mostram um desafio, e a Álgebra, devido à ênfase em problemas mais abstratos — tendo em vista que se perde o momento em sala de aula onde o professor pode ter melhor retorno da compreensão, ou não, do aluno.

Diante dessas problemáticas, vale destacar a ênfase que se realiza ao *uso de tecnologias digitais nos processos escolares e seu impacto no ensino de Matemática*. Dentre as plataformas virtuais mais utilizadas nesse período pandêmico tem-se o *Google Meet*, *Moodle* e o *Classroom*. Alguns estados brasileiros adotaram a modalidade de aula via rádio e televisão. No Ensino Superior, tornou-se frequente a participação em eventos como *webinars*, palestras, conferências, que, dada a especificidade da situação, foram realizados em modalidade totalmente *online*.

Nas circunstâncias aqui discutidas, há impacto na relação entre professor e

aluno; atividades antes escritas em cadernos e entregues pessoalmente, agora são digitalizadas e entregues via plataformas virtuais, além disso, em relação as aulas, muitos docentes as gravam e as disponibilizam para que os alunos possam ter acesso a elas em qualquer momento do dia. Esses mecanismos, para muitos docentes e estudantes, devem permanecer, pois estimulam o estudo para além do tempo de sala de aula, possibilitando uma revisão dos conteúdos ministrados pelo professor. A constatação de que algumas atividades, agora desenvolvidas, devem prevalecer mesmo após a pandemia, evidencia que a educação está sempre em um contínuo processo de evolução, não é inerte frente ao que ocorre em seu entorno, e as tecnologias digitais são potencialmente transformadoras desse campo.

Dessa forma, fica claro que esses processos de ensino e aprendizagem trabalhados no ensino remoto, além de fundamentais para a continuidade do ensino e da educação em tempos de pandemia, dizem respeito ao futuro, promovendo discussões sobre a educação pós-pandemia, que solicita investimento para a democratização das tecnologias digitais e da internet, de modo que o avanço tecnológico seja um meio desta democratização, e não um elemento a mais na reafirmação da desigualdade social, restringindo-se apenas à educação daqueles que têm os aportes tecnológicos e de qualidade para aderir as modalidades de ensino que possam vir a se afirmar, com mais atividades online junto ao sistema de ensino presencial, e isso em detrimento daqueles aos quais o acesso aos recursos digitais, necessários para o ensino e a aprendizagem durante e depois da pandemia, é, por vezes, impossível.

Nesse contexto, a *Educação Matemática se apresenta como campo sobre o qual se produz a criticidade e postura pró-democracia*. Assim, as discussões sobre a pandemia não se resumem à aprendizagem da Matemática que a ela pode ser aproximada, mas abre o campo de debate sobre a desigualdade social, na tão evidente e superior taxa de mortalidade pela COVID-19 na periferia. O direcionamento à democracia via Educação Matemática passa por essa discussão, mas se consolida quando o aluno se expressa, marca seu posicionamento crítico, e se põe aberto a dialogar com aqueles cujo pensamento converge ou diverge do seu.

2.2. IN2 - ATIVIDADES MATEMÁTICAS COMO AUXÍLIO NO PROCESSO DE COMPREENSÃO DA COVID-19

Como explicitado na IN1, dado o contexto pandêmico em que se encontra a sociedade, tornou-se inevitável o uso de tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem, inclusive os voltados à Matemática. A utilidade dessas tecnologias para a Educação Matemática reside também em movimentos de resolver problemas, de discutir e expressar ideias matemáticas, o que abre possibilidades ao desenvolvimento do pensamento matemático e, com isso, amplia-se modos pelos quais se possa ensinar e aprender.

Ao introduzir ferramentas digitais no processo de ensino, é essencial constituir também novas metodologias e estratégias de avaliação. Dentre essas metodologias, as descritas nos textos aqui estudados, destacam-se a Modelagem Matemática — que propõe aos estudantes a utilização de conceitos e algoritmos matemáticos, permitindo a resolução de problemas contextualizados e integrados às outras áreas de conhecimento — e a metodologia de Resolução de Problemas — que permite explorar as questões valendo-se de procedimentos variados, estimula e dá ênfase ao processo de resolução e não apenas à obtenção de respostas corretas. Para trabalho com essas metodologias é relevante que os docentes criem espaços que oportunizem aos alunos a aprendizagem de Matemática a partir do acompanhamento e da reflexão sobre seu próprio processo de aprendizagem.

A Epidemiologia constantemente faz uso de modelos matemáticos para estudo da propagação e controle de manifestações coletivas de doenças que acometem a sociedade, pois modelos matemáticos, por meio de simulações, contribuem para uma melhor compreensão das atitudes que se deve tomar para o controle das doenças. Um exemplo é o modelo de Bernoulli cujos resultados serviram para contenção e prevenção da varíola. A pandemia tornou incessante o contato com diversos conceitos matemáticos e estatísticos utilizados nos modelos matemáticos e nos gráficos que eles dão origem, tornando-se imprescindível a compreensão dos mesmos.

Considerando que o comportamento da COVID-19 pode ser descrito por um modelo matemático, isto é, por expressões matemáticas que descrevem

a natureza da situação e as suas mudanças ao longo do tempo juntamente aos parâmetros que definem essas mudanças, podemos então abordar *como a Modelagem Matemática e a resolução de problemas podem ser contextualizados em atividades sobre a COVID-19*.

Por exemplo, os estudos em epidemiologia utilizam de modelos matemáticos fundamentados na teoria das equações diferenciais. Um desses modelos é o chamado SIR, formulado por Kermack e McKendrick e que apresenta a divisão da população em três classes de indivíduos: Suscetíveis, Infectados e Removidos (SIR) e é utilizado no estudo da disseminação de doenças virais não letais que conferem imunidade permanente. Esse modelo foi útil para a compreensão do mecanismo de propagação de muitas doenças, assim como para melhorias em saneamento, higiene e uso de vacinas.

Um olhar da Educação Matemática aos modelos que buscam fundamentar matematicamente aspectos da pandemia, já considerando que a modelagem é contemplado por ele, diz respeito à utilização de *softwares*, dos quais destaca-se aqui o *software* GeoGebra, que torna possível a visualização e compreensão de diversos conceitos matemáticos e, apesar de ser mais utilizado para atividades de construções geométricas e estudo das mesmas de forma dinâmica, seus outros recursos, utilizados para tratar problemas de probabilidade e estatística, manipular expressões simbolicamente e a capacidade de executar algoritmos numéricos, o tornam uma ferramenta computacional sofisticada apropriada para discussão de aplicações matemáticas.

Com enfoque na praticidade, os profissionais de saúde, assim como a sociedade, não estão interessados na representação algébrica das soluções das equações utilizadas nos modelos, mas em aspectos qualitativos que determinam seu comportamento. E esses aspectos podem ser extraídos a partir de técnicas gráficas, fundamentadas em soluções numéricas aproximadas obtidas a partir da utilização de ferramentas computacionais. Essas técnicas compõem a chamada Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e uma boa parte delas estão presentes no GeoGebra.

O GeoGebra disponibiliza um comando para encontrar numericamente as soluções de um modelo SIR simplificado com valores iniciais e, simultaneamente, esboçar o gráfico das soluções diretamente na Janela de visualização

gráfica do *software*. A capacidade do programa de interpretar os parâmetros do modelo como controles deslizantes, torna possível uma simulação mais sofisticada do modelo e, em tempo real, ver o efeito dos parâmetros estabelecidos sobre o comportamento qualitativo das soluções, sendo possível mostrar o comportamento qualitativo típico de epidemias que apresentam crescimento exponencial inicial, fase de redução da taxa de proliferação até o momento que atinge o platô da curva de infectados e, finalmente, o decaimento até a extinção da epidemia. Isso torna evidente *a capacidade do GeoGebra de lidar com modelos matemáticos, possibilitando a discussão de problemas sociais relevantes*.

Assim, ampliando o trabalho com este *software*, enfatizando também sua programação para/com a probabilidade e a estatística, pode-se desenvolver atividades de ensino e de aprendizagem que tragam como tema de estudo a pandemia. Uma dessas atividades resume-se em desenvolver, no GeoGebra, um modelo SIR em uma situação ideal do problema que permita analisar as questões relevantes da pandemia ao buscar, por exemplo, determinar a variação do número de infectados em um intervalo de tempo; definir parâmetros que representem a taxa de contato entre os indivíduos e a probabilidade de contágio quando esse contato ocorre entre um suscetível e um infectado, gerando oportunidades para interpretações de como medidas de distanciamento social, hábitos de higiene e o uso de máscaras influem na probabilidade de contágio — notar-se-á que tais medidas afetam, cada uma, no comportamento da curva de infectados, reduzindo as chances de infecção pelo vírus. Esclarecer a relação entre o distanciamento e medidas de higiene com taxas de transmissão, recuperação e mortalidade permite, além de expor a importância das estratégias e precauções no controle da dispersão da COVID-19, a discussão das propostas governamentais para combate à pandemia.

Atividades como essa, envolvendo Modelagem Matemática, baseadas na Resolução de Problemas — note que o objetivo não é conseguir os resultados corretos e precisos sobre situação real, mas obter compreensões no processo, baseando-se em uma situação ideal — tem sua força na interdisciplinaridade, ao conectar conceitos matemáticos às outras áreas do conhecimento e eventos da realidade dos alunos, permitindo reflexões sobre os problemas do dia a dia dos

estudantes, na sociedade em que se inserem, proporcionando o desenvolvimento de um pensamento crítico

2.3. IN3 - ESTRATÉGIAS E DESAFIOS DA ATUAÇÃO DO- CENTE NO CONTEXTO DA PANDEMIA DA COVID-19

Como já explicitado, com a propagação do novo Coronavírus, tornaram-se inviáveis as aulas presenciais nas instituições de ensino, o que fez do ensino remoto uma alternativa para contornar o problema. Com a implementação dessa modalidade de ensino, fizeram-se evidentes *os desafios do ensino remoto nas práticas pedagógicas atuais*, que solicitam que o docente recorra ao uso de recursos digitais para estimular o estudante durante a aula, proporcionando frequente contato com as tecnologias digitais e com a internet.

Desses desafios, alguns têm origem no despreparo de muitos professores para a modalidade de ensino remoto, que afeta especialmente os professores de mais idade, que em grande parte não tiveram uma “educação digital” em sua formação docente, diferentemente dos acadêmicos atuais, que já nos primeiros períodos da Licenciatura em Matemática já estão em contato com softwares e com plataformas virtuais de ensino, podendo a partir delas pensar e desenvolver atividades tais como as explicitadas na IN2.

O despreparo não só dos professores, mas do sistema educacional como um todo no que diz respeito à educação sediada em espaços digitais, foi um dos motivos de entrave das propostas e posteriormente da efetivação das mesmas na eventual retomada do ensino no período pandêmico. Nem todos estavam habituados a assistir ou ministrar aulas remotamente, o que trouxe dificuldades ao processo de ensino e aprendizagem, salientando a importância da *inclusão digital de alunos e professores*, que não se justifica pela iminência da pandemia. Inclusão digital é solicitação das escolas e da sociedade civil desde os primórdios do desenvolvimento tecnológico. No entanto, a pandemia traz de modo mais potente a percepção de exclusão para os excluídos, e suscita neles angustias que antes não tinham. Muitos dos excluídos (ou marginalizados) do mundo digital seguiam suas vidas, acostumados (domesticados) ao que elas

lhes apresentam como possibilidades. No entanto, a virada no olhar, que os move, vem especialmente como o apelo das crianças, de suas crianças, que por falta de um celular e de internet não podem assistir aulas, perdendo assim o ano letivo. Com isso, a solicitação de inclusão digital não é mais só dos estudiosos, ou dos que atuam na Educação, o “grito” por inclusão ganha força na voz dos pais de alunos, que veem os sonhos sonhados para suas crianças se desmoronarem, quando a escola física, um dos veículos desses sonhos, está fechada e a oportunidade da escola virtual não é possível às mesmas.

Na necessidade de avançar e promover o ensino, mesmo reconhecendo dificuldades e limites, são desenvolvidas algumas estratégias, dentre as quais a adequação dos *processos de ensino e aprendizagem para contextos híbridos*, mesclando ensino presencial e virtual. Tal iniciativa integra tecnologias e mídias digitais por meio de plataformas adaptativas, trazendo mais mobilidade, possibilidade de personalização e compartilhamento, proporcionando diferentes experiências, dentro e fora da sala de aula.

Os professores que ministram aulas presenciais frequentemente fazem uso de vários materiais, muitos deles para ampliar a visualidade dos conceitos matemáticos trabalhados, dentre os quais, destacam-se os de escrita, utilizados para o desenho e representação simbólica de conceitos — quadros e papéis, lápis, canetas e compasso, além das régua e esquadros. Esses e outros materiais, devido às dificuldades impostas pela pandemia, por meio do ensino remoto, precisaram ser adaptados para ambientes virtuais, conduzindo ao desenvolvimento e criação de plataformas, ferramentas e aplicações que auxiliassem na tarefa do docente. Como exemplos, temos: a mesa digitalizadora, celulares e notebooks, *Google Classroom*, *Google Meet* e *Zoom*, destacando **a relevância do uso das tecnologias digitais para o trabalho remoto** em um contexto onde o distanciamento e o isolamento social são imprescindíveis. Vale notar que em muitas escolas e universidades públicas, esses recursos não foram subsidiados pelo governo, ficando por conta do docente a compra dos próprios materiais.

Para alguns professores a compra destes materiais não foi uma escolha, e sim condição por eles entendida como necessária para o desenvolvimento de suas aulas, de modo que o ensino e a aprendizagem sejam possíveis, e se rea-

lizem da melhor maneira, dada a realidade do ensino remoto. Tal afirmação pode ser direcionada especialmente aos professores de disciplinas que não podem se limitar ou ter como principal instrumento de exposição a apresentação via *Power Point*. Por exemplo, para a aprendizagem de Cálculo, faz-se necessário todo o movimento de desenvolvimento de um problema, realizando as operações, as exemplificações, os rascunhos, os desenhos. Portanto, em casos como este, a compra de uma mesa digitalizadora e o trabalho com plataformas às quais se aplica, como *Open Board* e *Autodesk Sketchpad*, se faz relevante, especialmente por permitir a sincronicidade da explicação, que pode ser antevista, mas não necessariamente inteiramente escrita e ilustrada pelo professor num *slide*, o que demandaria muito tempo para produção do material de aula.

Visando apresentar plataformas virtuais de ensino, bem como aprimorar o manejo das tecnologias digitais, universidades e órgãos escolares desenvolveram projetos e minicursos, cujo objetivo era a familiarização, mas especialmente o desenvolvimento de um modelo de ensino remoto, trazendo aos professores as principais ferramentas tecnológicas e apresentando modos de ensino e de avaliação. Embora se possa dizer que muitos professores não se adaptaram ou que não se moveram na direção dessa proposta, há de se destacar que a grande maioria muito se empenhou e se empenha, vencendo os desafios e barreiras que inicialmente aparentavam intransponíveis. Hoje esses professores reafirmam a relevância das tecnologias digitais para o ensino e para o desenvolvimento de sua prática docente.

Essa transição, da desconfiança à apropriação das tecnologias digitais é também elemento para se pensar sobre **a necessidade de se contemplar estudos sobre a cibercultura na formação dos docentes**. Essa “cultura digital” é própria da contemporaneidade, dado que os dispositivos eletrônicos são parte essencial da realidade desta época, estando presentes nas mais diversas produções humanas, norteiam seu desenvolvimento e caracterizam o futuro. Assim, é, e está, presente no âmbito educacional, implicando na inevitabilidade do conhecimento dessa cultura pelos professores. Com o intuito de abrandar as dificuldades de docentes em relação às tecnologias, faz-se necessário uma formação que vise garantir o uso apropriado dos recursos digitais, contemplando as maneiras de trabalhar com os mesmos em auxílio à atividade

docente, instigando o interesse e a curiosidade dos alunos, incentivando uma sala de aula atualizada e em conformidade com a realidade em que se vive.

TECENDO UMA SÍNTESE COMPREENSIVA E AR- TICULANDO COMPREENSÕES FINAIS

O Campo de pesquisa em Educação Matemática mostra-se importante em decorrência da sua preocupação com o processo de ensino e de aprendizagem, propondo uma didática interdisciplinar e transdisciplinar, visando que as compreensões em sala de aula que transcendam os conteúdos tacitamente postos, constituindo uma postura, ou posturas, no sentido de que ao ser com a Matemática, o aluno possa ser criativo, independente, questionador e crítico frente às problemáticas que a eles se apresentarem, quer seja em sala de aula, quer seja na sociedade. Assim, a Educação Matemática, tal como explicitado neste texto se lança à pandemia tomando-a como fenômeno, ao qual o olhar lançado se dá face a face, visando compreender: seus efeitos nas relações humanas, especialmente entre professor e aluno; suas implicações socioafetivas; suas implicações no ensino e na aprendizagem de Matemática; sua disseminação enquanto tema sobre o qual se projeta relações matemáticas; seu potencial de trazer à percepção o quão grande é a desigualdade social no país, bem como seu potencial de contribuir ao posicionamento pró democratização do ensino e das tecnologias digitais. Todas essas faces às quais a Educação Matemática se volta, tal como os estudos aqui realizados evidenciam, são articuladas nas três ideias nucleares constituídas, dizendo de como a Educação Matemática configura-se frente a pandemia do COVID-19.

Ainda articulando sobre esse “como”, entende-se que a pesquisa aqui realizada reafirma a transversalidade da Educação Matemática; ela pode acolher e lançar um olhar interrogador a uma diversidade de temáticas, especialmente

quando há implicações ao ensino e à aprendizagem. Desse modo, compreende-se que há um campo a ser explorado na Educação Matemática, no que diz respeito à Pandemia do COVID-19. Ou seja, entendemos que os estudos aqui analisados não dão conta de todas as faces do fenômeno Pandemia da COVID-19, e que mesmo ampliando-se os olhares, esse é um objetivo que não pode completar-se. Mas, algumas temáticas podem ser observadas, como: as implicações psicológicas; contextualização filosófica; contextualização ambiental - tendo em vista que muitos dos vírus que atingem a humanidade nos chegam mediante degradação do habitat natural de algumas espécies; contextualização da Educação Financeira, focando, por exemplo, a otimização dos recursos recebidos, como o auxílio emergencial; dentre outros olhares possíveis.

Vale enfatizar, com base nos estudos realizados, que a face a qual mais se volta a Educação Matemática, é a que diz respeito às tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Matemática, abrindo discussão sobre a prática de ensino e sobre a formação de professores com essas tecnologias.

Neste artigo, defende-se que essa formação não se realize por meios puramente técnicos, nos quais alunos e professores se põem como usuário de uma ferramenta ou produto tecnológico para atender solicitações ou aprender a Matemática, fechada nela mesma. Propõe-se que o desenvolvimento do aprender seja correlato ao contexto atual (que traz a situação pandêmica), mas sem desprender-se da historicidade (que pode trazer outras pandemias, relevantes para compreensão da atual). Desse modo, pode-se pensar que frente ao cenário tecnológico imposto pela COVID-19, não há o sujeito como usuário da tela, dos dispositivos, dos ambientes virtuais, mas há essas tecnologias e espaços digitais como um modo dele se estender aos seus objetivos, que estão entrelaçados às solicitações de uma atividade e à intencionalidade de compreender as configurações de seu mundo circundante, bem como compreender-se nesse mundo, pensando como suas ações podem provocar nele mudanças.

Assim, a aprendizagem transcende a Matemática e as tecnologias digitais enquanto ferramenta, constituindo a corporeidade de cada aluno, que se realiza no ser-no-mundo-com-matemática-com-tecnologias, como unidade, que se reconfigura a cada aprender. Nesse contexto, a Educação Matemática contribui à constituição dessa unidade, entendida como corpo, ao tematizar a pandemia

como um campo com o qual se pode aprender, especialmente para que se possa melhor lidar com ela e com suas implicações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALVES, A. M. M. e SILVEIRA, D. N. (2016). *Uma leitura sobre as origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil*. Revista Tópicos Educacionais.
- [2] AQUINO, E. M. L. et al. (2020). *Medidas de distanciamento social no controle da pandemia de COVID-19: potenciais impactos e desafios no Brasil*. Ciência & Saúde coletiva.
- [3] BICUDO, M. A. V. A. (2011). *Pesquisa Qualitativa: segundo a visão fenomenológica*. Cortez
- [4] BRASIL, Ministério da Educação. (2020). *Portaria nº 343, de 17 de março de 2020*. Brasília.
- [5] CESPEDES, M. S. e SOUZA, J. C. R. P. (2020). *Sars-CoV-2: Uma atualização clínica*. Revista da Associação Médica Brasileira.
- [6] CORDEIRO, K. M. A. (2020). *O Impacto da Pandemia na Educação: A Utilização da Tecnologia como Ferramenta de Ensino*. Faculdades IDAAM.
- [7] FERREIRA, L. A. et al. (2020). *Ensino de Matemática e COVID-19: práticas docentes durante o ensino remoto*.
- [8] MERLI, R. F.; IGNATIUS, C. M. e POWEL, A. B. (2020) *Mudanças na pesquisa em Educação Matemática por conta do COVID-19*.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO E TECNOLOGIAS/ENCONTRO DE PESQUISADORES EM EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA.

- [9] NETO, L. C. e COSTA, C. S. (2021). *A Educação Matemática Crítica numa sociedade tecnológica em tempos de isolamento social*. Cadernos de Educação Básica
- [10] SANTOS, E. J. (2020). *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: uma renovação do ensino de Matemática nas décadas de 1960 e 1980*. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática.
- [11] SILVA, J. F.; CURI, E. e SCHIMIGUEL, J. (2017). *Um Cenário sobre a Pesquisa em Educação Estatística no Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, de 2006 até 2015*. BOLEMA.
- [12] PEREIRA, D. J. R. (2005). *História do movimento democrático que criou a Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM*. Unicamp.
- [13] PINHEIRO, J, M, L. (2018). *A Matemática e seu ensino: olhares em Educação Matemática*. Livraria da Física.
- [14] PINHEIRO, J. M. L. (2018). *O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica*.
- [15] SKOVSMOSE, O. (2007). *Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade*. Cortez.
- [16] TAMBARUSSI, C. M., KLÜBER, T. E. (2013). *Um olhar sobre a constituição da Educação Matemática*. Anais do ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.
- [17] VALENCIA, F. A. (2020). *Tecnologia e educação matemática em tempos de pandemia*. Olhar de Professor.



FORMAÇÃO CONTINUADA COM PROFESSORES DOS
ANOS INICIAIS: UMA INTERFASE ENTRE O USO DAS
TECNOLOGIAS DIGITAIS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

GLENDÁ QUADROS, MATHEUS LUZ E MARIA BRITO

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. Prefácio	iv
2. Introdução	5
3. Metodologia	6
4. Resultados Parciais	9
5. Conclusões	11
6. Referências Bibliográficas	12

PREFÁCIO

O presente trabalho tem por objetivo compartilhar as experiências pedagógicas oriunda/decorrente/advinda do projeto Vivências Formativas em Matemática com Professores dos Anos Iniciais da Educação Básica no Município de Bragança/PA, vinculado a Pró-reitoria de Extensão (PROEX), está em andamento, no campo de formação continuada de professores, no que se refere a sua prática como docente. Esse projeto teve início a partir de um trabalho de colaboração entre três professores, uma bolsista e um voluntário, todos da Faculdade de Matemática/Campus Bragança/Universidade Federal do Pará, em que deseja ressaltar a importância de se utilizar ferramentas digitais para o ensino-aprendizagem dos alunos dos anos iniciais em matemática. Entre esses softwares matemáticos que podem ser utilizados, destacamos o GCompris, GeoGebra, Winplote, Wingeom e Winmat, abordando três áreas da matemática: Aritmética, Álgebra e Geometria, usando como auxílio as plataformas Google Meet e Classroom para o desenvolvimento das aulas.

INTRODUÇÃO

A população mundial sente, há mais de dois anos, os reflexos causados pelo vírus SARS-CoV-2 (Covid-19), que acarretou sérios problemas, principalmente na área da saúde, economia e educação. Nessa conjuntura, fez-se necessário o isolamento social por tempo indeterminado e, conseqüentemente, o fechamento das Unidades Educacionais. Assim, o sistema educacional brasileiro se adequou a várias modificações, tendo em vista que os discentes não poderiam frequentar as escolas nesse período.

Foram necessários recursos metodológicos que fizessem com que as aulas chegassem a todos ou pelo menos para a maioria dos estudantes. Então, pensou-se no Ensino Remoto Emergencial - ERE, que diferente do estudo a distância, seriam dadas aulas em tempo real das disciplinas de acordo com cada professor da área correspondente, onde haveria interação entre os alunos e que os deixasse o mais próximo de uma aula presencial. Confirma, Lavor Filho *et al.* (2021, p. 09) “O ensino remoto é uma realidade que nos permite recriar e reinventar processos pedagógicos e ressignificar a escola como um local que se apropria das tecnologias da informação nas suas práxis de ensino”, ou seja, por mais que esse tempo pareça transitório, é preciso buscar novas táticas de ensino-aprendizagem de forma eficaz, acessível e seguro.

Nessa direção, os professores utilizaram de vários meios digitais, alguns deles sendo plataformas de aprendizagem *Moodle*, o *Microsoft Teams* ou o *Google Classroom*, outros foram as salas de videoconferência *Google Meet*, *Skype*, *Google Hangout* e o *Zoom*, onde essa diversidade se justifica no maior acesso de alunos beneficiados nesse contexto de ensino. Para mais, ao comentar sobre o ERE, Moreira *et al.* (2020, p. 352) nos alerta: “Mais do que a transferência de práticas presenciais urge agora criar modelos de aprendizagem virtuais que incorporem processos de desconstrução e que promovam ambientes de aprendizagem colaborativos e construtivistas nas plataformas escolhidas”. Ou seja, a transição das aulas presenciais ao formato *on-line* exigiu a implementação dos recursos digitais, e daí, aportaram as preocupações docentes quanto a sua adequação às novas metodologias e práticas pedagógicas a serem usadas em ambiente virtual. Ou ainda, não somente a adoção e manipulação

emergente de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação - TDIC preocupou os docentes, mas a sua organização didática.

Por outro lado, a cronologia pandêmica evidenciou a necessidade da educação digital de alunos e professores com destaque ao Ensino Fundamental I, visto que “Nas primeiras séries dos anos iniciais, a educação remota emergencial também levantou inúmeras preocupações (...) [ora, as] chances de ocorrer um fracasso nesse processo, são consideráveis, pois a maioria das famílias responsabilizadas em dar suporte às crianças, não tem nenhuma preparação” (OLIVEIRA, 2020, p. 110). E nesse contexto, os danos recaem com maior gravidade sob a disciplina de matemática.

Assim, enxergamos as TDIC como meios de grande valia no processo de ensino, seja de alternativa puramente pedagógica, seja como ferramenta alternativa fundamental para a permanência/prosseguimento das atividades educacionais no país.

Diante de todo o exposto, o presente trabalho tem o intuito de relatar as experiências acerca do projeto em andamento “Vivências Formativas em Matemática com Professores dos Anos Iniciais da Educação Básica no Município de Bragança/Pará”. Desenvolvido como Capacitação para o uso de *softwares matemáticos* para professores dos Anos Iniciais, teve início em agosto de 2021, composto por três professores da Faculdade de Matemática (FAMAT) da Universidade Federal do Pará/Campus Bragança, três professores colaboradores de outras instituições, uma bolsista e um não bolsista/voluntário (FAMAT). Em que a proposta do referido projeto se deu pela necessidade de enfrentamento as mudanças postas pela pandemia do COVID-19 e, de ampliar o acesso à tecnologia no ensino da matemática. Pois, ela é uma aliada na tessitura dos aspectos formal e de abstração para a composição de conceitos aos estudantes dos Anos Iniciais.

METODOLOGIA

Este estudo tem abordagem qualitativa e caracteriza-se como um relato de experiência de discentes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Pará/Campus Bragança, e está sendo realizada no projeto Vivências Formativas em Matemática com Professores dos Anos Iniciais da Educação Básica no Município de Bragança/PA, vinculado a Pró-reitora de Extensão (PROEX), visando formação continuada de professores em relação a utilização de ferramentas digitais para ensinar, conteúdos referente a Aritmética, Álgebra e Geometria (AAG) para os anos iniciais com os recursos digitais (*GCompris*, *GeoGebra*, *Winplote*, *Winggeom*, *Winmat*). Destacamos que, o desenvolvimento do projeto ocorre desde agosto de 2021 até julho de 2022 e essa abordagem pedagógica consisti em 17 encontros quinzenais e 2 *Webinários* entre a coordenação do projeto, professores dos anos iniciais, professores colaboradores e os bolsistas.

Começamos com a divulgação do projeto em rede sociais e listas de e-mail do curso de Licenciatura em Matemática/Campus Bragança para a seleção de 2 alunos (1bolsista e 1voluntário), em seguida realizamos a divulgação nas escolas da rede pública de ensino dos anos iniciais para a seleção de 30 docentes.

Em setembro de 2021, iniciamos os estudos com os bolsistas selecionados, para explicitação dos objetos de conhecimentos matemáticos (AAG) que serão trabalhos utilizando o software adequado para cada módulo: 1º) Álgebra Básica (*GCompris*, *Geogebra*), 2º) Aritmética Básica (*GCompris*, *Geogebra*), 3º) Geometria Básica (*Winplot*, *Winggeom*, *Geogebra*).

Em outubro, ocorreu a gênese do Ciclo de Estudos e Pesquisas para discutirmos o uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática. A partir disto, desde novembro, estamos realizando as atividades com os materiais pedagógicos sobre os conteúdos Aritmética, Álgebra e Geometria para os Anos Iniciais da Educação Básica, utilizando o software (*Winplot*, *Winggeom*, *Geogebra*, *GCompris*), no período noturno, com duração em torno de duas horas, pela plataforma *Google Meet*.

Tabela 1: Atividade Realizada

COMUNICAÇÕES ORAIS

Dia/Mês/Ano	Atividade
Dia 24/11/2021	Encontro inaugural; Apresentação do projeto (sobre o que o projeto se trata) e palestra sobre o pensamento algébrico, tendo como base as habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular- BNCC; Houve o sorteio de livros;
Dia 07/12/2021	Introdução ao <i>software GCompris</i> , conceitos básicos; Apresentação da Interface, com o foco no ambiente de matemática; Atividade para casa; Houve o sorteio de livros;
Dia 12/01/2022	<i>Software GCompris</i> : mostrando uma aplicação do assunto Operações Inversas com um jogo; Abordagem em Aritmética; Houve o sorteio de livros;
Dia 26/01/2022	Introdução ao <i>software GeoGebra</i> ; Mostrando os dados iniciais; Apresentação da Interface e ferramentas do aplicativo; Atividade para casa;
Dia 09/02/2022	Ferramentas e uso do <i>GeoGebra</i> em sala de aula, com foco em Geometria. Atividade para casa;

Dia 23/02/2022	Primeiro <i>Webinário</i> . Palestras com três temáticas na questão do ser professor: 1. Em torno da arte de ensinar: O professor como artesão de uma pedagogia estética; 2. Percursos e desafios da profissão docente: A sabedoria da relação Teoria & Prática; 3. A docência por opção: O papel do professor no cenário em que atua;
Dia 09/03/2022	Apresentação dos Jogos no <i>GeoGebra</i> para sala de aula, com enfoque em Geometria e Álgebra;

Cabe ressaltar que além das atividades quinzenais, foram definidos como canais de diálogo o correio eletrônico, ligação ou grupo de mensagens instantâneas. Isso sendo interessante para dar melhor logística e acesso as informações do curso, seja para o esclarecimento de dúvidas, seja por compartilhamento de dados. Ademais, para este último caso, foram elaborados dois materiais de apoio em vídeo e escrito, encaminhado por estes mesmos canais de comunicação do projeto de forma assíncrona.

RESULTADOS PARCIAIS

A participação no projeto com os professores dos Anos Iniciais, nos possibilitou o diálogo com a Educação Básica sobre habilidades/competências nesse nível de estudos. Enfatizamos que os professores receberam mais informações sobre informática, sentiram-se mais preparados para trabalhar com novas tecnologias e metodologias com os alunos, implementando assim em suas aulas e tornando-as mais atrativas, isso é confirmado pelos relatos e registros no qual os docentes fazem e compartilham em nossos encontros quinzenais e no grupo de *WhatsApp*, em que os docentes já estão utilizando os aplicativos ensinados na formação continuada, até então, o *GCompris* e *GeoGebra* para ensinar não somente matemática, mas outras disciplinas que os *softwares* permitem. É importante ressaltar a busca e o empenho dos professores participantes pela proposta do projeto, tendo em vista que muitos desses professores já haviam escutado sobre essas novas ferramentas metodológicas, mas sentiam-se inseguros para colocar em suas atividades docentes.

Outro ponto a destacar, foi a importância do projeto no que se refere a prática de desenvolver esse trabalho de capacitar professores. Proporcionando o aprofundamento e a aquisição de novos saberes para os professores dos anos iniciais da educação básica, favorecendo não apenas eles, mas nós bolsistas que estamos conjuntamente nos capacitando, uma vez que, durante esse tempo a formação foi muito valiosa, causando troca de experiências e evidenciando no estudante universitário a necessidade de formação continuada e a participação ativa no tripé ensino, pesquisa e extensão.

Logo, a aplicação dos métodos e dos recursos digitais na matemática para os anos iniciais, busca desenvolver aulas mais dinâmicas, motivadoras e que possibilitem uma aprendizagem com resultados efetivos. Dessa maneira, o uso das tecnologias se torna uma estratégia de ensino-

aprendizagem que procura auxiliar o professor nas aulas e melhorar o ensino da disciplina e da educação digital. Porém, algumas escolas não possibilitam a inserção desses recursos, no que diz respeito às condições oferecidas pela estrutura física e o ambiente escolar. Portanto, é preciso criar metodologias que façam esse diálogo entre a tecnologia e o que a escola oferece, pois

o uso criativo das tecnologias pode auxiliar os professores a transformar o isolamento, a indiferença e a alienação com que costumeiramente os alunos frequentam as salas de aula, em interesse e colaboração, por meio dos quais eles aprendam a aprender, a respeitar, a aceitar, a serem pessoas melhores e cidadãos participativos (Kenski, 2011, p. 103).

De acordo com a assertiva acima, é imprescindível introduzir recursos tecnológicos para o desenvolvimento social e intelectual do aluno, uma vez que, ele está se preparando para adentrar em uma sociedade que exige o domínio, compreensão e aprofundamento de novas tecnologias digitais.

CONCLUSÕES

O projeto continua em andamento, mas verificamos mediante as análises dos resultados parciais, a necessidade de se utilizar ferramentas digitais para a contribuição na formação continuada de professores dos anos iniciais, onde atribuí um caráter de metodologia para desenvolver o ensino e a aprendizagem do aluno. Por esse motivo, ressaltamos o uso da mesma em sala de aula e seus efeitos diante da relação do professor e aluno, e verificamos como o projeto Vivências Formativas em Matemática com Professores dos Anos Iniciais da Educação Básica no Município de Bragança/PA, torna-se importante no processo de construção de conhecimento por meio do uso das tecnologias.

Observamos também que, é urgente e necessária a imersão de recursos tecnológicos na estrutura educacional das escolas públicas dos Anos Iniciais, mas isso não é um fator propriamente determinante para que haja ou não a utilização de tais ferramentas digitais, dado que, alguns professores do projeto sentiram-se motivados e utilizaram como base o que foi aprendido durante os encontros. Então, esses professores buscaram outros meios como a impressão das atividades que o *software* possibilitava e introduziram em suas aulas, pois a escola desses referidos professores não possuía recurso tecnológico. Por conseguinte, vimos que a Formação Continuada de Professores, por meio do estudo, pesquisa e reflexões proporcionadas pelo projeto, faz com que estes docentes estejam em constante mudança e transformação sobre o modo de pensar e o fazer pedagógico.

- [1] HOLANDA, R. R.; DE LAVOR FILHO, T. L.; CHAVES, I. T.; MELO, I. R. DE C.; RIBEIRO, A. A. **Educação em tempos de covid-19: a emergência da educação a distância nos processos escolares da rede básica de educação**. Rio Grande do Norte: Holos, 2021.
- [2] KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias o Novo Ritmo Da Informação**. 8. Ed. Campinas, SP, 2011.
- [3] MOREIRA, J. A. M.; HENRIQUES, S.; BARROS, D. **Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia**. São Paulo: Dialogia, 2020.
- [4] OLIVEIRA, L. S. F. **A inserção acelerada das TDIC na educação infantil e Ensino Fundamental I diante a pandemia da COVID – 19**. Brazilian Journal of Policy and Development, vol. 2, n. 4, 2020, p. 95-117. E-ISSN:2675=



O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT E INVARIANTES DE DEHN

SÉRGIO MACIEL

JUNHO DE 2022

*Ao Prof. Vinicius Morelli Cortes, que cedeu uma tarde inteira a fins de
revisar o texto.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Congruência por Tesoura e o Terceiro Problema de Hilbert

1.1 Dissecções de Poliedros e Congruência por Tesoura

1.2 Dissecções por planos

2 Invariantes de Dehn

2.1 Invariantes de Dehn e Congruência por Tesoura

2.2 Usando o Invariante de Dehn para Resolver o Terceiro Problema de Hilbert

3 Além do Terceiro Problema de Hilbert

3.1 Generalizações do problema e relações com outras áreas da matemática

Apêndices

A $\arccos(1/3)$ não é múltiplo racional de π

Referências

PREFÁCIO

Durante o *Congresso Internacional de Matemáticos* de 1900, em Paris, David Hilbert apresentou uma lista contendo 23 problemas que ele considerava as questões em aberto mais importantes para a matemática na época. Um dos poucos problemas da lista que hoje estão solucionados é o terceiro. *O Terceiro Problema de Hilbert*, que trata de algumas características de poliedros, pode ser enunciado da seguinte forma.

Conjectura 0.1. Dados quaisquer dois poliedros de mesmo volume, é sempre possível dividir o primeiro deles em poliedros menores e rearranjar os pedaços para formar o segundo poliedro.

A pergunta análoga para duas dimensões já tinha uma resposta conhecida. Sabia-se que se dois polígonos têm a mesma área, é possível dividir um deles em polígonos menores e rearranjá-los para formar o outro polígono. Não apenas isso, mas o *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien* (como ficou conhecido o resultado) nos dá um algoritmo para fazê-lo. Com um resultado tão forte para duas dimensões, é natural que procuremos uma resposta para o caso tridimensional.

Em 1902, apenas dois anos depois que Hilbert apresenta sua lista de problemas, Max Dehn, seu antigo aluno, apresenta uma resposta para a pergunta levantada. Ele introduz uma maneira de associar certas quantidades à poliedros. Em particular, cada poliedro está relacionado à um grupo abeliano, denominado o *Invariante de Dehn* desse poliedro. Definiremos o Invariante de Dehn de um poliedro no primeiro capítulo, junto com algumas outras definições que nos permitirão dar um tratamento um pouco mais rigoroso ao problema em questão.

No Segundo Capítulo, trataremos de mostrar que o Invariante de Dehn é

de fato um invariante, posto que essa quantidade coincide para dois poliedros que admitem a decomposição descrita pelo enunciado do Terceiro Problema de Hilbert. Ainda nesse capítulo, calcularemos o Invariante de Dehn de dois poliedros de mesmo volume e usaremos os resultados para obtermos uma resposta negativo ao Terceiro Problema de Hilbert.

Finalmente, no terceiro capítulo, exploraremos algumas generalizações do Terceiro Problema de Hilbert. Em especial, sua versão para o \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n , onde podemos encontrar algumas perguntas em aberto. Neste mesmo capítulo, destacaremos algumas relações surpreendentes entre a teoria desenvolvida para lidar com o Terceiro Problema de Hilbert Generalizado e outras áreas da matemática, em particular, Teorias de Homologia, Tesselções e K-Teoria.

BELÉM, JUNHO de 2022

Sérgio Henrique Maciel

CONGRUÊNCIA POR TESOURA E O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

1.1. DISSECÇÕES DE POLIEDROS E CONGRUÊNCIA POR TESOURA

A pergunta levantada por Hilbert, na forma como enunciamos anteriormente, apesar de ser compreensível, deixa a desejar em precisão matemática. As noções de dividir um poliedro em poliedros menores e reorganizar esses pedaços necessitam de um tratamento um pouco mais rigoroso para que possamos trabalhar matematicamente com essas ideias. Perante essa necessidade, definiremos a seguir alguns conceitos que vão nos permitir enunciar novamente o Terceiro Problema de Hilbert, de forma muito mais precisa e já introduzindo termos que agilizarão o estudo do problema.

A primeira noção que trataremos será a de uma *dissecção de um poliedro*, que representará a ideia de dividir um poliedro em poliedros menores.

Definição 1.1. Uma *dissecção* de um poliedro P é uma coleção finita $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ de conjuntos satisfazendo

- P_1, P_2, \dots, P_n são todos poliedros;
- $\cup_{i=1}^n P_i = P$;
- Os conjuntos de M_P têm interiores disjuntos dois a dois.

A primeira condição impõe que os conjuntos da dissecção sejam de fato poliedros, refletindo a ideia de dividir o poliedro P em subpoliedros. A segunda

propriedade nos diz que de fato esses subpoliedros P_1, P_2, \dots, P_n estão contidos em P e não são poliedros quaisquer. Enquanto isso, o terceiro item nos diz que dois poliedros da dissecção não se intersectam a menos de vértices, arestas ou faces, não "entrando" um no outro. Isto é, os poliedros de M de fato dividem P , no sentido de que eles se encaixam de forma a cobrir todo o poliedro P , sem falta e sem excesso. Com esta definição em mãos, podemos dar um sentido mais preciso também à ideia de rearranjar os pedaços de um poliedro para formar um outro conjunto.

Definição 1.2. Sejam P e Q dois poliedros. Dizemos que P e Q são *congruentes por tesoura* se existem dissecções M_P e M_Q de P e Q , respectivamente, e uma bijeção $\rho : M_P \rightarrow M_Q$ tal que para todo $L \in M_P$, L é isométrico a $\rho(L)$.

Essencialmente, o que essa definição descreve é a existência de uma forma de dividirmos o poliedro P em poliedros menores (uma dissecção) e após aplicar uma isometria em cada poliedro, isto é, transladá-los e rotacioná-los, cada poliedro está agora na posição e orientação de algum poliedro da dissecção de Q . Isso descreve de forma precisa nossa intuição sobre o Terceiro Problema de Hilbert.

1.2. DISSECÇÕES POR PLANOS

Imediatamente, podemos perceber que existem diversas dissecções possíveis para um mesmo poliedro. Em busca de entender melhor como as dissecções se relacionam com propriedades básicas dos poliedros, voltamos nossa atenção para uma forma simples de criarmos dissecções de um poliedro. Procuraremos alguns padrões observáveis ao dividirmos um poliedro em dois através de um plano. Um plano que passa por um poliedro intersecta algumas das suas arestas, sendo que essa intersecção pode ocorrer de duas formas diferentes, isto é, com o plano e a aresta em duas posições relativas diferentes. Podemos ver as duas situações diferentes abaixo, na Figura 1.

À esquerda, podemos ver a primeira possibilidade, em que a aresta que chamaremos de A está contida no plano π . Neste caso, notamos que o poliedro pelo qual o plano passa, que denotaremos por P , é dividido em dois poliedros

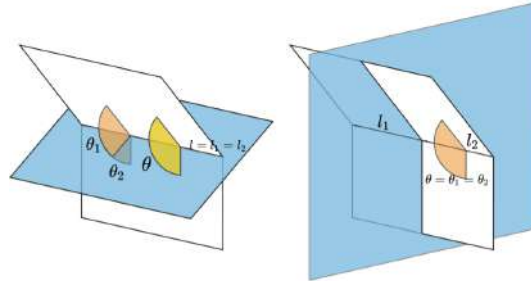


Figura 1.1: Possíveis posições de planos e arestas

P_1, P_2 , de forma que cada um compartilha de uma cópia da aresta A . Em especial, se A tem comprimento l , tanto P_1 quanto P_2 terão uma aresta de comprimento l . Isso já não acontece com o ângulo diedral de A , denotado por θ , que é ângulo determinado pelas faces que definem A . Ao contrário do comprimento de A que, em certo sentido, é preservado durante a divisão, θ é separado em dois fatores θ_1 e θ_2 , cada um sendo ângulo diedral de diferentes cópias de A que pertencem à P_1 e P_2 .

Note que o plano π passa a ser face de P_1 e de P_2 , e o ângulo diedral de A em P_i é simplesmente o ângulo determinado por π e a face de P_i que contém A , a qual chamaremos de θ_i . Embora os ângulos não são herdados por P_1 e P_2 , vale $\theta = \theta_1 + \theta_2$, então de certa forma até mesmo informação sobre os ângulos diedrais são transmitidas nesse forma de dissecar poliedros.

Por outro lado, no segundo caso, em que o plano π atravessa a aresta A de forma transversal, temos a aresta sendo dividida em dois segmentos A_1 e A_2 , arestas de P_1 e P_2 , respectivamente. De fato, em contraste com o caso anterior, o ângulo diedral é conservado e repassado para A_1 e A_2 , ou seja, A_i , aresta em P_i tem ângulo diedral igual a θ . Analogamente à situação anteriormente analisada, os comprimentos de A_1 e A_2 , denotados por l_1 e l_2 , são tais que $l = l_1 + l_2$.

Podemos notar certo padrão nas informações sobre comprimentos e ângulos no poliedro antes e após a divisão por esse método utilizando um plano. De fato, escrevemos sugestivamente os comprimentos das arestas A, A_1 e A_2 e seus ângulos diedrais em pares de forma a evidenciar uma estrutura algébrica

que sugere fortemente uma bilinearidade. No primeiro caso, temos $(l, \theta) = (l, \theta_1 + \theta_2) = (l, \theta_1) + (l, \theta_2) = (l_1, \theta_1) + (l_2, \theta_2)$, enquanto no segundo caso, ficamos com $(l, \theta) = (l_1 + l_2, \theta) = (l_1, \theta) + (l_2, \theta) = (l_1, \theta_1) + (l_2, \theta_2)$. É com base nessa análise de um caso mais simples que encontraremos a motivação para definir o Invariante de Dehn como um produto tensorial entre módulos sobre \mathbb{Z} , de modo a manter uma bilinearidade natural.

INVARIANTES DE DEHN

2.1. INVARIANTES DE DEHN E CONGRUÊNCIA POR TE-SOURA

Como já comentado anteriormente, a estrutura de bilinearidade parece estar presente de alguma forma na preservação, sob dissecções, dos comprimentos de arestas e ângulos diedrais de um poliedro. É nos baseando nessas observações que vamos trazer a seguinte definição.

Definição 2.1. Sejam P um poliedro de arestas A_1, A_2, \dots, A_n , l_i o comprimento de A_i e θ_i seu ângulo diedral. Então definimos o *Invariante de Dehn* de P como um elemento $D(P)$ do grupo abeliano $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ dado pelo somatório

$$D(P) = \sum_{i=1}^n l_i \otimes \theta_i.$$

Dessa forma, a bilinearidade observada anteriormente aparece de forma natural. Note que cada elemento do somatório que define $D(P)$ é um tensor em $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$, o que se reforça no momento em que passamos a encarar \mathbb{R} (visto como um \mathbb{Z} -módulo) no produto tensorial como um representante dos comprimentos de arestas possíveis de poliedros, enquanto $\mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ (também como \mathbb{Z} -módulo) está relacionado aos ângulos diedrais possíveis, identificando ângulos que diferem por meia volta. Essa identificação é arbitrária e poderíamos escolher o módulo $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ ou mesmo \mathbb{R} / \mathbb{Z} . Nossa escolha atual se justifica por simplificações em algumas contas na seção seguinte. Definido o Invariante de

Dehn, resta mostrar que ele merece esse nome, que de fato ele é um invariante à congruência por tesoura.

Lema 2.2. *Sejam P um poliedro e $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ uma de suas dissecções. Então vale $D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$.*

Demonstração. Começamos por notar que as arestas de poliedros de M_P podem ser classificadas em três tipos levando em conta suas posições em P .

1. Arestas contidas em arestas de P ;
2. Arestas contidas, a menos de possivelmente suas extremidades, no interior de uma face de P ;
3. Arestas contidas, a menos de possivelmente suas extremidades, no interior de P

Como cada aresta de qualquer poliedro de M_P se encaixa em exatamente uma das classificações acima, podemos reorganizar a soma $D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$ como uma soma de três termos $S_1 + S_2 + S_3$, em que S_i corresponde à soma dos tensores das arestas do Tipo i .

Podemos calcular cada soma individualmente. Vamos começar pelas arestas do Tipo 3 pois ela apresenta um argumento mais geral que pode ser adaptado para os outros dois tipos. Considere uma aresta A do Tipo 3 de algum poliedro de M_P . Tome o conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ de arestas de poliedros de M_P que sejam colineares a A e denote por p_1, p_2, \dots, p_m os pontos que são extremidades de alguma aresta A_i , ordenados de forma crescente pela distância a uma das extremidades de $\cup_{i=1}^k A_i$. Note que esses pontos determinam uma partição de $\cup_{i=1}^k A_i$. Em particular, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe um subconjunto de $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ que determina uma partição de A_i .

Chamando de s_j tanto o segmento cujas extremidades são p_j e p_{j+1} quanto o próprio comprimento desse segmento (com um abuso de notação), se $s_j \subset \cup_{i=1}^k A_i$, então s_j está contido em pelo menos um A_i e temos um tensor $s_j \otimes \theta_i$ associado a s_j , em que θ_i é o ângulo diedral de A_i , como aresta de algum poliedro de M_P . Mas como M_P é uma dissecção de P , todo ponto de P está

contido em algum poliedro da dissecção. Assim, cada s_j está contido em mais de um poliedro de M_P . Mais detalhadamente, como cada s_j contém algum ponto interior de P , existe um subconjunto de M_P com poliedros de forma que cada poliedro possui alguma aresta contendo s_j e a soma dos ângulos diedrais dessas arestas é $2\pi i$.

Esse argumento mostra que para cada aresta A do Tipo 3, a soma dos tensores associados às arestas de poliedros de M_P que são colineares com A (que também são do Tipo 3) será nula. Consequentemente, S_3 , a soma associada a arestas do Tipo 3 será 0. Perceba também que só usamos o fato de que as arestas consideradas eram do Tipo 3 no fim da argumentação, para concluir que a soma dos ângulos é 2π .

Vamos replicar o argumento, com adaptações, para calcular S_2 , a soma dos tensores das arestas do Tipo 2. Cada segmento s_j em uma face de P admite um conjunto de poliedros que possuem alguma aresta que contém s_j . Como s_j está no interior de uma face de P , a menos de suas extremidades, os ângulos diedrais das arestas desses poliedros somam π que é identificado com 0 em $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Isso significa que $S_2 = 0$.

O mesmo argumento se aplica para arestas do Tipo I, exceto que, neste caso, a soma será o próprio ângulo diedral da aresta de P que contém s_j . Dado que $A_P = \cup_{i=1}^k A_i$ é aresta de P , θ é seu ângulo diedral e l é seu comprimento, temos

$$s_j \otimes \theta_{i_1} + s_j \otimes \theta_{i_2} + \dots + s_j \otimes \theta_{i_t} = s_j \otimes \theta,$$

com $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_t}$ os ângulos diedrais de $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$, as arestas dos poliedros de M_P tais que $s_j \subset A_{i_r}$. Ao somar ao longo de j , como $\cup_{j=1}^{m-1} s_j = A_P$, teremos $\sum_{j=1}^{m-1} s_j \otimes \theta = l \otimes \theta$, que é o tensor associado a uma aresta de P .

Ao considerar essa mesma construção para todas as arestas do Tipo 1, teremos a soma de todos os tensores associados a arestas de P , o que é o próprio Invariante de Dehn de P . Ficamos com

$$D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n) = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 = D(P),$$

como queríamos mostrar. □

Seguimos mostrando o resultado principal.

Teorema 2.3. *Se P e Q são Congruentes por Tesoura, então $D(P) = D(Q)$.*

Demonstração. Sejam $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ e $M_Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ dissecções de P e Q e $\rho : M_P \rightarrow M_Q$ uma bijeção com a propriedade de que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\rho(P_i)$ é isométrico a P_i . Como isometrias preservam ângulos e comprimentos, $D(P_i) = D(\rho(P_i))$, uma vez queo Invariante de Dehn é definido apenas em termos de distâncias e ângulos. Logo,

$$D(Q) = D(P_1) + \dots + D(P_n) = D(\rho(P_1)) + \dots + D(\rho(P_n)) = D(Q_1) + \dots + D(Q_n) = D(Q)$$

pelo lema anterior. □

2.2. USANDO O INVARIANTE DE DEHN PARA RESOLVER O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

Se tomarmos a contrapositiva do Teorema 2.3, então sabemos que se existirem dois poliedros de mesmo volume com Invariantes de Dehn distintos, então eles não são congruentes por tesoura, o que nos daria uma resposta negativa ao terceiro problema de Hilbert. O que faremos agora será calcular o Invariante de Dehn de dois poliedros de volume unitário, a saber, o cubo e o tetraedro regular. Veremos que eles apresentam invariantes de Dehn diferentes e portanto não são congruentes por tesoura.

O Invariante de Dehn do Cubo Unitário é simples de ser calculado. O cubo de volume 1 possui 12 arestas, cada uma de comprimento unitário e ângulo diedral $\pi/2$. Então

$$D(\text{Cubo}) = 12 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 1 \otimes \frac{12\pi}{2} = 1 \otimes 6\pi = 0.$$

Já o Invariante de Dehn do tetraedro regular de volume unitário será um pouco mais trabalhoso.

Primeiramente, o volume do tetraedro regular pode ser calculado, em termos do comprimento de suas arestas, por $V = \frac{l^3}{6\sqrt{2}}$. Assim, para que $V = 1$,

é necessário que o lado do tetraedro tenha comprimento $l = 6^{1/3}2^{1/6}$. Agora, precisamos do ângulo diedral de cada aresta, que também pode ser calculado com um pouco de geometria, obtendo-se $\theta = \arccos(1/3)$. Como o tetraedro regular tem 6 arestas, concluímos que

$$D(\text{Tetraedro}) = 6 \cdot (6^{1/3}2^{1/6}) \otimes \arccos(1/3) = 6^{4/3}2^{1/6} \otimes \arccos(1/3).$$

O grande problema é que não é óbvio se esse tensor é nulo ou não.

Veja que podemos fatorar tensores em $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ por racionais, isto é, para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ e $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, vale $a \otimes b = (\frac{p}{q}) \cdot a \otimes (b\frac{q}{p}) = \frac{ap}{q} \otimes \frac{bq}{p}$. Isso acontece pois estamos considerando \mathbb{R} e $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ como \mathbb{Z} -módulos. Logo, $6^{4/3}2^{1/6} \otimes \arccos(1/3) = 0$ é equivalente a dizer que $\arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$, para algum par de inteiros p, q , com $q \neq 0$. Basta, então, descobrirmos se $\arccos(1/3)$ é múltiplo racional de π .

É possível provar que $\arccos(1/3)$ não é múltiplo racional de π (ver Apêndice A). Com este resultado, concluímos que $D(\text{Tetraedro})$ não é nulo, de modo que o tetraedro regular de volume 1 e o cubo unitário não são congruentes por tesoura. Assim, encontramos dois exemplos que mostram que o Terceiro Problema de Hilbert tem resposta negativa.

ALÉM DO TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

3.1. GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA E RELAÇÕES COM OUTRAS ÁREAS DA MATEMÁTICA

O Teorema 2.3 nos diz que o Invariante de Dehn age como um indicador necessário para que dois poliedros sejam congruentes por tesoura. Mais além, em 1966, SYDLER mostra que o Invariante de Dehn e o Volume de um poliedro formam um conjunto completo de invariantes para a congruência por tesoura, isto é, vale o seguinte teorema.

Teorema 3.1 (Sydler-Dehn). *Dois poliedros P e Q são congruentes por tesoura se, e somente se, $D(P) = D(Q)$ e $Vol(P) = Vol(Q)$.*

Através dos Invariantes de Dehn, podemos resolver o Terceiro Problema de Hilbert em sua forma clássica. Assim como o próprio terceiro problema de Hilbert é o análogo do caso bidimensional, podemos investigar o problema análogo em dimensão $n \geq 4$, procurando as condições necessárias para que dois n -polítopos de mesmo n -volume sejam congruentes por tesoura (munidos das definições apropriadas de dissecção e congruência por tesoura).

DUPONT e SAH consideram o grupo livre gerado por polítopos isométricos e mostram que existem sequências exatas de morfismos entre certas homologias de subgrupos do grupo de isometrias de \mathbb{R}^n , grupos de polítopos e o produto tensorial no qual é definido o Invariante de Dehn. A grande novidade vem quando eles provam que a trivialidade de um dos grupos da sequência implica

o *Teorema Generalizado de Dehn-Sydler*: o morfismo $D : P(\mathbb{R}^n)/\mathcal{L}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ que associa a cada classe de poliedros gerados por prismas seu Invariante de Dehn é um monomorfismo.

Com essa reinterpretação do Invariante de Dehn e com o auxílio de ferramentas homológicas, DUPONT e SAH ainda conseguem generalizar o Teorema de Dehn-Sydler para \mathbb{H}^2 e S^2 , os espaços hiperbólicos e esféricos, respectivamente. No caso de \mathbb{H}^3 e S^3 , DUPONT e SAH provaram também que se dois poliedros são congruentes por tesoura, então seus Invariantes de Dehn (ou suas coleções de Invariantes de Dehn generalizados, algumas vezes chamados na literatura de *Invariantes de Hadwiger*) coincidem.

Ainda é um problema em aberto determinar se a recíproca vale, isto é, se dois poliedros em \mathbb{H}^3 e S^3 com o mesmo Invariante de Dehn necessariamente são congruentes por tesoura. Esse problema é de notável interesse pois nos permite concluir se o Invariante de Dehn caracteriza cada classe de equivalência na congruência por tesoura, ou seja, se ele é uma ferramenta de classificação dessas classes.

Convém notar também a relação da teoria desenvolvida sobre o Terceiro Problema de Hilbert com a K-Teoria. Em particular, existem sequências exatas curtas relacionando certas K-Teorias com poliedros em \mathbb{H}^3 . Além disso, cada classe de poliedros isométricos (tanto em \mathbb{R}^n quanto em S^n ou \mathbb{H}^n) pode ser visto como uma K-Teoria de uma certa categoria.

Outra aparição dos Invariantes de Dehn que merece ser citada é em um teorema de DEBRUNNER de 1980 que afirma que qualquer poliedro que tessela o espaço periodicamente (em uma tesselação que só contém ele mesmo) necessariamente tem Invariante de Dehn nulo. Mais tarde, em 1995, LAGARIAS e MOEWS estendem o resultado para \mathbb{R}^n . Note que essencialmente, o que o teorema diz é que todo poliedro que tessela \mathbb{R}^n é congruente por tesoura a um n -cubo.

APÊNDICES

A

arccos(1/3) NÃO É MÚLTIPLO RACIONAL DE π

Seja $x = \arccos(1/3)$, então $\cos x = \frac{1}{3}$. Suponha que $x = \frac{p}{q}\pi$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ de modo que $\cos(qx) = \cos(p\pi) = \pm 1$. Podemos usar os *Polinômios de Chebyshev* para obter expressões gerais de $\cos(nx)$. Especificamente,

$$\pm 1 = \cos(qx) = T_q(\cos x). \quad (\text{A.1})$$

Agora utilizamos o fato de que o coeficiente do termo de maior grau de T_q é 2^{q-1} . Então A.1 se torna $\pm 1 = T_q(\cos x) = 2^{q-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q + P\left(\frac{1}{3}\right)$, em que P é algum polinômio de grau menor que $q - 1$. Ao multiplicarmos ambos os lados por 3^q , temos $\pm 3^q = 2^{q-1} + 3^q \cdot P(1/3)$. Reduzindo essa igualdade mod 3, teremos $0 = 2^{q-1} \pmod{3}$, um absurdo. Logo, não existem inteiros p, q tais que $\arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DUPONT, J. L. (1982). *Algebra of Polytopes and Homology of Flag Complexes*. Osaka Journal of Mathematics.
- [2] DUPONT, J. L. e SAH, C. H. (1990). *Homology of Euclidean groups of motion made discrete and Euclidean scissors congruence*. Acta Mathematica.
- [3] SAH, C. H. (1979). *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence*. Pitman Advanced Publishing Program
- [4] LAGARIAS, J. C., MOEWSS, D. (1995). *Polytopes that Fill \mathbb{R}^n and Scissors Congruence*. Discrete Computational Geometry.
- [5] SYDLER, J. P. (1965). *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*. Commentarii Mathematici Helvetici.
- [6] ZAKHAREVICH, I. (2012). *Scissors Congruence as K-Theory*. Homology, Homotopy and Applications.



ONDE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ENCONTRA A PESSOA SURDA?

FRANCISCA AGLAIZA ROMÃO SEDRIM GONÇALVES

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

À toda a comunidade surda do Brasil, pela resistência e luta pelos seus direitos.

À minha orientadora de mestrado Silvana Alcantara, por me inspirar.

À minha mãe, minha eterna professora.

Ao meu esposo, meu companheiro e incentivador.

SUMÁRIO

Prefácio

- 1 Breve Introdução
- 2 Marcos histórico-legais do Ensino da Matemática no Brasil
- 3 Marcos histórico-legais da educação de Surdos no Brasil
- 4 Matemática e língua materna do Surdo: há uma interseção?
- 5 Conclusões

Referências

PREFÁCIO

Este texto apresenta um cronograma histórico sobre o Ensino da Matemática no Brasil e como esse ensino tem se desenhado para atender o público surdo presente nas escolas de classes regulares. Reconhecendo ser por meio da língua materna do surdo, a Libras, o melhor canal para a construção e estabelecimento de diálogos acerca do conhecimento matemático do sujeito com surdez, observa-se que embora a interseção entre Matemática e Libras não seja vazia, ainda se trata de um conjunto com poucos elementos.

BELÉM - PA, JUNHO DE 2022.

Francisca Aglaiza Romão Sedrim Gonçalves

BREVE INTRODUÇÃO

Os últimos anos têm trazido à tona um calo antigo, a falta de acessibilidade linguística que os surdos enfrentam e sempre enfrentaram nas aulas de Matemática.

Embora não seja um problema recente, somente com a Lei da Libras, Lei nº 10.436 de 24 de abril de 2002, que reconhece a Libras como meio legal de expressão e comunicação das Comunidades Surdas do país outras ações caminharam favoravelmente em direção à pessoa Surda, como o Projeto de Lei que foi aprovado no Senado Federal em 2021 que inclui o ensino bilíngue na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB.

Conforme mencionado, a partir da Lei da Libras começam a surgir novos avanços. Por exemplo, o decreto nº 5.626 de 22 de dezembro de 2005 regulamenta a formação e a profissão dos intérpretes, orienta a formação de professores e instrutores de Libras, reconhece a necessidade dos profissionais da educação conhecerem a língua e estabelece que cursos de licenciatura ofertem a disciplina de Libras para a formação dos docentes.

Para melhor entendimento da educação de surdos no Brasil, especialmente no tocante à Matemática, convém acompanharmos historicamente alguns acontecimentos.

MARCOS HISTÓRICO- LEGAIS DO ENSINO DA MATEMÁTICA NO BRASIL

O ensino de Matemática de forma metódica, tem registro no Brasil a contar da chegada dos europeus ao país, embora se tenha conhecimento que os povos que aqui habitavam já faziam uso sabiamente da Matemática e da Geometria, como prova, basta observar a presença das formas nas pinturas, nas construções e na arte.

De acordo com Gomes (2013) [7], a abordagem matemática na educação jesuítica contava com o ensino do sistema de numeração decimal e das quatro operações aritméticas.

No período do Brasil Colônia, foram criadas, em 1773, as "aulas regias", onde o ensino das humanidades e da gramática era privilegiado em detrimento ao ensino da Matemática. A mesma autora, Gomes (2013) [7], nos apresenta Gramática, Latim, Grego, Filosofia e Retórica como disciplinas em que o seu ensino antecedia o ensino da Matemática.

Ao adentrarmos no período do Brasil Império, a primeira Constituição Brasileira prevê a educação primária de forma gratuita, um progresso para brancos e livres, uma vez que nem todas as pessoas que aqui viviam eram livres ou se encaixavam nos padrões para gozarem desse direito.

Ademais, segundo Veiga (2007) [18], o currículo para meninos era diferente do currículo para meninas, donde estas, não estudavam Geometria.

No ano de 1837, ainda no Brasil Império, D. Pedro II funda o Imperial Collegio de Pedro Segundo, até hoje em pleno funcionamento, chamado de Colégio

Pedro II. Neste colégio outorgava-se o grau de bacharel em Letras aos concluintes do curso e embora o grau conferido fosse de Letras, este contemplava em sua ementa o ensino de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Gomes (2012) [7].

A contar de 1889, no Brasil República, o primeiro Ministro da Educação, na época denominado Ministro da Instrução, Benjamin Constant, organizou uma reforma de ensino priorizando um currículo com disciplinas científicas e a Matemática. Talvez venha a ser este um marco significativo de planejamento e incentivo à ciência. Constant buscava aderir às ideias de Comte, filósofo francês que defendia ser a Matemática a mais importante das ciências.

No ano de 1908, aconteceu em Roma o IV Congresso Internacional de Matemática. Neste evento, criou-se uma comissão que objetivava tratar do ensino de matemática, preconizando uma "padronagem" no mesmo, com as metodologias aplicadas e a inserção do ensino de Cálculo Integral e Diferencial no nível secundário. O Brasil, entende a criação dessa comissão como o primeiro movimento internacional que visa a modernização do ensino de matemática.

Na Era Vargas, o então Ministro da Educação Francisco Campos, reestrutura a forma de ensinar por meio de uma série de decretos, conhecida por Reforma Francisco Campos. Na Matemática, tal reforma preconizava o ensino de forma que o aluno não fosse apenas um receptor, mas um indivíduo capaz de pensar, refletir e descobrir resultados, sem perder o rigor.

De 1942 a 1946, novos decretos protagonizaram dessa vez a reforma Capanema, também nome do então ministro da educação. Nessa reforma o ensino secundário era "democrático" sendo ofertado para quem iria ingressar no ensino superior, no caso as elites e, surge o ensino profissional para a formação das classes menos favorecidas. Foi nesse período que foram criadas as escolas de cursos técnicos Senai e Senac.

Em 1952, foi criado o Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA no Rio de Janeiro, donde inúmeras contribuições à ciência e à educação podem ser elencadas. Dez anos depois surgem os programas de mestrado e doutorado do IMPA, certificados pela UFRJ até 1971, quando a própria instituição passa a outorgar tais títulos.

No final dos anos 50, entra em cena o Movimento Matemática Moderna

- MMM em concomitância com a corrida espacial, onde os EUA começam a sentir-se em desvantagem frente ao lançamento do satélite Sputnik e começam a mobilizar uma reestruturação dos currículos das Ciências e Matemática a fim de superar as diferenças entre o currículo e o progresso tecnológico. Na Europa, educadores matemáticos buscavam disseminar ideias inovadoras para o ensino de matemática. A esse movimento, chamou-se de MMM.

Um marco para uma nova organização das modalidades de ensino de primeiro e segundo graus é a lei de Diretrizes e Bases de 1971, que estrutura o primeiro grau com oito anos e o segundo com três ou quatro, a depender da forma de ensino, se regular ou técnico.

Outro grande marco que não pode passar despercebido é a fundação da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM em 1969 e, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM em 1988, ou seja, nos anos 70 e 80 houveram avanços significativos no tocante à Matemática e ao seu ensino, sendo esse período também marcado pelo surgimento dos primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática.

A nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a nova LDB de 1996, reestabelece uma organização da educação básica e é a primeira LDB a considerar a pessoa com deficiência como indivíduo envolvido no processo de ensino-aprendizagem.

Em 1997 os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, preconizam a incorporação de recursos, materiais e práticas que possibilitem a construção do conhecimento matemático.

O IMPA, embora seja um instituto de Matemática Pura e Aplicada, sempre se preocupou em contribuir com a educação. Muitos feitos comprovam essa afirmativa. Por exemplo, em 1990 foi criado o Programa de Aprimoramento de Professores do Ensino Médio; em 2005 aconteceu a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP (que ocorre anualmente até os dias atuais) e em 2011 o IMPA passa a oferecer juntamente várias universidades públicas do país o Programa de pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, destinado à capacitação do professor de Matemática da Educação Básica, o programa é coordenado pela SBM.

A LDB de 1996, prevê que deve haver uma base nacional comum curricular para nortear os currículos e as propostas pedagógicas de todo o país em toda a educação básica das redes pública e privada.

Uma nova reestruturação surge nesses últimos anos, é a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, fruto de contribuição de professores e pesquisadores de todo o país para nortear o currículo.

Por fim, agora em 2022 entra em cena o Novo Ensino Médio - NEM, de modo que a modalidade de ensino (Nível Médio) tem sua carga horária ampliada para 1000 h/a anuais, donde parte da mesma, 600 h/a anuais, é composta pela Formação Geral Básica e o restante por Itinerários Formativos. No caso da curricular Matemática, entende-se que possa ter ocorrido uma perda, uma vez que a mesma contava com 4 h/a semanais mínimas no Ensino Médio e agora passa a ser contemplada por 2 a 3 horas/aula nas quais a BNCC deve ser contemplada pelo menos pela parte comum.

Como cada área do conhecimento tem a oferta de pelo menos uma Unidade Curricular Eletiva, e por sua vez, o cardápio do educando deve conter pelo menos uma unidade eletiva de Matemática, dessa forma a mesma passa a ser contemplada com duas horas/aula dentro do tempo das eletivas, entretanto é uma parte diversificada que não será ofertada a todos os alunos concomitantemente e que terá uma ampla variação em nosso país visto que se trata de um território com dimensões continentais e vistas as condições de oferta de cada instituição escolar.

Conforme exposto, os marcos que permeiam a Educação Matemática no Brasil não contemplam o Ensino da Matemática para a pessoa Surda. No entanto, outros marcos que não são específicos da componente curricular em questão contemplam a pessoa com deficiência e/ou a inclusão na educação, conforme veremos a seguir.

MARCOS HISTÓRICO-LEGAIS DA EDUCAÇÃO DE SURDOS NO BRASIL

Enquanto desde o Brasil Colônia se tem registros de criação de escolas (na época as jesuíticas) que já ofertavam o ensino das quatro operações básicas, a primeira escola pensada para surdos criada no país é datada de 1857, o Imperial Instituto de Surdos-Mudos que posteriormente passou a ser chamado Instituto Nacional de Surdos -INES, restrito a meninos brancos e livres.

A história de educação de Surdos no Brasil começa com a vinda do educador francês surdo Ernest Huet em 1855, que motivou a criação do INES. Nessa escola especial para surdos, a Língua de Sinais Francesa - SFL unida aos sinais usados pelos surdos do Rio de Janeiro era usada como forma de comunicação para instrução dos internos. Apesar de simbolizar um grande marco para a história da educação de surdos, no instituto situado no Rio de Janeiro, "em 1872, com uma população de [...] 11.535 surdos no país, eram atendidos apenas [...] 17." (MAZZOTA, 1996, p. 29)[13].

Em 1880, no Congresso Internacional de Milão ficou definido que a prática de educar surdos em todo o mundo era o Oralismo¹. A partir de 1880 a Libras sobreviveu no Brasil de forma 'clandestina', pois os surdos eram estimulados e obrigados a oralizar.

Somente em 1994, com a Declaração de Salamanca, sugere-se amplamente o reconhecimento das línguas de sinais, à época denominadas de "Linguagem de Signos", como meio de comunicação dos surdos. Declaração de Salamanca (1994) [6].

¹Oralismo é um método de ensino para surdos que exclui a língua de sinais e onde o Surdo deve falar oralmente.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB/1996 prevê atendimento especial à pessoa com deficiência e a Lei 10.436/2002 reconhece a Libras como a primeira língua do Surdo - L1.

Posterior à Lei da Libras, marcam historicamente a Educação de Surdos o Decreto nº 5.626/2005 que estabelece a obrigatoriedade aos cursos de Licenciatura a oferecerem a disciplina de Libras.

Outro relevante instrumento legal é a Lei Brasileira de Inclusão - LBI, de nº 13.146 de 06 de julho de 2015. A LBI contém determinações explícitas sobre inclusão, eliminação de barreiras e acessibilidade além de tratar da formação dos profissionais da educação e dos tradutores intérpretes.

A partir de 2017, as pessoas surdas no Brasil contam com um instrumento de avaliação acessível em Libras, é o Exame Nacional do Ensino Médio - Enem, em formato de vídeo prova. O formato de aplicação de prova foi aprovado pelos usuários, mas outras avaliações de caráter nacional, como por exemplo, a OBMEP ainda não oferece essa acessibilidade linguística.

MATEMÁTICA E LÍNGUA MATERNA DO SURDO: HÁ UMA INTERSEÇÃO?

A língua materna da pessoa surda que reside no Brasil é a Libras, sua primeira língua. A segunda língua, é o Português na modalidade escrita. No caso das escolas bilíngues ou das escolas regulares de inclusão, o aluno surdo tem direito ao acesso às informações na sua primeira língua.

Um artigo de Machado (1989) [11], intitulado Matemática e Língua Materna: Uma aproximação necessária, defende ser a língua materna significativamente importante na aprendizagem da Matemática.

O artigo trata das línguas orais, mas pode-se estender igual raciocínio às línguas de sinais. Para o autor, "a criança já chega à escola utilizando consistentemente a Língua em sua forma oral" Machado (1989) [11]. É a partir da língua materna da criança que o professor provoca a construção do conhecimento, logo o educando parte do conhecido para o novo.

No caso do aluno com surdez, para muitos deles, a escola é um dos primeiros espaços onde sua língua lhe é apresentada, o que oferece ainda mais desafios, pois a própria identidade da criança pode estar comprometida. Após esse contato com a sua língua, sugere-se ser por meio dela que outros conhecimentos são construídos, como por exemplo os conhecimentos matemáticos. Para Machado (1998) [12]:

a Matemática e a Língua Materna representam elementos fundamentais e complementares, que constituem condição de possibilidade do conhecimento, em qualquer setor, mas que não podem

ser plenamente compreendidos quando considerados de maneira isolada. (MACHADO, 1998, p.83) [12].

Para o surdo não é diferente dos ouvintes, a língua materna lhe garante muitos acessos, inclusive à Matemática.

A diferença entre ouvintes e surdos é que essa língua materna por muito tempo foi negada aos surdos, gerando prejuízos quanto à ampliação de verbetes e vocabulários. E não só isso. Como consequência os termos inerentes à linguagem matemática nas formas oral e escrita cresceram em velocidade superior aos sinais, fazendo com que muitos termos utilizados na Matemática básica hoje não possuam tradução correspondente na Língua de Sinais.

O maior e mais famoso dicionário enciclopédico de Língua de Sinais do país é o dicionário conhecido pelo nome de um de seus autores, o Capovilla *et al* (2017) [5] que é uma versão atualizada dos volumes publicados em 2001, 2006 e 2013. Ele apresenta de forma dinâmica, valorizando o visual, mais de 14 mil verbetes de forma trilingue: Português, Inglês e Libras com ilustração do sinal, ilustração do verbe, definição do significado, descrição em Português da realização do sinal, soletração em Libras e escrita do sinal em SignWriting¹.

Mas o Capovilla *et al* [5] é um dicionário plural, não apresenta de forma específica os termos utilizados na Matemática, até porque, conforme já foi mencionado, a grande maioria dos termos não possui sinal técnico correspondente.

Nos últimos anos, alguns glossários em contexto educacional foram surgindo, como o Calculibras, por Carvalho *et al* (2016) [3], com 206 sinais envolvendo várias áreas da Matemática; o de Química, por Oliveira (2017) [15] contendo 69 sinais; o de Geometria Plana, por Gonçalves (2018) [8], contemplando 119 termos específicos da Geometria Plana e, o de Matemática básica, por Atayde (2019) [2], sendo que este último reúne 76 sinais.

Internacionalmente a carência é semelhante e algumas obras têm surgido, como por exemplo, os dicionários virtuais *Répertoire Lexical LSF* desde o ano 2000, de autoria coletiva por meio do *Institut de Jeunes Sourd de Bourg La*

¹SignWriting é um sistema que permite escrever em língua de sinais, contrariando a ideia de que línguas gestuais não poderiam ser registradas por um sistema de escrita.

Reine; o *British Sign Language Glossaries of Curriculum Terms*, por Cameron *et al* (2005) [4] e o *ASL Clear*, por Reis (2016) [16].

No que se refere ao professor e sua formação, os cursos de licenciatura em Matemática já ofertam a disciplina de Libras, mas a oferta na grande maioria dos cursos é restrita a um semestre (uma disciplina), com isso o conhecimento acerca da língua de sinais nas licenciaturas é o mínimo: alfabetização básica.

Além da escassez acerca de vocabulário, outros pontos podem ser apresentados no conjunto das dificuldades, por exemplo a formação do profissional intérprete que não é em matemática, pois o aluno tem um intérprete para todas as componentes curriculares, não há um intérprete nem por área do conhecimento, quiçá por disciplina. Outro calo é a questão da atenção do aluno que fica dividida entre o que o professor está fazendo na lousa e a interpretação do que está sendo dito.

Como saída, observa-se que muito se tem procurado "adaptar" para os alunos surdos. Uma breve busca em repositórios acadêmicos entrega as muitas adaptações de materiais para trabalhar com alunos surdos, como Nogueira (2020) [14] e Ancerowicz *et al* (2017) [1].

Entretanto, a baixa presença dos alunos surdos nos cursos de licenciatura e bacharelado na área das exatas e as altas taxas de desistência dos poucos discentes que ingressam entregam uma carência que antecede a adaptação de atividades ou o uso de estratégias inovadoras: uma carência linguística.

Os números de baixo acesso aos cursos superiores por parte das pessoas surdas apresentados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, podem estar associados ao pouco acesso a informação por parte do Surdo, mesmo em ambiente escolar. Segundo o IBGE (2010) [9] apenas 4% da população brasileira com deficiência auditiva têm ensino superior completo.

Com relação à Libras e ao professor de Matemática, "A Libras precisa circular livremente no espaço escolar, e por isso o professor precisa conhecer Libras". (LACERDA, 2012, p. 280) [10].

CONCLUSÕES

Como visto, a acessibilidade linguística do Surdo está muito aquém do esperado. Dessa forma, constata-se que o acesso à Matemática nas escolas não parte do princípio de equidade quando se compara educandos surdos e ouvintes, dando sinais de uma lentidão frente à celeridade e a urgência que a Educação de Surdos, já tão prejudicada, exige.

Falando especificamente da Matemática, os problemas que circundam a seguridade do direito linguístico são: a carência de termos técnicos matemáticos equivalentes em Libras; a formação em Libras de professores que ensinam Matemática e profissionais intérpretes por disciplinas ou por área do conhecimento.

Analisando os marcos históricos da educação Matemática e da educação de Surdos, observa-se que diante do contexto apresentado, das dificuldades encontradas na área, das poucas produções Matemáticas em Libras, dos modelos internacionais para com as Línguas de Sinais, mediante as afirmativas de Machado (1998) [12] acerca da Língua materna e da Matemática, alguns elementos começam a surgir na interseção entre a Libras e a Matemática, mas ainda há um longo caminho a ser percorrido não para superar, mas para simplesmente alcançar uma equidade no ensino de Matemática para pessoas surdas e ouvintes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANCEROWICZ, L. F.; LENZ, F. P.; MICHELON, K. R.; TRINDADE, M. A. B. (2019). *Área do círculo e do quadrado, um recurso adaptado na perspectiva do bilinguismo in Matemática: Ciência e Aplicações*. . Atena v.4, p. 148-157.
- [2] ATAYDE, S. T. S. de. (2019). *O uso da Libras na Matemática do Ensino Fundamental: uma proposta de glossário (dissertação de mestrado)*. UFG, Catalão.
- [3] CARVALHO, D. C. T.; MARIANI, R. M. (2016). *Calculibras*. Site Disponível em <<https://www.calculibras.com.br/creditos>>. Acesso em 12 de janeiro de 2022.
- [4] CAMERON, A.; QUINN, G.; O'NEILL, R.; MACKENZIE, S. (2005). *British Sign Language Glossaries of Curriculum Terms*. Disponível em <<http://www.ssc.education.ed.ac.uk/BSL/index.html#top>>. Acesso em 4 de fevereiro de 2022.
- [5] CAPOVILLA, F. C. et al. (2017a). *Dicionário da Língua de Sinais do Brasil: a Libras em suas mãos*. São Paulo: Edusp, 2017a. v. 1.
- [6] DECLARAÇÃO DE SALAMANCA (1994). *Sobre Princípios, Políticas e Práticas na Área das Necessidades Educativas Especiais* Salamanca-Espanha.
- [7] GOMES, M. L. M. (2013). *História do ensino da matemática: uma introdução*. Belo Horizonte: Editora UFMG.
- [8] GONÇALVES, F. A. R. S. (2018). *Um compêndio de Geometria Plana em Libras (dissertação de mestrado)*. UFCA, Juazeiro do Norte.
- [9] IBGE (2010). *Características gerais da população, religião e pessoas com deficiência*. Disponível em <<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9662-censo-demografico-2010.html?edicao=9749&t=sobre>>. Acesso em 23 de julho de 2021.

- [10] LACERDA, C. B. F.; O intérprete de língua brasileira de sinais (ILS). In: LODI, A. C. B.; MÉLO, A. D. B. de.; FERNANDES, E. (2012). *Letramento, Bilinguismo e Educação de Surdos*. Porto Alegre: Mediação, 2012, p. 247-287.
- [11] MACHADO, Nilson José. (1989). *Matemática e Língua Materna: uma inclusão necessária - Revista da faculdade de Educação*. São Paulo - USP.
- [12] MACHADO, Nilson José. (1998). *Matemática e Língua Materna: análise de uma Impregnação Mútua*. 4. ed. São Paulo: Cortez.
- [13] MAZZOTTA, Marcos. (1999). *Educação Especial no Brasil: história e políticas públicas*. São Paulo: Cortez.
- [14] NOGUEIRA, S. da S. (2020). *A inclusão de alunos surdos em uma escola regular no município de Mossoró/RN com o auxílio de jogos matemáticos adaptados em Língua Brasileira de Sinais. (Dissertação de Mestrado)*. UERN/UFERSA/IFRN.
- [15] OLIVEIRA, N. F. de. (2017). *GLOSSÁRIO DE LIBRAS PARA QUÍMICA: INOVAÇÃO NO ENSINO PARA SURDOS. (Monografia de Licenciatura)*. IFPB, João Pessoa.
- [16] REIS, J. (2016). *ASL Clear*. Disponível em < <https://www.aslclear.org/>> Acesso em 4 de fevereiro de 2022.
- [17] RÉPERTOIRE LEXICAL LSF. (2000). *l? Institut de Jeunes Sourds de Bourg La Reine*. Disponível em < <http://ijs.92.dico.free.fr/>>. Acesso em 4 de fevereiro de 2022.
- [18] VEIGA, C. G. (2007). *História da Educação*. Ática.



**OS JOGOS (NO ENSINO DE MATEMÁTICA) DE
ACORDO COM AS DIRETRIZES PROPOSTAS PELA
FILOSOFIA DE JOHN DEWEY**

LÊNIO LEVY

20/06/2022 - 24/06/2022

SUMÁRIO

- 0.1 Considerações iniciais: os jogos e o processo de ensino-aprendizagem de matemática
- 0.2 A teoria pragmatistadeweyana e a educação
- 0.3 Considerações finais: o uso de jogos (no ensino de matemática) e a sua associação com a teoria pragmatistadeweyana

Referências

0.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS: OS JOGOS E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Em tese, *jogo* é um conjunto de ações físicas ou mentais, as quais não têm finalidade imediatamente útil ou determinada, encontrando justificativa ou razão de ser no prazer que geram em seus protagonistas [6].

Esse conjunto de ações, iniciando-se na criança e denotando gasto de energia, possui caráter de treinamento e mesmo de aprendizagem, modificando-se no transcurso do enriquecimento da subjetividade humana [6].

Existem: [i] *jogos de imitação*, em que o participante transfere seus desejos a certos objetos (a bonecas, por exemplo); e [ii] *jogos com regras ou de cunho social*, em que o divertimento vincula-se à obediência de regras, bem como às dificuldades ou aos obstáculos que surgem durante o movimento que conduz ou que pode conduzir à vitória em uma competição [6].

Friedrich Fröebel - pedagogo alemão que viveu nos séculos XVIII e XIX - encarava o jogo infantil como uma atividade que ligava elementos originalmente contrapostos: a natureza e o espírito; o emocional e o intelectual. Entendia que o jogo era um canal de unificação que conservava íntegras as vivências da criança. Chegou a classificar o jogo como a atividade infantil mais impregnada de espiritualidade. Qualificava-o acentuando seu contraste com o trabalho [8]

Na concepção de Fröebel, jogo era aquilo que as crianças realizavam quando davam início, por vontade própria, a uma tarefa; e trabalho era o que faziam quando procediam a uma tarefa demandada por uma pessoa adulta. Para Fröebel, o jogo era de grande importância no que tange à aprendizagem infantil, na medida em que, por intermédio dele, as crianças, de fato, poderiam (em se tratando dessa aprendizagem) conduzir, refazer, atuar e refletir [8]

Nos últimos decênios, tem havido significativo reconhecimento do valor das dinâmicas lúdicas no âmbito da construção, pelo discente, do conhecimento matemático, por meio de uma prática em que o professor faz uso de jogos pedagógicos como itens auxiliares dos fluxos de ensino e de aprendizagem.

O trabalho com jogos, quando bem conduzido, aumenta a motivação e potencializa a aprendizagem do aluno; levando-o a inteirar-se acerca do conhecimento matemático, o que gera, então, resultados visivelmente eficazes

[7].

Destacamos dois tipos básicos de jogos (no contexto da matemática escolar): [i] os de *aprendizagem*, cujo intuito é conduzir o discente a laborar com propriedades e conceitos matemáticos que ainda não estão em sua bagagem cognitiva; e [ii] os jogos de *fixação*, que dão ênfase a exercícios visando ao reforço ou à verificação de certo conhecimento matemático já exposto ao estudante e por ele assimilado (total ou parcialmente) .

Silva e Santos, no que concerne aos jogos, asseveram que:

Alguns aspectos mais aparentes podem ser referidos, como a promoção da capacidade de concentração, a antevisão das consequências das opções tomadas e consequente desenvolvimento de comportamentos prudentes. Os aspectos mais técnicos dos jogos, como o registro das partidas, a construção de estratégias, a memória de experiências passadas que se poderão, ou não, generalizar, a partilha de experiências, são instâncias que têm paralelos naturais na prática da resolução de problemas matemáticos ([9], p. 303).

Em tempo: frisamos que o uso do jogo como artifício em aulas de matemática distingue-se do simples *manuseio de materiais concretos*. O jogo é dotado de características específicas que lhe conferem um *status* diferente daquele que simboliza a manipulação de objetos. Possui regras que devem ser preservadas no decorrer da partida. Urge que definamos claramente quem foi o vencedor ou se houve empate. Tem uma dinâmica pré-estabelecida - composta de começo, meio e fim -, trazendo-lhe ordem. Além do mais, diz respeito a um conjunto de ações espontâneas e/ou voluntárias [5].

Almejamos, neste texto, defender a possibilidade de concatenamento entre o *uso de jogos no ensino de matemática* e a teoria filosófica (pragmatista) preconizada por John Dewey. Com destino a essa conjunção, o professor de matemática, ao orientar dinâmicas que incluam jogos, deverá conhecer suficientemente a mencionada escola filosófica, bem como ter em vista a consecução de situações relativas a processos didáticos que estejam em concordância com ela.

Ressaltamos, todavia, que tanto a citada concordância com o pragmatismo deweyano quanto o desacordo com esse corpo filosófico de ideias são realidades passíveis de caracterizar o uso de jogos no universo pedagógico da matemática, tratando-se o professor de um sujeito fundamental no que se refere ao encaminhamento e/ou aos desdobramentos das respectivas atividades lúdicas.

Dedicamos o próximo tópico deste artigo a definições atinentes ao ideário de John Dewey, particularmente no tocante ao setor educacional.

0.2. A TEORIA PRAGMATISTA DEWEYANA E A EDUCAÇÃO

De maneira geral, a filosofia pragmatista considera as ideias como hipóteses produtoras que são formuladas em momentos práticos de vida, somente ganhando nexos ou coerência quando levadas a efeito ou testadas ao longo da ação [3].

Os princípios que, para Dewey (2007), regem o desenvolvimento orgânico dão mostras de que (os seres vivos, num sentido lato, e) os homens, em especial, são frações ou componentes do mundo, com o qual partilham instabilidades, variações, desequilíbrios e êxitos, defendendo-se em suas subordinações casuais, até reconhecerem-se intelectualmente perante as coisas que os cercam e, a partir de então, começarem a estimar resultados de acontecimentos e (começarem) a adaptar suas decisões e atitudes com base em tais estimativas [4].

Cambi afirma que:

A filosofia de Dewey articula-se em torno de uma “teoria da experiência”, vista como o âmbito do intercâmbio entre sujeito e natureza, intercâmbio ativo, que transforma ambos os fatores e que permanece constantemente aberto, já que caracterizado por uma crise, por um desequilíbrio sobre o qual intervém o pensamento como meio de reconstrução de um equilíbrio (novo e mais orgânico), mas submetido por sua vez a novas crises e a novas buscas de ulterior equilíbrio ([2], p. 547).

Se o indivíduo experimentador é um partícipe cabal das dinâmicas do mundo onde vive, a efetividade do seu conhecimento capacita-o a uma inge-
rência mais poderosa nesse mundo. O conhecimento dito real jamais se resume
a uma visão inerte de um espectador desmotivado [4].

O *método experimental*, no contexto da ciência, como modo de produção
sistemática de conhecimentos, é recente, apesar de, como ferramenta prática
e cotidiana, ser tão antigo quanto a vida, bem como deveras arraigado a ela.
Não é de estranhar que os homens, por conta do costume irreflexo ou do hábito
inconsciente de *experimentarem* com frequência, hajam se mantido insensíveis
à enorme extensão desse método.

A maior parte das pessoas admite o valor do método experimental só
quando ele é empregado em algumas circunstâncias técnicas e/ou estritamente
físicas. Igualmente, um longo tempo será requerido para notar-se que o mé-
todo experimental tem o poder de alavancar a criação e a testagem de ideias
em outros campos, como o social e o moral [4].

A pedagogia consonante com a filosofia pragmatista assume a meta de
habilitar o aprendiz a tomar para si as rédeas de sua própria educação. Nesse
sentido, o objetivo da aprendizagem é tornar o educando apto a melhorar-se
permanentemente, o que tem a ver, no domínio escolar, em certa medida, com
a aplicação do método experimental [4].

Quando as ações de um aluno forem definidas previamente, e na maioria das
vezes, pelo professor e/ou quando a sequência de referidas ações for resultante
de lições e diretrizes externas (quer dizer, de lições e diretrizes provenientes de
outras pessoas), será paradoxal, a nosso ver, falar-se em objetivos educacionais
[4].

Um objetivo pedagógico ou educacional plausível não se exime de investi-
gações acerca do nível presente de experiências dos discentes. Delineando um
planejamento provisório de abordagem, deixamos o plano aberto a análises
sucessivas, modificando-o à proporção que a conjuntura demandá-lo. O obje-
tivo pedagógico ou educacional, em síntese, depende do curso da experiência
e desenvolve-se ao ser avaliado e redirecionado na prática [4].

Opondo-se ao resultado que não é julgado como um fim, mas como um
suporte da ação (e com o qual visamos ao prosseguimento dessa operação,

aperfeiçoando-a cada vez mais), temos a imutabilidade de uma finalidade determinada externamente a tal operação ou atividade [4]. É ilógico o professor impor certos objetivos como metas apropriadas ao aprimoramento cognitivo dos alunos [4].

O cultivo da noção de um objetivo externo conduz à ruptura entre meios e fins, ao passo que a ideia de um objetivo que evolui no bojo da atividade (vide *objetivo interno*), à semelhança de um plano para o seu direcionamento, integra ambos, ou seja, integra meios e fins, e a respectiva diferenciação é feita apenas por convenção.

O meio é uma finalidade provisória, que perdura até o instante em que é atingido. O fim, assim que é alcançado, transforma-se num meio de continuar a atividade. O meio indica a direção de uma atividade em que ora estamos empenhados; a finalidade sinaliza a sua direção num momento ulterior [4].

Um objetivo equivale à consciência sobre os resultados possíveis de um processo natural, constituindo-se em valioso norteador da observação do presente e/ou da seleção de maneiras de agir. Podemos assegurar que a atividade - dados esses termos - transformou-se em algo inteligente [4].

Um objetivo educacional há que se fundamentar nas atividades intrínsecas ou internas (a exemplo de instintos inatos e de hábitos consolidados) do indivíduo que é alvo da sistemática de ensino e de aprendizagem [4].

Na educação, a prevalência de objetivos colocados a partir de contextos exteriores ao universo discente é a causa do realce à ideia de preparação voltada para um futuro distante e (também é a causa) da transformação do trabalho, tanto do professor como do aluno, em uma marcha automática e subserviente [4].

Uma coisa é considerar as experiências do adulto como referencial para identificar e avaliar os atos da infância e da juventude; outra coisa, por sinal muito distinta, é fixar tais experiências como objetivo educacional, sem atentar para as atividades concretas dos alunos [4].

Dewey não vê distanciamento entre as teorias científicas e o ambiente educacional concreto. As teorias científicas, mediante suas determinações de objetivos, são modelos ou padrões vantajosos quando podem trazer acréscimos aos afazeres do aprendiz e do educador [3].

Para Dewey, o rastreamento com vistas a resultados adequados não se coaduna com um caminhar rígido ou exclusivo. Ponderar ou cogitar por intermédio de hipóteses (à guisa do *método científico experimental*) marca os pensamentos de um estudante e de um professor reflexivos [3].

No tópico a seguir, discorreremos acerca da possibilidade de concordância entre o uso de jogos no ensino de matemática e o pragmatismo deweyano.

0.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS: O USO DE JOGOS (NO ENSINO DE MATEMÁTICA) E A SUA ASSOCIAÇÃO COM A TEORIA PRAGMATISTA DEWEYANA

Podemos afirmar que o jogo, na educação matemática, estará em desacordo com o corpo de ideias propalado por John Dewey caso (o jogo em foco) suceda-se como: [i] imposição docente; [ii] artifício para que os alunos simplesmente exercitem conteúdos que já lhes foram apresentados; [iii] algo que denote dicotomia entre teoria e prática, racionalidade e empirismo, saber escolar e saber cotidiano, sociedade e indivíduo, dever e interesse, inteligência e caráter.

Asseveramos que o jogo, uma vez alinhado - no ensino de matemática - ao pragmatismo deweyano, corresponde a uma alternativa instigante de proposição de problemas, favorecendo, relativamente a esses problemas, um contato repleto de atração e de criatividade por parte do discente, que irá em busca de estratégias para resolvê-los ou solucioná-los.

Nos moldes (deweyanos) citados, o jogo, em aulas de matemática, contribui para a reprodução de situações-problema que demandem respostas ativas e céleres, fato que tende a excitar *ações planejadas* [1].

Se estiver em conformidade com a teoria filosófica de John Dewey, o jogo será capaz de favorecer um trabalho que gere atitudes - a citar: enfrentamento de adversidades; busca de explicações; otimização do instinto, da opinião e do engendramento de táticas; chance de modificar estratégias quando a conclusão não for suficiente - essenciais para que se aprenda matemática [1].

O pensamento que vislumbra decorrências ou implicações a partir da consciência sobre aquilo que se mostra no presente é um pensamento útil, e pode-

mos dizer que, nesse caso, estamos diante do chamado *método experimental* de pensar [4].

Consoante Dewey, o método experimental é, outrossim, designado de *pensamento reflexivo* na medida em que: [i] tentando compreender (ou levar a mudanças em) coisas ou fenômenos, procedemos à rigorosa observação das variáveis, das constantes e/ou dos parâmetros que, porventura, encontrem-se em interação; [ii] depois, construímos hipóteses para orientar ações; [iii] enfim, avaliamos tais hipóteses [3].

Na concepção de Dewey, o pensamento reflexivo (ou o *método experimental de pensar*) é o único caminho que podemos trilhar para darmos origem a uma ideia que mereça o nome de *conhecimento*. O resultado mais substancial do pensamento reflexivo não são as alterações acarretadas nas coisas ou nos fenômenos em questão, e sim a reforma que acontece em nós quando fazemos uso dele [3].

O conhecimento - em se tratando, inclusive, da esfera que congrega o uso de jogos no ensino de matemática e o ideário deweyano - não é algo do qual temos noção agora. O ato de conhecer exprime, isso sim, a voluntariedade que botamos em prática com o fito de entendermos o que se passa neste momento. “O conhecimento como ação consiste em tornar conscientes algumas de nossas disposições para colocar em ordem uma perplexidade, por meio da compreensão da conexão entre nós mesmos e o mundo em que vivemos” (DEWEY, 2007, p. 105).

A justificativa deweyana em favor da educação intermediada por atividades construtivas (ou melhor, por atividades alicerçadas no *método experimental*) baseia-se na comprovação de que elas oportunizam a inserção do discente numa atmosfera social. No ambiente escolar, a aprendizagem deveria ser um prolongamento daquela que verificamos existir além de seus muros [4].

Ademais, precisamos ter em mente que o uso de jogos no ensino de matemática somente estará harmonizado com a teoria filosófica do pragmatismo quando os discernimentos e as propensões sociais forem manifestados ou realizados em um espaço legitimamente social, com anuência coletiva à edificação de uma experiência comum a todos [4].

Diante do que foi exposto nas linhas anteriores, não é difícil chegarmos à

conclusão de que o *uso de jogos no ensino de matemática*: [i] pode ser subsidiado pelos princípios da filosofia deweyana (Obs.: ratificamos que defendemos tal possibilidade neste artigo); tanto como [ii] pode acontecer à margem dos pilares dessa filosofia. Das duas, a segunda alternativa parece-nos ser a mais corriqueira na prática escolar, o que, a nosso ver, não deixa de constituir-se em fato lamentável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRASIL, SEF (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Ensino de quinta a oitava séries*. MEC / SEF.
- [2] CAMBI, F. (1999). *História da pedagogia*. Fundação Editora da UNESP (FEU).
- [3] CUNHA, M.V. (2002). *John Dewey: uma filosofia para educadores em sala de aula*. Vozes.
- [4] DEWEY, J. (2007). *Democracia e educação: capítulos essenciais*. Ática.
- [5] GRANDO, R.C. (2015). *Recursos didáticos na educação matemática: jogos e materiais manipulativos*. Revista eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica.
- [6] JAPIASSÚ, H. e MARCONDES, D. (1996). *Dicionário básico de filosofia*. Zahar.
- [7] MENDES, I. A. (2009). *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Livraria da Física.
- [8] PALHARES, P. (2004). *O jogo e o ensino/aprendizagem da matemática*. Revista da Escola Superior de Educação.
- [9] SILVA, J. N.; SANTOS, C. P.(Aut); (2011). *Jogos e matemática*. PALHARES, P.; GOMES, A.; AMARAL, E. (Orgs.) *Complementos de matemática: para professores do ensino básico*. Lidel.



CLASSIFICAÇÃO DOS SUBGRUPOS FINITOS DO GRUPO DE ROTAÇÕES EM 3 DIMENSÕES

Luiz Sales

20 a 24 de junho de 2022

Sumário

Prefácio

Sessões:

1. Introdução
2. Ação de um grupo sobre um conjunto
3. Rotações no espaço e o grupo especial ortogonal
4. Subgrupos finitos do grupo especial ortogonal

Conclusão

Referências:

- [1] DUBROVIN, B.A, FOMENKO, A.T, NOVIKOV, S.P. Modern Geometry - Methods and applications part 1. Second Edition. New York: Springer, 1992
- [2] ARMSTRONG, M.A. Groups and symmetry. First Edition. New York: Springer Verlag, 1988
- [3] MICHAEL, A. Algebra. Second Edition. New York: Pearson, 2010

INTRODUÇÃO

Seja G um conjunto e \cdot uma função $G \times G \rightarrow G$. O par (G, \cdot) é chamado de grupo se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- 1) (associatividade) Para todos $a, b, c \in G$ é válido $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 2) (existência de elemento neutro) Existe $1 \in G$ tal que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ para todo $a \in G$
- 3) (existência de inverso) Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

Normalmente, se refere a um grupo apenas pelo conjunto G , sem mencionar a operação (\cdot) .

Apesar da definição de grupo ser bastante abstrata, ela possui muitas interpretações geométricas [1]. Por exemplo, pode-se considerar o grupo das rotações no plano. É possível definir uma rotação no plano como o operador linear dado pela matriz:

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad (1)$$

Onde $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$. Essa matriz rotaciona os vetores \mathbb{R}^2 por um ângulo θ em torno da origem. Matrizes dadas pela equação (1) são exatamente os elementos do grupo especial ortogonal em duas dimensões. Pode-se ver que com a operação de multiplicação de matrizes, o conjunto das matrizes com a forma (1) formam um grupo.

Essencialmente, como será visto, a definição de grupo está conectada com a ideia de simetria [1]. Alguns autores consideram o grupo como a própria formalização do conceito de simetria [2]. De forma mais profunda, pode-se pensar que o conceito de grupo formaliza a ideia de transformação. Isto é, os elementos de G são transformações que operam num certo conjunto S . Por exemplo: O grupo das permutações dos índices $\{1,2,3\}$ transformam os vértices de um triângulo de forma natural.

As matrizes de rotação que foram definidas anteriormente são elementos de um grupo mais geral, denominado grupo de isometrias no plano. Que é o conjunto dos operadores em \mathbb{R}^2 que preservam o produto interno [3].

Dado um subconjunto H de G , se H for “fechado” por (\cdot) , isto é, se $\cdot|_H: H \times H \rightarrow H$. Então diz-se que H é um subgrupo de G se $(H, \cdot|_H)$ for um grupo. De forma similar à grupos, é usual se referir a um subgrupo apenas pelo conjunto, no caso “ H ”. Se H é um subgrupo de G , define-se a coclasse à esquerda de H em G como os conjuntos da forma $gH = \{x \in G: \exists h \in H \text{ tal que } x = gh\}$. O conjunto de todas as coclasses de H em G é escrito como G/H . De forma similar define-se coclasse a direita de H em G . A importância das coclasses é que estas definem classes de equivalência que estão relacionadas com as órbitas percorridas pelos elementos de um conjunto ao qual G transforma através de seus elementos. Esses conceitos serão formalizados nas próximas sessões.

Outra definição importante que será usada é a de subgrupos conjugados. Dado um grupo G e subgrupos H e K de G . É dito que H e K são conjugados em G se existir g em G tal que:

$$gH = Kg$$

A partir da definição conclui-se que grupos conjugados possuem o mesmo número de elementos.

Por último, o importante teorema:

Teorema de Lagrange: Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G , é válido $|G| = |H| \cdot |G/H|$ [3].

AÇÃO DE UM GRUPO SOBRE UM CONJUNTO

Dado um grupo G e um conjunto S , ao definir uma função $G \times S \rightarrow S$ de tal forma que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

- (1) Seja $s \in S$. Então $\forall g, h \in G, g \cdot (h \cdot s) = (g \cdot h) \cdot s$
- (2) $1 \cdot s = s$ para todo $s \in S$

Então diz-se que G age em S . Observe que foi usado o mesmo símbolo para a operação de G e da ação de G em S . Isso foi feito porque o contexto deixa claro qual operação deve ser feita.

Observação: É comum omitir o símbolo (\cdot) tanto na operação de um grupo quanto na ação de um grupo. Isso é feito quando as operações estão claramente definidas no contexto.

Dado $s \in S$ define-se a órbita de s como $O_s = \{s' \in S : \exists g \in G \text{ tal que } s' = g \cdot s\}$. Observe que cada órbita forma uma classe de equivalência pela relação \sim onde $s \sim s'$ se e somente se $\exists g \in G$ tal que $s' = g \cdot s$. As órbitas induzem uma partição de S .

Define-se o estabilizador de $s \in S$ como o subconjunto G_s de elementos de G que “fixam” s . Isto é $g \in G_s$ se e somente se $g \cdot s = s$. Observe que G_s é um subgrupo de G . Se G e S são conjuntos finitos, é possível demonstrar a partir do teorema de Lagrange o seguinte resultado:

$$|G| = |G_s| \cdot |O_s| \quad (2)$$

Para todo $s \in S$. Uma propriedade importante que será usada é o fato de que se dois elementos de S pertencem a uma mesma órbita, então os estabilizadores desses elementos são subgrupos conjugados e possuem o mesmo número de elementos.

A importância desse conceito, é que no processo de classificar os subgrupos finitos das rotações no espaço, será necessário estudar como um subgrupo G age sobre o conjunto de polos de G . Mais precisamente, é necessário contar quantas órbitas existem nessa ação.

ROTAÇÕES E O GRUPO ESPECIAL ORTOGONAL

Uma rotação ρ no \mathbb{R}^3 é um operador linear nesse espaço com as seguintes propriedades:

- 1) Existe $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $\rho(u) = u$. Ou seja, toda rotação fixa algum vetor no espaço. Se ρ é diferente do operador identidade e $\|u\| = 1$, diz-se que u é um polo de ρ .
- 2) Seja $W = \text{ger}\{u\}$, o espaço gerado por u . Defina W^\perp o complemento ortogonal de W . Então $\rho|_{W^\perp}$ é ortogonal com determinante positivo, ou seja, uma rotação no plano.

Se $\rho|_{W^\perp}$ é uma rotação de um ângulo θ e u é um polo de ρ , escreve-se $\rho = \rho_{(u,\theta)}$.

A partir das propriedades 1) e 2) pode-se concluir que rotações preservam distâncias no espaço [3].

É possível mostrar que fixada uma base ortogonal S de \mathbb{R}^3 , então a matriz de ρ com relação a essa base $[\rho]_S$ é uma matriz ortogonal com determinante 1, isto é, um elemento do grupo especial ortogonal SO_3 . Reciprocamente se $M \in SO_3$, então o operador linear $x \rightarrow Mx$ é uma rotação no espaço. A partir desse resultado percebe-se o fato não trivial de que a composição de duas rotações por eixos diferentes é também uma rotação por um terceiro eixo. Portanto o conjunto das rotações no espaço com a operação de composição forma um grupo.

SUBGRUPOS FINITOS DO GRUPO DE ROTAÇÕES

Seja G um subgrupo finito de SO_3 . Define-se \mathcal{P} como o conjunto de polos dos elementos de G . Ou seja:

$$u \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists g \in G \setminus \{1\} : gu = u$$

Cada elemento de G possui dois polos, pois se u é polo de $g \in G$ então $-u$ também é polo de g . Como será visto, G age sobre \mathcal{P} pela operação de multiplicação.

Seja $u \in \mathcal{P}$ e $g \in G \setminus \{1\}$ tal que $gu = u$. Se $h \in G$ então $hu \in \mathcal{P}$. É preciso mostrar que existe $x \in G \setminus \{1\}$ que fixa hu . Esse elemento é exatamente o conjugado $hgh^{-1} \in G$. Perceba que $hgh^{-1} \neq 1$, pois $g \neq 1$.

Então existe uma ação $G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Para cada $u \in \mathcal{P}$, o estabilizador G_u é o subgrupo de G que fixa a reta gerada por u . Portanto, ao restringir os elementos de G_u ao complemento ortogonal de $W = \text{ger}\{u\}$. Obtêm-se um grupo finito de rotações no plano. O grupo dessas rotações forma um grupo cíclico gerado por uma rotação de ângulo $2\pi/r_u$ onde r_u denota o número de elementos de G_u .

Observe que como um polo, por definição, é fixado por um elemento de G diferente de 1, então $r_u > 1$.

Se $N = |G|$ então:

$$\sum_{u \in \mathcal{P}} (r_u - 1) = 2(N - 1) \quad (3)$$

Como todo elemento de G diferente de 1 possui dois polos, ao somar $r_u - 1$ para todo $u \in \mathcal{P}$ repete-se duas vezes cada elemento de G menos a unidade.

Agora, de forma arbitrária, liste as órbitas de \mathcal{P} pela ação de G :

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^k O_i \quad (4)$$

Escrevendo $n_i = |O_i|$ e observando que polos numa mesma órbita possuem estabilizadores de mesma ordem obtêm-se de (3) e (4):

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathcal{P}} (r_u - 1) &= \sum_{i=1}^k \sum_{v \in O_i} (r_v - 1) = \sum_{i=1}^k n_i (r_i - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i (r_i - 1) = 2(N - 1) \quad (5) \end{aligned}$$

Onde r_i é a ordem do estabilizador de cada polo em O_i . Em (5), dividindo ambos os lados por N e observando que $n_i r_i = N$ (ver equação 2) obtêm-se:

$$\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (6)$$

Observe que cada membro do lado esquerdo da equação (6) é maior ou igual a meio, enquanto o lado direito é estritamente menor que dois. Portanto o número de órbitas k deve ser no máximo três. Além do mais, como cada parcela a esquerda é menor do que um e a parcela a direita é maior ou igual a um, então é impossível que exista uma única órbita. Portanto devemos estudar os casos de 2 e 3 órbitas.

No caso de duas órbitas existe uma única possibilidade $n_i = 1, i=1,2$. Logo existem apenas dois polos, um em cada órbita. Esses polos devem ser opostos, isto é $\mathcal{P} = \{u, -u\}$. Ao restringir os elementos de G ao complemento ortogonal de $W = \text{ger}\{u\}$ obtemos N rotações no plano, portanto essas rotações devem ser geradas por um ângulo $2\pi/N$. Portanto conclui-se que G é o grupo cíclico gerado por uma rotação de spin $(u, 2\pi/N)$.

O caso de três órbitas é o mais complicado. Escrevendo a equação (6) para $k = 3$ obtemos:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1 + \frac{2}{N} > 1 \quad (7)$$

Logo, se $r_i \geq 3 \forall i$ então a soma no lado esquerdo da equação (7) é no máximo 1, o que é uma contradição. Portanto algum estabilizador tem ordem 2. Digamos que $r_1 = 2$. Nos próximos casos serão listados r_i em ordem crescente.

Caso $r_1 = r_2 = 2$

Então $N = 2k$ onde $k = r_3$. O número de polos na primeira e segunda órbita é k . Na terceira órbita existem apenas dois polos $\{u, -u\}$. Os elementos dos estabilizadores G_3 operam transitivamente nos $2k$ polos contidos no plano ortogonal a $W = \text{ger}\{u\}$. Pode-se interpretar essa operação com um grupo de simetrias de um polígono regular de k vértices em W^\perp .

Caso $r_1 = 2 < r_2 \leq r_3$

Novamente, se r_2 e r_3 forem muito grandes, o lado esquerdo da equação (7) tende a ser menor do que 1. Mais precisamente, se $r_2, r_3 \geq 4$ então o lado esquerdo da equação (7) é no máximo um. O que não pode ocorrer. Portanto $2 \leq r_2 < 4$. Como o caso $r_2 = 2$ já foi visto, considere $r_2 = 3$. Como $1/2 + 1/3 < 1$, se r_3 for muito grande o lado esquerdo da equação (7) tende a ser no máximo 1. Logo existe um valor máximo de r_3 . Mais precisamente pode-se verificar que esse valor não pode superar 5.

Portanto obtêm-se os seguintes possíveis valores para r_i e n_i listados em ordem crescente de i :

- 1) $r_i = 2,3,3 \quad n_i = 6,4,4 \quad e \quad N = 12$
- 2) $r_i = 2,3,4 \quad n_i = 12,8,6 \quad e \quad N = 24$
- 3) $r_i = 2,3,5 \quad n_i = 30,20,12 \quad e \quad N = 60$

Nos casos 1), 2) e 3) respectivamente os polos nas órbitas O_3 formam os vértices de um tetraédro, octaedro e icosaedro respectivamente [3].

No caso de $N = 12$, a terceira órbita O_3 possui 4 elementos e os estabilizadores possuem 3 elementos de G . Fixado um elemento p de O_3 , defina H como o estabilizador de p . Dessa forma, considerando a ação de H sobre O_3 obtêm-se duas órbitas: uma de um elemento $\{p\}$ e outra de três elementos $\{q_1, q_2, q_3\}$. Como H age transitivamente em $\{q_i\}$, para cada $i \neq 1$ existe g em H de tal forma que $gq_1 = q_i$ e $gp = p$. Logo:

$$|p - gq_1| = |gp - gq_1| = |g(p - q_1)| = |p - q_1| \Rightarrow$$

$$|p - q_i| = |p - q_1| = d \quad \forall i \quad (8)$$

Portanto, ao se calcular as distâncias entre os polos, existem duas possibilidades: 0, d ou $|q_i - q_j|$. Repetindo exatamente o mesmo raciocínio, considerando H como estabilizador de q_1 conclui-se que todos os polos são equidistantes, portanto formam os vértices de um tetraédro regular.

CONCLUSÃO

Estudando as órbitas da ação de um subconjunto finito de SO_3 sobre o conjunto dos seus polos, a classificação se reduz ao estudo do número de órbitas e os possíveis números de elementos dessas órbitas. No caso de três órbitas, obtêm-se grupos de ordens 12, 24 e 60. Para $N = 12$, foi visto de forma explícita que G forma o grupo de simetria de um tetraedro regular.



Uma abordagem à Teoria dos Fractais

Marcos Roberto Berredo da Silva ¹ e Miguel Chaquiam ²

20 a 24 de Junho de 2022

Sumário

Prefácio

1 Introdução

2 Personagens contribuintes para a Teoria dos Fractais

3 Propriedades e características dos Fractais

3.1. Auto-similaridade e complexidade infinita

4 Dimensão

4.1. Dimensão topológica

4.2. Dimensão fractal

4.3. Box-counting dimension

5 Fractais clássicos

5.1. Curva de Von Koch

5.2. Ilha de Von Koch (Floco de Neve de Koch)

5.3. Triângulo de Sierpinski

5.4. Conjunto de Julia

5.5. Conjunto de Mandelbrot

6 Aplicações do fractais

6.1. Fractais na medicina

6.2. Fractais em fenômenos geológicos

7 Considerações Finais

Referências Bibliográficas

Prefácio

A algum tempo atrás o mundo era visto de forma euclidiana, regular, porém percebendo que a geometria euclidiana não era suficiente para explicar a complexidade da natureza e do mundo, e com o avanço da ciência e estudo dos sistemas caóticos, os fractais, que são figuras geométricas abstratas com padrões complexos que se repetem infinitamente, começaram a ser estudados e passaram a ter valor científico. Assim sendo, o presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de elaborar um texto teórico sobre a teoria dos fractais para que sirva de consulta, texto base para novas pesquisas sobre o tema. Desta forma, fez-se necessário indagar as estruturas dos fractais, caracterizar os fractais já explorados, apresentar tipos de fractais descrevendo-os matematicamente e expor algumas aplicações e resultados. Para a realização deste trabalho foi realizado um levantamento bibliográfico sobre o tema, onde foi explorado alguns conceitos, definições e teoremas fundamentais para o estudo dos fractais em sistemas dinâmicos, além de fazer-se um estudo de temas como teoria do caos e o estudo do infinito para dar suporte teórico à teoria dos fractais. O fractal como foi citado e demonstrado, mantém sua estrutura quando ampliado, já a dimensão é fracionária, existindo também fractais que preenchem o plano, como a curva de Peano. Deste que o Fractal foi definido por Benoit Mandelbrot, vem sendo bastante explorados por pesquisadores, e trazendo grandes contribuições na área da medicina, biologia, economia, física, entre outros. Neste trabalho foi apresentado o resultado de algumas aplicações utilizando os fractais, tais como, na medicina e geologia. Por fim, como se trata de um tema que possui um vasto campo a ser explorado, este trabalho não possui uma pesquisa terminada, pois ainda há muito a se desvendar. O tema proposto é bastante curioso e motiva o leitor a adquirir mais conhecimento sobre o mesmo, pois ao possuir conhecimento sobre a teoria dos fractais é possível observar o mundo ao nosso redor com um olhar diferente, observando de forma cuidadosa as ações do cotidiano e o quão complexo é a nossa natureza e o nosso universo.

Belém, Junho de 2022

Marcos Roberto Berredo da Silva1

Miguel Chaquiam2

Introdução

Desde que o ser humano começou a utilizar a matemática para a explicação da existência humana, entendimento do mundo em que vivemos e para a evolução da ciência, a Geometria Euclidiana e não euclidiana se manteve bastante forte para a explicação de alguns objetos, e durante séculos foram considerados como os que melhor descreviam o mundo. Como possibilidade de descrever objetos tão complexos, foi que se desenvolveu o estudo dos Fractais, e através do mesmo é que atualmente é possível explicar fenômenos da natureza que possuem formas irregulares [4]. Pelo fato da geometria euclidiana e não euclidiana não ser o suficiente para descrever as formas encontradas na natureza, sendo facilmente perceptíveis essas formas, surgiu o interesse de estudar e formular esse texto sobre a geometria fractal, pois estudando os fractais, pode-se explicar como são dados esses fenômenos na natureza, sua complexidade e irregularidades. Podendo assim trazer contribuições, para o entendimento, e até avanços exclusivos ao referente tema, que é novo no âmbito da pesquisa, e pouco estudado. Desta forma, objetivamos apresentar uma abordagem sobre a teoria dos fractais, fazendo um relato histórico, analisando as estruturas dos fractais, caracterizando os fractais já explorados, pontificando os tipos de fractais e, relatando algumas aplicações e resultados. Desta forma essa pesquisa foi realizada sob revisão bibliográfica por meio de artigos científicos, revistas, internet, livros, documentos, etc. Baseado nos estudos de Ivana Resende da Costa Côrtes [4], com seu trabalho de conclusão de curso de mestrado que fala sobre a abordagem teórica e prática sobre a geometria fractal;



Jaqueline Aparecida Fernandes [6], com sua monografia de graduação que fala de um estudo sobre os fractais com um olhar na matemática; Andreia dos Santos Gomes [8], com sua monografia de especialização que fala sobre o estudo da geometria através dos fractais; e Raquel Sofia Rebelo Nunes [14], em sua tese de mestrado que fala sobre a geometria fractal e suas aplicações.

Personagens contribuintes para a Teoria dos Fractais

Antes da ideia dos fractais, os termos e conceitos da filosofia e geometria euclidiana eram consideráveis para descrever as formas no mundo que vivemos.

A geometria euclidiana (geometria clássica), estudada no ensino básico, serviu de base para compreender a natureza, através da ciência. Com o avanço da ciência e as criações humanas, percebeu-se o avanço das formas geométricas, e as construções formadas pelo conjunto dessas formas, por exemplos, edifícios, monumentos, pinturas, objetos industriais entre outros no meio cotidiano [4].

Então com essa percepção das construções e criações feita pelo ser humano, no cotidiano, Euclides (325 - 265 a. C.) concluiu que estruturas macroscópicas são compostas por formas geométricas menores, que juntas formam essas estruturas maiores.

Em alguns casos essas formas geométricas se assemelham com estruturas ou modelos visíveis na natureza, como por exemplo, a utilização da esfera como modelo para apresentar a forma de alguns



planetas, a parábola como trajetória de projéteis, entre outros [4].

Há mais de dois mil anos, Euclides notou que a areia, vista como todo, se assemelhava a uma vista contínua e uniforme, mesmo sendo composta por pequenas partes visíveis. Desde então tentava provar, matematicamente, que todas as formas da natureza podem ser reduzidas as formas geométricas simples [4].

Euclides organizou a Geometria Plana nos seus livros de forma axiomática ou postulacional, conhecidos como “Os elementos de Euclides”, estão organizados em treze livros no qual tratam de diferentes objetos matemáticos.

Este método consiste em aceitar algumas afirmações (axiomas ou postulados) como verdade, previamente estabelecidos e, a partir desses, demonstrar outras proposições utilizando a forma dedutiva.

O estudo do postulado das paralelas, que também ficou conhecido o quinto postulado de Euclides, que estava descrito nos elementos de Euclides, fez com que houvesse o surgimento de outras geometrias, as conhecidas como geometrias não euclidianas.

Podemos citar alguns personagens que retratam a evolução da geometria não euclidiana e que de alguma forma antecedeu historicamente o processo evolutivo da geometria fractal. Estes personagens foram:

Girolamo Saccheri (1667-1733) construiu um quadrilátero com dois lados opostos congruentes e perpendiculares a mesma base, esse

quadrilátero ficou conhecido como Quadrilátero de Saccheri, este quadrilátero teve como base o quinto postulado de Euclides[5].

Heinrich Lambert (1728-1777) descreveu que a partir de um quadrilátero, mas não o quadrilátero de Saccheri, contendo três ângulos retos ele levantou três hipóteses conforme o quarto ângulo fosse agudo, reto ou obtuso [5].

Ivanovitch Lobachevsky (1792-1856) considerou o seguinte postulado: por um ponto fora de uma reta dada, passam mais de uma reta que não intersectam a primeira [3].

Baseado nesse postulado, o matemático russo define retas não-secantes e retas paralelas. As não-secantessão todas as retas que não intersectam a reta r e, reta paralela como a primeira que não a intersecta [3].

Bernhard Riemann (1826-1866) assumiu no lugar do quinto postulado de Euclides o seguinte postulado: Dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r , não existe nenhuma reta paralela a r que passe por P [3].

Em 1871 Klein denominou as três geometrias, a de Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann; de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente [5]. Com base nos estudos e pesquisas sobre a geometria euclidiana e não euclidiana, tornando-se assim fundamental para novos estudos e o avanço da ciência, podemos citar outras pesquisas e estudos que influenciaram de alguma forma para o surgimento da teoria dos fractais.

A origem dos fractais se inicia bem antes de ser definida por

Mandelbrot, onde Johannes Kepler e Galileu Galilei iniciam estudo do comportamento dos sistemas dinâmicos, com a investigação do movimento dos planetas na antiga astronomia [1]. Apoiados nos estudos de Kepler e Galileu, Isaac Newton e Gottfried Leibniz estudando as regularidades dos movimentos e fenômenos naturais criaram o cálculo diferencial e integral, com base na ideia de infinitésimo e de limite [1].

Com este, possibilitou descrever leis do mundo físico e natural, e também formalizar teoremas. Depois de árduo estudo com sucesso, a Natureza aparecia simples, espantosamente compreensível. Muitos outros foram motivados a desenvolver a Matemática e a interpretar fenômenos, tudo no paradigma do regular, do estável e do periódico [1].

O mundo físico e natural parecia apresentar-se de tal modo, que era possível com um determinado conjunto de equações prever todos os seus estados futuros. Acreditava-se que evolução da ciência consistia essencialmente em encontrar novas equações que descrevessem um maior número fenômenos. Emergiu a revolução tecnológica com base no regular, na criação de máquinas cujo comportamento é perfeitamente determinado à priori [1].

A partir disso, entre os anos de 1857 e 1913, o que ficou conhecido como “monstros matemáticos na época”, grande parte da comunidade matemática titulava de “lamentável praga” o fascínio que demonstravam por objetos que punham em causa algumas das bases da matemática da época [1].

Estes novos objetos e modelos, em pleno desenvolvimento no mesmo momento histórico do movimento cubista estabelecem-se como um padrão de gosto nas Artes: foram consideradas "patológicas" ou ainda uma "galeria de monstros" [1].

Como exemplo, é citado abaixo um dos trabalhos de cientistas, que seus estudos são considerados fractais.

Em 1870, Karl Weierstrass (1815 – 1897) encontrou uma função que era contínua em todo seu domínio, mas não diferenciável, onde o gráfico desta função é chamado de fractal.

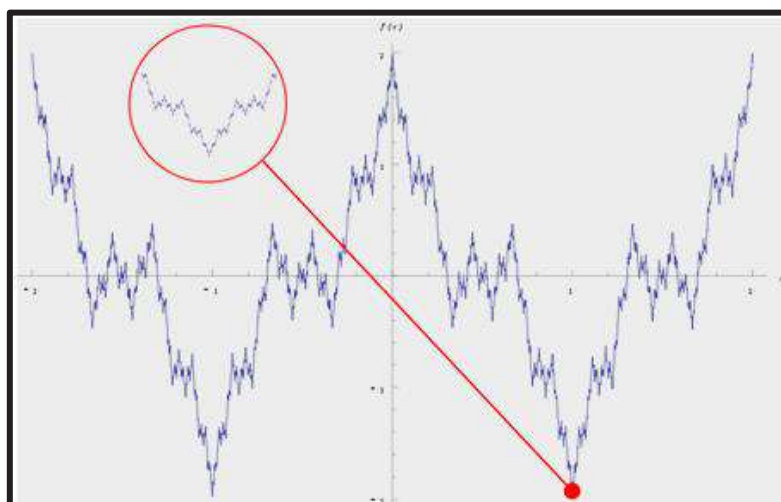


Figura 2.1: Gráfico da função de Weierstrass.

Abaixo a função de Weierstrass:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, sendo $0 < a < 1$, b pertence aos inteiros positivos ímpares, e $a \cdot b > 1 + \frac{3}{2} \pi$.

Em 1904, Helg Von Koch (1870 – 1924) deu uma definição mais geométrica de um fractal, conhecida como *Koch Snowflocke* (ou floco de neve), que é resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial.

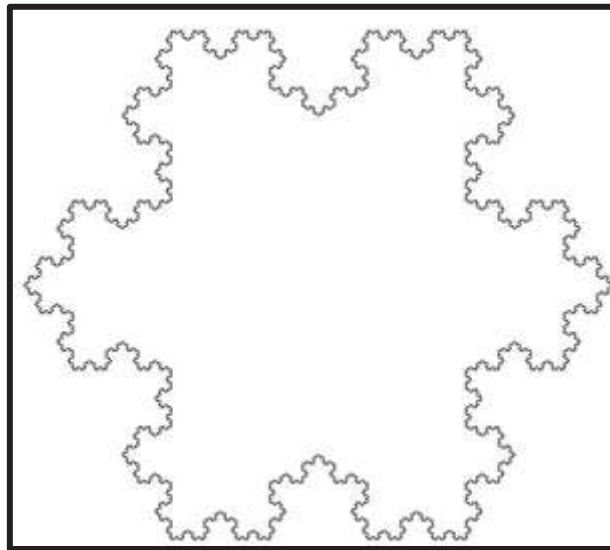


Figura 2.2: Floco de neve de Koch.

Ao longo do texto serão apresentados outros fractais, e detalhando-os os mesmos.

Em um universo com poucas formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a geometria fractal apresenta-se como uma forma de tratar os fenômenos considerados imprevisíveis, aleatórios e anômalos, ou seja, caóticos [7].

Sendo assim a Geometria Fractal começou a ter repercussão no âmbito científico, pela vasta riqueza de poder explicar as formas de tudo em volta

do ser humano.

Os fenômenos caóticos, bem como a geometria fractal, tem sido, nos últimos anos, alvo das investigações de muitos cientistas em todo o mundo. As técnicas fractais, em particular, mais do que um ramo da matemática, tem-se revelado uma ferramenta extremamente útil a muitas ciências, permitindo uma linguagem comum entre especialistas de diferentes áreas [7].

A geometria fractal possui uma vantagem em ser estudada, em relação a Geometria Euclidiana, já que a Geometria Euclidiana não consegue descrever as formas encontradas na natureza [7].

O desenvolvimento dessa geometria encontrada na natureza teve como responsável Benoit Mandelbrot, onde a partir desta teoria, que chamou de fractais, descreveu em vários modelos encontrados em nosso universo, fragmentos e irregularidades.

Com base nos fatos citados acima, os fractais tem algo a nos mostrar a qualquer ramo, bem como em todas as áreas da ciência, na natureza, no cotidiano, entre outros.

Propriedades e características dos Fractais

Fractal, desde o momento que foi idealizada por Benoit Mandelbrot, passou por várias definições diferentes, mas todas elas tem uma única noção, que serviu para idealizar todas as outras definições.

Fractal, introduzida por Benoit Mandelbrot através do neologismo Fractal, que surgiu do latino fractus, que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim fractus. O verbo em latim correspondente frangere significa quebrar: criar fragmentos irregulares, é contudo sabido e como isto é apropriado para os nossos propósitos que, além de significar quebrado ou partido, fractus também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento [12].

Os fractais são formas geométricas abstratas, onde o estudo de suas formas são bastantes complexas, mas sua estrutura em si, possui uma beleza, formada por padrões bastante interessante e incríveis, podendo perceber que ao ser ampliada, os fragmentos do fractal, esses fragmentos são idênticos a figura inicial, o todo, do fractal.



Os fractais são objetos que ao ser ampliada não perde sua definição formal, mantendo a estrutura inicial, como mostra a Figura 3.1.

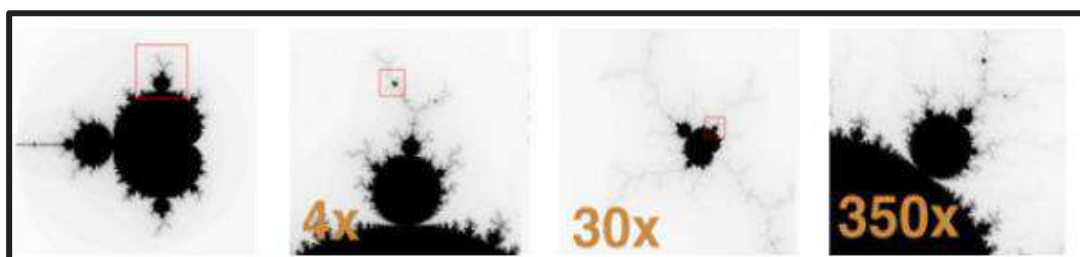


Figura 3.1: Fractal ampliado

Deste modo, o fractal tem muito valor para a ciência, já que, é encontrado em diversas áreas por pesquisadores, dentre elas a matemática, podendo contribuir bastante para o avanço da ciência.

3.1. Auto-similaridade e complexidade infinita

A auto-similaridade está relacionada no fato de um fractal apresentar no seu interior, e em escalas diferentes, cópias idênticas (exatas) ou aproximadas (estatística) de si mesma.

A *exata* só existe em figuras geradas por processos matemáticos, onde o todo é formado por réplicas em diferentes escalas, resultado do fato de cada iteração seguir a mesma regra de construção [4].

Na *quase auto-similaridade* o fractal apresenta ser aproximadamente,

mas não exatamente idêntico em escalas diferentes. Fractais gerados por computadores são geralmente quase auto-similares, mas não exatamente auto-similares [6].

A *estatística* aproxima-se dos objetos naturais, pois os mesmos não possuem auto-similaridade exata e não conseguimos visualizar muitas escalas de ampliação [4].

A *complexidade infinita* ocorre quando não conseguimos obter uma figura final do fractal, ou seja, quanto mais iterações tiver no fractal, mais detalhes podemos perceber, porém sempre haverá encaixes e destaques cada vez menores [4].

Dimensão

Até o século XIX, a noção de dimensão consistia no número de parâmetros independentes (coordenadas) necessários para a descrição única dos pontos de um objeto, essa definição era matematicamente suficiente até esta época [4].

Nesta época só tinha noção de dimensão de figuras euclidianas, tendo como ponto de partida entes primitivos, iniciando da dimensão zero que era a dimensão de um ponto (figura geométrica abstrata), em seguida a reta com dimensão 1, áreas com dimensão 2, volumes com dimensão 3 e assim por diante, podendo por indução estender para n dimensões.

Durante várias gerações, o comprimento, a altura e a largura determinaram o conceito de dimensão cujo valor é um número inteiro positivo. A definição matemática de dimensão mudou ao longo dos tempos, à medida que surgiam obstáculos, como por exemplo, o aparecimento das curvas que preenchem o quadrado [4].

A dimensão é de suma importância para determinar a característica de objetos da natureza, para uma melhor análise do objeto, portanto a dimensão foi dividida em *dimensão topológica* e *dimensão fracionária*.



4.1. Dimensão topológica

A dimensão topológica é equivalente a dimensão de objetos da Geometria Euclidiana, vejamos isso em alguns exemplos no decorrer do texto, com objetos Euclidianos.

Com o surgimento da Topologia, essa noção de dimensão passou a ser questionada, uma vez que se entendia que a dimensão deveria ser um *invariante topológico*, ou seja, quando dois objetos são devidamente transformados, através de um *homeomorfismo* (uma aplicação contínua, biunívoca, cuja inversa é contínua), as suas dimensões topológicas são preservadas [4].

Veremos no decorrer do texto que a noção de dimensão topológica, não foi suficiente para caracterizar as irregularidades de certos conjuntos e fractais que surgiram, por exemplo, o conjunto de Cantor, a curva de Von Koch, etc.

Antes de definirmos dimensão topológica, também conhecida como *cobertura de Lebesgue*, é essencial definirmos anteriormente o conceito de cobertura e refinamento de uma cobertura. Baseado em [4], segue as seguintes definições.

Definição 4.1. *Cobertura aberta* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma coleção $A = \{A_i | i \in I\}$ de bolas abertas de raios $\varepsilon > 0$ tais que a sua união cobre X , ou seja, $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Definição 4.2. Uma cobertura aberta $B = \{B_j | j \in J\}$ é um *refinamento* de uma cobertura $A = \{A_i | i \in I\}$ se para cada B_j existir A_i tal que $B_j \subset A_i$.

Também precisamos definir a *ordem* de uma cobertura. Com efeito, uma cobertura aberta $A = \{A_i | i \in I\}$ tem ordem $m + 1$ se m é o maior inteiro tal que $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$, ou seja, é o número máximo de bolas na cobertura que tem interseções não – vazias. No caso, em que a interseção de todos os pares de conjuntos da cobertura é vazia, dizemos que a ordem é 1. Segue portanto, que se uma cobertura tem ordem $m + 1$ então quaisquer $m + 1$ conjuntos da cobertura tem interseção vazia.

Definição 4.3. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $\dim_{top}(X) \leq d \leq n$ quando qualquer cobertura aberta admita um refinamento de ordem no máximo $d + 1$. Portanto, $\dim_{top}(X) = d$ desde que $\dim_{top}(X) \leq d$, mas não $\dim_{top}(X) \leq d - 1$. Ou seja, esta condição significa que toda cobertura aberta de X admite um refinamento de ordem $d + 1$.

Baseado na **Definição 4.1.**, podemos dizer que a dimensão topológica é definida como o número mínimo de interseções necessárias para que pequenas bolas abertas cubram por completo o objeto em questão. Abaixo vemos alguns exemplos clássicos da dimensão topológica de objetos abertos, na concepção de [4].

1) Um conjunto de pontos isolados pode ser coberto com bolas de raio suficientemente pequeno de modo que não haja nenhuma interseção entre

elas, isto é, sua ordem é $d + 1 = 1$. Logo, sua dimensão topológica é zero, isto é, $d = 0$. Como mostra a Figura 4.1 abaixo.

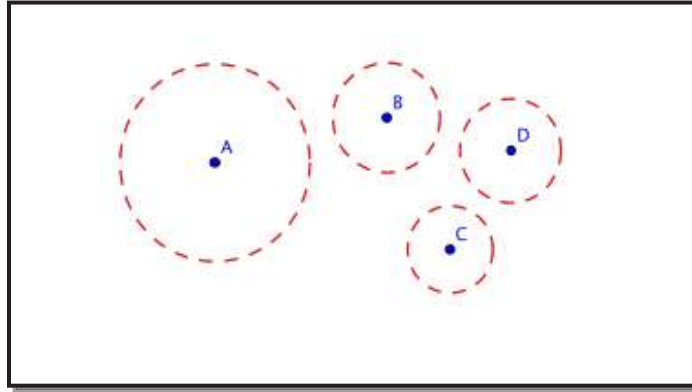


Figura 4.1: Dimensão topológica de um conjunto de pontos.

2) Uma curva pode ser coberta com bolas de raios suficientemente pequenos tal que não hajam três bolas com interseção não vazia, mas apenas pares de bolas com interseção não vazia. Logo, sua ordem é $d + 1 = 2$ e sua dimensão topológica é $d = 1$. Vejamos a Figura 4.2.

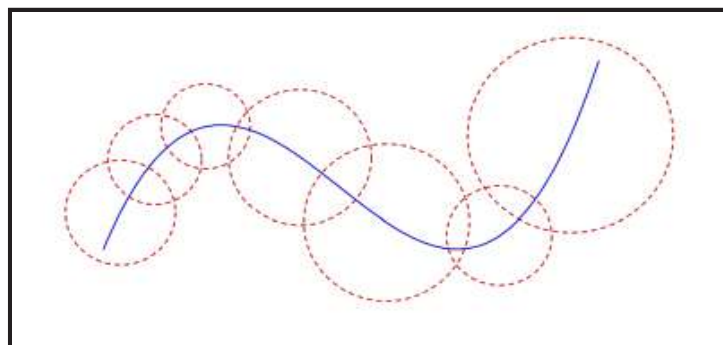


Figura 4.2: Dimensão topológica de uma curva.

3) Uma superfície no espaço pode ser coberta com bolas de raios suficientemente pequenas de tal modo que não haja quatro bolas com interseção não vazia, mas apenas três bolas com interseção não vazia. Logo, sua ordem é $d + 1 = 3$ e sua dimensão topológica é $d = 2$, conforme a Figura 4.3.

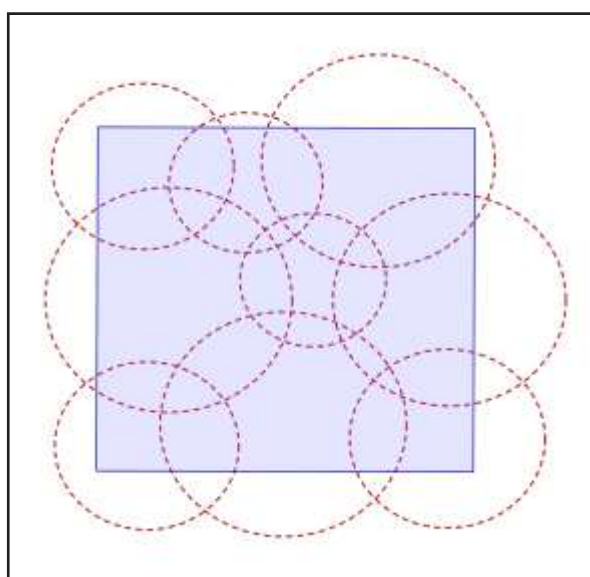


Figura 4.3: Dimensão topológica de uma superfície.

Observamos que a dimensão topológica será incapaz de discernir entre um conjunto de ponto na reta real, visto que tem dimensão topológica zero, e o conjunto de cantor, que veremos que também tem dimensão topológica zero. No ponto de vista da cardinalidade de conjuntos, o conjunto de cantor, sendo não-enumerável, está bem mais

próximo¹ da reta real, que tem dimensão topológica, do que um conjunto infinito de pontos [4].

Com esses fatos, podemos observar que a dimensão topológica não é capaz de perceber as irregularidades que caracterizam os fractais.

4.2. Dimensão fractal

A noção de dimensão topológica não foi o suficiente para mostrar que o quanto um conjunto fracionária pode se comportar como um objeto de dimensão maior.

Mandelbrot foi o primeiro a perceber isso quando definiu fracionária como sendo um conjunto de pontos para o qual a dimensão fracionária excede estritamente a dimensão topológica [4].

Fundamental para a maioria das definições de dimensão fracionária a ideia de ‘medida na escala δ ’. Para cada δ , medimos um conjunto de modo que irregularidades de tamanho menor que δ são ignoradas, e vemos como essa medida se comporta quando $\delta \rightarrow 0$ [4].

Uma das primeiras publicações de Mendelbrot, em 1967, intitulada ‘How Long Is The Coast Of Britain? Statistical Self-Similarity And Fractional Dimension’ (Qual a Medida da Costa da Grã-Bretanha? Auto-Similaridade Estatística e Dimensão Fracionária), tradução de acordo com

¹ “Próximo” sendo empregado no sentido amplo não matemático.

o contexto. Onde é discutido o problema da medição do comprimento da costa da Grã-Bretanha, e Mandelbrot percebe que se usarmos medidas de escala cada vez menores para medirmos uma região, seremos capazes de capturar com mais detalhes tal região, e como consequência iremos obter comprimento maior podemos ver essa ideia nas Figuras 4.4 (a), (b) e (c).

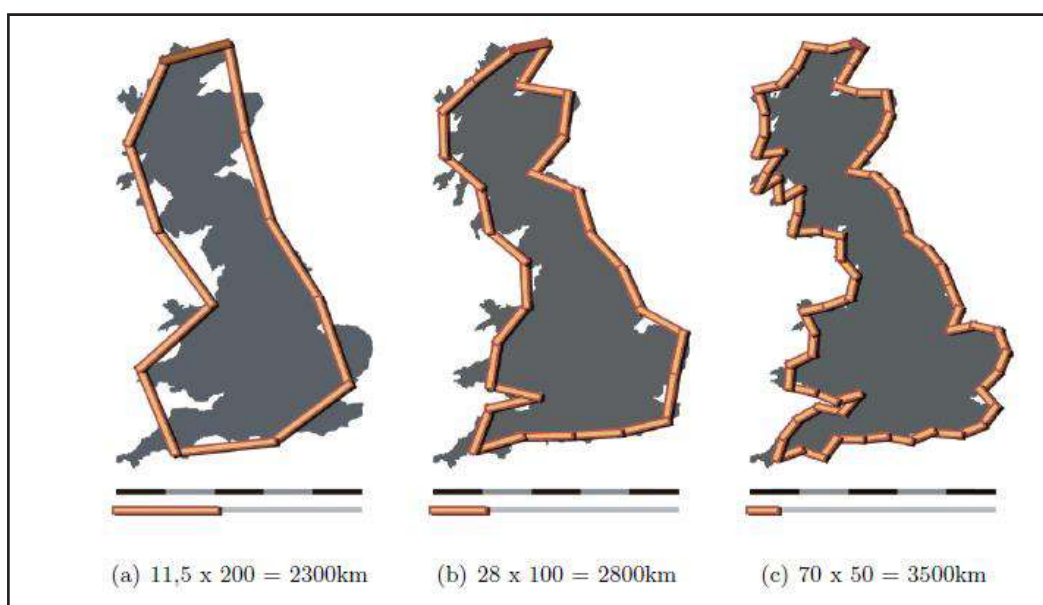


Figura 4.4: Exemplo de quanto menor a escala, maior o comprimento.

4.3. Box-counting dimension

As definições e exemplos abaixo foram inspirados em [4].

Consideremos os seguintes objetos regulares: o segmento unitário, o

quadrado unitário e o cubo unitário.

1) *Segmento unitário (dimensão topológica $d = 1$).*

Dado um segmento unitário, vamos dividi-lo em $N = n$ partes iguais, portanto o comprimento de cada subintervalo é $\delta = \frac{1}{n}$. Além disso, precisamos dos $N = n$ intervalos para cobrir o segmento, ou seja, vale a relação $N = \delta^{-d}$, com $d = 1$.

2) *Quadrado unitário (dimensão topológica $d = 2$).*

Dado um quadrado unitário, vamos dividi-lo em $N = n^2$ partes iguais, portanto o comprimento de cada lado dos quadrados menores sendo $\delta = \frac{1}{n}$. Além disso, precisamos dos N quadradinhos para cobrir o quadrado unitário, do mesmo modo vale a relação $N = \delta^{-d}$, com $d = 2$.

3) *Cubo unitário (dimensão topológica $d = 3$).*

Dado um cubo unitário, vamos dividi-lo em $N = n^3$ partes iguais, portanto o comprimento de cada lado dos cubos menores sendo $\delta = \frac{1}{n}$. Além disso, precisamos dos N cubinhos para cobrir o cubo unitário, do mesmo modo vale a relação $N = \delta^{-d}$, com $d = 3$.

Verificamos nos objetos acima, que independente da dimensão d , para qualquer partição uniforme, temos que a relação entre N (quantidade de peças necessárias para cobrir o objeto) e δ (tamanho dos lados da partição) é dada por:

$$N = \delta^{-d}.$$

Aplicando logaritmo de base 10 em ambos os membros da igualdade

acima, temos:

$$\log N = \log \delta^{-d}.$$

Agora aplicando as propriedades de logaritmos:

$$\log N = -d \log \delta.$$

Assim podemos expressar d por:

$$d = -\frac{\log N}{\log \delta}. \quad (1)$$

Para definirmos a dimensão das caixas usaremos a expressão (1) como base para darmos continuidade. Inspirado em [4], temos que:

Dado um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, e uma partição uniforme de \mathbb{R}^n em caixas de lado δ , e $N_\delta(F)$ o número de caixas que intersectam o conjunto F .

Definição 4.4. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, então a dimensão das caixas é o número real dado por:

$$d_{box}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \frac{1}{\delta}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta} \right), \text{ se o limite existir.}$$

Essa versão da definição é amplamente usada empiricamente. Para achar a dimensão das caixas de um conjunto no plano F nós desenhamos uma malha de quadrados ou caixas de lado δ e contamos o número $N_\delta(F)$ que intersecta o conjunto para vários δ pequenos (donde o nome 'contagem das caixas'). A dimensão é a taxa logarítmica com que $N_\delta(F)$ aumenta quando $\delta \rightarrow 0$, e pode ser estimado pela inclinação do gráfico de $\log N_\delta(F)$ versus $-\log \delta$ [4]. Vejamos agora um exemplo inspirado em [4], que ilustra a **Definição 4.1.** e o parágrafo acima.

É considerado um círculo unitário, cujo centro tem coordenada $(0,0)$

no plano. As figuras 4.5 (a), (b), (c) e (d) mostra as partições diminuindo cada vez mais e as interseções da malha com o círculo unitário para os valores $\delta = 0,5$, $\delta = 0,2$, $\delta = 0,1$ e $\delta = 0,05$, respectivamente.

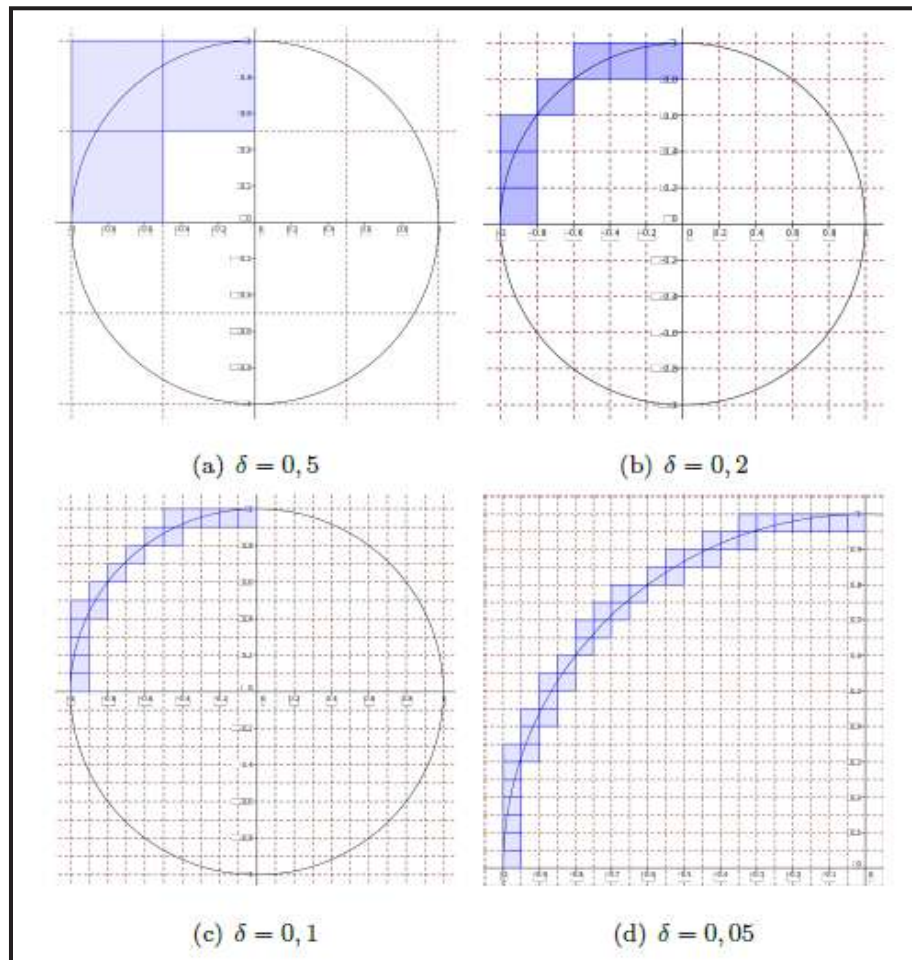


Figura 4.5: Partições cada vez menores e as interseções da malha com o círculo unitário.

Essa definição dá uma interpretação para o sentido da dimensão das caixas. O número de caixas da malha de lado δ que intersecta o conjunto é

uma indicação de como espelhado ou irregular é o conjunto quando examinado na escala δ . A dimensão reflete quão rapidamente as irregularidades se desenvolvem quando $\delta \rightarrow 0$ [4].

Na Tabela 4.1 usaremos a simetria do círculo para ilustrarmos os valores de δ e N_δ .

TABELA 4.1: Estimativa da dimensão das caixas do círculo unitário.

δ	N_δ	$-\log \delta$	$\log N_\delta$
0,5	$4.3 = 12$	0,69	2,48
0,2	$4.7 = 28$	1,61	3,33
0,1	$4.16 = 64$	2,3	4,16
0,05	$4.37 = 148$	3	5

Na Tabela 4.1, é mostrado os valores do comprimento das caixas δ que cobre o círculo unitário e os valores do número de caixas N_δ necessários para cobrir o círculo, com isto, é possível perceber que quanto menor for o valor de δ , maior será o valor de $-\log \delta$, e quanto maior for o valor de N_δ , maior será o valor de $\log N_\delta$.

A Figura 4.6 abaixo, temos a reta que melhor aproxima os valores da Tabela 4.1, o a equação é $y = 1,09x + 1,66$. Já garante com aproximação de uma casa decimal que a dimensão é $d = 1$.

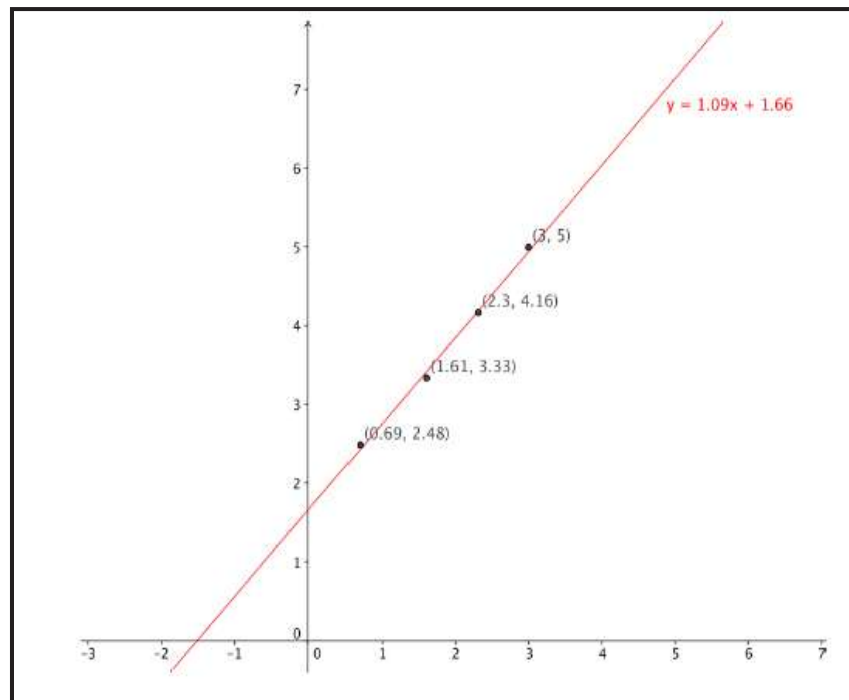


Figura 4.6: Gráfico de $(-\log \delta) \times (\log N_\delta)$

Podemos definir também o método de Box-Counting da seguinte forma, inspirado em **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

Para esta aplicação é necessário cobrir toda a figura fracionária com uma grande malha quadriculada de tamanho δ , fazendo a contagem do número N de caixas que possuem qualquer parte da figura fracionária, como é possível ver na Figura 4.5. Isto gera um certo número N que depende de δ . Após esta etapa, diminui-se o tamanho de δ e aplicando uma nova malha sobre a figura, é possível perceber que a quantidade de caixas de N que cobre a figura aumentará.

A dimensão fracionária é medida por meio da relação entre a

quantidade de caixas utilizadas para cobrir a figura e a medida que a malha vai sendo refinada [9].

Vejamos agora na Figura 4.7 a ideia da dimensão das caixas aplicada ao cálculo da costa da Grã-Bretanha.



Figura 4.7: Ideia da dimensão das caixas aplicada ao cálculo da costa da Grã-Bretanha.

Desta forma, para cada partição i , esboça-se o gráfico no plano $\log N(\delta) \times \log \frac{1}{\delta}$, como na Figura 4.6, e marcamos os pontos $(\log N_i(\delta), \log \frac{1}{\delta_i}); (\log N_{i+1}(\delta), \log \frac{1}{\delta_{i+1}}); \dots$, com $i = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Assim, podemos definir também a dimensão de Box-Couting da seguinte forma:

$$d_{box} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{i+1}(\delta) - \log N_i(\delta)}{\log \left(\frac{1}{\delta_{i+1}} \right)^{i+1} - \log \frac{1}{\delta_i}}$$

Fractais clássicos

Ao observar diferentes tipos de figuras ou mapas de costas marítimas ou fronteiras, o comprimento destas irão variar de acordo com o objeto observado, percebendo que quando diminui a escala da figura analisada, irá aumentar o comprimento do contorno da figura, mostrando que estes são fractais, pois ao fazer a aproximação por escala da figura, vai aparecendo mais detalhes.

5.1. Curva de Von Koch

Para a construção da curva de Koch, temos que considerar um segmento de reta (Figura 5.1) que vai de A até B, onde é chamado de inicializador, após isto, o inicializador é quebrado em quatro partes iguais gerando uma curva que vai do ponto A ao ponto B, chamada de gerador, pois ela irá dar o processo de construção da figura que queremos chegar, formada por quatro segmentos de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{3}$ da



distância de A até B, como mostra a Figura 5.2.



Figura 5.1: Inicializador.

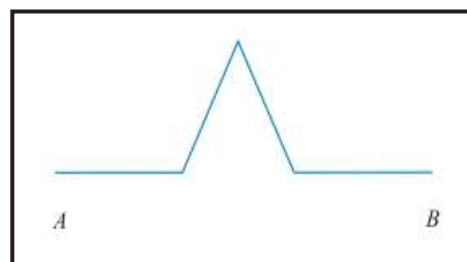


Figura 5.2: Gerador/1ª iteração.

Na Figura 5.3, em cada um dos segmentos da curva da Figura 5.2 anterior, foi reproduzida uma cópia da figura original, reduzida em $\frac{1}{3}$ de seu tamanho, de modo a formar uma nova curva de A até B, agora formada por dezesseis segmentos.

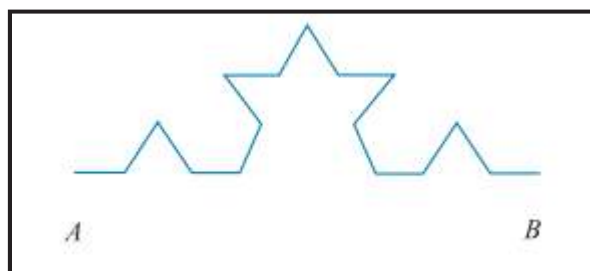


Figura 5.3: 2ª iteração

Na Figura 5.4, em cada um dos segmentos da curva da Figura 5.3, foi reproduzida uma cópia da figura original, na 1ª iteração.

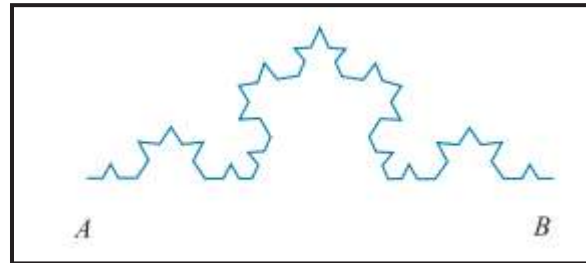


Figura 5.4: 3ª iteração

O fractal correspondente a essa construção é a curva limite, num certo sentido, desse processo. É possível imaginar que num fractal há partes da figura que são cópia do todo, pois cada etapa da construção é uma união de 4 cópias reduzidas da etapa anterior. Obedecendo a propriedade chamada de auto-semelhança.

Algoritmo 5.1. Modelo matemático para a Curva de Koch

Primeiramente consideremos que:

- 1) Considerar um segmento de reta \overline{AB} de comprimento l .
- 2) Dividir o segmento em três segmentos iguais, e suprir o terço médio, colocando em seu lugar os segmentos \overline{CE} e \overline{DE} , cada um com um comprimento de $\frac{1}{3}$ do segmento removido. Ficando, assim, com a poligonal $ACEDB$, com comprimento $\frac{4}{3}l$.

3) Repetir com cada um dos quatro segmentos da poligonal $ACEDB$ a mesma operação feita com o segmento original, e assim sucessivamente e iterativamente.

Portanto, segue abaixo na Figura 5.5, o modelo geométrico da Curva

de Koch.

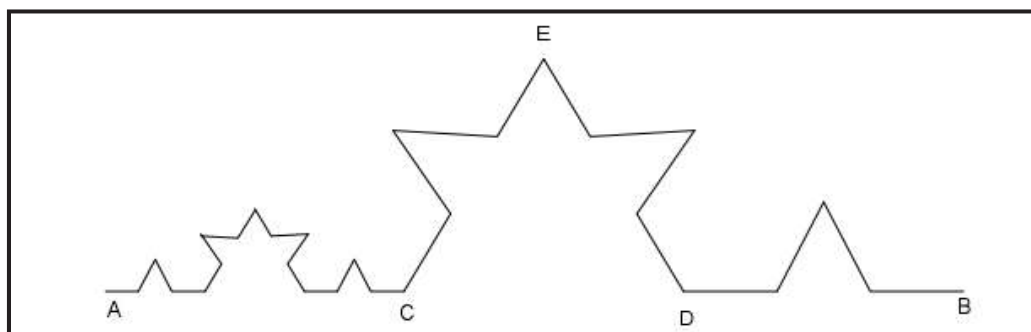


Figura 5.5: Obtenção da Curva de Koch

É possível explorar a Geometria Euclidiana através da Geometria Fractal, isto é, realizar a análise do número de segmentos, comprimento destes e o comprimento total da curva em cada nível da construção da curva de Koch como seguem na Tabela 5.1.

Nesta tabela em cada linha verifica-se o aumento do número de segmentos e a redução do comprimento dos mesmos, conforme o nível n em questão.

Tabela 5.1: Comprimento da Curva de Koch.

Figura	Figura inicial	1º iteração	2º iteração	3º iteração	..	n iterações
Número de segmentos	1	4	16	64	..	4^n
Comprimento de cada segmento	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$..	$\frac{l}{3^n}$

Comprimento total da curva	l	$4 \cdot \frac{l}{3}$	$4^2 \cdot \frac{l}{3^2}$	$4^3 \cdot \frac{l}{3^3}$..	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$
-----------------------------------	-----	-----------------------	---------------------------	---------------------------	----	--------------------------------------

Na tabela 5.1 é deduzido expressões para determinar o número de segmentos, o comprimentos de cada segmento e o comprimento total da curva de Von Koch, onde essas expressões dependem do número de iterações.

Considerando que o comprimento para um dado nível é $\frac{4}{3}$ do nível anterior; o comprimento da curva no nível é $\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$, ou seja, de um nível para outro o comprimento é multiplicado pelo fator $\frac{4}{3} > 1$.

Como o comprimento aumenta de um nível para outro, logo o cresce indefinidamente tendendo a infinito quando o nível de construção tende a infinito.

Como visto nas Tabela 5.1, o seguimento de comprimento unitário é dividido em quatro partes iguais, gerando uma nova figura de $N = 4$ segmentos cujo novo comprimento de cada segmento é $\delta = \frac{1}{3}$. Portanto a dimensão fracionária da Curva de Koch (Dim_C) é dada por:

$$Dim_C = -\frac{\log N}{\log \delta} = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = -\frac{\log 4}{\log 3^{-1}} = \frac{-\log 4}{-\log 3} \cong 1,261 \dots$$

5.2. Ilha de Von Koch (Floco de Neve de Koch)

Já para a construção da Ilha de Von Koch, iniciamos o processo com um triângulo equilátero.

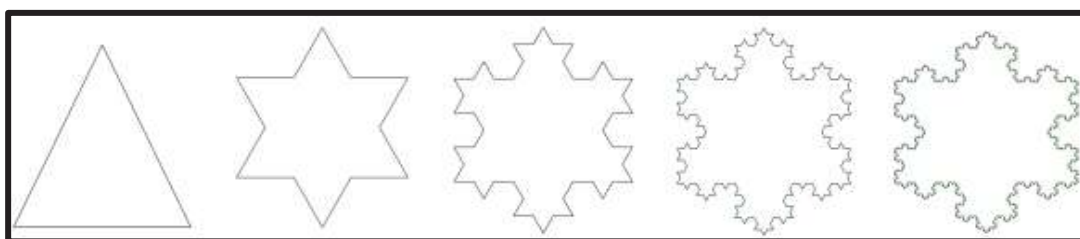


Figura 5.6: Processo de construção da Ilha de Von Koch até a 4ª iteração.

Ao vermos a representação geométrica deste fractal podemos perceber que temos uma figura regular fechada cuja fronteira é composta por infinitos lados cada vez menores. Supondo que cada lado do triângulo inicial mede uma unidade. Os lados de cada nova figura são três vezes menores que os da figura inicial.

Algoritmo 5.2. Modelo matemático para a Ilha de Von Koch.

- 1) Dividimos cada lado do triângulo equilátero em três partes iguais.
- 2) Construimos sobre cada um dos segmentos do meio, um novo triângulo equilátero, sem a base, tal como podemos observar na Figura 5.6. Obtivemos, portanto, a segunda figura do processo de construção com doze lados.

3) Repetimos o mesmo processo para cada um dos doze segmentos obtidos na figura anterior. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos, no limite deste processo recursivo, o Floco de Neve de Koch.

Como mostra a Figura 5.6, no processo de interação do Floco de Neve de Koch, observamos que na transformação a quantidade de lados anterior é multiplicada por 4 e o comprimento dos lados de cada nova figura são três vezes menores que os da figura anterior, desta forma, é possível determinarmos a variação da quantidade e do comprimento dos lados da ilha de Von Koch.

Consideramos que o comprimento do triângulo inicial seja 1 unidade, analisamos abaixo a Tabela 5.2.

O número de lados de cada figura em função do número de iterações é dado por uma Progressão Geométrica (PG), onde o $I_0 = 3$ e a razão $q = 4$, que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral, conforme dado abaixo.

$$I_n = \begin{cases} I_0 = 3 \text{ e } I_1 = 12 \\ I_n = 4 \cdot I_{n-1}, n > 1 \text{ ou } I_n = 3 \cdot 4^n \end{cases}$$

Ao observa essa sucessão, concluímos que ela é crescente, pois conforme o número de iterações aproxima-se do infinito, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, a sucessão $I_n \rightarrow \infty$, isto é, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ [4].

Tabela 5.2: Quantidade e Comprimento da Ilha de Von Koch

Figura	Número de Lados (I)	Comprimento dos Lados (C)
---------------	----------------------------	----------------------------------

Figura Inicial	$l_0 = 3.1 = 3 = 3.4^0$	$C_0 = 1 = 3^0$
1ª Iteração	$l_1 = 3.4 = 12 = 3.4^1$	$C_1 = \frac{1}{3} \cdot C_0 = 3^{-1}$
2ª Iteração	$l_2 = 12.4 = 48 = 3.4^2$	$C_2 = \frac{1}{3} \cdot C_1 = 3^{-2}$
3ª Iteração	$l_3 = 48.4 = 192 = 3.4^3$	$C_3 = \frac{1}{3} \cdot C_2 = 3^{-3}$
4ª Iteração	$l_4 = 192.4 = 768 = 3.4^4$	$C_4 = \frac{1}{3} \cdot C_3 = 3^{-4}$
⋮	⋮	⋮
n Iterações	$l_n = 3.4^n$	$C_n = \frac{1}{3} \cdot C_{n-1} = 3^{-n}$

Na Tabela 5.2 é mostrado uma expressão para determinar o comprimento de cada lado C da ilha de Von Koch e que depende do número de lados l formado em cada iteração, e este número de lado é em função do número de iterações, portanto o comprimento da ilha de Von Koch também é em função do número de iterações n .

Isto significa que o Floco de Neve de Koch tem um número infinito de lados [8].

O comprimento dos lados de cada figura em função do número de iterações é dado por uma Progressão Geométrica (PG), onde o $C_0 = 1$ e a razão $q = \frac{1}{3}$, que pode ser definida por recorrência ou através de um termo geral, conforme dado abaixo.

$$C_0 = 1 \text{ e } C_1 = \frac{1}{3}$$

$$C_n = \begin{cases} C_n = \frac{1}{3} \cdot C_{n-1}, n > 1 \text{ ou } C_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n} \end{cases}$$

Neste caso observa-se que essa sucessão é decrescente e limitada por zero, pois conforme o número de interações aproxima-se do infinito, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, a sucessão $C_n \rightarrow 0$, isto é, $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 0$. Isto mostra que o comprimento de cada lado da curva tende para zero [4].

É possível também determinarmos a variação do perímetro (Comprimento da Fronteira) da Ilha de Von Koch em função das iterações.

Inicialmente consideramos C o comprimento do lado do polígono regular inicial e l o número de lados deste polígono [8]. Utilizando o algoritmo de construção da Curva de Koch e o mesmo processo para a construção da tabela, inserindo neste novo item o número de lados e o comprimento em cada iteração, podendo desta forma calcular o perímetro total da figura, Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Perímetro da Ilha de Von Koch.

Figura	Número de Lados (l)	Comprimento de cada Lado (C)	Perímetro (P)
Figura inicial	l	C	$P_0 = l \cdot C$
1° iteração	$4 \cdot l$	$\frac{C}{3}$	$P_1 = \frac{4 \cdot l \cdot C}{3}$

2ª iteração	$4^2 \cdot l$	$\frac{C}{3^2}$	$P_2 = \frac{4^2 \cdot l \cdot C}{3}$
3ª iteração	$4^3 \cdot l$	$\frac{C}{3^3}$	$P_3 = \frac{4^3 \cdot l \cdot C}{3^2}$
⋮	⋮	⋮	⋮
n iterações	$4^n \cdot l$	$\frac{C}{3^n}$	$P_n = \frac{4^n \cdot l \cdot C}{3^{n-1}}$

A Tabela 5.3 mostra uma expressão P para determinar o perímetro da ilha de Von Koch, onde este perímetro depende do número de lados l e do comprimento de cada lado C , e também esta em função do número de iterações n .

O perímetro do Floco de Neve tem seu número de lados multiplicado 4^n por a cada interação (Nível) de construção, desta forma, o perímetro do Floco de Neve e o comprimento da Curva de Koch crescem tendendo ao infinito conforme o nível de construção n aumenta.

Podemos realizar uma análise em relação a área do Floco de Neve de Koch.

Para determinar a área do Floco de Neve de Koch, consideramos que a área inicial seja A . Então $A = A_0$.

Para determinarmos a área do Floco de Neve de Koch, partimos do pressuposto que a figura da 1ª iteração seja inscrita em um hexágono envolvendo-a, ao continuarmos a construção, na 2ª iteração, constata-se que a figura ainda fica contida no hexágono, como mostra a Figura 5.7, e

se continuássemos as interações no processo de construção, de fato iríamos constatar que a figura ainda sim estaria sendo envolvida pelo hexágono.

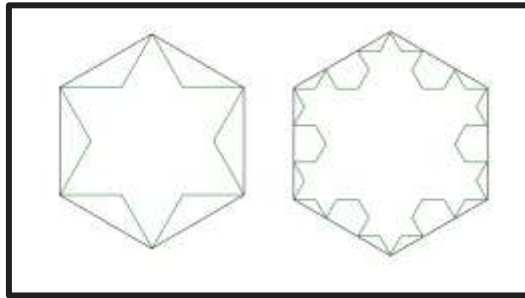


Figura 5.7: Floco de Neve de Koch envolvida por um hexágono na 1ª e 2ª iteração.

Conclui-se então que a área do Floco de Neve de Koch é inferior à área do hexágono. Como o hexágono é formado por dois triângulos equiláteros, e que a área de um triângulo equilátero é igual à área de cada iteração do Floco de Neve de Koch, então se conclui também por transição que a área do hexágono é igual a duas vezes a área do triângulo equilátero, como mostra a Figura 5.8, portanto a área do hexágono é igual a $2A$.

Isto significa que a área delimitada pelo Floco de Neve de Koch está compreendida entre A e $2A$.

Podemos determinar isso da seguinte forma:

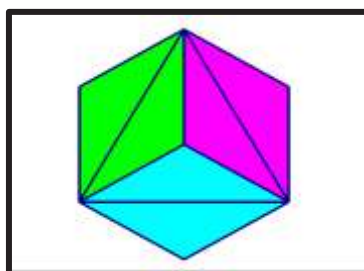


Figura 5.8: Área do hexágono em função do triângulo equilátero.

Através da Figura 5.8, podemos mostrar que a área do triângulo equilátero inscrito no hexágono, é a metade da área do hexágono.

Sabemos que a área de um triângulo equilátero é calculado como $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$, onde A é a área e l é o lado do triângulo, e calculando a área de cada triângulo menor, que chamaremos de A_{M1} , temos que $A_{M1} = \frac{l^2\sqrt{3}}{6}$, logo, como todos os triângulos menores são idênticos, e como são 6 triângulos, então $A_{M1} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{6} = l^2\sqrt{3}$, que corresponde a área do hexágono.

Substituindo A_{M1} em A , temos que $A = \frac{A_{M1}}{2} \rightarrow 2 \cdot A = A_{M1}$, isso significa que, a área do hexágono é duas vezes a área do triângulo equilátero.

Sabemos que a área do polígono, em cada iteração, obtém-se adicionando a área do polígono da iteração anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quantas forem o número de lados do polígono anterior.

Observe que se iniciarmos com um triângulo equilátero de lado l e área

A. Se considerarmos um triângulo equilátero de lado $l' = \frac{l}{3}$ então sua área A' é:

$$A' = \frac{l'^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{2} = A.$$

Fazendo um estudo em cada iteração:

Na figura inicial, temos o número de lados igual à $l_0 = 3 \cdot 4^0$ e área igual a $A_0 = A$.

Na 1ª iteração,

$$l_1 = 3 \cdot 4^1$$

$$A_1 = A_0 + l_0 \cdot \frac{1}{9} \cdot A = A + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot A.$$

Na 2ª iteração,

$$l_2 = 3 \cdot 4^2$$

$$A_2 = A_1 + l_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot A\right) = A_1 + l_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_2 = A + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot A + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_2 = A + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot A + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1 \cdot A.$$

Na 3ª iteração, temos:

$$l_3 = 3 \cdot 4^3$$

$$A_3 = A_2 + l_2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A = A + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1 \cdot A + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot A$$

$$A_3 = A + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot A + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot A + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot A$$

$$A_3 = A + \frac{A}{3} \cdot \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right].$$

Portanto, na n -ésima iteração, a área do Floco de Neve de Koch tem a seguinte expressão:

$$A_n = A + \frac{A}{3} \cdot \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

$$A_n = \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] A$$

$$A_n = \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] A$$

$$A_n = \left[1 + \frac{1}{3} \cdot S_n\right] A.$$

Onde $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ é a soma dos termos de uma PG, cujo $a_1 = 1$ e $q = \frac{4}{9}$.

Sabe-se que quando a razão de uma PG $|q| < 1$, a sequência de números reais converge em seu limite, portanto.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Logo, a área do Floco de Neve de Koch, denotada como A_{Koch} é dada por:

$$\begin{aligned} A_{Koch} &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + \frac{A}{3} \cdot s_n \right) = A + \frac{A}{3} \cdot \frac{9}{5} = A + \frac{3A}{5} = \frac{8A}{5} \\ &= 1,6A. \end{aligned}$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, $A_{Koch} \rightarrow 1,6 \cdot A$.

Concluimos assim que, mesmo o perímetro da Ilha de Von Koch sendo infinito (ilimitado), a sua área é finita, e definida em 1,6 da área inicial.

Na Figura 5.6, na primeira e segunda iteração, cada lado unitário do triângulo equilátero é dividido em 3 partes iguais gerando uma nova figura de $N = 4$ novos segmentos e comprimento $\delta = \frac{1}{3}$. Logo a dimensão do Floco de Neve de Koch (Dim_{snow}) é igual a dimensão da Curva de Koch. Portanto $Dim_C = Dim_{snow} \cong 1,261 \dots$

5.3. Triângulo de Sierpinski

Para a construção do Triângulo Sierpinski, consideramos inicialmente um triângulo equilátero como figura inicial, e a partir do mesmo começa o processo iteração. Na 1ª iteração são determinados os pontos médios de cada um dos lados do triângulo equilátero, unimos esses pontos médios dois a dois por segmentos e consideramos os quatro segmentos

resultantes, retirando o triângulo central, como mostra a Figura 5.9.

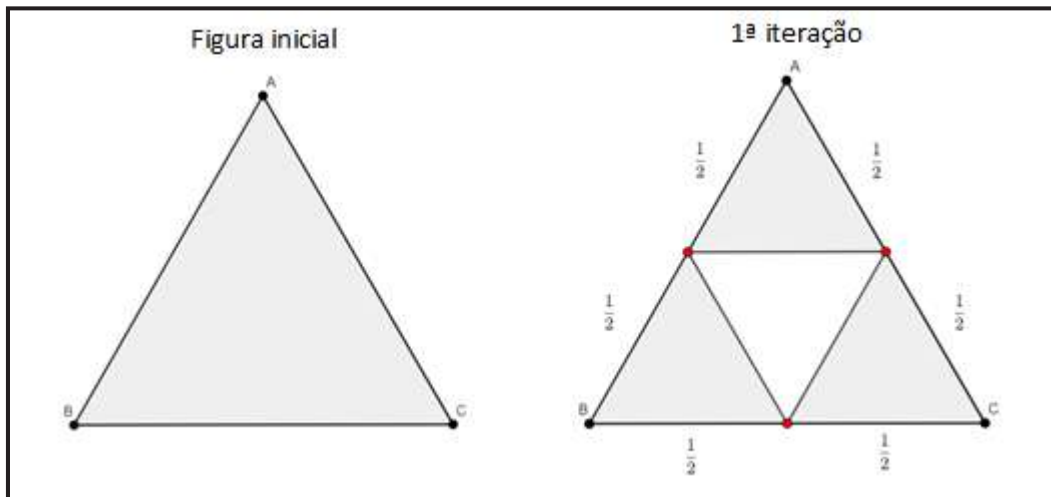


Figura 5.9: Figura inicial e 1ª iteração da construção do triângulo de Sierpinski.

Fazendo o mesmo processo para cada um dos novos triângulos interno ao triângulo inicial (figura inicial), teremos a 2ª iteração, Figura 5.10.

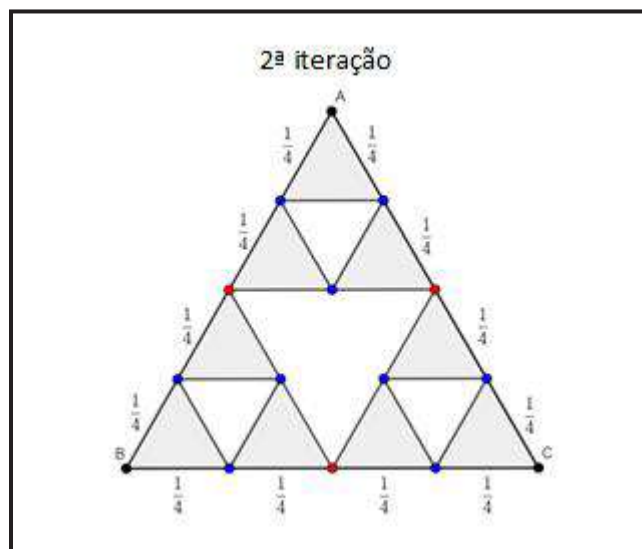


Figura 5.10: 2ª iteração da construção do triângulo de Sierpinski.

Repetindo indefinidamente o processo, obtemos o Triângulo de Sierpinski no limite deste processo recursivo, como mostra a Figura 5.11.

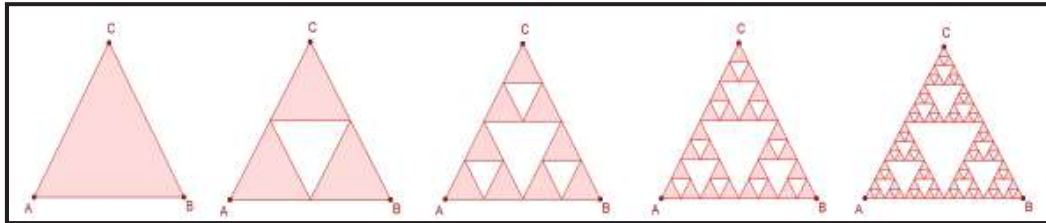


Figura 5.11: Iterações no Triângulo de Sierpinski até a 4ª iteração

Ao analisar a Figura 5.11, percebe-se que a cada iteração, que a área do Triângulo de Sierpinski, é igual a área do triângulo anterior multiplicada pelo fator $\frac{3}{4}$ e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo anterior multiplicado pelo fator $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$.

Algoritmo 5.3. Modelo matemático para a Curva de Sierpinski.

1) Sugere-se inicialmente um triângulo equilátero por motivo estético e de simplicidade.

2) Iniciar pelo triângulo equilátero, de lado 1, marcar os pontos médios de cada um dos seus lados que se unem por segmentos, dividindo-o em quatro novos triângulos semelhantes ao inicial.

3) Retirar o triângulo central e repetir o mesmo processo em cada um dos triângulos restantes. E assim iterativamente.

Ao analisar a área do Triângulo de Sierpinski, temos uma Progressão

Geométrica de razão $q = \frac{3}{4}$, onde $|q| < 1$ e o primeiro termo é positivo, a A é a área do triângulo inicial. Somente visualizando as iterações, percebemos que é uma PG decrescente, a partir que o número de iterações aumenta, ou seja, tende ao infinito, a área diminui, tendendo a zero. Portanto quando $n \rightarrow +\infty, A_n \rightarrow 0$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$$

Já ao analisar o perímetro do triângulo de Sierpinski temos uma Progressão Geométrica de razão $q = \frac{3}{2} > 1$ e 1º termo exatamente o perímetro da figura inicial.

Isto é possível perceber na Tabela 5.4 abaixo.

Tabela 5.4: Área e Perímetro do Triângulo de Sierpinski.

Figura	Área (A)	Perímetro (P)
Figura inicial	A	P
1º iteração	$A_1 = \frac{3}{4} \cdot A$	$P_1 = \frac{3}{2} \cdot P$
2º iteração	$A_2 = \frac{3}{4} \cdot A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$	$P_2 = \frac{3}{2} \cdot P_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P$
3º iteração	$A_3 = \frac{3}{4} \cdot A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A$	$P_3 = \frac{3}{2} \cdot P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot P$
⋮	⋮	⋮

n iterações	$A_n = \frac{3}{4} \cdot A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$	$P_n = \frac{3}{2} \cdot P_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P$
--------------------	--	--

A Tabela 5.4 mostra expressões para determinar a área A e o perímetro P do triângulo de Sierpinski. A partir da Tabela 5.2, conclui-se que quanto maior o número de iterações, menor será a área e maior será o perímetro.

Portanto, quando $n \rightarrow +\infty$, $P_n \rightarrow +\infty$. Isto significa que o perímetro do triângulo é infinito.

Como mostra a Figura 5.9 e 5.10, na primeira e segunda iteração, o lado unitário do triângulo equilátero é dividido em 2 pares iguais, sendo assim o comprimento do lado da nova figura gerada é $\delta = \frac{1}{2}$, após essa divisão é gerado 3 novos lados menores e interno ao triângulo inicial, então temos que $N = 3$. Então a dimensão fracionária do Triângulo de Sierpinski ($Dim_{Sierpinski}$) é dada por:

$$Dim_{Sierpinski} = -\frac{\log N}{\log \delta} = -\frac{\log 3}{\log \frac{1}{2}} = -\frac{\log 3}{\log 2^{-1}} = \frac{-\log 3}{-\log 2} \cong 1,584 \dots$$

5.4. Conjunto de Julia

As informações a seguir foram baseadas em [11].

Gaston Maurice Julia foi um matemático francês, nascido em 1893, Side – Bel – Abbès, Argélia. Quando apenas 25 anos de idade, Julia

publicou sua obra-prima “Mémoires sur l’itération des fonctions rationnelles” (Memória na iteração de funções racionais), em 1918, “Journal de mathématiques pures et appliquées” (Jornal de matemática pura e aplicada). Julia, em sua obra introduziu o conceito do conjunto que atualmente conhecemos por conjunto de Julia. A obra o tornou famoso entre os matemáticos da época, sendo Gaston Julia um dos precursores da moderna teoria dos sistemas dinâmicos complexos [11].

Julia recebeu muitas honras por suas excelentes contribuições matemáticas. Ele foi eleito para a Academia de Ciências em 5 de março de 1934, preenchendo o lugar deixado vago pela morte de Painlevé no ano anterior. Ele foi eleito presidente da Academia em 1950. Ele também foi eleito para a Academia Upsal na Suécia, a Academia Pontifícia de Roma e muitas outras Academias Europeias. Ele também foi presidente da French Mathematical Society. Em 1950, ele foi nomeado oficial da Légion d’Honneur. E em 1978, faleceu em Paris, França.

O matemático e astrônomo francês Pierre Joseph Louis Fatou (1878 – 1929) desenvolveu trabalhos sobre iterações de funções complexas simultaneamente e independentes aos trabalhos de Gaston Julia. Os trabalhos dos matemáticos Julia e Fatou foram relativamente esquecidos até as descobertas do matemático Benoit Mandelbrot (1924-2010) no final dos anos setenta [11].

Veremos abaixo o conjunto de Julia inspirado em [11] e [10].

Nesta seção veremos o conjunto de Julia de uma função complexa. Este

conjunto foi nomeado em homenagem ao matemático Francês Gaston Julia, devido a descoberta de diversas propriedades básicas desse conjunto.

O conjunto de Julia é a fronteira da coleção de pontos do plano complexo cujas órbitas escapam para o infinito. Ou seja, pontos em um conjunto de Julia têm órbitas que não escapam para o infinito, mas arbitrariamente muito perto existem pontos cujas órbitas escapam.

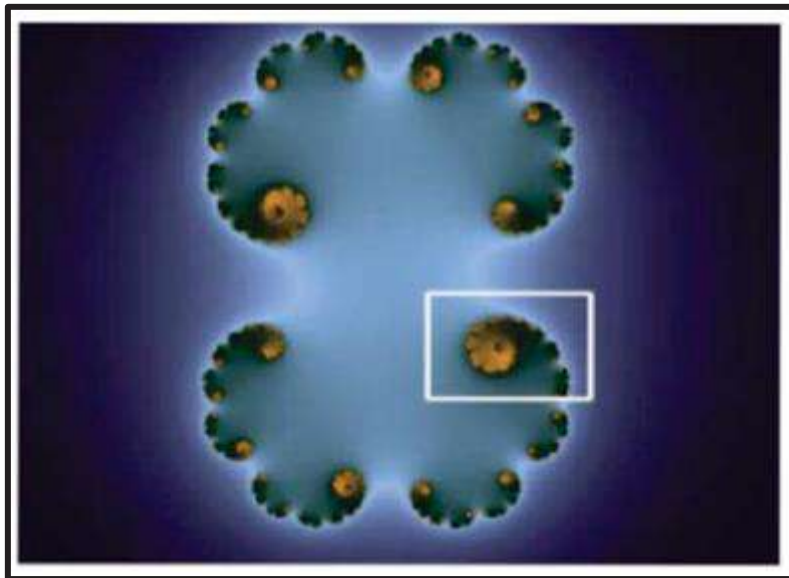


Figura 5.12: Conjunto de Julia

O conjunto de Julia preenchido ou cheio, é o conjunto de todos os pontos cujas órbitas não escapam para o infinito, e arbitrariamente muito perto não existe nenhum ponto cuja órbita escapa, mais precisamente preenchendo totalmente a parte interna da coleção de pontos cujas órbitas

escapam para o infinito.

Definição 5.1. O conjunto $K(f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ a órbita } \{f^n(z)\} \text{ é limitada}\}$ é denominada de Conjunto de Julia cheio.

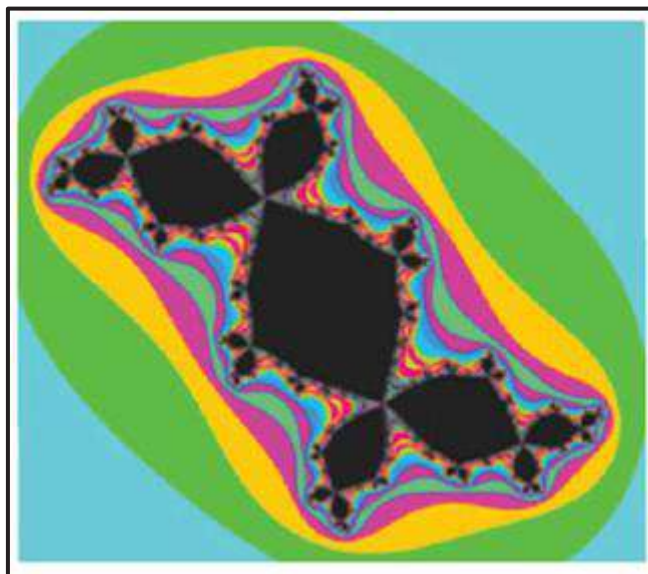


Figura 5.13: Conjunto de Julia cheio.

Há um diferente conjunto preenchido para cada valor de c em $(z_n)^2 + c$. Isso ocorre pois $(z_n)^2 + c$ é o conjunto de todos os pontos iniciais cuja órbita é limitada sob a iteração $(z_n)^2 + c$. Vejamos abaixo as Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17, com diferentes valores para c .

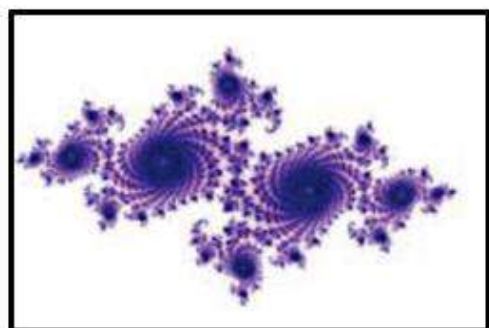


Figura 5.14: $c = (-0.72, 0.18i)$

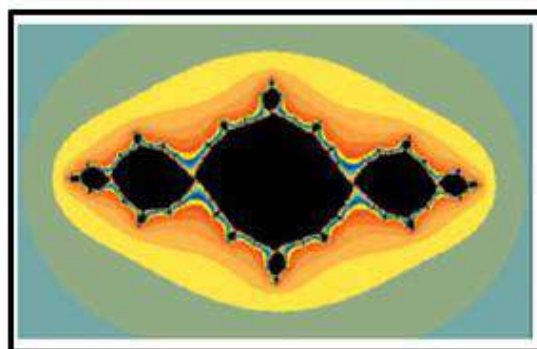


Figura 5.15: $c = (-0.7, 0i)$

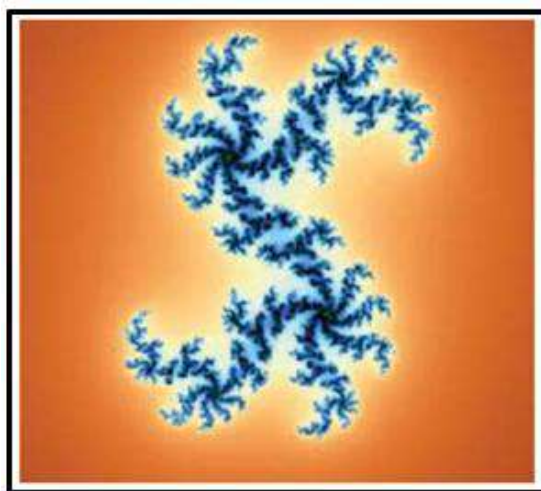


Figura 5.16: $c = (0.2, 0.01i)$

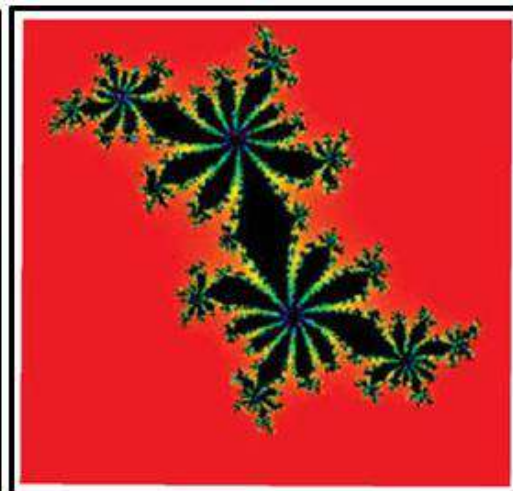


Figura 5.17: $c = (0.3, 0.05i)$

Conjuntos de Julia para parâmetros nos bolbos $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$.

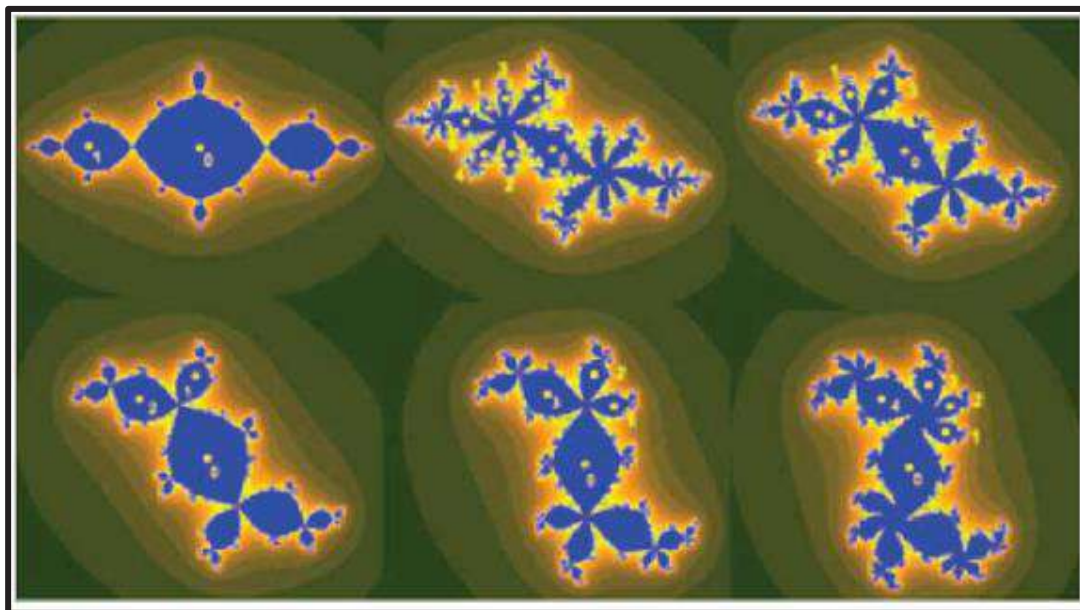


Figura 5.18: Parâmetros nos bolbos.

Na perspectiva de [11], podemos definir o conjunto de Julia de uma forma mais sistematizada, vejamos.

Mesmo com as diversas formas de definir o conjunto de Julia, optamos, inspirado em [11], definir o conjunto de Julia utilizando o conceito de bacia de atração, existindo formas equivalentes de definir o conjunto de Julia de uma função f .

Definição 5.2. Sejam uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$ e um ponto fixo atrator de f . O conjunto de Julia de f , denotado por $J(f)$, é a fronteira da bacia de atração de w . O complementar do conjunto de Julia é denominado conjunto de Fatou, $F(f)$.

Para a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$, temos $A_f(0) =$

$\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$. Portanto, $\partial A_f(0) = \partial A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Logo, o conjunto de Julia de f é a circunferência de centro em 0 e raio 1 e o conjunto de Fatou de f é a união entre o interior e o exterior destas circunferências.

Definição 5.3. Seja f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. O conjunto prisioneiro e o conjunto de escape para a função f são definidas respectivamente por:

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C}; |f^k(z)| \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}, \text{ e}$$

$$E(f) = \{z \in \mathbb{C}; |f^k(z)| \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

Observando que \mathbb{C} é a união disjunta entre $K(f)$ e $E(f)$. Isto leva a uma dicotomia, onde o plano complexo é dividido em dois subconjuntos cuja interseção é vazia.

Definição 5.4. Seja a função f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. O conjunto de Julia preenchido da função f é definido por:

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C}; |f^k(z)| \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}$$

Com isso observa-se que, como $J(f) = \partial A_f(\infty) = \partial E(f) = \partial K(f)$, então o conjunto de Julia de f é a fronteira do conjunto de Julia preenchido.

Proposição 5.1. $A_f(w)$ é um conjunto aberto.

Demonstração 5.1. Como w é um ponto fixo atrator de f , existe um conjunto aberto V contendo w tal que $V \subset A_f(w)$ (se $w = \infty$, podemos tomar $\{z; |z| > r\}$, para r suficientemente grande). Isto implica que

$A_f(w)$ é aberto.

Portanto, se $z \in A_f(w)$, então $f^k(z) \in V$ para algum k , logo $z \in f^{-k}(V)$, o qual é aberto. ■

Proposição 5.2. *O conjunto de Julia e o conjunto de Julia preenchido são fechados.*

Demonstração 5.2. O conjunto de Julia é fechado por ser fronteira de um conjunto. Logo, $A_f(\infty)$ é aberto. Como $A_f(\infty) = E(f)$ e $K(f)$ são complementares, segue que o conjunto de Julia preenchido é fechado. ■

Para a função $f(z) = z^2$ temos, $J(f) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ e $K(f) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, o conjunto de Julia é um objeto da geometria euclidiana, por consequência não sendo um fractal. Porém, este é um caso especial, pois a maioria do conjunto de Julia é um fractal.

Proposição 5.3. *O conjunto de Julia é simétrico em relação à origem.*

Demonstração 5.3. Devemos mostrar que $z \in J(f)$ se, e somente se, $-z \in J(f)$. Seja $z \in \mathbb{C}$. De $f_c^k(z) = f_c^{k-1}(f_c(z)) = f_c^{k-1}(z^2 + c) = f_c^k((-z)^2 + c) = f_c^{k-1}(f_c(-z)) = f_c^k(-z)$, segue que $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ se, e somente se, $-z \in k(f_c)$.

Portanto, o conjunto de Julia preenchido de f_c e consequentemente sua fronteira, $J(f)$ são simétricos em relação à origem. ■

O conjunto de Mandelbrot, que veremos a seguir, criado por Benoit Mandelbrot como um paradigma ao conjunto de Julia: cada ponto no plano complexo tem como correspondente um conjunto de Julia diferente.

Os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot correspondem precisamente aos conjuntos de Julia conexos, e os pontos fora do conjunto de Mandelbrot correspondem aos conjuntos de Julia desconexos.

Intuitivamente, os conjuntos de Julia “interessantes” correspondem aos pontos próximos à fronteira do conjunto de Mandelbrot; pontos mais internos ao conjunto de Mandelbrot correspondem a formas geométricas relativamente simples, enquanto os pontos mais externos lembram poeira rodeada por manchas de cores. Alguns programas permitem que o usuário escolha um ponto e veja o conjunto de Julia correspondente, tornando fácil a navegação. Um dos descansos de tela do pacote xscreensaver apresenta uma animação dos diversos conjuntos de Julia relativos a um ponto que fica dançando na tela.

5.5. Conjunto de Mandelbrot

Benoit Mandelbrot, polonês, nasceu em Varsóvia, em 1924. Sua família já tinha uma relevância na área acadêmica, destaca-se um tio chamado Szolem Mandelbrojt (1899-1983), que era um matemático renomado que estudou a análise matemática e foi professor no Collège de France.

Findando a segunda guerra mundial, sentre 1947 e 1949 Mandelbrot estudou no Instituto de Tecnologia da Califórnia nos Estados Unidos,

onde obteve o título de mestre em aeronáutica. Voltando a França, obteve o doutorado em ciências matemáticas na Universidade de Paris em 1952 [10]. As aplicações começaram a surgir, primeiro à Economia, depois à Física. Em meados de 1967 formulou a pergunta que foi bastante repercutida: “Quanto mede a costa da Grã-Bretanha?”.

Mandelbrot ganhou vários prêmios ao publicar inúmeras revistas científicas e mais de 15 doutorados honorários, falecendo em Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos, no ano de 2010. Sua autobiografia, *The Fractalist*, foi publicado em 2012.

Agora faremos o estudo do conjunto de Mandelbrot, as definições e teoremas abaixo foram baseadas em [10]

Pierre Fatou, em 1905, definiu pela primeira vez o conjunto de Mandelbrot, onde estudou recursos com $f_c(z) \rightarrow z^2 + c$, começando com um ponto qualquer z_0 no plano convexo. Fatou percebeu que a órbita de $z_0 = 0$ sob a transformação $f_c(z) \rightarrow z^2 + c$ forneceria alguma introspecção sobre o comportamento de tais sistemas. Existem infinitas órbitas uma para cada valor de c . Ele não teve acesso a um computador capaz de plotar as órbitas de todas essas funções e, portanto tentou fazer a mão, conseguindo provar que uma vez que um ponto atinge uma distância da origem maior que 2, a órbita explode para o infinito. Ou seja, a órbita pode explodir para o infinito se $|c| \leq 2$.

Teorema 5.1. *Se $|z| > 2$ e $|z| > |c|$, então $Q_c(z) = z^2 + c \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$.*

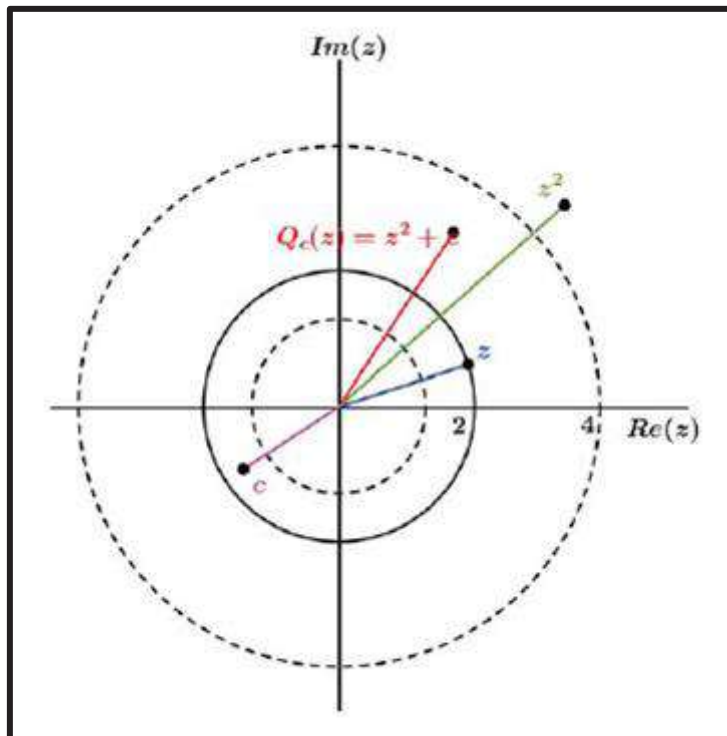


Figura 5.19: Gráfico da função $Q_c(z) = z^2 + c$.

A Figura 5.19 possui a ideia principal da prova: Se $|z| > 2$, então $|Q_c(z)| > |z| > 2$. Tendo $Q_c(z)$ para ser o próximo z , o resultado segue.

Demonstração 5.4. Seja $|z_0| > 2$ e $|z_0| > |c|$. Então, utilizando a desigualdade triangular temos,

$$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0^2 + c|$$

$$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |c|$$

$$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq |z_0|^2 - |z_0|, (|z_0| > |c|)$$

$$|z_1| = |Q_c(z_0)| = |z_0|(|z_0| - 1).$$

Portanto,

$|z_1| = |Q_c(z_0)| \geq \lambda_0 |z_0|$, onde $\lambda_0 = |z_0| - 1 > 1$, e assim $|z_1| > |z_0| > 2$.

Analogamente,

$|z_2| = |Q_c(z_1)| \geq \lambda_1 |z_1| \geq \lambda_1 \lambda_0 |z_0| > \lambda_0^2 |z_0|$, onde $\lambda_1 = |z_1| - 1$, usando indução e definindo $\lambda_n = |z_n| - 1$. Vemos que $\lambda_n > \lambda_m$ para $n > m$ e $|z_n| > \lambda_0^n |z_0|$. ■

Se usarmos a função não linear complexa $(z_n)^2 + c$, sendo c uma constante e $z_0 = 0$, e fazendo as iterações, ou seja, calculando as funções compostas $z(z_0), z(z(z_0)), z(z(z(z_0))) \dots$, gera-se o conjunto de Mandelbrot. Em outras palavras, gera-se o conjunto de Mandelbrot calculando a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= (z_0)^2 + c \\ z_2 &= (z_1)^2 + c \\ z_3 &= (z_2)^2 + c \\ &\vdots \\ f_c &= z_{n+1} = (z_n)^2 + c \end{aligned}$$

É chamado de órbita de z_0 , ou seja, órbita de 0 (zero) sob a iteração $(z_n)^2 + c$, o conjunto dos números obtidos pela sequência $(z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots)$. O conjunto de Mandelbrot é o objeto geométrico (Fractal) que traz informação do destino da órbita, ou seja, se tende ao infinito ou não.

Se a órbita não tende ao infinito, ela pode se comportar de maneira fixa, cíclica ou de forma caótica. Logo, o conjunto de Mandelbrot é o destino da órbita de $z_0 = 0$ sob iteração de $(z_n)^2 + c$ cuja órbita permaneça limitada (não tende ao infinito), onde ao invés de considerar valores reais de c também consideramos que c seja valores complexos.

Os valores de c podem ou não está no conjunto de Mandelbrot, pois só é possível iterar um número finito de vezes, e tem alguns valores de c que só escapam depois de um grande número de iterações o **Teorema 5.1.** garante que a órbita explode para o infinito se o ponto atinge uma distância da origem maior que 2.

Assim, c não estará no conjunto de Mandelbrot se a sequência tender ao infinito, ou seja, a sequência não é limitada. Logo c estará no conjunto de Mandelbrot se a sequência for limitada.

Na perspectiva de [11], podemos definir Conjunto de Mandelbrot de uma maneira mais formal, vejamos.

Seja F a família das funções quadráticas da forma $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa.

De acordo com a proposição seguinte, ao estudarmos os conjuntos de Julia de f_c com $c \in \mathbb{C}$, estudamos os conjuntos de Julia de todas as funções quadráticas.

Teorema 5.2. *Toda função quadrática é topologicamente conjugada a algum membro da família quadrática F .*

Demonstração 5.5. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função quadrática com

coeficientes complexos dada por $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, com $a_2 \neq 0$.
Seja $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{C}$.
Observe que h é uma bijeção contínua, com função inversa $h^{-1}(z) = \frac{z-\beta}{\alpha}$.

Então,

$$\begin{aligned} h^{-1}(f_c(h(z))) &= h^{-1}(f_c(\alpha z + \beta)) \\ &= h^{-1}((\alpha z + \beta)^2 + c) \\ &= h^{-1}(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c) \\ &= \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = \alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \frac{\beta^2 + c - \beta}{\alpha}. \quad (\text{I})$$

Escolhendo valores apropriados de α, β e c , podemos transformar a expressão (I) em uma função quadrática arbitrária f .

Igualando (I) a $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, obtemos

$$\begin{cases} \alpha = a_2 \\ 2\beta = a_1 \\ \frac{\beta^2 + c - \beta}{\alpha} = a_0 \end{cases}$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \alpha &= a_2 \\ \beta &= \frac{a_1}{2} \end{aligned}$$

$$c = -\beta^2 + \beta + \alpha a_0 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1}{2} + a_2 a_0$$

portanto, a função $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ é topologicamente

conjugada $f(z) = z^2 + \left(-\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1}{2} + a_0\right)$.

E a função $h(z) = \alpha z + \beta$ é a conjugação topológica entre f e f_c . ■

Do **Teorema 5.2.** toda função quadrática é topologicamente conjugada a algum membro da família quadrática F . Isto significa que ao estudarmos os conjuntos de Julia de f_c , com $c \in \mathbb{C}$, estudamos os conjuntos de Julia de todas as funções quadráticas.

Definição 5.5. O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é o conjunto dos parâmetros c tais que o conjunto de Julia $J(f_c)$ é conexo, isto é

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; J(f_c) \text{ é conexo}\}$$

A definição acima não é útil para fins computacionais. Com este objetivo vamos considerar uma definição equivalente.

Lema 5.1. *Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, tal que para algum r , $|z| > r$ implica $|f(z)| > 2|z|$. Então $|f^k(z)| > 2^k|r|$, onde k é um inteiro positivo.*

Demonstração 5.6. (Indução em k). Por hipótese, para $k = 1$ a afirmação é verdadeira.

Suponha que $k = n$, ou seja, $|f^n(z)| > 2^n|z|$.

Podemos escrever $|f^{n+1}(z)| = |f(f^n(z))| > 2|f^n(z)| > 2 \cdot 2^n \cdot r = 2^{n+1} \cdot r$.

Portanto, pelo princípio de Indução Matemática, a afirmação é verdadeira para todo inteiro $k \geq 1$. ■

Proposição 5.4. $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é limitada $\Leftrightarrow f_c^k(z) \nrightarrow \infty$.

Demonstração 5.7. Se $f_c^k(z) \rightarrow \infty$, então $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é ilimitado. Isto prova que: se $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é limitado, então $f_c^k(z) \rightarrow \infty$.

Se $\{f_c^k(z)\}$ for ilimitado, então para todo $r > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $|f_c^{k_0}(z)| > r$.

Pelo **Lema 5.1.**, segue que

$$|f_c(f_c^{k_0}(z))| > 2|f_c^{k_0}(z)| > 2r.$$

Além disto,

$$|f_c^{k_0+2}(z)| = |f_c(f_c^{k_0+1}(z))| > 2 \underbrace{|f_c^{k_0+1}(z)|}_{> 2r} > 2 \cdot 2 \cdot r = 2^2 \cdot r.$$

Por indução, temos $|f_c^{k_0+p}(z)| > 2^p \cdot r$. Quando $p \rightarrow \infty, 2^p \cdot r \rightarrow \infty$. Portanto, $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Isto prova que: Se $f_c^k(z) \rightarrow \infty$, então $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é limitado. ■

Definição 5.6. O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é o conjunto dos parâmetros c tais que a órbita do ponto crítico de f_c é limitada.

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C}; \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado} \right\}.$$

De acordo com a **Proposição 5.4.**, a órbita do ponto crítico ser limitada é equivalente à órbita do ponto crítico não tender ao infinito. Desta forma, temos a igualdade entre os seguintes conjuntos, cuja prova está em [11]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C}; \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C}; f_c^k(z) \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Em [11] é apresentado outros teoremas e definições, que não foram apresentados neste texto por não serem aproveitáveis no

momento, mas para um estudo mais aprofundado e sistematizado fica a indicação do do trabalho de [11] de forma completa.

O conjunto de Mandelbrot é composto de vários enfeites pequenos, observando isso bem de perto veremos que todas as decorações ligadas ao cardeóide principal do conjunto de Mandelbrot, chamada de bulbo de uma lâmpada primária ou decorada, são diferentes. Essa decoração possui infinitas decorações menores em anexo o que parece ser antenas. A “antena principal” ligada a cada decoração possui um número de raios que varia de decoração para decoração.

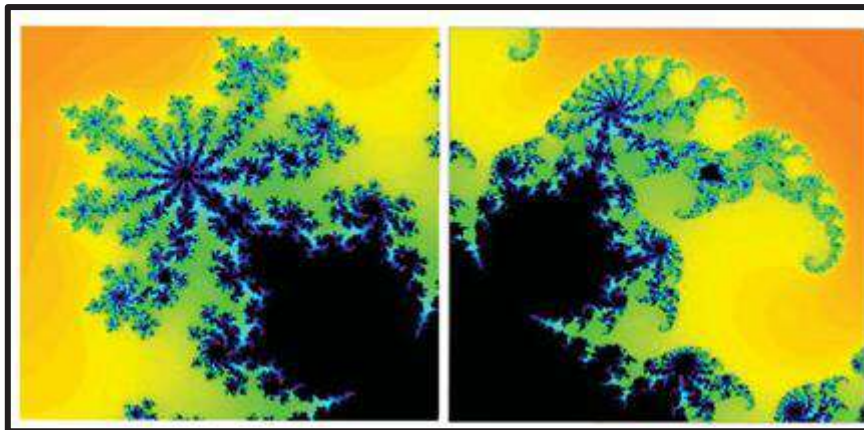


Figura 5.20: Ampliação do fractal de Mandelbrot.

Existe uma relação entre o número de raios nessas antenas e as dinâmicas de $(z_n)^2 + c$ para c contido no interior da lâmpada primária. Têm-se que c está no centro de uma decoração, em seguida a órbita de $z_0 = 0$ é atraído por um ciclo de um determinado período n , o número n é

o mesmo para qualquer c no interior da decoração principal.

A iteração da sequência $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$ evolui de modo diferente para diferentes valores de c . Para valores de c no centro da grande cardióide, as iterações convergem para um ponto. Para valores de c dentro do grande bolbo à esquerda do cardióide, as iterações convergem para um ciclo de período 2. Para os outros bolbos, as iterações convergem para ciclos com diferentes períodos.

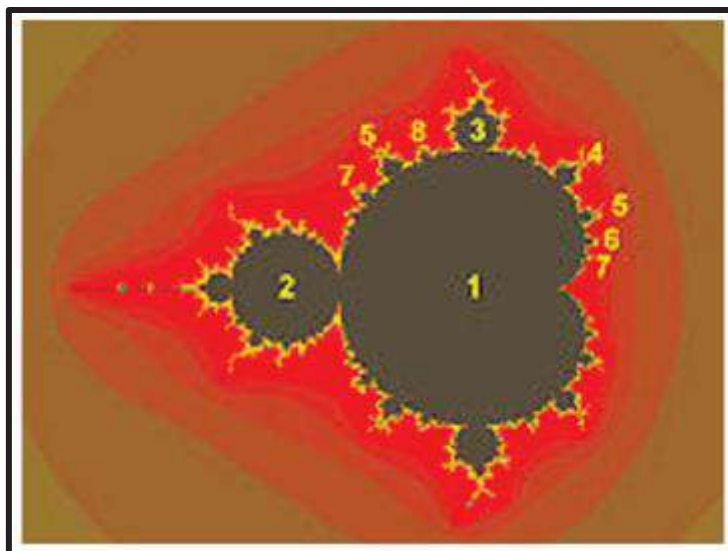


Figura 5.21: Valores dos períodos para os bolbos.

O bolbo que fica exatamente no meio entre o bolbo com $n = 2$ e o bolbo com $n = 3$, o período do ciclo é $n = 2 + 3 = 5$; no bolbo entre o bolbo com $n = 2$ e o bolbo com $n = 5$, o período do ciclo é $n = 2 + 5 = 7$; no bolbo entre o bolbo com $n = 2$ e o bolbo com $n = 7$, o

período do ciclo é $n = 2 + 7 = 9$. Observando o movimento dos pontos num ciclo do bolbo com $n = 5$, para ver que o ciclo salta sempre 2 componentes no sentido anti-horário em cada iteração. Podemos então designar esse ciclo pelo número racional $\frac{2}{5}$, onde e dizer que o ciclo roda em torno de um ponto central numa rotação de $\frac{2}{5}$ de revolução por cada iteração. E esse bolbo pode ser designado por bolbo $\frac{2}{5}$. Assim, podemos encontrar qualquer bolbo central em relação o outros dois bolbos. Por exemplo, se quisermos encontrar o bolbo que está entre o bolbo $n = 2$ e o bolbo $n = 15$, basta somar o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{15}$, ou seja, o bolbo que procuramos é o bolbo $n = 17$, pois $2 + 15 = 17$. Usando esta designação, torna-se claro que os bolbos primários estão ordenados em ordem crescente em relação a este número de rotação: $\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}$. Para sabermos o número de rotação de um bolbo intermédio, basta somar os numeradores e os denominadores separadamente.

Os bolbos estão ordenados exatamente como os números racionais, pois há um bolbo $\frac{p}{q}$ para cada número racional entre 0 e 1 e, além disso, estão ordenados corretamente à volta do bolbo principal no sentido anti-horário, começando em zero na cúspide. Na parte de baixo, os ciclos rodam no sentido horário.

Aplicações do fractais

6.1. Fractais na medicina

Na medicina, um exemplo muito importante é a utilização da dimensão fracionária para o diagnóstico de alguns tipos de câncer bucal, no qual a medir as curvas no local em que é composto pelo tumor, ou seja, a tortuosidade em que o tumor se encontra.

Ao utilizar o método de contagem de caixas, é possível descobrir o grau de infiltração da doença, quanto mais agressivo, mais infiltrativo será seu crescimento [6].

Este método aumenta a chance do paciente se recuperar quando feito um prognóstico, pois os tecidos da boca ocupam um espaço mais denso, então quanto maior for a rugosidade maior vai ser a dimensão, em que aumenta a gravidade da doença [6].

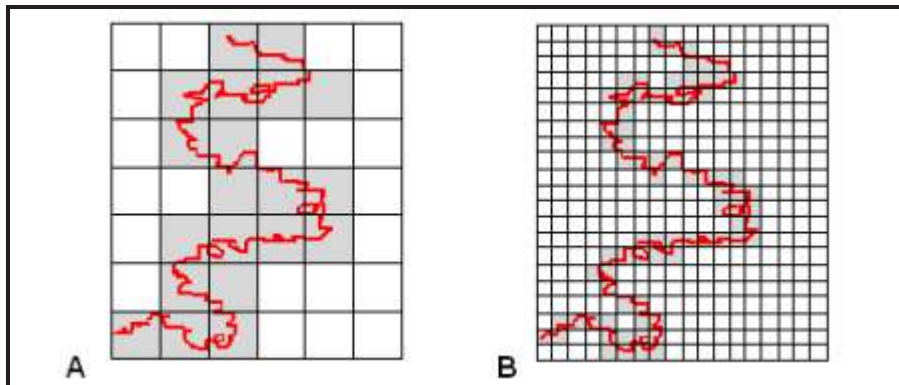


Figura 6.1: Método de contagem de caixas.

Se pegarmos uma amostra do tecido bucal normal, ao ser dividido uma caixa em $\frac{1}{3}$ da aresta original, a quantidade de caixas ocupada será quase o triplo da original, aproximando sua dimensão de 1. Porém quando se pega um tecido bucal canceroso, e é feita a mesma divisão de $\frac{1}{3}$ da aresta original, percebe-se, como na Figura 6.1 A e B, que a quantidade de caixas ocupadas do tecido bucal, é superior ao triplo, logo a sua dimensão fractal será maior que 1, considerando assim, um tumor maligno.

Para melhor entendimento dessa ferramenta matemática no diagnóstico do câncer bucal, é feita uma comparação. Observando a Figura 6.2 feita por um patologista, onde identifica através de uma linha amarela a separação entre o epitélio² e o estroma³.

² Uma ou mais camadas de células epiteliais que recobrem as superfícies internas e externas do corpo.

³ Tecido conjuntivo de sustentação de um órgão, com abundante circulação, por onde o tecido essencial do órgão é nutrido e enervado.

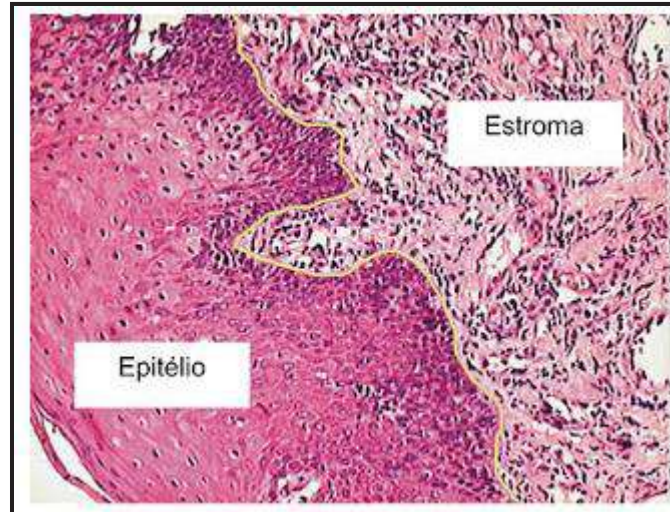


Figura 6.2: Epitélio e Estroma.

Na Figura 6.3 foi feito o mesmo processo de identificação por um patologista. Neste caso, percebe-se que o epitélio se encontra com neoplasia⁴.

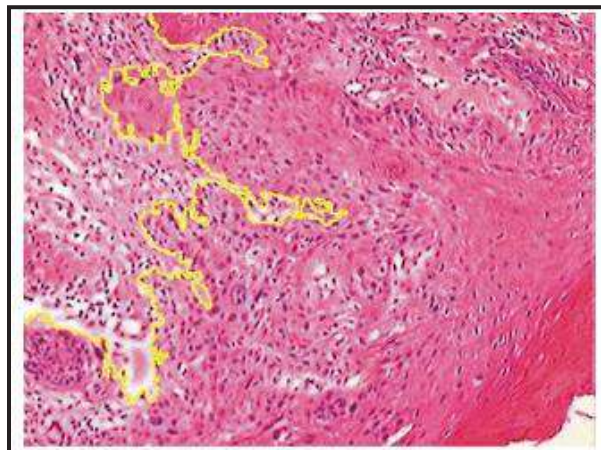


Figura 6.3: Encontro do Epitélio com Neoplasia.

⁴ Neoplasia é o crescimento celular descontrolado que sucede a ausência de demanda fisiológica.

Têm-se então duas linhas relacionadas cada uma com um tecido em estágios diferentes utiliza-se o processo de contagem das caixas sobre estas linhas, conforme se observa nas Figuras 6.7 e 6.8 abaixo.

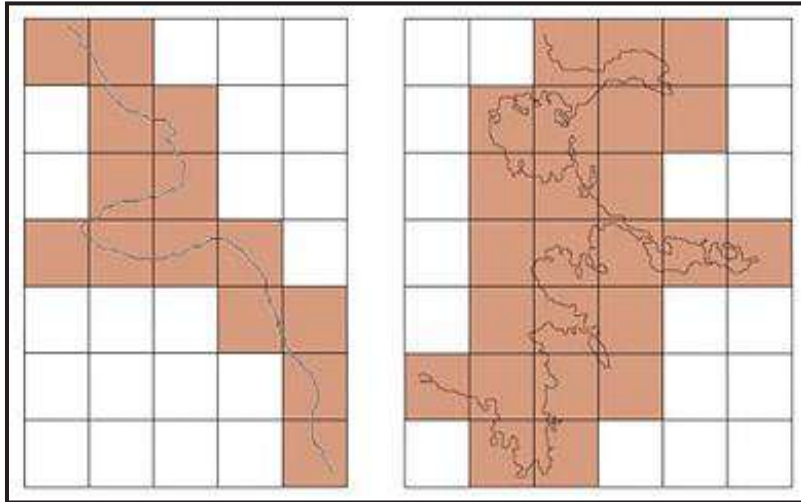


Figura 6.7: Contagem de caixas de superfície da linha amarela.

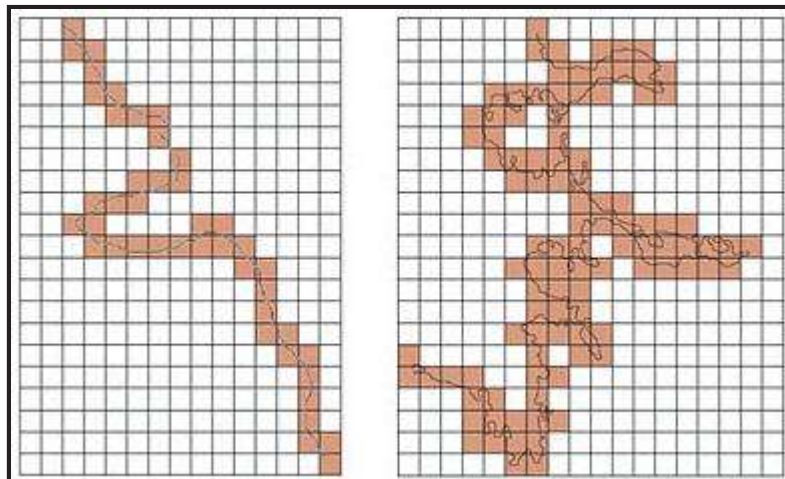


Figura 6.8: Contagem de caixas com dimensões espaciais menores que da Figura 6.3 de superfície da linha amarela.

Assim, para cada figura de tecido, é gerado um sistema de pontos, que por sua vez dá origem a uma reta, cuja inclinação fornece a dimensão fractal (não-inteira) do gráfico (Figuras 6.9 e 6.10).

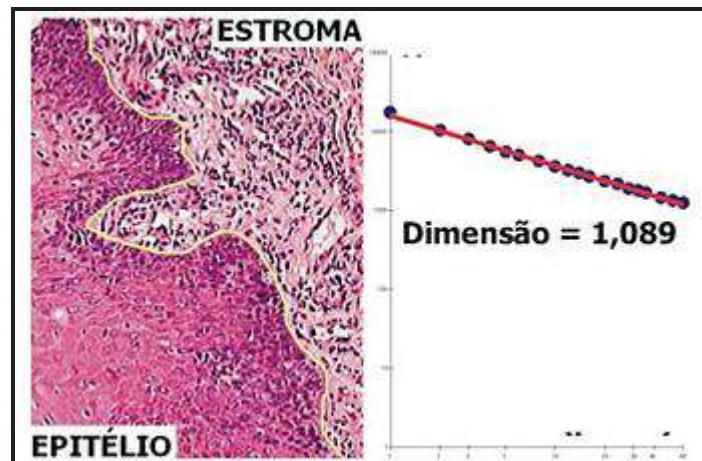


Figura 6.9: Dimensão Fractal da Figura 6.2.

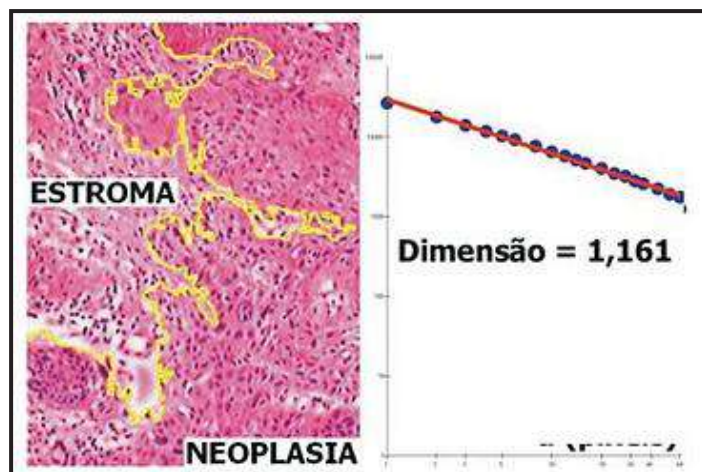


Figura 6.10: Dimensão Fractal da Figura 6.3.

A análise e o estudo de vários casos contribuíram na elaboração de um gráfico de parâmetros (Figura 6.11) que pode ajudar no diagnóstico de uma inflamação ou de uma displasia⁵ ou de um carcinoma⁶.

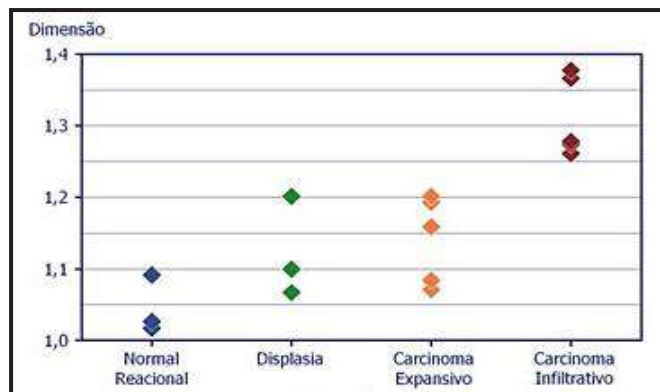


Figura 6.11: Gráfico de parâmetro para o diagnóstico de uma inflamação, displasia ou de um carcinoma.

6.2. Fractais em fenômenos geológicos

O texto abaixo foi baseado em [15].

Na física dos materiais ocorrem muitas das principais aplicações da dimensão fracionária. O crescimento de estruturas, sejam elas cristais ou a

⁵Displasia é o crescimento celular anômalo, resultando em células que diferem de tamanho, formato ou arranjo em relação às outras células do mesmo tipo de tecido.

⁶Carcinoma é o câncer de células epiteliais; é a forma mais comum de câncer em humanos. Pode ser expansivo ou infiltrativo.

penetração de um fluido em outro material, assumem, com frequência, estruturas ramificadas com a propriedade de auto-similaridade. O estudo dos meios porosos, que tem repercussões tecnológicas e econômicas, mostra também a presença de dimensão fracionária.

A superfície dos materiais é, de forma geral, bastante irregular e pode ter sua dimensão fracionária mensurada; esse conhecimento pode vir a ser útil, por exemplo, no estudo dos fenômenos de corrosão.

Muitos fenômenos geológicos possuem a simetria de escala, exemplos disso são as distribuições de frequência dos tamanhos de fragmentos de rochas, falhas geológicas, terremotos, erupções vulcânicas e depósitos minerais e de petróleo. Uma distribuição fractal requer que o número de objetos maiores que um determinado tamanho (magnitude) tenha uma dependência com esse tamanho que corresponde a uma lei de potência.

Um exemplo interessante, já percebido em 1954, é a relação de Gutenberg-Richter entre a magnitude e a frequência dos terremotos, que leva a uma dimensão fractal de 1,8 aproximadamente. Os fractais têm também se mostrado úteis no estudo dos meandros dos rios e dos contornos das formações geológicas.

Vejamos um exemplo da confluência do Rio Solimões e do Rio Negro, por cerca de 10 quilômetros, os dois correm lado a lado, sem que as águas se misturem, em um dos mais belos fenômenos naturais da região amazônica, popularmente conhecido como “encontro das águas” (Figuras 6.12 e 6.13).

A dimensão fractal é uma medida da rugosidade da paisagem, e a topografia da Terra é resultado de muitas influências em competição, há evidências, por exemplo, de que o processo de erosão é invariante de escala.



Figura 6.12: Foto de um satélite: Manaus, na confluência dos rios Solimões e Negro.



Figura 6.13: Encontro dos rios Negro e Solimões, formando o Rio Amazonas.

O estudo dos processos de fragmentação tem importância teórica e experimental, além de ter aplicações tecnológicas. A fragmentação envolve o início e a propagação de fraturas, um processo altamente não-linear. Existem muitos aspectos fractais nesses processos, já que, muitas vezes, os fragmentos são produzidos dentro de uma gama grande de tamanhos que não estão associados a nenhum comprimento característico natural.

Uma lei empírica, usada com frequência para analisar a produção de pedaços em um processo de fragmentação, tem a forma de uma lei de potência: $N(> m) \sim m^{-d}$, onde $N(> m)$ é o número de fragmentos com massa maior que m . A constante d é equivalente à dimensão fracionária.

Um resultado importante é justamente a dimensão da bacia hidrográfica do Rio Amazonas.

Para isso temos que considerar que, fractais na natureza não possuem auto-semelhança exata como os fractais matemáticos, na verdade, eles possuem cópias reduzidas e distorcidas de si próprios. Dizemos então que estes objetos são auto-semelhantes estatisticamente. Eles também não são infinitamente complexos, pois possuem uma estrutura de tamanho limitado. Assim, as dimensões destes objetos são medidas como valores médios.

Para se calcular a dimensão de fractais naturais utiliza-se um método denominado “contagem de quadrados” ou “contagem de caixa” [13]. A inserção de um objeto qualquer em um quadrado de lado igual a l , em

seguida vai se diminuindo o tamanho do lado do quadrado e aumentando-se a quantidade de caixas necessárias para encobri-lo.

Para se calcular a dimensão de um rio, escolhe-se um tamanho l_1 para o lado do quadrado e conta-se quantos quadrados, c_1 , da retícula foram necessário para cobrir todo o objeto [13].

Desta forma, o tamanho dos lados dos quadrados (l_1, l_2, l_3, \dots) vai sendo diminuído e conseqüentemente o número de quadrados vai aumentando.

Ao esborçar o gráfico $c \times l$, com c no eixo das abscissas e l no eixo das ordenadas, a relação entre as coordenadas não seria exatamente linear. Portanto, traçando o gráfico $\log \frac{1}{l} \times \log c$, haverá uma maior linearização. Em seguida estimaremos a dimensão do Rio Amazonas a partir da inclinação da reta obtida neste gráfico.

A inclinação da reta no neste gráfico é a dimensão aproximada do objeto, e representa relação com a sinuosidade do rio [13].

Calcula-se, então, a dimensão do Rio Amazonas, baseado no que foi apresentado por [13], observou-se o Rio Amazonas entre as cidades de Manaus (Amazonas) e Macapá (Amapá) (onde Amazonas-AM e Amapá-AP são Estados localizados no Brasil), e dividiu-se em dois trechos: Manaus (AM)-Parintins (AM) (I) e Parintins (AM)-Macapá (AP) (II), ambos com aproximadamente 600 km de distância. Utilizamos o procedimento descrito acima nos trechos (I) e (II), com os valores de $l_1 =$

1 e $l_2 = \frac{1}{2}$, temos para o trecho (I) que $c_1 = 27$ e $c_2 = 58$, então obtemos o gráfico descrito na Figura 6.14.

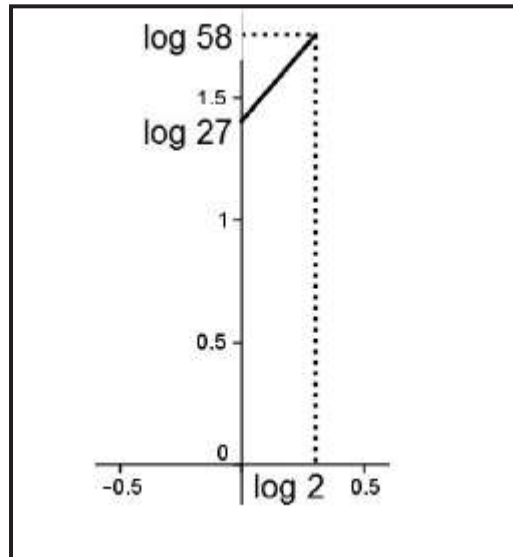


Figura 6.14: Gráfico de $\log \frac{1}{l} \times \log c$.

Considerando que a inclinação da reta é dada por $d = \frac{\log c_2 - \log c_1}{\log(\frac{1}{l_2}) - \log(\frac{1}{l_1})}$,

onde d é a dimensão.

Assim, a dimensão do trecho (I) é dada por:

$$d = \frac{\log 58 - \log 27}{\log 2 - \log 1} = \frac{1,763 - 1,431}{0,301 - 0} = 1,103.$$

Para o trecho (II) temos, $c_1 = 22$ e $c_2 = 47$, donde:

$$d = \frac{\log 47 - \log 22}{\log 2 - \log 1} = \frac{1,672 - 1,342}{0,301 - 0} = 1,096.$$

Como os trechos (I) e (II) são, em média, similares ao rio inteiro, a

dimensão do Rio Amazonas é aproximadamente 1,10 [13].

Assim, a curva deste rio é mais sinuosa que uma curva de dimensão 1, como uma linha reta, e menos sinuosa que uma curva de dimensão 1,262.

É de suma importância perceber que a dimensão de um rio não é fixa, pois com o decorrer do tempo o rio vai tomando outras formas com novas fluentes e acidentes ao longo do seu curso. Podemos fazer uma comparação da dimensão do Rio Amazonas encontrada por [13] que foi de aproximadamente 1,10, já para [16], em seu texto intitulado *Fractals in the Physical Sciences* (Fractais nas ciências físicas), encontrou a dimensão do Rio Amazonas com o valor de 1,85. Comparando estes dois autores, que fizeram essas pesquisas em períodos diferentes sobre a dimensão do Rio Amazonas, e encontraram também valores distintos para essa dimensão.

Considerações Finais

Com a geometria euclidiana não sendo mais suficiente para estudar o mundo onde vivemos, faz-se necessário o uso de outras ferramentas para desvendar as formas que estão entre nós. Desta forma, o estudo da teoria dos fractais tornou-se uma ferramenta para decifrar os objetos da natureza.

Com o estudo dos sistemas dinâmicos (estuda processos cuja evolução é dada por uma lei matemática, como os que encontramos na física, na química, na biologia, na economia, meteorologia e em quase todos os ramos do conhecimento), gerou a possibilidade de Benoit Mandelbrot definir, caracterizar e construir conjuntos que descrevem os fractais.

Este trabalho relacionou os fractais com o sistema caótico, sistemas dinâmicos e a ideia do infinito, além de suas construções e um estudo estritamente matemático referente aos mesmos.

O estudo dos fractais com a sua forma, auto-semelhança, construção recursiva e medidas (dimensão, área e perímetro), é um tema

que traz motivação para o olhar matemático e é instigador dos tópicos matemáticos. Desta forma, as belezas dos objetos gerados incentivam a curiosidade humana e trazem um novo olhar sobre o mundo, a natureza, a sociedade, entre outros. Ao estudar os fractais, é possível observar o mundo em que vivemos (a natureza, os fenômenos físicos, biológicos, matemáticos e até mesmo o social), de uma forma totalmente diferente de antes de conhecer a teoria dos fractais.

Assim, o objetivo deste trabalho não foi esgotar o estudo sobre este tema, e sim, apresentar novas formas que motivem os leitores e pesquisadores a investigarem características e propriedades dos objetos matemáticos de pontos de vista diferentes daqueles com os quais estão acostumados. Também sem interesse em aprofundar nas aplicações deste assunto, que exigem maiores conhecimentos prévio. Foi apresentado, portanto, uma sucinta apreciação do uso dos fractais em outras áreas.

No tema proposto existe um campo fértil para explorar, que poderiam ser melhor aprofundadas em um momento mais oportuno. Este trabalho mostrou de forma simples e geral, estruturas matemáticas ligadas às formas da natureza que as geometrias tradicionais não conseguem explicar. Esta é apenas uma “faísca” que pode servir de base para outros estudos, pois foi elaborado para servir como base para novas pesquisas na área, e instigar novas aplicações.

Sendo o fractal, um ramo da matemática considerado como uma nova maneira de ver o mundo, muitas pessoas ainda desconhecem esta

teoria.

A partir deste estudo, os fractais e sua geometria vêm cada vez mais sendo explorados pelos pesquisadores, devido a variedade de aplicações, onde os fractais são de suma importância para desenvolvimento e entendimento destas aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] BATANETE, A. (2005). *Natureza - Caos ou Ordem?* Fundamentos e Ensino da Álgebra. Universidade de Coimbra.
- [2] BEMFICA, A. e ALVEZ, C. (2010) *Fractais: Progressão e Série geométrica, uma metodologia de ensino*. Faculdade Cenequista de Osório-FACOS.
- [3] CHAQUIAM, M. (2017). *Ensaio temáticos: história e matemática em sala de aula*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM / SBEM-PA).
- [4] CÔRTEZ, I. R. C. (2014). *Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO).
- [5] EVES, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp.
- [6] FERNANDES, J. A. (2007). *Fractais: uma nova visão da matemática*. Centro Universitário de Lavras (UNILAVRAS).
- [7] FUZZO, R. A. (2009). *A história dos fractais: de Euclides a Mandelbrot e sua importância no ambiente escolar*. Encontro Paranaense de Educação Matemática (X EPREM).
- [8] GOMES, A. S. (2007). *Motivação do estudo de áreas e perímetro de figuras geométricas através dos fractais*. Universidade Federal do Paraná (UFPR).
- [9] LUZ, E. V. A (2016). *Geometria fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos*. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.
- [10] REIS, M. V. (2016). *Conjunto de Mandelbrot*. Universidade Federal de Goiás (UFG).
- [11] RIBEIRO, H. M. L. (2014). *Conjunto de Júlia*. Universidade Federal Rural de

Pernambuco (UFRP).

- [12] TEODORO, M. M. e AGUILAR, J. C. Z. (2015). *Método de Newton e Fractais*. Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ).
- [13] NEGRI, M. G. (2014). *Introdução ao Estudo dos Fractais*. Universidade Federal de Goiás (UFG).
- [14] NUNES, R. S. R. (2006). *Geometria Fractal e Aplicações*. Faculdade de ciências da universidade do Porto.
- [15] NUSSENZVEIG, H. M. (1999). *Complexidade e o caos*. Universidade Federal do Rio de Janeiro(UFRJ/COPEA).
- [16] TAKAYASU, H. (1990). *Fractals in the Physical Sciences*. Manchester Universit.



VIÈTE E O NASCIMENTO DA ÁLGEBRA SIMBÓLICA UM PERCURSO HISTÓRICO EM QUATRO CONTEXTOS

**BETÂNIA DE ALMEIDA PRESTES
EDNA MACHADO DA SILVA
MIGUEL CHAQUIAM**

Belém –Pará –Brasil
Junho de 2022

Sumário

INTRODUÇÃO

1.METODOLOGIA DA PESQUISA

1.1 Contexto sociocultural

CONCLUSÕES

REFERÊNCIAS

VIÈTE E O NASCIMENTO DA ÁLGEBRA SIMBÓLICA UM PERCURSO HISTÓRICO EM QUATRO CONTEXTOS

BETÂNIA DE ALMEIDA PRESTES¹
EDNA MACHADO DA SILVA²
MIGUEL CHAQUIAM³

Resumo: Trata-se de um recorte histórico sobre a constituição da álgebra simbólica, realizada a partir do diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2020, 2017), que relaciona contextos históricos da época de François Viète e seus contemporâneos com o desenvolvimento da álgebra. A partir da pesquisa bibliográfica desenvolvida, foi estabelecido como objetivo apresentar uma sistematização de recortes históricos sobre o nascimento da álgebra simbólica com ênfase no contexto histórico vivenciado por François Viète. O estudo indicou que o simbolismo algébrico nasceu da evolução de uma álgebra retórica, a qual foi se perdendo no aspecto didático pedagógico. Desse modo, a pesquisa indicou possibilidades de dar significado ao simbolismo algébrico em aulas de matemática e esse recorte pode contribuir à compreensão do mesmo, bem como, na sistematização de atividades que possam ser exploradas em sala de aula.

Palavras-chave: História da Matemática, Simbolismo algébrico, Diagrama Metodológico, François Viète.

¹ Prestes, Betânia de Almeida, profa.betaniaprestes@gmail.com. Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)

² Silva, Edna Machado da, edna.yris.zeus@gmail.com. Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)

³ Chaquiam, Miguel, miguelchaquiam@gmail.com. Universidade do Estado do Pará (UEPA)

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve origem a partir de uma pesquisa realizada durante o desenvolvimento das atividades da disciplina História da Matemática como recurso didático, vinculada ao curso de mestrado profissional em Ensino de Matemática, no âmbito da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Nessa pesquisa desenvolve-se um estudo sobre o ensino de Expressões Algébricas. Para tanto, realizou-se um recorte histórico construído na perspectiva do diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2020, 2017), que sistematiza o desenvolvimento histórico de determinado objeto matemático na perspectiva de personagens que colaboraram na evolução desse objeto, bem como os contextos que influenciaram nessa evolução. Para isso, “deve-se caracterizar o cenário mundial da época do personagem principal tendo em vista à vinculação da história da Matemática a história da humanidade” (CHAQUIAM, 2017, p. 34)

Inicialmente, faz-se necessário retomar a etimologia da palavra "álgebra", por ser uma variante latina da palavra árabe al-jabr usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi. Uma tradução literal e original a álgebra seria equações, no entanto, essa palavra tem, atualmente, um significado polissêmico e uma definição satisfatória que requer um enfoque em duas fases:(1) Álgebra antiga (elementar), o estudo das equações e métodos de resolvê-las; (2) Álgebra moderna (abstrata), o estudo das estruturas matemáticas, tais como grupos, anéis e corpos.

A fase antiga (elementar), que abrange o período de 1700 a.C. a 1700 d.C., aproximadamente, caracterizou-se pela invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações (em geral coeficientes numéricos) por vários métodos, apresentando progressos pouco importantes até a resolução "geral" das equações cúbicas e quárticas e o inspirado tratamento das equações polinomiais em geral feito por François Viète, também conhecido por Vieta (1540-1603).

Segundo Eves (1995), o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu desde a Babilônia ao longo de três estágios: o retórico (ou verbal), o sincopado (no qual eram usadas abreviações de palavras) e o simbólico. No último estágio, a notação passou por várias modificações, até tornar-se razoavelmente estável ao tempo de Isaac Newton.

Embora seja um longo percurso evolutivo, tendo em vista a pesquisa que motivou este estudo histórico, buscou-se responder a seguinte questão: Como se deu o nascimento da álgebra simbólica ensinada atualmente na Matemática da Educação Básica? Assim, considerando-se a contribuição de François Viète e de seus contemporâneos para o desenvolvimento da álgebra, estabeleceu-se como

objetivo desta pesquisa apresentar uma sistematização de recorte histórico sobre o nascimento da álgebra simbólica com ênfase no contexto histórico vivenciado por François Viète.

Para o alcance desse objetivo adotou-se o diagrama metodológico de Chaquiam (2017), que segundo Chaquiam (2020) tem gerado trabalhos de conclusão de curso em Licenciatura em Matemática que podem ser utilizados em sala de aula. E, nessa perspectiva de colaborar com o ensino de matemática, apresenta-se a seguir os contextos históricos que envolvem o personagem principal, quais sejam: sociocultural, pluridisciplinar, técnico-científico e didático-pedagógico. Além disso, apresenta-se como alguns personagens contemporâneos a François Viète, matemáticos ou não, se ineterrelacionam nesses contextos.

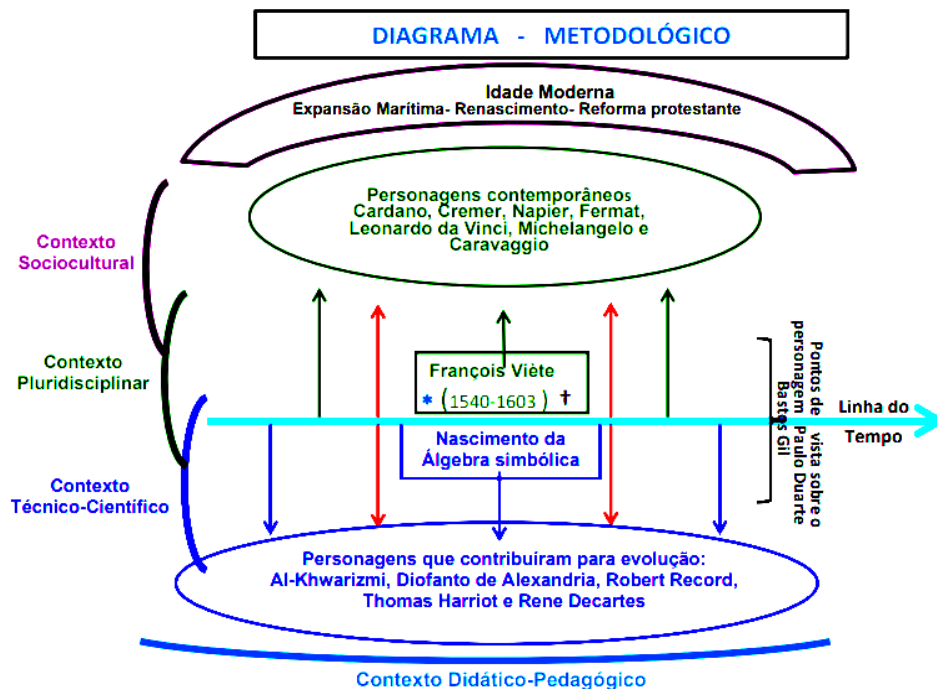
1. METODOLOGIA DA PESQUISA

Considerando-se a História da Matemática como uma importante fonte de desenvolvimento epistêmico do professor de matemática, Moura e Silva (2014) afirmam que a história ajuda a compreender como a ciência é desenvolvida e sob quais influências. Assim, o diagrama metodológico desenvolvido por Chaquiam (2017):

pode ser considerado um meio de se organizar e integrar história e matemática por meio dos diversos contextos, bem como proporcionar melhor compreensão das origens das ideias matemáticas que temos hoje, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem prontas e acabadas vieram de grandes esforços e desafios enfrentados por muitos ao longo dos tempos (CHAQUIAM, 2020, p. 13)

Essa organização de contextos sobre um determinado objeto matemático eleva o pesquisador ou professor a uma visão mais detalhada dos obstáculos enfrentados em outros tempos que possam ser reconhecidos na aprendizagem de matemática, atualmente ensinada. Referindo-nos aos esforços e desafios enfrentados para a evolução da álgebra simbólica, apresenta-se a seguinte sistematização:

Figura 1 - Sistematização da evolução da Álgebra Simbólica



A figura 1, ilustra a sistematização adotada para o estudo da evolução da Álgebra simbólica tendo como personagem principal, François Viète. A seguir apresenta-se o personagem e os contextos históricos que o influenciaram.

1.1 Contexto sociocultural

Para situar o tempo e o espaço que o personagem principal, François Viète (1540-1603), adotou-se como fonte bibliográfica, Boyer (1974), Eves (2004), Gil (2001) para elencar fatos históricos que marcaram o cenário mundial vivenciado no século XVI. Esse período foi marcado por um período histórico denominado de Idade Moderna, que destaca três acontecimentos: a Expansão Marítima, o Renascimento e a Reforma Protestante. Esses acontecimentos alteraram significativamente a política, a economia, a sociedade e a cultura e, por consequência, as pessoas passaram a adotar modos de vida diferenciados em relação aos daqueles da Idade Média.

A descoberta de novas rotas marítimas e novas terras possibilitaram a expansão na forma de se comunicar. Na religião, a Reforma Protestante, marcou o processo de decadência da Igreja católica e, conseqüentemente, a descentralização de seu monopólio político, pois ocorreu a formação das monarquias nacionais e marcou a submissão da nobreza e da Igreja, o que se consolidou a Idade Moderna com o surgimento dos Estados Absolutos.

François Viète nasceu no ano de 1540 em Fontenay-le-Comte, na França, e morreu no dia 13 de dezembro de 1603 em Paris. Apaixonado por álgebra, esse matemático francês foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações.

Na álgebra, Viète adotou vogais para as incógnitas, consoantes para os números conhecidos, gráficos para resolver equações cúbicas e biquadradas (ou de 4º grau) e trigonometria, para as equações de graus mais elevados. Ele ficou conhecido como o Pai da Álgebra e um dos melhores especialistas em cifras de todos os tempos. Prova disso, que o rei Henrique IV da França, entregou a ele as mensagens espanholas na esperança de que o matemático as decifrasse. Viète teve sucesso e guardou segredo. Porém, dois anos depois, os espanhóis descobriram seu feito.

1.2 Contexto pluridisciplinar

Os personagens contemporâneos que se destacaram e contribuíram para o desenvolvimento científico, foram: Leonardo da Vinci (1452-1519), que se destacou na arte por pintar os famosos quadros como Mona Lisa e Última Ceia; Michelangelo (1475- 1564), se destacou pela pintura da basílica de São Pedro e basílica de São Lourenço; Caravaggio (1571 – 16610), pintor de Medusa.

Outros contemporâneos de Viète que receberam destaques, foram: Cardano (1501-1576), John Napier (1550-1617) e Fermat (1601-1665). Gerolamo Cardano (1501-1576), de acordo com Eves (2004), foi um dos personagens mais extraordinário da história da matemática. Começou sua vida profissional como médico, mas paralelamente se dedicava à Matemática, especificamente a aritmética, ainda se dedicava a astronomia, física e outros assuntos.

Dentre seus livros, o mais importante foi *Ars Magna*, o primeiro grande tratado em latim exclusivamente à álgebra. Nele encontram-se alguns relatos às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários. Há indícios que Cardano tinha algum conhecimento da regra de sinais de Descartes.

Segundo Boyer (1974), John Napier (1550-1617) era um proprietário escocês, que administrava suas propriedades e escrevia sobre diversos assuntos. Napier, tinha interesse por assuntos matemáticos que se referiam à computação e trigonometria. Ele ficou conhecido como inventor do Logaritmo quando, em 1614, publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) que conteve uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas e regras para o uso dos mesmos.

Pierre de Fermat nasceu no dia 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomages, França e morreu no dia 12 de janeiro de 1665 em Castres, França. Foi advogado e oficial do governo em Toulouse pela maior parte de sua vida. A matemática era o seu passatempo. Em 1636, Fermat propôs um sistema de geometria analítica semelhante aquele que Descartes preconizaria um ano depois. O trabalho de Fermat estava baseado em uma reconstrução do trabalho de Apollonius, usando a álgebra de Viète. Um trabalho semelhante conduziu Fermat para descobrir métodos similares para diferenciação e integração por máximos e mínimos.

1.3 Contexto Técnico-Científico

A evolução da álgebra teve forte contribuição da matemática babilônica, Boyer (1974) destaca que seu desenvolvimento foi pautado na utilização do sistema numérico, que tinha como base fundamental o sessenta. Além disso, foram hábeis na elaboração de algoritmos para obtenção de raízes de equações, assim como, nos cálculos que envolviam operações aritméticas fundamentais e tabelas exponenciais.

No Egito, a álgebra surgiu quase ao mesmo tempo que na Babilônia; mas faltavam à álgebra egípcia os métodos sofisticados da álgebra babilônica, bem como a variedade de equações resolvidas, a julgar pelo Papiro Moscou e o Papiro Rhind - documentos egípcios que datam de cerca de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente, mas refletem métodos matemáticos de um período anterior. A álgebra do Egito, como a da Babilônia, era retórica.

Os matemáticos europeus do século XVI tiveram de estender a noção indo-arábica de número antes de avançar significativamente, além dos resultados babilônios de resolução de equações. Assim, a álgebra introduzida na Europa (via Liber abaci de Fibonacci e traduções) obteve regressão tanto em estilo como em conteúdo. O semi-simbolismo (sincopação) de Diofanto e Brahmagupta e suas realizações relativamente avançadas não estavam destinados a contribuir para uma eventual irrupção da álgebra.

A partir do Renascimento, houve um rápido florescimento da álgebra na Europa ocasionados devido aos seguintes fatores: 1) facilidade de manipular trabalhos numéricos a partir do sistema de numeração indo-arábico, muito superior aos sistemas (tais como, o romano) que requeriam o uso do ábaco; 2) invenção da imprensa com tipos de móveis, que acelerou a padronização do simbolismo mediante a melhoria das comunicações, baseada em ampla distribuição; 3) ressurgimento da

economia, sustentando a atividade intelectual; e a retomada do comércio e viagens, o que facilitou o intercâmbio de ideias tanto quanto de bens.

Por volta do ano 400 d.C., uma ideia audaciosa de um estudioso de Alexandria começou a mudar toda a história da matemática. Esse estudioso era Diofante de Alexandria, que viveu de 325 a 409 e seus estudos se basearam no uso de símbolos para facilitar a escrita e os cálculos matemáticos. Os Símbolos criados por Diofante proporcionaram as expressões, até então escritas totalmente com palavras, as quais pudessem ser representadas com abreviações.

Diofante viveu numa época muito tumultuada, presenciando, por exemplo, a queda do Império Romano, e isso, não foi nada bom para a matemática, pois teve todo um processo de desenvolvimento interrompido devido ao clima de guerra criado, e principalmente, pela destruição de muitos centros de estudos. Dessa forma, a simbologia de Diofante não saiu do estágio inicial e somente no ano de 650, aproximadamente, com a ascensão do império Árabe, foi retomada dos estudos matemáticos.

Apaixonado por álgebra, François Viète foi para a história como o principal responsável pela introdução dos símbolos no mundo da matemática e influenciador para que outros matemáticos, da mesma época, dessem suas contribuições para o aperfeiçoamento da álgebra. Entre eles, destacam -se Robert Record, inglês que criou o símbolo (=) para a expressão (igual a). Esse sinal foi usado por Thomas Harriot, também inglês, responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam na álgebra de Viète.

René Descartes, grande matemático e filósofo francês, foi o responsável pela passagem da álgebra completamente simbólica, pois introduziu as seguintes inovações para aperfeiçoar a álgebra de Viète: 1) criou o símbolo (.) para a operação de multiplicação; 2) criou a notação que usamos hoje para os expoentes de uma potência; 3) passou a usar as primeiras letras do alfabeto para os coeficientes da incógnita e os termos independentes (sem literais) e as últimas letras para representar as incógnitas.

1.4 Contexto didático-pedagógico

Segundo Chaquiam (2020), o contexto didático-pedagógico está relacionado à constituição de um texto como este, constituído a partir do contexto sociocultural, pluridisciplinar e contexto técnico-científico apresentando-se outros pontos de vista sobre o personagem principal ou sobre o conteúdo matemático abordado, com potencial de constituição de atividades para serem desenvolvidas em sala

de aula, além de proporcionar uma discussão crítica em torno do objeto matemático em tela e das ideias matemáticas que contribuíram à sua constituição e evolução.

Assim, no que diz respeito a contribuição didático-pedagógica deste estudo evidenciou-se alguns pontos a serem considerados em sala de aula: 1) Antes da constituição do simbolismo algébrico, há a constituição retórica do significado do símbolo; 2) O pensamento algébrico é algo que é desenvolvido ao longo do desenvolvimento cognitivo e intelectual do indivíduo; 3) É importante criar experiências de aprendizagem que envolvam a álgebra falada e por meio de abreviações que representem o significado do simbolismo algébrico.

Neste sentido, a sistematização e o recorte histórico sob o contexto vivenciado por Viète pode contribuir para compreensão da afirmação do simbolismo algébrico, constante nos currículos atuais de matemática, que ora apresenta problemas de ensino e de aprendizagem.

CONCLUSÕES

De fato, a história ajuda a elucidar desafios enfrentados no ensino de Matemática. A metodologia adotada neste estudo se mostrou um facilitador do aprofundamento epistemológico de professores e pesquisadores na área de ensino de matemática. Em especial, no que diz respeito a pesquisa que originou este estudo.

Através do diagrama metodológico adotado, foi possível evidenciar que os contextos históricos ajudam a compreender a constituição do simbolismo algébrico e o quanto é importante que o seu significado seja parte integrante dos processos que envolvam o ensino e aprendizagem da álgebra, como por exemplo, o desenvolvimento do estudo a respeito do ensino de Expressões Algébricas.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. História da Matemática. São Paulo: Blucher, 1974.

CHAQUIAM, M. Ensaio Temático: História e Matemática em sala de aula. Belém: SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. História e Matemática Integradas por meio de um Diagrama Metodológico. Revista PARADIGMA, v. XLI, N° Extra 1; abril de 2020 / 197-211.

EVES, Howard. Introdução a História da Matemática. Campinas (SP): Editora da UNICAMP, 1995.

EVES, H. Introdução à História da Matemática EVES, Howard. Introdução a História da Matemática. EVES, Howard. Introdução a História da Matemática. Campinas (SP): Editora da UNICAMP, 2004.

GIL, Paulo Duarte Bastos. François Viète: o despontar da álgebra simbólica. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2001.

MIGUEL, A. BRITO, A. J. A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. Cadernos CEDES - História e Educação Matemática. Campinas (SP): Papirus, n. 40, 1996. p. 47-61

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Revista Zetetiké. Campinas (SP): UNICAMP – FE – CEMPEM, 1997. pp. 73- 105

MOURA, Breno Arisoli; SILVA, Cibelle Celestino. A abordagem Multicontextual da História da Ciência na Formação de Professores de Física: análise de um estudo de caso. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 336-348, 2014.



ANALISE DO INDICE IFIX POR MEIO DE SERIES TEMPORAIS USANDO O SOFTWARE R.

Henriques Silva, Leto, letohenriques@gmail.com¹
Jules Aviz dos Santos Saraiva, Alexandre, alexandrejules@hotmail.com²
Marcelo Brazão Protazio, João, mprotazio@ufpa.br³
João da Cunha Farias, Valcir, valcir@ufpa.br⁴

¹Mestrando do curso de pós-graduação em matemática aplicada da Universidade Federal do Pará – UFPA

² Mestrando do curso de pós-graduação em matemática aplicada da Universidade Federal do Pará – UFPA

³Professor Dr. Docente da Universidade Federal do Pará – UFPA

⁴Professor Dr. Docente da Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo: Este trabalho visa comparar a evolução gráfica do índice IFIX, especificamente no período de setembro de 2012 a dezembro de 2020, utilizando a Análise de Séries Temporais, se utilizando de dados fornecidos pela Bolsa de Valores do Brasil, para se realizar a previsão de séries temporais financeiras, para compreender melhor o valor futuro de ações do mercado de capitais com foco no mercado imobiliário brasileiro. Fez-se uso do software R-Statistics para as simulações das previsões. O experimento foi realizado buscando possuir uma melhor aproximação dos possíveis valores futuros do índice IFIX visando testar as situações passadas para resultados futuros. A análise dos resultados foi realizada através da comparação entre os valores já registrados em mercado, através de uma comparação gráfica de seus resultados, por meio de tratamentos e modelagem de Series Temporais por meio do modelo ARIMA. Os resultados obtidos foram considerados de aproximação satisfatórias e lembrando que estes resultados não se tratam de recomendações de investimentos sendo apenas uma análise de tratamento de comportamento gráfico de dados.

Palavras-chave: R-Statistics, Análise de Séries Temporais, Previsão de Séries Temporais, Mercado de Fundos Imobiliários .

INTRODUÇÃO

O mercado imobiliário consiste em uma ferramenta capaz de nos ajudar a coletar diversas informações sobre a melhor maneira de investir em uma determinada propriedade ou entender onde existirá um aluguel em potencial em uma referida cidade ou distrito. Dessa forma, seria inimaginável negociar tal imóvel sem possuir informações plausíveis sobre uma compra de alto padrão, ou qual seria o valor a cobrar pelo aluguel de tal imóvel. Com base nisso foi criado o índice IFIX que segundo a B3 – Bolsa Brasil Balcão (2020), o objetivo principal do índice é de ser um indicador do desempenho médio das cotações dos fundos imobiliários, é composto das cotas de Fundos de Investimentos Imobiliários – FII, listados nos mercados de bolsa e de balcão organizado da B3. Como se tratam de fundos de empreendimentos em imóveis sua volatilidade tende a ser menor quando comparada aos papéis oferecidos no mercado de ações, embora possuam pouca variação de valorização ou perda, tem a característica de dividendos em forma “aluguel” semelhantes a uma renda fixa que se mantida a um longo período tende a pagar em um período longo com aportes constantes.

Figura 1



Por esses motivos escolheu-se o índice IFIX que melhor representa todos os papéis em negociação atualmente no mercado da B3, e nos utilizamos dos recursos ofertados pelas Series Temporais para melhor compreender esse comportamento e tentar realizar uma previsão para certo período.

SERIES TEMPORAIS

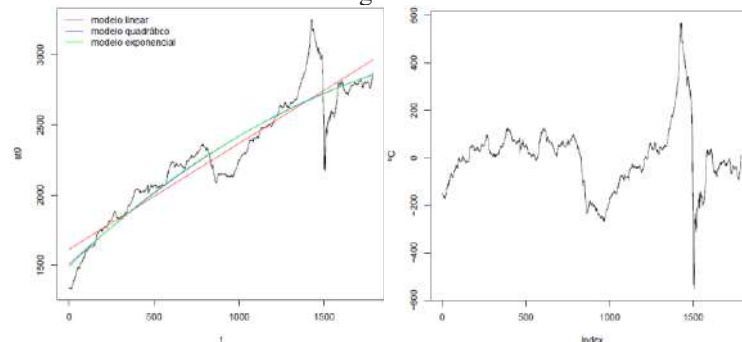
Uma série temporal se trata de qualquer conjunto de observações ordenadas em um período de tempo, para análise gráfica de dados administrativos, econômicos, financeiros, de engenharias entre outros que possuam em sua forma de série temporal, na qual suas observações são dependentes de um período de tempo. As séries temporais são compostas por quatro elementos. Para MASI e LOPES (2010) uma série temporal é na verdade um conjunto de valores observados e ordenados no tempo, onde a ordem das observações tem impacto no resultado. Existem fatores que influenciam padrões nesses valores, tanto no passado quanto no presente, e a análise destes conjuntos considera que essa influência se aplicará também no futuro. Portanto, ao identificar e isolar tais fatores, é possível fazer previsões para o comportamento dos valores da série. A primeira componente é a Tendência, que verifica o sentido de deslocamento da série ao longo de vários anos, a segunda componente é o Ciclo, movimento ondulatório que ao longo de vários anos tende a ser periódico, a terceira componente é a Sazonalidade que tem a duração de curto prazo, inferior a um ano, a quarta componente é conhecida como Ruído Aleatório. O ruído aleatório compreende a variabilidade intrínseca aos dados, que não pode ser modelada. Hipótese de Modelo utilizada neste trabalho foi de decomposição aditiva:

$$Y(t) = T(t) + C(t) + E(t) + S(t)$$

$Y(t)$ = é o valor da série temporal; $S(t)$ = t é a componente de Sazonalidade no período t ; $T(t)$ = é a componente Tendência no período t ; $C(t)$ = é a componente Ciclo no período t ; $E(t)$ = é a componente de erro ou Ruído Aleatório no período t .

O Modelo de Decomposição Aditivo considera que a série temporal é a resultante da soma das componentes acima. Para melhor ajustar o gráfico dos dados buscamos em 3 modelos os quais melhor poderiam representar o comportamento apresentado pelo índice, sendo estes o modelo linear, quadrático e exponencial.

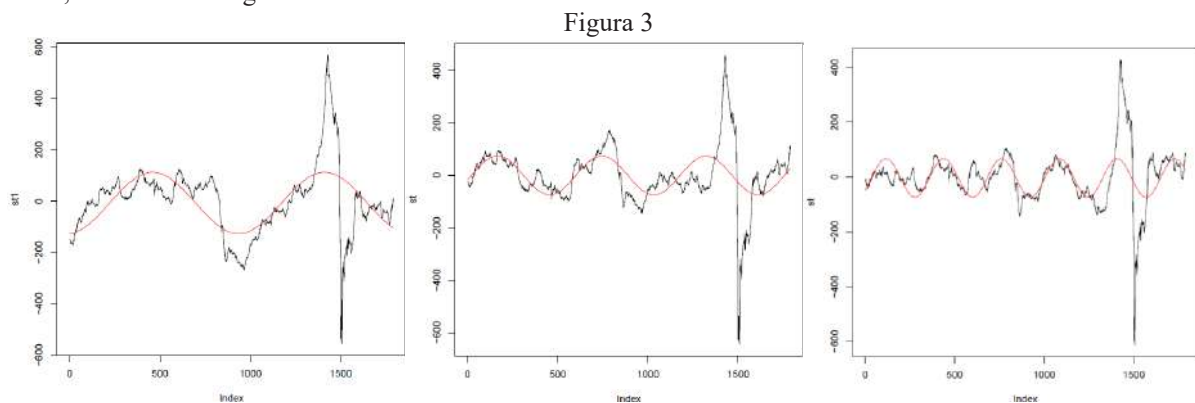
Figura 2



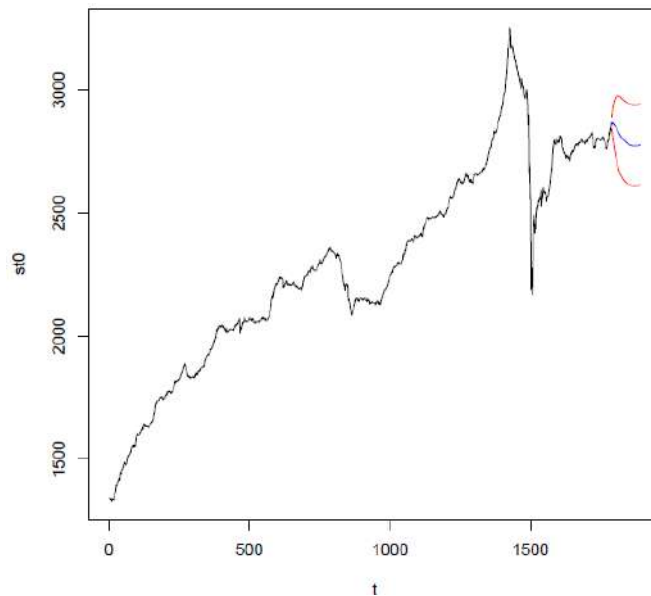
No gráfico acima retrata quando foi iniciada a negociação dos FII's pela B3 em setembro de 2012 até o período de dezembro de 2020, observando-se tais eventos tanto de valorização como de queda em momentos de crise política, como os ocorridos em meados de 2016 com o impeachment da ex-presidente Dilma Rousseff, crise da JBS no governo do ex-presidente Michel Temer, períodos eleitorais, são propícios para queda nos valores desse índice que acabam se mostrando um bom período para aqueles que buscam começar a investir neste setor, pois seus papéis costumam estar abaixo do valor de mercado, entretanto continuam a pagar em grande parte bons rendimentos em forma de dividendos/alugueis que o investidor pode adquirir no mercado de bolsa valores. Esse período de quedas como já comentado anteriormente possui em suma um ciclo de altas e baixas, pode se notar que mesmo com fortes quedas, o mercado tende-se a se reajustar pois se trata de imóveis e não de empresas, por tanto, gerando uma certa “segurança” para com aqueles que buscam um rendimento constante e retorno considerável, sendo uma das formas mais práticas de se investir no mercado imobiliário, a exemplo o período que aparece com grande queda acentuada na Figura 1, é o período de março de 2020 entretanto iniciou-se uma recuperação a partir de abril do mesmo ano, caracterizando a solides desses ativos, embora sejam um mercado recente comparado ao de ações. Ao se falar da alto quando as taxas de juros caem e o mercado imobiliário se aquece, como foi o ocorrido nos períodos de grandes eventos como olimpíadas, copa do mundo de futebol, jogos pan-americanos, quando a indústria tem subsídios, no qual a economia consegue fluir melhor esses ativos tendem a pagar mais dividendos e seus papéis se valorizam, como foi o ocorrido no período de 2016 ate inicio de janeiro de 2020, mesmo ocorrendo alguns eventos já comentados anteriormente que ocasionaram queda nestes ativos.

MODELAGEM DOS DADOS:

A primeira etapa foi análise de tendência como mostrado na Figura 2 com as aproximações dos modelos sugeridos, obtendo-se o seguinte resultado:



Na Figura 3 acima tem-se os dados sem a tendência e com a verificação de sazonalidade com relação aos modelos 1, modelo 2 e modelo 3 respectivamente. Sendo o modelo exponencial o que aparentemente apresenta maior paridade com o gráfico. Com a utilização do modelo ARIMA e de seus dados residuais conseguimos obter a seguinte previsão abaixo, relatando três possíveis cenários para o mercado de FII's, tendo um cenário positivo sendo “otimista” em caso ocorra uma grande valorização deste mercado em vermelho, um mais realista e “provável” de se ocorrer em azul e por último um “pessimista” caso as condições continuem adversas ou se atenuem.



CONCLUSÕES

Concluimos neste trabalho que a análise realizada para o cenário tido como mais “provável” foi a que se mais aproximou da realidade mostrando uma leve tendência deste índice a se reajustar ao seu valor de mercado sem um grande alta ou baixa em seus papéis, continuando portanto a proporcionar dividendos constantes a seus investidores que buscam uma renda extra com possível potencial de valorização, mostrando que as Séries Temporais podem ser utilizadas para melhor compreender os ciclos do mercado de Fundos Imobiliários, seus motivos crescimento e depreciação, sugerindo ainda que a continuação deste estudo seja empregada em ativos do índice IFIX para que seja alocado seus rendimentos como forma de reinvestir em busca de potencialização desses ativos como forma de aumentar os ganhos sem deixar de se considerar os riscos de mercado.

REFERÊNCIAS

BOVESPA. Disponível em < www.bovespa.com.br >. Acesso em 20 de agosto de 2020.

DE BARROS FRANCO, David Gabriel; STEINER, Maria Teresinha Arns. Estudo comparativo de redes neurais artificiais para previsão de séries temporais financeiras. Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha-Publicação Online, v. 1, n. 1, p. 303-313, 2014.

INFOMONEY. Disponível em www.infomoney.com.br. Acesso em 20 de agosto de 2020.

LEVINE, D.; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. Estatística: teoria e aplicações usando microsoft excel em português. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2000. 811 p.

MASI, Nathalia Virginia; LOPES, Célia Mendes Carvalho. ESTUDO DE MODELO DE SÉRIES TEMPORAIS PARA DADOS DE AÇÕES. 2010.

MORETTIN, P. A., TOLÓI, C. M. C. Análise de séries temporais. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. 538 p.

STEVENSON, W. J. Estatística aplicada à administração. São Paulo: Harbra, 2001. 495 p.

VALLS PEREIRA, P. L. Estimação de Volatilidades. Disponível em <<http://www.risktech.com.br/PDFs/volatilidades.pdf>>. Acesso em 20 de agosto de 2020.



ABNER DE MOURA E OS “CENTROS DE INTERESSE NA ESCOLA”

Fernandes, Juliana Chiarini Balbino, juliana-chiarini@hotmail.com¹

¹Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF)

Resumo: *Com o intuito de compreender a formação de professores brasileiros no período escolanista, face a novas propostas pedagógicas faz-se necessário analisar como ocorreram as apropriações desta proposta. Diante desta indagação, elegeu-se como fontes para este estudo o manuais de didática: “Os Centros de Interesse na Escola”, escrito por Abner de Moura, em 1931. Pretende-se ainda, identificar como os saberes aritméticos estão configurados nesta obra. Nessa análise, apoiou-se nos estudos desenvolvidos pela Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE) da Universidade de Genebra e nos estudos de Roger Chartier. Observa-se que o ensino da aritmética não se limitaria a horários e deveria abranger as demais matérias. O sentimento de unidade se estabeleceria a partir da observação, associação e expressão, que são responsáveis por coordenar um programa de atividades culturais, concentrando-o em torno de uma ideia central. Por fim, os conceitos aritméticos deveriam ser privilegiados e trabalhados na primeira ou segunda parte da distribuição diária.*

Palavras-chave: *Centros de Interesse; saberes aritméticos, Ovide Decroly; Apropriação.*

INTRODUÇÃO

Este artigo investiga a presença da aritmética em meio a nova vaga pedagógica Escolanovista, e no âmbito dessa vaga, a pedagogia dos Centros de Interesse. A problemática deste estudo leva-nos a investigar como está configurada a aritmética no âmbito de uma pedagogia decroliana. Desse modo, faz-se necessário buscar por documentos e textos escritos por Decroly. Porém, algumas questões foram levantadas: Como a proposta de Decroly circulou no Brasil? Quem divulgava a proposta de Decroly no Brasil? A partir destas questões, chegou-se ao livro “Os Centros de Interesse na Escola”, escrito por Abner de Moura, em 1931.

Na proposta Centros de Interesse há “saberes”, compreendidos entre, “saberes (saberes matemáticos, saberes literários, saberes históricos) e saber-fazer (‘saberes nadar’, ‘saberes escrever’ ou ainda ‘saber ensinar’)”. (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p.132). Formar e ensinar fundamentalmente são compostos por saberes, porém a escolha desses saberes e a transformações desses saberes “é resultado de processos complexos que transformar fundamentalmente os saberes a fim de torná-los ensináveis. Esse processo pode até conduzir à criação de saberes próprios às instituições educativas, necessárias a elas para assumirem as suas funções” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p.133).

No que tange a prática da apropriação, pode ser considerada como prática de transformação de produtos culturais e a construção do sentido por meio de textos escritos, pode ser realizada pelo cruzamento da história das práticas sociais com a história das representações contidas em um mesmo contexto. As representações inscritas neste livro podem trazer as interpretações que seus elaboradores fizeram da proposta pedagógica Centros de Interesse, para alcançar os professores, saberes técnicos que constituem um recurso específico para a história das apropriações (CHARTIER, 2002).

Os manuais são prescrições de uma prática pedagógica planejada que expõe elementos necessários para os esclarecimentos de metodologias empregadas na formação de professores. Além disso, os manuais são exemplares de textos escritos fundamentados nos programas oficiais que exibem detalhadamente as prescrições oficiais e os conhecimentos que serão formados os professores. (VALDEMARIN, 2008).

É necessário avaliar essa fonte como “uma prática encarnada em gestos, espaços, hábitos” e ainda que uma história das “maneiras de ler deve identificar as disposições específicas que distinguem as comunidades de leitores e as tradições de leitura” (CHARTIER, 2002, p.178). Assim, o trabalho do historiador está localizado entre o cruzamento de uma história das práticas, social e historicamente diferenciadas, e de uma história das representações inscritas nos textos ou produzidas pelos próprios indivíduos (CHARTIER, 2002).

O CENTROS DE INTERESSE NA ESCOLA: ADNER DE MOURA (1931)

O livro intitulado “Os Centros de Interesse na Escola” apresenta sugestões de lições globalizadas, de acordo com a pedagogia de Decroly, como constituição a uma escola brasileira renovada, escrito pelo Professor Abner de Moura. Este livro foi organizado pela Biblioteca de Educação, sob direção de Lourenço Filho e publicado pela Companhia Melhoramentos de São Paulo em novembro de 1931.

No primeiro capítulo do livro “Os centros de Interesse na Escola”, Moura (1931, p.7) exhibe a vida e obra de Decroly, destacando que esta obra sugere “maneiras de praticar as ideias deste pedagogo, em ambiente brasileiro”; um movimento de apropriação das ideias de Decroly no Brasil. Ainda, é apresentado uma relação com as principais obras de Decroly, grande parte dessas obras relacionadas com problemas de psicopatologia infantil.

No segundo capítulo, “O Sistema Decroly”, Moura (1931) expõe detalhadamente a pedagogia decrolyana, pensando a partir das ideias centrais da concentração de associação e dos centros de interesse. Moura (1931) ressalta que este livro não pretende solucionar o problema de todas as escolas do Estado, apenas revelar aspectos de uma fórmula de ensaio, em plena evolução, que pode ser melhorada dia a dia na prática, de acordo com prováveis oportunidades. A escola proposta por Decroly, preocupa-se com a criança, preparando-a para as exigências sociais, partindo da observação para elaborar um programa síntese. Moura (1931, p. 22) traz como exemplo o programa oficial das escolas de Minas Gerais.

No capítulo III - “Aplicação”, Moura (1931) apresenta a organização dos programas, sob a base dos centros de interesse e como desenvolvê-los. Decroly propõe três etapas fundamentais no tratamento dos assuntos: observação, associação e expressão. Os exercícios de observação, segundo Moura (1931, p.29), são a forma de colocar em movimento as demais atividades mentais, “formam a base racional de todos os exercícios”. Observar leva a comparar, medir, pesar, contar; esses são exercícios satélites que os professores podem utilizar.

Depois de observar, é preciso associar e esta etapa supõe um esforço tanto do aluno, quanto do mestre, pois nesta etapa, é realizada a verificação da própria experiência de cada aluno e a partir desta verificação, dar-lhe valor científico ou cultural ao conhecimento que ele possui (MOURA, 1931). A expressão, segundo Moura (1931, p.31), compreende “tudo o que permite a manifestação do pensamento de modo acessível aos demais”.

No capítulo IV, “Uma experiência”, são expostos exemplos de situações de aplicação do Centro de Interesse. Além disso, há o questionamento quanto ao horário do programa proposto por Decroly. Moura (1931, p.39) explica que “uma escola ativa não poderá nunca reger-se por um horário-mosaico, em que os exercícios sejam regulados, em sua extensão, por minutos fatais, e de que o diretor exija o mais rigoroso cumprimento, de relógio, na mão”.

No capítulo V, “Planos de Lições”, Moura (1931) expõe sugestões de Planos de Lições a partir dos centros de interesse, sugestões de possíveis sub-centros: os dentes, a cozinha, o fogão, preparo do café, legumes, mandioca, as frutas, a laranja, o tomate, o mamão, o cacau, o vinho, o porco, as formigas, serpentes, as aves, o sabão, couros e peles, as cores, a chácara e a vaca, coelhos.

No último capítulo, capítulo VI – “Conclusão”, Moura (1931) está convicto que não traz novidades nesta obra, à teoria e à prática da escola nova. Este livro tem por finalidade apresentar-se como fruto de algo realizado em ambiente brasileiro, em específico, por professores brasileiros, que ensaiam as práticas da escola decrolyana. Essas experiências contidas neste livro não se pratica em grandes cidades, em meio industrializados; pelo contrário, essa prática da escola decrolyana é propício para o meio agrícola ou para uma cidade pequena de interior.

No final deste livro, há um “Apêndice” onde Moura (1931) traz a adaptação das lições iniciais do programa Decroly para uma classe de primeiro grau, na Escola Rio Branco, em São Paulo, em 1928. O primeiro exemplo de centro de interesse proposto foi “A criança e a escola”, em específico ao ensino de matemática, é sugerido ao professor que, após duas ou três lições, ele poderá orientar a observação para a medida ou cálculo, podendo ser intercalado estes exercícios: números e medidas (fazer contar, uma por uma, as portas, as janelas, as lâmpadas, as figuras da sala ou outros objetos).

Um sub-centro proposto para o professor trabalhar em sala de aula, poderia ser “A casa do aluno”, onde na Observação o professor pode trabalhar os cômodos da casa, telhado, diferentes formatos de telha, cor, etc. Na Associação, comparação com as casas vizinhas; com a cada da escola; a casa da fazenda, a casa dos índios. Na

Expressão há divisão em: desenho, leitura, cartanagem e números e medidas. Desenho: da casa do aluno, dos móveis. Leitura: eu gosto de minha casa, minha casa é bonita, da escola eu vou para casa. Exercícios como nas lições anteriores. Cartanagem: uma casa de cartão com o modelo a parte. Números e medidas: servindo-se da casa construída onde serão desenhadas as janelas, portas, etc. Escritas de números, até 3 ou 4, recordando-se as combinações anteriores.

CONCLUSÕES

Em um primeiro movimento de análise do livro “Os centros de Interesse na Escola”, olhando os objetivos propostos para essa etapa da pesquisa: apropriações do ideário decrolyano e saberes aritméticos presentes nos Centros de Interesse, chega-se a um primeiro indício, o livro de Abner de Moura serviu como guia para o trabalho docente. No que tange à apropriação, Moura traz em sua obra fortemente a referência a Lourenço Filho, um dos responsáveis por divulgar o ideário Escolanovista no Brasil. Em sua obra, Introdução a Escola Nova, Lourenço Filho exibe um capítulo destinado ao Centros de Interesse de Decroly e Moura referencia em seu livro esse capítulo. Moura apresenta também, personagens que divulgaram a proposta centros de interesse no Brasil.

Como os saberes aritméticos se fazem presentes, na pedagogia decroliana, lidos a partir do manual de Abner de Moura? Observa-se que os exercícios de aritmética são ligados à temática do interesse do aluno e essas situações problemas envolvem as operações básicas. Outro ponto que a ser destacado, refere-se a concretude em relação aos saberes, isto é, as formas abstratas das operações e outros campos da aritmética estavam contidas nos exemplos do cotidiano.

Observa-se que no livro de Moura que há apropriação da proposta de Decroly, quando o autor apresenta a “pedagogia decrolyana”, sua aplicação detalhadamente. Ainda, além da apropriação, há também um movimento de representação desta proposta, quando o autor traz exemplos de programas de ensino, possíveis sugestões a ser trabalhadas; um exemplo desta situação é o programa oficial das escolas de Minas Gerais (1928); fato esse que novamente nos leva a Minas Gerais e refletir sobre a Revista do Ensino de Minas Gerais.

Outro ponto é o apêndice do livro de Moura, que traz para os professores sugestões de planos de aulas de Centros de Interesse que poderiam ser utilizados em sala de aula; esse apêndice é uma adaptação das lições iniciais do programa Decroly de 1928, destinado para uma classe de primeiro grau, da Escola Rio Branco de São Paulo, novamente o ano 1928 aparece em destaque para o Centro de Interesse no Brasil.

REFERÊNCIAS

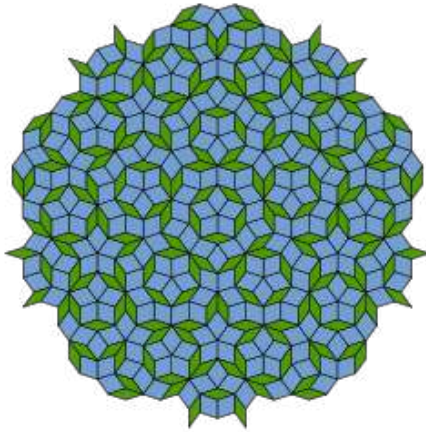
CHARTIER, R. O mundo como representação. In: _____. À beira da falésia: a história entre incertezas e inquietude. Trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS, 2002, p. 61-80.

DUBREUCQ, F. Jean-Ovide Decroly. Editora Massangana, 2010.

HOFSTETTER, R; SCHNEUWLY, B. Introduction. In: HOFSTETTER, R. et al. Savoirs en (trans)formation – Au coeur des professions de l’enseignement et de la formation. Bruxelles: Éditions De Boeck Université, 2009. pp. 7-40.

MOURA, A. Os centros de Interesse na Escola. Companhia Melhoramentos de São Paulo. São Paulo, 1931.

VALDEMARIN, V. T. um estudo sobre mudanças e permanências nas prescrições para a prática pedagógica. Revista brasileira de história da educação, nº 17. maio/ago. 2008. Disponível em: <<http://www.rbhe.sbhe.org.br/index.php/rbhe/article/viewFile/103/113>> Acesso em: 2 ago. 2016.



Ladrilhamentos

Daniel Gonçalves^a

^a Universidade Federal de Santa Catarina, *Email: daemig@gmail.com*

1 Definições Iniciais

Definição 1.1. Um ladrilho é um subconjunto de \mathbb{R}^d homeomorfo a bola fechada em \mathbb{R}^d . Um ladrilhamento (tiling) é uma coleção de ladrilhos com interiores dois a dois disjuntos e que cobre \mathbb{R}^d .

Definição 1.2. Um ladrilhamento parcial, ou patch, é uma coleção de ladrilhos em \mathbb{R}^d com interiores dois a dois disjuntos.

Observação 1.3. Podemos pensar um ladrilhamento, T , como uma função multi-valorada, isto é, para $u \in \mathbb{R}^d$ e $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $T(u)$ é a coleção de todos os ladrilhos $t_i \in T$ que contem u e $T(U) = \bigcup_{u \in U} T(u)$.

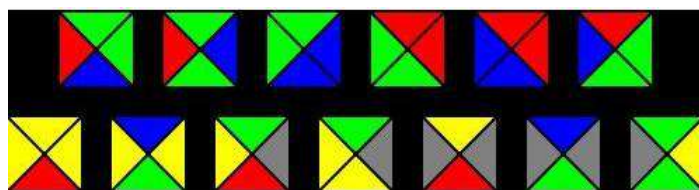
Definição 1.4. Se existe $x \in \mathbb{R}^d$ não zero tal que $T + x = T$ então T é dito periódico. Caso contrário é dito aperiódico.

2 Um pouco de história

No começo era só curiosidade matemática...

Wang em 1961 considerou o problema em lógica intitulado

Problema do dominó



Dado um conjunto finito F de dominós (quadrado unitários com regras para quais arestas podem ser coladas as outras), determinar se é possível ladrilhar o plano com translações de F .

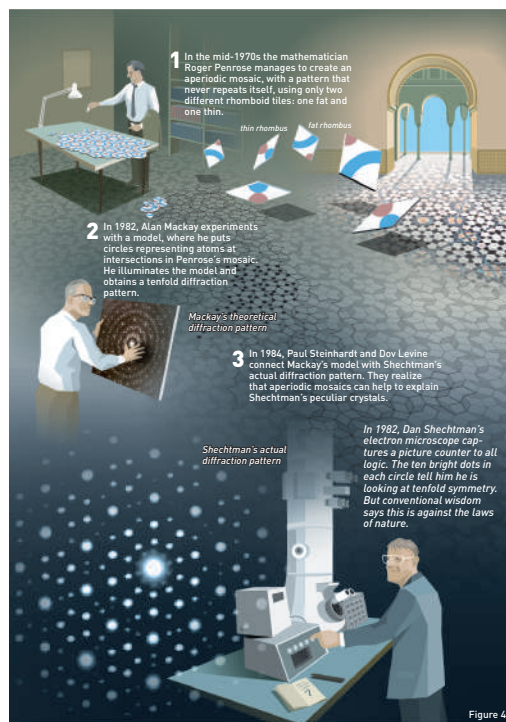
Conjectura de Wang: Se um conjunto de dominós admite um ladrilhamento do plano então também admite um ladrilhamento periódico.

Berger, 1966: Conjunto com 20426 dominós que só geram ladrilhamentos aperiódicos do plano.

Em 1974 Roger Penrose introduziu o hoje famoso ladrilhamento de Penrose:

O ladrilhamento foi originalmente construído a partir de rotações de dois paralelogramos com regras sobre o encaixe das arestas.

É aperiódico.



THE NOBEL PRIZE IN CHEMISTRY 2011 • THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES • HTTP://NVA.SE

9/7

A descoberta.

Quasicristais e Ladrilhamentos

Ladrilhamentos relacionados a quasi-cristais satisfazem:

- Complexidade local finita: Dado raio $r > 0$, existem somente um número finito de padrões com raio menor que r no ladrilhamento (a menos de translação).
- Dado algum padrão P no ladrilhamento, existe um raio $R > 0$ tal que toda bola de raio R contém um cópia de P .

Duas propriedades = Ordem Aperiódica

3 O espaço métrico dos ladrilhamentos

Seja X um conjunto de ladrilhamentos.

Para T, T' em X definimos $d(T, T')$ como:

$$\inf\{1, \epsilon : \exists x, x' \in \mathbb{R}^d, |x|, |x'| < \epsilon, (T - x)(B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)) = (T' - x')(B_{\frac{1}{\epsilon}}(0))\}$$

T próximo de T' , se após pequena translação T e T' concordam em uma bola grande ao redor da origem.

Essencialmente duas maneiras:

- $T = T' + x$, para algum x pequeno.
- T e T' concordam em uma bola grande ao redor da origem.

Definição 3.1. *Seja T um ladrilhamento. O espaço dos ladrilhamentos de T é o complemento de $T + \mathbb{R}^d = \{T + x : x \in \mathbb{R}^d\}$ com a métrica acima. Este espaço é denotado por Ω_T .*

Observação 3.2. *Elementos de Ω_T são ladrilhamentos e \mathbb{R}^d age e, Ω_T por translações (sistema dinâmico).*

Definição 3.3. *Dizemos que T tem complexidade local finita (CLF) se para todo $r > 0$, existem somente um número finito de padrões em T , cujos suportes tem raio menor que r .*

Teorema 3.4. *Se T tem CLF (e somente um número finito de ladrilhos a menos de translação) então Ω_T é compacto.*

4 Relações entre Física e Matemática

Física	Matemática
Qual o padrão de difração do material	Quais são as medidas ergodicas em Ω_T (ação translação)
Quais são os possíveis níveis de energia no material?	Qual é a K-teoria da C^* -álgebra associada a Ω_T
Informação sobre a estrutura interna do material a partir do padrão de difração	Topologia de Ω_T cohomologia de Čech de Ω_T

5 C^* -álgebras associadas a ladrilhamentos

Definição 5.1. Um conjunto finito de ladrilhos P é chamado um conjunto de proto-ladrilhos para um ladrilhamento T se para todo $t \in T$, existe $x \in \mathbb{R}^d$ e $p \in P$ tal que $t = p + x$.

Seja T um ladrilhamento e P um conjunto de proto-ladrilhos para T .

Para cada $p \in P$, seja x_p um ponto no interior de p (furo de p).

Se t é uma translação de p , digamos $t + x = p$, então $x_t = x_p + x$ é o furo de t .

Definição 5.2. O conjunto de todos os tilings de Ω_T tais que a origem é um furo de um ladrilho de T é denotado por Ω_{punc}

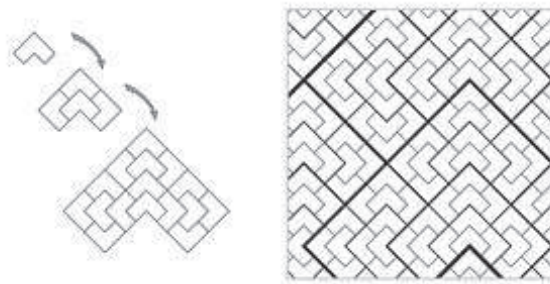
Defina uma relação de equivalência:

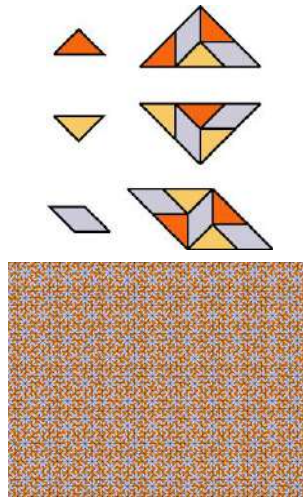
$$R_{punc} = \{(T; T + x) : x \in \mathbb{R}^d; T, T + x \in \Omega_{punc}\}$$

Coloque a topologia de $\Omega_{punc} \times \mathbb{R}^d$.

R_{punc} é etale $\rightarrow C^*(R)$.

6 Ladrilhamentos de substituição e espaços de Smale





Se T é um ladrilhamento de substituição, e ω é a regra de substituição, podemos considerar o espaço (Ω_T, ω) .

ω pode ser iterada!!

(Ω_T, ω) é um espaço de Smale.

Temos duas relações de equivalência:

$T \sim_s T'$ se $d(\omega^n(T), \omega^n(T')) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$

$T \sim_u T'$ se $d(\omega^{-n}(T), \omega^{-n}(T')) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$

Podemos considerar as C^* -álgebras associadas...

E aqui começa mais uma aventura....

Referências

- [1] Exel, R. ; Gonçalves, D. ; Starling, C. *The tiling C^* -algebra viewed as a tight inverse semigroup algebra*. Semigroup Forum, v. 84, p. 229-240, 2012.
- [2] Gonçalves, D. *New C^* -algebras from Substitution Tilings*, Journal of Operator Theory, v. 57, p. 391-407, 2007.
- [3] Gonçalves, D. *On the K -theory of the stable C^* -algebras from substitution tilings*. Journal of Functional Analysis, v. 260, p. 998-1019, 2011.
- [4] B. GRUENBAUM, G. C. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*. W H Freeman Co, 1986.
- [5] J. KELLENDONK, *Noncommutative geometry of tilings and gap labelling*, Rev. Math. Phys. 7 (1995) 1133-1180.



CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS UTILIZANDO A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dias, Gustavo Nogueira¹, gustavonogueiradias@gmail.com
Barreto, Wagner Davy Lucas², profwlucas@yahoo.com.br
Silva, Pedro Roberto Sousa da³, prof.pedromat@hotmail.com

¹Colégio Ten. Rêgo Barros

²Colégio Ten. Rêgo Barros

³Universidade Federal do Pará, Escola de Aplicação

Resumo O artigo a seguir refere-se à obtenção da área de figuras planas por meio da fundamentação teórica da Geometria Analítica. A utilização dos conceitos da geometria analítica surgiu a partir da dificuldade em encontrar a solução proposta pela geometria plana. Percebeu-se que o uso dos eixos cartesianos inseridos na figura em uma posição em que a origem seria bem determinada e os lados fornecidos seriam parte das abscissas e das ordenadas solicitadas, formando pontos analíticos no sistema formado. A teoria trouxe uma argumentação forte em relação a solução do problema quando pensado sobre os conceitos da geometria analítica, favorecendo a rapidez e agilidade nos cálculos, utilizando os conceitos de reta, área de um triângulo, ângulo entre retas, distância entre dois pontos, distância entre ponto e reta. A metodologia propõe a solução de dois problemas envolvendo a parte de ponto e reta, fazendo o comparativo com a geometria plana. Como resultado positivo teremos uma enorme aplicação da geometria analítica em variados problemas da geometria plana como também a utilização em formas geométricas do cotidiano favorecendo a diminuição do tempo de resposta ao item em testes de vestibulares e concursos públicos.

Palavras-chave: Áreas de Figuras planas; Geometria Analítica; Pontos analíticos; Reta.

INTRODUÇÃO

A geometria possui um milenar histórico de seus usos e contribuições para a humanidade. Entender a geometria ao longo da história, pode ser um fator de superação de obstáculos epistemológicos de professores formados e em formação, bem como indicar possibilidades de abordagem em sala de aula sobre o tema, haja visto que como a pedagogia e o processo de ensino e aprendizagem funciona atualmente no cotidiano escolar.

Na concepção de Boyer (2012), na Babilônia havia grande interesse pela Astronomia e ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano. Em 28 a. C. foi construído um calendário astrológico e elaboraram uma tábua de eclipses lunares.

Para Boyer (2012, p. 124), embora os gregos estudassem as relações entre retas e círculos e as aplicassem na Astronomia, disso não resultou uma trigonometria sistemática, indicando que muito se precisava avançar no que diz respeito a formalização de nosso objeto matemático, sendo este um obstáculo para que se avançasse mais.

Na concepção de Secco, et al (2020), o ensino da matemática não é uma tarefa fácil, observa-se que existem algumas razões para esta dificuldade, talvez pela ausência de recursos pedagógicos e/ou falta de aplicação de uma metodologia de ensino que proporcione aos alunos o interesse em aprender, mais especificamente, falta de exemplos práticos que mostrem a aplicação da matemática no cotidiano dos discentes fora do ambiente escolar.

A Trigonometria – estudos dos triângulos – serviu desde os antigos babilônios, até pouco antes de Descartes, como instrumento puramente prático de agrimensura, astronomia e navegação. Os perscrutadores de estrelas e marinheiros, sondando os céus ou varrendo os mares, frequentemente necessitavam calcular distâncias que não podiam ser medidas com a régua ou a trena. A Trigonometria tornava isso possível pela simples aplicação de certas regras básicas sobre as relações entre os lados e os ângulos de qualquer triângulo, grande ou pequeno (Dias, G. N., 2011)

Presume-se que tenha sido Hiparco quem de fato estabeleceu, por volta de século II a.C., as bases da trigonometria. Mas os hindus e os árabes também contribuíram para seu desenvolvimento. Contudo, foi na Europa do século XV que a trigonometria começou a ganhar importância, graças à influência de vários matemáticos, sobretudo o alemão Johann Müller, mais conhecido pelo nome latino Regiomontanus. Ele trabalhou pela

organização da trigonometria como uma disciplina independente da astronomia, além de escrever vários livros sobre tema, tais como de triangulis, em 1464. (Iezzi, 1993).

Na verdade, a ânsia do professor é tentar repassar os conteúdos de uma maneira bem acessível ao aluno, utilizando várias transposições didáticas que não são expostas nos livros didáticos.

Um dos objetivos do professor em sala de aula é tentar repassar os conteúdos aos alunos de uma maneira que seja didaticamente mais acessível para a compreensão e interpretação de todos durante a aula, utilizando várias transposições didáticas que não estão expostas nos livros didáticos e nem nos livros recomendados aos exames vestibulares.

Neste sentido, destaca-se a contribuição de Chevallard (1986): um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (Chevallard, 1986, p.90).

Metodologia

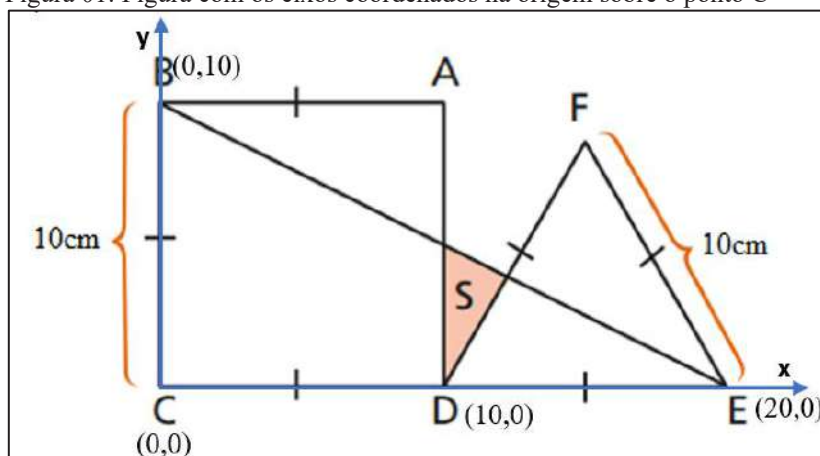
Este trabalho é uma investigação de diagnóstico e abordagem (quantitativa), O estudo envolveu uma abordagem quantitativa que utiliza métodos quantitativos, Pereira, et al. (2018), foi realizada considerando o período de 01 de maio de 2020 a 20 de março de 2021 de caráter exploratório.

Primeiramente, colocamos os eixos coordenados, x e y na figura 01, com a origem coincidindo com um determinado ponto, previamente escolhido, pode ser o início da figura ou outro ponto que favoreça na obtenção dos cálculos.

Após isso indicamos as coordenadas dos pontos escolhidos, como sendo os pontos principais, indicando a Origem $(0,0)$, como sendo o início da obtenção do método a ser desenvolvido, onde pelos dados fornecidos já iríamos ter de forma automática, segue figura 01:

RESOLUÇÃO TIPO 01

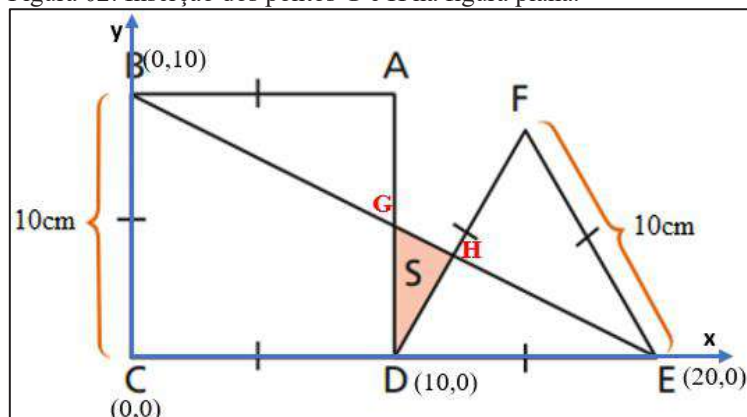
Figura 01: Figura com os eixos coordenados na origem sobre o ponto C



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com a figura 01, a reta BE, cruza com a reta AD e com a reta DF, formando pontos onde temos que descobrir as coordenadas, figura 02:

Figura 02: Inserção dos pontos G e H na figura plana.



Fonte: dados da pesquisa

Após isso calculamos a equação da reta BE, utilizando a forma segmentária da reta,

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 Fundamentação Teórica

Refletindo um pouco da história da Geometria Analítica, na concepção de Iezzi (2013), o francês da cidadezinha de Beaumont-de-Lomagne, Fermat cursou Direito em Toulouse, em cujo parlamento começou a trabalhar em 1631 — primeiro como advogado, posteriormente como conselheiro.

A geometria analítica de Fermat talvez seja um subproduto da tarefa que empreendeu a partir de 1629 de reconstruir o desaparecido Lugares planos, de Apolônio, mediante referências contidas na Coleção matemática, de Pappus. E é o assunto do pequeno tratado Introdução aos lugares planos e sólidos, concluído no máximo em 1636, mas só publicado em 1679. Pois nesse trabalho, ao anunciar que dada uma equação em duas variáveis uma destas descreve uma reta ou uma curva, revelava estar de posse do princípio fundamental do novo método. E ele próprio mostrou que uma equação geral $ax + by + c = 0$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (notação atual) representava uma reta.

$$\frac{x}{P} + \frac{y}{Q} = 1$$

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1$$

Nestes casos, o objetivo é resolver os sistemas de equações formados com a reta AD e com a reta DF.

Reta AD:

$$x = 10$$

Reta DF:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \operatorname{tg}60^\circ(x - 10)$$

$$y = \sqrt{3}(x - 10)$$

A equação utilizada acima é a do feixe de retas, onde depende de um ponto dado previamente e um ângulo, no caso o do triângulo equilátero que é de 60° .

Os sistemas serão:

$$(i) \begin{cases} \frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$\frac{10}{20} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{\square}{20} + \frac{\square}{10} = \frac{\square}{10}$$

$$\frac{10}{20} + \frac{2y}{20} = \frac{20}{20}$$

$$10 + 2y = 20$$

$$2y = 20 - 10$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

Resolvendo, teremos

$$(ii) \begin{cases} \frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1 \\ y = \sqrt{3}(x - 10) \end{cases}$$

Portanto, obtivemos o ponto $G(10,5)$. Agora vamos para o 2º sistema de equações, a fim de calcularmos o ponto H:

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{x}{20} + \frac{\sqrt{3}(x-10)}{10} = 1$$

$$\frac{\square}{20} + \frac{\square}{10} = \frac{\square}{10}$$

$$\frac{x}{20} + \frac{2\sqrt{3}(x-10)}{20} = \frac{20}{20}$$

$$x + 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = 20$$

$$(1 + 2\sqrt{3})x = 20 + 20\sqrt{3}$$

$$x = \frac{20(1 + \sqrt{3})}{(1 + 2\sqrt{3})}$$

Racionalizando o denominador obtemos:

$$x = \frac{20(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - 2\sqrt{3})}{(1 + 2\sqrt{3}) \cdot (1 - 2\sqrt{3})}$$

$$x = \frac{20(1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2.3)}{1 - 4.3}$$

$$x = \frac{20(-5 - \sqrt{3})}{-11}$$

$$x = \frac{20(5 + \sqrt{3})}{11}$$

Voltamos na equação $y = \sqrt{3}(x - 10)$

e calculamos o valor de y:

$$y = \sqrt{3}(x - 10)$$

$$y = \sqrt{3} \cdot \frac{20(5 + \sqrt{3})}{11} - 10\sqrt{3}$$

$$y = \frac{100\sqrt{3} + 60}{11} - 10\sqrt{3}$$

$$y = \frac{100\sqrt{3} + 60 - 110\sqrt{3}}{11}$$

$$y = \frac{60 - 10\sqrt{3}}{11}$$

Portanto descobrimos o ponto H:

$$H\left(\frac{20(5 + \sqrt{3})}{11}, \frac{60 - 10\sqrt{3}}{11}\right)$$

Como temos os pontos D, G e H, vértices de um triângulo, vamos utilizar a relação da área de um triângulo para obter a área:

Segundo Dias, G. N. (2011), fazendo uma pequena alteração no determinante, uma vez que a última coluna é numericamente igual a 1, obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \quad (I)$$

Realizando a multiplicação dos elementos de cima para baixo, conforme a indicação abaixo, permanecendo o sinal e após isso debaixo para cima trocando o sinal obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 10 & 10 & \frac{20(5 + \sqrt{3})}{11} & 10 \\ 0 & 5 & \frac{60 - 10\sqrt{3}}{11} & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \left| 50 + \frac{600 - 100\sqrt{3}}{11} - \frac{500 + 100\sqrt{3}}{11} - \frac{600 - 100\sqrt{3}}{11} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \frac{550 - 500 - 100\sqrt{3}}{11} \right|$$

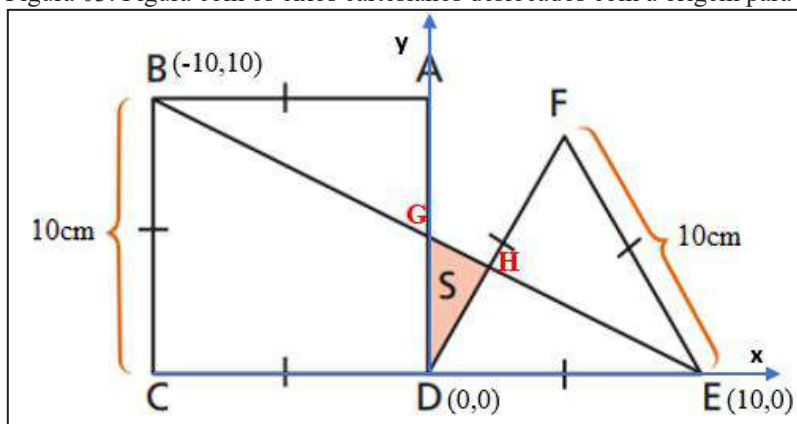
$$A = 25 \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{11} \right)$$

Lehmann (1988), comenta que para calcular a área de um polígono, podemos dividir em triângulos e assim fazer a soma de triângulo por triângulo quantos forem necessários para completar a figura.

2ª PROPOSTA

Uma outra forma de fazer, utilizando ainda a Geometria Analítica, é deslocar o eixo y, conforme a figura 03:

Figura 03: Figura com os eixos cartesianos deslocados com a origem para o ponto D



Fonte: dados da pesquisa

Considerações Finais

Com a utilização da geometria analítica como recurso de resolução de questões em Geometria Plana, certamente uma evolução sem barreiras poderá ocorrer no desenvolvimento do raciocínio dedutivo e compreensão do aluno.

O fato é que quando colocamos os eixos cartesianos na figura proposta, a saída e resposta acontecem automaticamente de forma natural, sem a necessidade de interpretação e de rotação de figuras ou transposição de outras formas geométricas a fim de se comparar, ou até mesmo achar formas semelhantes que expresse a proporcionalidade a ser questionada.

Este trabalho, incita o professor de matemática a expor a seus alunos mais esta forma como atividade ou como exercícios a fim de que a reflexão sobre o problema traga situações em que o raciocínio rápido se complete sem necessidade de retorno aos conceitos antigos da geometria.

A comparação do método com a resolução através da geometria plana é necessária a fim de se tirar conclusões acerca do que é mais vantajoso para o seu entendimento de uma forma mais clara e óbvia do raciocínio dedutivo sobre a questão a ser desenvolvida.

Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro, Ed. Blücher Ltda, São Paulo, 2012.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Ed. Colomb Jacques. p. 89-91, 1986.

DIAS, G. N. **Práticas do Ensino da Matemática: a realidade da sala de aula** / Gustavo Nogueira Dias. - Belém, Pará, 2011.

IEZZI, GELSON . **Fundamentos da Matemática Elementar**. Volume 4, Ed. Atual, 1993.

IEZZI, GELSON. **Fundamentos de matemática elementar**. Volume 7, Geometria analítica / Gelson Iezzi, 6ª ed., São Paulo: Atual, 2013.

LEHMANN, CHARLES H. **Geometria Analítica**. 9ª edição, São Paulo, ed. Globo, 1988.

PEREIRA, A. S., et al. Metodologia da pesquisa científica. UFSM, 2018.

SECCO, L. C. M., CABRAL, N. F., CHAQUIAM, M., DIAS, G. N., PAMPLONA, V. M. S., REIS, C. P., COSTA, E. G. & PINTO, G. P. **O ensino de juros compostos por meio de sequências didáticas**. Research, Society And Development, 9, 2020.



ANÁLISE DE SERIE TEMPORAL: COVID-19 NO ESTADO DO PARÁ

Nascimento, Carlos Alan Vieira do, carlosalan1414@gmail.com¹
Coelho, Nilcilene da Silva, nilcilenedasilvacoelho@yahoo.com.br²
Protázio, João Marcelo Brazão, mprotazio@gmail.com³

¹Universidade Federal do Pará - UFPA

²Universidade Federal do Pará - UFPA

³Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo: *Saber o que vai acontecer antes mesmo de os primeiros sinais aparecerem pode proporcionar um melhor aproveitamento dos benéficos de eventos futuros ou uma preparação de eventuais efeitos adversos. Nesse sentido, as informações obtidas por meio de observações coletadas ao longo do tempo caracterizam as séries temporais, as quais são de suma importância no entendimento e na formulação de planos de ação e estratégias em vários setores da sociedade. Como exemplo temos os negócios, os quais observamos as taxas de juros semanais, cotações de fechamento diárias, mensais índices de preços, números de vendas anuais e assim por diante. Em meteorologia, observamos altas diárias e baixas temperaturas, índices anuais de precipitação e seca e vento de hora em hora velocidades. Na agricultura, registramos cifras anuais para a produção agrícola e pecuária, solo erosão e vendas de exportação. Nas ciências biológicas, observamos a atividade elétrica de o coração em intervalos de milissegundos. Na Epidemiologia temos a exemplo o número mensal de novos casos de Covid-19 (SHUMWAY; STOFFER, 2017). Desse modo, abordaremos os dados da COVID-19 no Pará do início da pandemia à 5 de julho de 2021 além de análises levando em consideração a Serie Temporal e sua previsão com o auxílio do software R.*

Palavras-chave: COVID-19, Serie Temporal, Análise.

INTRODUÇÃO

Uma série temporal é uma sequência de observações em intervalos de tempo regularmente espaçados. Desse modo, saber o que acontecerá antes mesmo dos primeiros sinais se evidenciarem podem proporcionar melhor aproveitamento dos benéficos de eventos futuros ou melhor preparação de eventuais efeitos adversos. As informações obtidas por meio de observações coletadas ao longo do tempo, caracterizam as séries temporais, sendo então de suma importância para o entendimento e formulação de planos de ação e estratégias em vários setores da sociedade.

Assim, segundo Ehlers (2005) temos algumas observações sobre os dados de uma série temporal:

- Observações correlacionadas são mais difíceis de analisar e requerem técnicas específicas.
- Precisamos levar em conta a ordem temporal das observações. Fatores complicadores como presença de tendências e variação sazonal ou cíclica podem ser difíceis de estimar ou remover.
- A seleção de modelos pode ser bastante complicada, e as ferramentas podem ser de difícil interpretação.
- É mais difícil de lidar com observações perdidas e dados discrepantes devido à natureza sequencial.

Portanto, temos também as Componentes de uma série temporal sendo elas: Tendência, Sazonalidade, Ciclos e Movimento irregular. Na Tendência temos tendência de longo prazo de uma série para aumentar ou diminuir (tendência para cima ou tendência para baixo). Na Sazonalidade observa-se a flutuação periódica na série temporal durante um determinado período. Essas flutuações formam um padrão que tende a se repetir de um período sazonal para o próximo. Já nos Ciclos analisamos as longas distâncias da tendência devido fatores diferentes que da sazonalidade. Os ciclos, em geral, ocorrem durante um longo intervalo de tempo, e os intervalos de tempo entre picos sucessivos ou passagens de um ciclo não são necessariamente os mesmos. E no Movimento irregular vem ser o

movimento restante após a explicação da tendência e os movimentos sazonais e cíclicos, ruído aleatório ou erro em uma série temporal.

DECOMPOSIÇÃO CLÁSSICA

Sendo a X_t uma série temporal, podemos observar suas propriedades usando a seguinte forma de decomposição (aditiva).

$$X_t = T_t + C_t + R_t$$

Onde T_t é uma componente de tendência, C_t é uma componente cíclica ou sazonal e R_t é uma componente aleatória ou ruído. Assim, a componente cíclica se repete a cada intervalo fixo s , i.e.

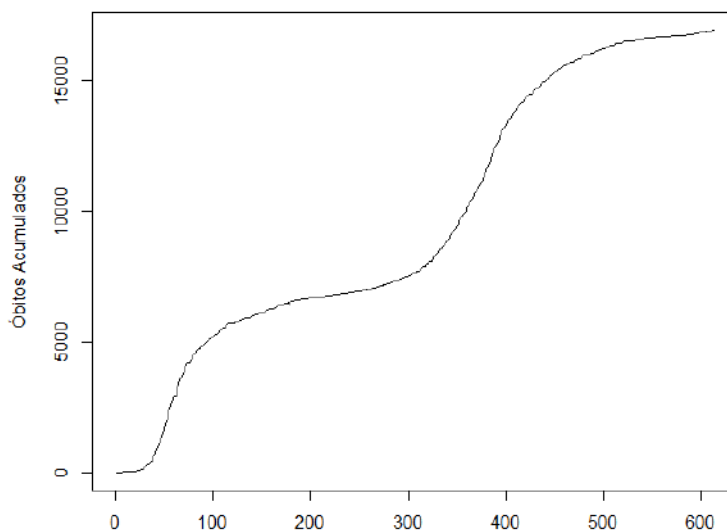
$$\dots = C_{(t-2s)} = C_{(t-s)} = C_t = C_{(t+s)} = C_{(t+2s)} = \dots$$

Logo, as variações periódicas podem ser captadas por essa componente.

DADOS NO PARÁ

Segundo a Secretaria de Saúde do Estado do Pará, assim como em várias regiões do mundo o Pará, apresentou e continua apresentando uma quantidade significativa de casos confirmados (614 mil) e óbitos (15.624 mil) até 05 de julho de 2021, em que o primeiro caso confirmado da Covid-19 foi em 01 de abril de 2020 assim como o primeiro óbito. Podemos observar os óbitos acumulados na imagem abaixo (Figura 1)

Figura 1 - Óbitos acumulados de COVID-19 por dia, após o início da pandemia em (01/04/2020) no estado do Pará.



Desde o início da pandemia a nível global, observa-se o crescimento de casos especificamente no estado. Em um dado momento há uma certa estabilidade nos casos, porém em um curto intervalo de tempo o número casos começam se elevar novamente, de fato, a chamada 1ª e 2ª onda conforme as figuras (2,3).

Figura 2 - 1ª onda no Pará

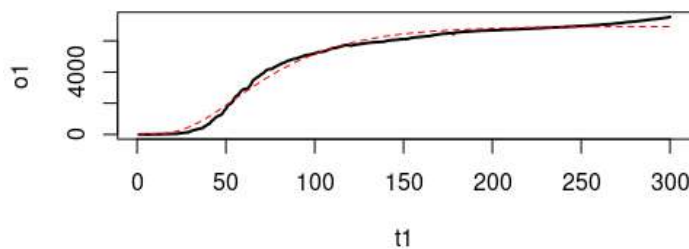
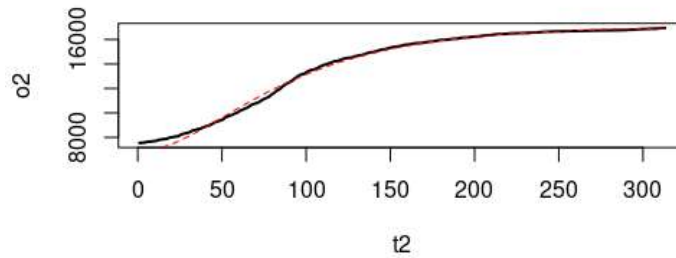


Figura 3 - 2ª onda no Pará

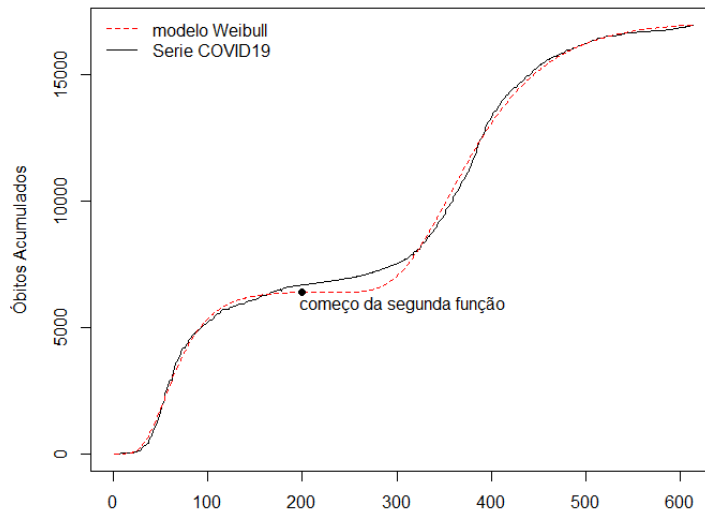


ANÁLISES

Análise de Tendência

Para fazermos uma análise da tendência da série temporal utilizamos o modelo de Weibull, o qual mais se adaptava as curvas dos dados utilizados, assim utilizamos duas funções de weibull para termos a trend de acordo com os dados da Covid-19.

Figura 4 - Análise da Trend



A distribuição de Weibull atrai a atenção em muitos campos de estudos estatísticos, uma vez que temos diversas publicações a respeito juntamente com a com algumas distribuições estatísticas esse modelo é o mais conhecido dentro da estatística moderna (RINNE, 2008, p. 3).

Esse modelo originalmente proposto por W. Weibull (1951), bem como a distribuição gamma e a lognormal, não tem um formato definido. De fato, essa distribuição pode assumir um formato que se adeque melhor de acordo com os parâmetros definidos aos dados experimentais. Desse modo, com um papel muito importante dentro do campo de análise estatística de dados experimentais e a sua grande adaptabilidade, a distribuição de Weibull tem sido aproveitada para aplicar o modelo em diversos campos de estudos.

Análise de Sazonalidade

A partir do trend analisado anteriormente, fizemos a decomposição do sinal e a tentativa da remoção da trend. Assim, vamos analisar a sazonalidade dos nossos dados para assim remover essas escalas de sazonais restando apenas o resíduo ou ruído branco. Assim, abaixo temos as figuras com as respectivas remoção das escalas. Note que na (Figura 7), temos a função menos o trend menos a primeira escala. Por outro lado, na abaixo, temos a função menos o trend menos duas escalas.

Figura 7 – Modelo sazional 1

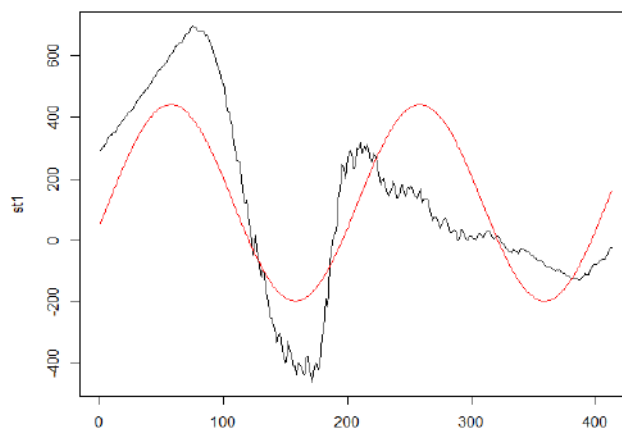
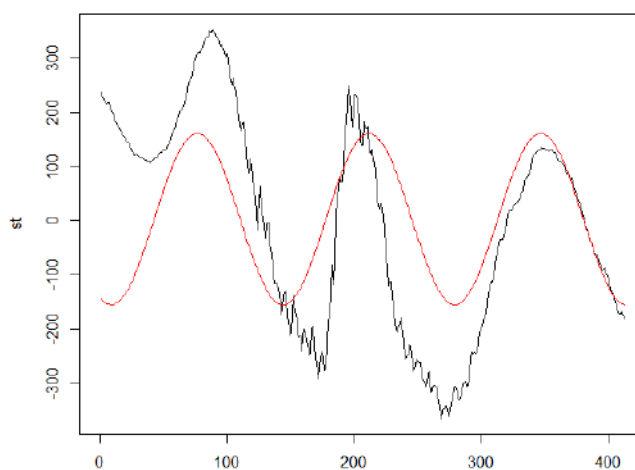


Figura 8 – Modelo sazional 2



Logo, fazendo-se o teste AIC nos dados originais sem nenhuma decomposição e nos dados após a remoção do trend e das duas escalas sazonais podemos verificar que os dados com as alterações apresentam melhor valor de AIC

Figura 9 – : Valores do teste AIC.

```
3384.428 #Dados iniciais  
3364.375 #Dados com as alterações
```

Análise de Resíduo

Portanto, feito a análise do resíduo por meio do “Box.test” no R, podemos verificar que temos um ruído branco onde o p-valor é maior que 0,05

Figura 10 – Teste Box-pierce.

Box-Pierce test

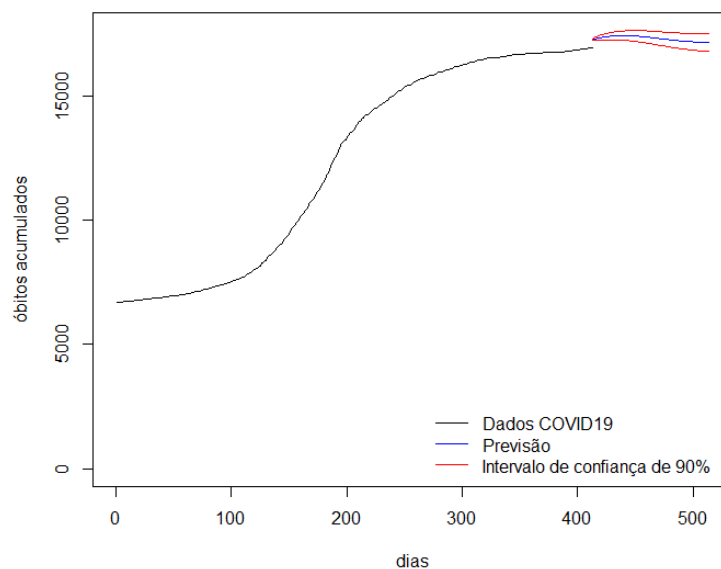
```
data: res  
X-squared = 0.0011453, df = 1, p-value = 0.973
```


PREVISÃO

Nas análises de séries temporais é possível fazer a previsão, isto é, método usado extensivamente para prever uma variável de resposta como lucro mensal, desempenho dos estoques ou índices de desemprego para um período de tempo especificado. Essas previsões são baseadas em padrões nos dados existentes. Tomamos como exemplo, o gerente de um almoxarifado pode modelar a quantidade de produtos a ser encomendada para os próximos 3 meses com base nos pedidos dos últimos 12 meses.

Desse modo, após todas as análises feitas anteriormente fizemos a previsão da Covid-19 para os próximos 100 dias a partir do último registro de óbitos confirmados até o momento da realização da previsão (04/12/2021).

Figura 11 – Previsão para 100 dias



CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das análises e decomposições realizadas na série temporal da COVID-19, percebemos que conseguimos alcançar um resultado satisfatório quanto ao objetivo de obter um ruído branco, ou seja, decompor a série temporal inicial de forma que os dados resultantes tivessem pouca correlação para que assim possamos fazer uma boa previsão. Logo, a pandemia de COVID-19 apresentou-se para o mundo como um desafio de saúde pública sem precedentes, com um impacto significativo em sistemas de saúde pública, vidas humanas e economias nacionais e mundiais. A modelagem matemática é uma ferramenta importante para estimar e prever a escala e o curso temporal das epidemias, verificando a eficácia das intervenções na pandemia e informando as políticas de saúde pública.

REFERÊNCIAS

EHLERS, R.S. Análise de Séries Temporais. Departamento de Estatística, UFPR. Disponível em <http://leg.est.ufpr.br/~ehlers/notas>. Acesso em: 21 nov. 2005.

SHUMWAY, Robert H.; STOFFER, David S. Time series analysis and its applications with R examples. 4ª ed. New York: springer, 2017.

RINNE, H. The Weibull Distribution: A Handbook. Boca Raton: Chapman Hall/CRC, 2008, p. 784.

Tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem da Matemática: uma pesquisa qualitativa

Araújo, Mirtys, loranne.a@escolar.ifrn.edu.br¹
Vieira, Francisca, nascimento.francisca@escolar.ifrn.edu.br²
Schivani, Juliana, juliana.schivani@ifrn.edu.br³

¹Aluna do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia – IFRN
Campus São Paulo do Potengi

²Aluna do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia
– IFRN *Campus São Paulo do Potengi*

³Mestra em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, professora de Educação Matemática do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia – IFRN *Campus São Paulo do Potengi*

Resumo: O presente artigo traz resultados de um projeto de pesquisa em fase de conclusão. Se debruça na perspectiva de que o docente de Matemática necessita estar a par das possibilidades de aplicativos, sites e *softwares* computacionais, que possam auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, sobretudo no contexto atual de pandemia, que evidenciou ainda mais esta necessidade entre docentes e estudantes. Nesse sentido, o produto educacional que será gerado a partir da referente pesquisa pretende amenizar barreiras de docentes no que se refere às dificuldades didáticas tecnológicas enfrentadas antes, durante e após o ensino remoto. Objetiva-se criar um catálogo qualitativo, em formato de *e-book*, com apresentação de recursos tecnológicos digitais tais como sites, aplicativos, *softwares* computacionais, além de propostas de atividades matemáticas utilizando cada recurso explorado, vídeos tutoriais com orientações de uso, auxiliando e dinamizando o tempo de pesquisa, formação tecnológica e produção de aulas por parte dos docentes de Matemática.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem da Matemática; TDIC; Aplicativos matemáticos.

INTRODUÇÃO

Os computadores e dispositivos móveis já são uma realidade na maioria das escolas, sejam elas públicas ou privadas. “A pressão social levou muitas escolas a inserir o ‘laboratório de informática’ como um apêndice, um diferencial a mais para atrair novos alunos.” (KENSKI, 2005, p.74-75). Os computadores existem, a internet está instalada, os professores e alunos possuem acesso a essas tecnologias, mas na maioria das vezes estes recursos tecnológicos não são utilizados como estratégias ou metodologias para facilitar o processo de ensino e de aprendizagem de disciplinas como a Matemática, em que normalmente a maioria dos alunos possuem mais defasagem, segundo pesquisas internacionais.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam o uso das tecnologias nas situações de aprendizagem matemática, afirmando que,

é esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes

aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p.46)

Para tanto, se faz necessário que o docente esteja em constante atualização e formação. Vale lembrar que o processo de ensino e aprendizado se dá de forma contínua. É essa formação continuada que permitirá que as tecnologias digitais façam parte do âmbito escolar como uma ferramenta metodológica no uso em sala de aula. Mas a realidade é que os professores em sua maioria ainda não se encontram totalmente preparados.

Com a pandemia do novo coronavírus que chegou ao Brasil em 2020 e que ainda assola o mundo, diversos professores tiveram dificuldades nos usos de tecnologias para a ministração das aulas. Segundo uma reportagem divulgada no G1, “quase 90% dos professores não tinham experiência com aulas remotas antes da pandemia”. (OLIVEIRA, 2020, sp).

Pensando na possibilidade de auxiliar a figura docente no processo de ensino, está sendo construído um *e-book* em que o objetivo é facilitar o trabalho do docente em Matemática, pois o professor poderá encontrar um leque de possibilidades de *sites*, *softwares*, aplicativos, com vídeos tutoriais de orientação de uso, propostas de atividades didáticas, dentre outras informações, em um só lugar.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Tecnologia e Matemática sempre caminharam juntas ao longo da humanidade (SILVA; BAIRRAL, 2019, p.30). Durante muitos séculos se usou o ábaco como instrumento de contagem; varas para cálculo de altura de monumentos inacessíveis; astrolábio para se localizar em alto mar. As tecnologias digitais surgiram para facilitar a vida humana. Então, para o ensino da matemática não é diferente. Os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que o uso tecnologia aproxima a relação do docente com o discente (BRASIL, 1998). Essa aproximação é muito importante visto que a matemática em si é considerada uma das disciplinas de difícil compreensão por diversos estudantes.

É preciso reconhecer que “as tecnologias digitais são parte do processo de educação do ser humano” (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 133) e mesmo quando os alunos possuem apenas o contato visual com figuras, animações, sons e movimentos virtuais,

a visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p.53)

Logo, o que outrora era tentado desenhar no quadro negro com giz, um pedaço de madeira simbolizando uma régua e um cadarço fazendo o papel do compasso, agora é visto de forma facilitada e dinâmica nos próprios *softwares* de apresentação.

Com a pandemia do novo coronavírus (SARS-CoV-2), as aulas presenciais foram suspensas e as atividades educativas de todos os níveis de ensino e esferas tiveram que se desenvolver no formato remoto. Foram inúmeras as adaptações e cursos relâmpagos de Formação Inicial e Continuada para professores aprendem a lidar com ferramentas tecnológicas nunca antes utilizadas, como salas virtuais de videoconferência, programas de gravação de tela de computador, mesas digitalizadoras, dentre outros recursos.

Acreditando, portanto, nas vantagens que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) trazem para o ensino e a aprendizagem da Matemática e, identificando a falta de tempo e formação continuada dos professores para utilizar esses recursos didáticos, o presente artigo traz resultados do projeto que tem por finalidade atender essa demanda emergente por formação continuada em tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem da Matemática.

METODOLOGIA

O projeto iniciou com uma pesquisa bibliográfica, reunindo inúmeros *sites*, programas, plataformas, aplicativos e *softwares* que se destinam a auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, totalizando 476 recursos tecnológicos encontrados. Com esta listagem, categorizou-se os recursos em onze grupos a saber: aritmética; geometria; funções; trigonometria; álgebra; estatística; análise combinatória e probabilidade; matemática financeira;

lógica; jogos virtuais; recursos tecnológicos interdisciplinares. Além disso, houve uma outra pesquisa bibliográfica com a finalidade de encontrar artigos, atividades, vídeos tutoriais e demais trabalhos acadêmicos produzidos a respeito de cada recurso analisado.

Após esta etapa, se explorou cada recurso, compreendendo todas as opções de ferramentas, funções e possibilidades de construções existentes. Ao longo dessa ação exploratória, se realizou-se gravação de vídeos tutoriais pelos próprios pesquisadores, além da escrita de um relatório que se constituiu em uma avaliação qualitativa descrevendo: nome do recurso; tipo do recurso; conteúdos e conceitos matemáticos que podem ser trabalhados utilizando o recurso; *link* de acesso do recurso; modo de uso do recurso; lista de vantagens; lista de limitações; proposta de atividade; *link* para acesso do vídeo tutorial e etc.

Foram produzidos vídeos tutoriais e relatórios descritivos de 90 recursos tecnológicos. Como já posto, em fase conclusão do projeto, pretende-se produzir e publicar um *e-book* com estes resultados.

CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

A pesquisa trouxe frutos positivos no que se refere a diversidade e quantidade de recursos tecnológicos disponibilizados na *internet*, de forma gratuita, para auxiliar o professor no processo de ensino e de aprendizagem de qualquer conteúdo matemático, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior.

Foram descartados 319 recursos por considerarmos ser de difícil compreensão ou manuseio, ou ainda por não estar relacionado com o ensino da matemática

No quadro 01 a seguir, pode-se observar os 90 recursos tecnológicos explorados pelo nome e sua origem.

Quadro 1 – Tipo e título dos recursos tecnológicos analisados

TIPO DE RECURSO TECNOLÓGICO E NOME	
<i>App 2048</i>	<i>App Testes Matem aticando</i>
<i>App 24 Game</i>	<i>App Transferidor</i>
<i>App 99POP</i>	<i>App Tutoriais</i>
<i>App Ábaco Vertical</i>	<i>App Ultramemory</i>
<i>App Arithmetic</i>	<i>Plataforma Class Dash</i>
<i>App Aritmética Mental</i>	<i>Plataforma Edpuzzle</i>
<i>App Brain Out</i>	<i>Plataforma Educopédia</i>
<i>App Bubble Shooter</i>	<i>Plataforma Escape Factory</i>
<i>App Calculator</i>	<i>Plataforma Goconqr</i>
<i>App Cheer Bear Puzzle</i>	<i>Plataforma Infogram</i>
<i>App Clash Of Balls</i>	<i>Plataforma Kahoot</i>
<i>App Decibelímetro</i>	<i>Plataforma Khan Academy</i>
<i>App Desafio De Fração: Jogos Matemáticos</i>	<i>Plataforma Mathigon</i>
<i>App Equate</i>	<i>Plataforma Mentimeter</i>
<i>App Fifteen Puzzle</i>	<i>Plataforma Obama- Objetos de Aprendizagem para Matemática</i>
<i>App Formas Geométricas</i>	<i>Plataforma Phet</i>
<i>App Fórmulas De Matemática -Arithmum Calc</i>	<i>Plataforma Pixton</i>
<i>App Geometria</i>	<i>Plataforma Qr-Code</i>
<i>App Geometria Descritiva</i>	<i>Plataforma Seneca</i>
<i>App Geometria Ra</i>	<i>Plataforma Story Boardthat (Histórias Montadas)</i>
<i>App Geometry Calculator</i>	<i>Plataforma Wordwall</i>
<i>App Geometry Dash</i>	<i>Site 4 Devs Ferramentas Online</i>
<i>App Gm Dice</i>	<i>Site Cokitos Jogos Educativos</i>
<i>App Hanoi 3D</i>	<i>Site Cronômetro Online (Com Site Temporizador)</i>
<i>App Heriswap</i>	<i>Site Escola Games</i>
<i>App Isolmoa</i>	<i>Site Google Maps</i>
<i>App Jogo do Bilhão</i>	<i>Site Jamboard</i>
<i>App Matemáticas</i>	<i>Site Jogo Nunca10</i>
<i>App Math Games</i>	<i>Site Matemática Multimídia</i>
<i>App Math Master</i>	<i>Site Material Dourado</i>

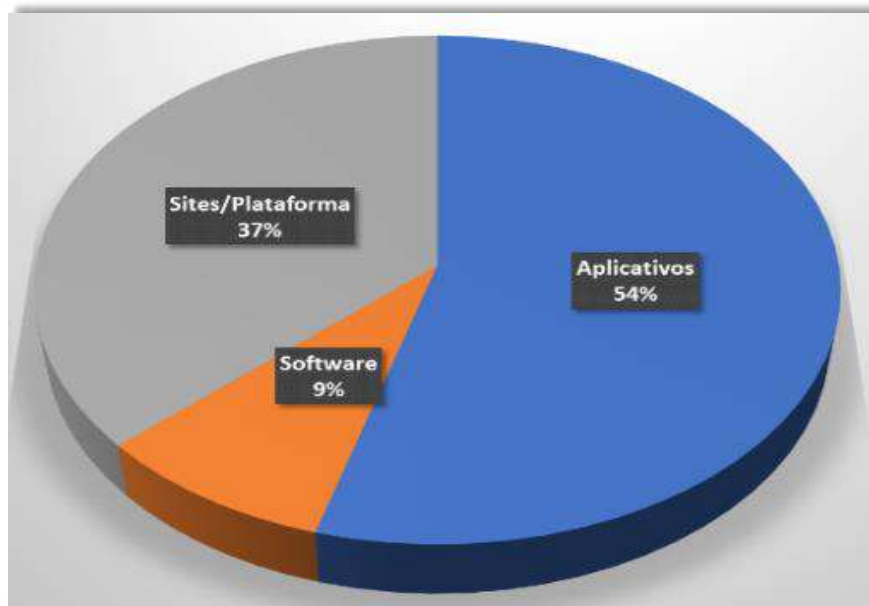
COMUNICAÇÕES ORAIS

<i>App Mathdoku</i>	<i>Site Padlet (Mural)</i>
<i>App Mather</i>	<i>Site Palavras Cruzadas</i>
<i>App Multiplicação</i>	<i>Site Plickers</i>
<i>App Percentagem</i>	<i>Site Racha Cuca</i>
<i>App Pingus</i>	<i>Site Relógio Online (Com Temporizador)</i>
<i>App Plus Minu Times Divide</i>	<i>Site Transferidor meia lua online</i>
<i>App Podomatic (Podcasts)</i>	<i>Site Wordart</i>
<i>App Pokemon Go</i>	<i>Software Cmaap Tools</i>
<i>App Prática Aritmética</i>	<i>Software Dr Geo</i>
<i>App Puzzles</i>	<i>Software Geogebra</i>
<i>App Rabbit Escape</i>	<i>Software Labirintos Da Matemática</i>
<i>App Rule Of Three</i>	<i>Software Planilhas Eletrônicas (Excel)</i>
<i>App Shift</i>	<i>Software Poly Pro</i>
<i>App Sudoku</i>	<i>Software Power Point</i>
<i>App Summation</i>	<i>Software Trigonometria</i>

Fonte: Acervo próprio, 2022.

No gráfico 01 a seguir, podemos observar que, dentre os 90 recursos tecnológicos explorados o percentual de aplicativos (recursos que são instalados e usados exclusivamente em aparelhos celulares do tipo *smartphone*), plataformas e sites (recursos que podem ser acessados de forma *on-line*, sem precisar instalar) e *softwares* (recursos que são instalados e usados exclusivamente em computadores).

Gráfico 01 – Percentual de cada tipo de recursos explorados



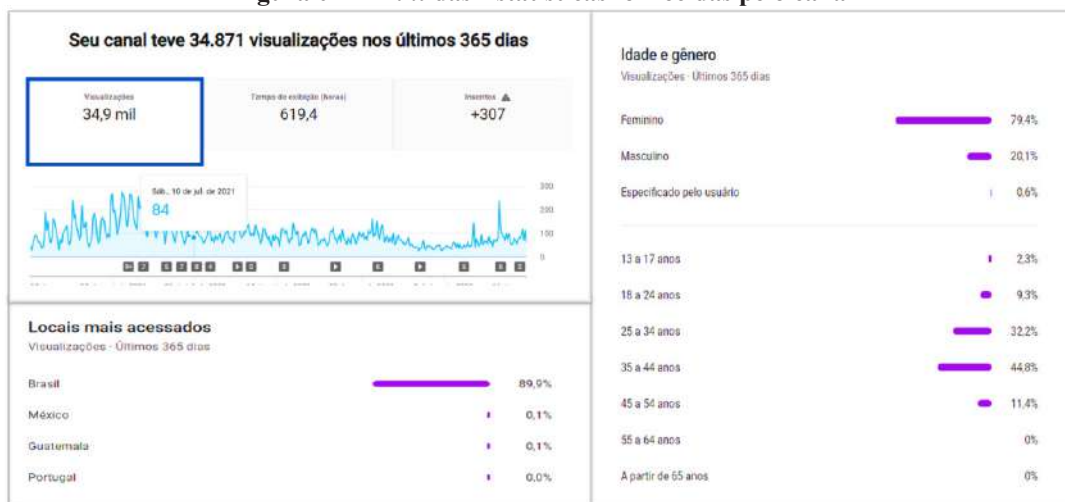
Fonte: Acervo próprio, 2022.

Desde o início do projeto, os vídeos produzidos são publicados na *playlist tecnologias digitais* do canal *LEM IFRN SPP*, no *Youtube*. Os dados fornecidos pelo canal mostram 34 871 visualizações desde o início da *playlist*. Além disso, neste período, dos internautas que visitaram o canal, a maior parte tem idade entre 45 a 54 anos representando um percentual equivalente 44,8%. Os visitantes com idade entre 25 a 34 anos totalizam 32,2% e o público entre 18 a 24 anos sendo este 9,3%, segundo dados estatísticos disponibilizados pelo próprio canal. Destas visualizações, a maioria são do sexo feminino, com 79,4% de representatividade.

Os vídeos tutoriais desta *playlist* têm como objetivo apresentar o recurso de forma prática e sucinta. uma vez que julgamos que a melhor forma de atender algumas das demandas desses docentes é com a produção de vídeos

curtos, porém, objetivos que apresentem o recurso tecnológico, explicando para que serve, onde acessa e como se utiliza. Na descrição de cada vídeo, há um *link* que direciona o visitante para a página onde o recurso digital pode ser instalado (quando arquivo executável, software ou aplicativo) ou acessado para uso imediato (quando plataforma ou site). Em alguns casos, também há *links* com propostas de atividades prontas para serem aplicadas.

Figura 01 – Print das Estatísticas fornecidas pelo canal



Fonte: Youtube, 2022.

Em face do nosso cenário de rápida evolução tecnológica, da imensa quantidade de informações e das inúmeras ferramentas de apoio ao ensino, faz-se necessário que o professor se aproprie desses recursos para facilitar, aprimorar e agregar novas formas de conduzir o seu fazer docente.

Vale ressaltar que os vídeos tutoriais e as informações nele contidas estão em constante atualização, visto a possibilidade de autores de recursos tecnológicos específicos decidirem por não mais disponibilizar o recurso gratuitamente ou ainda, tirarem o recurso de circulação. O contrário também ocorre, isto é, de novos recursos surgirem com novas funções e maior atratividade. Neste sentido, concluímos que nossas considerações nunca serão finais.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2014.

BRASIL. **PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS**, Matemática, Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>> Acesso em: 01 fev. 2021.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

OLIVEIRA, ELIDA. **Quase 90% dos professores não tinham experiência com aulas remotas antes da pandemia; 42% seguem sem treinamento, aponta pesquisa**. G1, 2020. Disponível: <<https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/07/08/quase-90percent-dos-professores-nao-tinham-experiencia-com-aulas-remotas-antes-da-pandemia-42percent-seguem-sem-treinamento-aponta-pesquisa.ghtml>> Acesso em: 01 fev. 2021.

SILVA, Elen Rosa da Conceição; BAIARRAL, Marcelo. **Ensino de geometria e tecnologias móveis**. In: BAIARRAL, Marcelo; CARVALHO, Mercedes. Dispositivos móveis no ensino de matemática: tablets e smartphones. São Paulo: Livraria da Física, 2019.

PRODUÇÕES MATEMÁTICAS INTERDISCIPLINARES: EXPOSIÇÃO DE AÇÕES EXTENSIONISTAS VOLTADAS A VALORIZAÇÃO CULTURAL DA NEGRITUDE E DOS POVOS INDÍGENAS

Conceição, Gabriel Viana da, vianagabriel2001@gmail.com¹
Cunha, Débora Alfaia da, alfaiadacunha@gmail.com²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo: *O saber matemático é um conhecimento indispensável na formação do indivíduo. Frente a essa perspectiva, busca-se desmistificar a matemática como um saber distante da realidade, acessado apenas por algumas ilustres pessoas, o que obviamente é um grande equívoco. Assim, o texto volta-se para a exposição das ações extensionistas do projeto Ludicidade Africana e Afro-Brasileira (LAAB), provocando um olhar mais contextualizado das noções matemáticas nas culturas afro-brasileiras e dos povos indígenas. Tal projeto vincula-se ao Campus Universitário da Universidade Federal do Pará (UFPA) em Castanhal do Pará, e realiza ações extensionistas desde 2011. No ano de 2019, voltou-se as atividades para o âmbito da matemática, desde produção de materiais didáticos, atividades práticas, como jogos de origem africana e outros elementos. A elaboração das atividades fundamenta-se nas contribuições bibliográfica sobre a matemática do continente africano de Paulus Gerdes (2012) e no estudo da etnomatemática de Ubiratan D'ambrósio (1996; 2005). Além disso, todos os momentos se fundamentaram nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e caminham de acordo com a Lei 11.645/08. Durante a pandemia COVID-19, as ações extensionistas passaram a utilizar mais elementos computacionais, como ambientes virtuais e o Geogebra, para maximizar a interação em eventos e cursos à distância. Todas as diferentes ações, em ambientes reais e virtuais, tiveram por horizonte a compreensão de que as aulas de matemática são espaços que podem e devem ser pensados para vivenciar a diversidade cultural e combater o preconceito em suas diferentes e perversas formas.*

Palavras-chave: *etnomatemática, cultura, interdisciplinaridade, contexto social.*

INTRODUÇÃO

Entende-se o saber matemático como um elemento importante na formação dos indivíduos, possibilitando correlacioná-lo com seu meio físico e social para melhor compreender o mundo em sua volta, porém, no âmbito educacional, a matemática acaba sendo tratada, na maioria das vezes, como uma completa abstração, de problemas imaginários sem vínculo com a realidade. Contudo, o processo de ensino e aprendizagem da matemática alinhado com o contexto social dos indivíduos, tais como eventos do dia-a-dia, ajuda a descobri-la como uma ciência mais “humana” fornecendo uma base lógica mais estruturada sob a diversidade de áreas encontradas dentro da matemática.

Ademais, observa-se na construção histórica da matemática a ideia de que se trata de uma ciência para poucos “iluminados”, principalmente pelo caráter étnico, tendo como principal essência a atribuição aos povos europeus a única origem e desenvolvimento destes conhecimentos. Essa conclusão trata-se de um grande equívoco, partindo do fato que os conhecimentos matemáticos começam a se desenvolver a partir da necessidade dos seres humanos de

pensar logicamente. Articulada as necessidades da vida, a matemática surge, como saber, todavia, com níveis de formalização diferentes em virtude da diferença de complexidade das relações sociais de cada grupo. Assim, “é claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da ‘sobrevivência do mais apto’ a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos” Boyer (1906, p. 1).

Partindo dessa perspectiva, o projeto Ludicidade Africana e Afro-Brasileira (LAAB), vinculado à Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus Universitário de Castanhal, propõe desde 2011 atividades e vivências lúdicas para a comunidade do município de Castanhal e região. Ordinalmente, voltado ao estudo de matemática na cultura africana e também dos povos indígenas, elaborou *e-books* e diversos materiais didáticos como tabuleiros de jogos de origem africana, minicursos e oficinas de matemática culturalmente contextualizadas, promovendo o respeito à diversidade cultural e no combate ao preconceito racial.

Dessa forma, visa-se apresentar as ações do projeto LAAB desde o ano de 2019, no qual as atividades voltadas para o ensino de matemática foram mais enfatizadas, inclusive no período pandêmico da COVID-19. Além disso importa destacar que as atividades foram realizadas amparadas pela lei 11.645/08 que torna obrigatório relacionar o currículo escolar com as culturas afro-brasileira e dos povos indígenas, bem como as contribuições da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que destaca também a importância da matemática aproximada à realidade dos alunos e as urgências sociais, como o enfrentamento do preconceito racial.

APORTE TEÓRICO

Em caráter geral, para elaborar as formações e momentos lúdicos, utilizou-se as contribuições de Ubiratan D’Ambrósio (1996; 2005) com o estudo denominado etnomatemática que consiste na matemática tratada com uma visão mais contextualizada na diversidade cultural dos diferentes povos. Outro autor referenciado é Paulus Gerdes (2008; 2010; 2012) e suas pesquisas sobre a variedade de conhecimentos matemáticos provindos da cultura dos povos africanos.

Quanto aos recursos utilizados, como jogos lúdicos, as contribuições de Cunha (2016; 2019) foram essenciais, com uma grande variedade de jogos catalogados como o *Dosu* e o *Êxodo*. Para Cunha (2019), os conhecimentos matemáticos necessitam ser abordados de maneira culturalmente contextualizada e de forma a melhorar as relações humanas. Além disso, foi utilizado Neves e Cardoso (2015) para embasar sobre o patrimônio cultural do povo Tembétchahara, do estado do Pará.

Em relação aos assuntos específicos de matemática foram utilizados Gerdes (2012), para contextualização da simetria do continente africano, através da análise da *(lu)sona*, que é uma arte de se contar histórias a partir de gravuras na terra. Foram utilizados Lopes (2008) e Brunehilde, Cordeiro e Oliveira (2018) para basear assuntos sobre a probabilidade. Para esses autores é muito importante o estudo de probabilidade e estatística, pois garante uma base intelectual firme tanto na área de matemática como nas outras áreas. Para falar de geometria, utilizou-se Gerdes (2012), o qual faz uma abordagem sociológica crítica, defendendo que a geometria nasceu da transformação da natureza pelo trabalho humano, pois esse exige um duplo movimento: observar e operar sobre a realidade, compreender e transformar.

É importante destacar que todas as atividades propostas se fundamentaram nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que, nas competências gerais destaca a importância do currículo escolar “valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BNCC, 2017).

METODOLOGIA

Metodologicamente, os momentos se iniciam com a análise bibliográfica de autores que observam as relações humanas, aqui destacadas, como base contextual para a exploração da matemática e que faz a aproximação desta ciência de forma mais dinâmica, promovendo também a exploração cultural dos diferentes povos contidos na sociedade, valorizando essa produção de saberes. Além disso, faz-se relações destas bibliografias com os documentos voltados ao currículo escolar brasileiro, tais como a BNCC.

Em consequente, promove-se momentos lúdicos e culturalmente contextualizados com as variadas classes da educação escolar no município de Castanhal e região, graduandos, alunos da educação básica, professores em exercício tanto dos anos iniciais do fundamental – pedagogos – quanto nos anos finais – professores de matemática – sempre realizando coletas de dados para fins de pesquisa acadêmica e realizando a produção de *E-books* e materiais didáticos acessíveis a quaisquer pessoas, bem como a submissão de trabalhos em eventos acadêmicos.

Entre os anos de 2020 e 2021, a pandemia da COVID-19 obrigou todos ao isolamento social. Nessa perspectiva, se fez necessário buscar formas de se conectar às pessoas à distância e, por meio de recursos digitais, isso se mostrou possível. Na pandemia, a atuação se fez por meio de videoconferências, utilizando plataformas como o Google Meet para propagar minicursos/oficinas que foram voltadas para o ensino de probabilidade, simetria e geometria plana. Nesse período, utilizou-se também o Google forms para elaboração de inscrições, avaliações e a realização de coleta de dados.

No que rege a elaboração do material didático e as atividades realizadas no isolamento social, foram abordados assuntos como a probabilidade contextualizada nos jogos de tabuleiros africanos, dados egípcios e a caída de mão do jogo de búzios, provinda da cultura afro-religiosa, utilizando adaptações de questões mais tradicionais como a jogada da moeda como probabilidade binária, que no contexto da oficina foi substituída por búzios, a fim de mostrar a possibilidade de trabalhar esses elementos dentro da matemática fazendo uma breve alusão ao contexto que está inserido. Além desses recursos, foi utilizado o *Scratch*, um software que tem uma linguagem de codificação com uma interface visual simples voltado para crianças que permite que os jovens criem histórias, jogos e animações digitais. Segundo o site da plataforma, o *Scratch* é projetado, desenvolvido e moderado pela Fundação *Scratch*, uma organização sem fins lucrativos.

No momento voltado à simetria, utilizou-se os *(lu)sona* como elemento explorado para basear o estudo, tais jogos são característicos da ludicidade do povo *Thucokwe*, da comunidade *Cokwe*, originários do Continente Africano e presentes em Angola, Zâmbia, Congo e Zaire. São como diagramas traçados na terra, sobre malha pontilhada, feita previamente com a ponta dos dedos, que se articulam à memória, ancestralidade e a tradição oral *Cokwe*, essa arte consiste no conto de histórias ou representação de algo presenciado pelo autor das gravuras, na medida em que conta ou representa algo, traceja ao redor dos pontos, com os dedos, linhas coniventes com o que relata. Frente a isso, utilizou-se esses diagramas para elaborar um material voltado à análise simétrica das construções e elaborado atividade sobre simetria de reflexão ao ponto, ao eixo e simetria de rotação (radial), como recurso digital foi utilizado o software *Geogebra* que é um programa dinâmico que possibilita utilizar animações e dá a elas um caráter “ao vivo” das construções analisadas, dentre muitas outras funções, sendo muito útil na situação em questão.

Nessa sequência, elaborou-se também uma oficina voltada ao estudo de geometria plana, fundamentada na contextualização com as culturas da pintura corporal do povo indígena Tembé-Tenetehara, do estado do Pará e da arte de pintura mural do povo *Ndebele* ou *Ndembele* que compõe uma das menores tribos da África do Sul, presentes nas províncias de *Mapoch* e *Mpumalanga*, em contrapartida, suas manifestações artísticas se destacam nacional e internacionalmente. Além dessas culturas, também foi estudado a geometria dos tabuleiros de jogos africanos. Estudos básicos como a percepção de ponto, reta e plano foram trabalhados em cada uma das culturas apresentadas, bem como a percepção de ângulos e definições entre agudo, reto, obtuso, raso, côncavo e de volta completa (cheio), além do reconhecimento de polígonos, regulares e irregulares. Todos esses assuntos foram tratados sobre a plataforma do software *Geogebra* permitindo uma visualização demonstrativa mais didática dos estudos.

No retorno ao ensino presencial, em fevereiro de 2022, elaborou-se uma oficina de probabilidade com discentes da faculdade de pedagogia, do polo universitário da UFPA em Mãe do Rio do Pará, no qual é administrado pelo campus universitário de Castanhal. O momento foi realizado em paralelo à disciplina de Probabilidade e Estatística, na qual foram utilizadas adaptações jogos de origem africana e dados egípcios.

Partindo de março de 2022, foca-se na elaboração de novos matérias, novas vivências e lançamentos de novos *E-books*, bem como o término de um curso voltado ao letramento digital e matemático utilizando a plataforma *Geogebra* realizado com professores que exercem suas funções entre o primeiro e o quinto ano do ensino fundamental, vivência que será utilizada para embasar uma tese de mestrado de um dos membros do projeto de extensão.

Em caráter geral, as formações em 2019 voltaram-se para a manipulação de recursos como jogos, dados africanos e focaram-se nas parcerias com as secretarias de educação dos municípios para levar esses conhecimentos culturalmente contextualizados aos mais variados lugares. Durante a pandemia da COVID-19 obtiveram um excelente desempenho nas adaptações necessárias que foram feitas e estava mais voltada a professores em formação (graduando em licenciaturas) e professores já formados, além disso, reconheceu-se que o único ponto negativo foi a carência de vivências táteis e presenciais com os materiais, porém as formações ultrapassaram os limites geográficos do estado do Pará, tendo participantes de muitas localidades do país. Dessa forma, pretende-se elaborar esses momentos de forma presencial com as crianças e também com os professores, além da utilização dos recursos digitais conhecidos durante a quarentena.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como dito, precisou-se fazer grandes mudanças nos formatos das atividades entre os anos de 2019 ao começo de 2022, tais mudanças tiveram pontos positivos como adquirir alcance nacional através do modelo à distância, em contrapartida, privou-se de vivencia-los de uma forma mais abrangente.

Em 2019, nos momentos lúdicos com as crianças, percebeu-se um desempenho acima do comum na maioria das turmas, as crianças buscavam alguma lógica a partir das jogadas nos tabuleiros de sementeira, por exemplo, fazendo observações ligadas ao princípio da contagem para poder capturar as sementes do seu colega adversário. Além disso, nos jogos que envolviam a sorte, era observado, por exemplo, que algumas crianças percebiam que os dados africanos tinham uma probabilidade maior de cair um número e menor de cair outro.

Nas extensões realizadas na pandemia, o modelo de avaliação era direto, por meio de questionário com os participantes. Que atribuíram conceitos Bons e Excelentes às formações.

Na formação sobre probabilidade, nomeada “Atividades matemáticas interculturais para o ensino fundamental: estudo de probabilidade com dados e jogos africanos.” Teve a participação de 35 pessoas, das quais 68,6% apontaram não ter visto nenhuma disciplina que enfatizasse a valorização da negritude na pergunta “Você viu alguma disciplina na sua formação (magistério ou graduação) que enfatizasse a valorização da negritude?”, dado que retrata a exclusão da cultura negra nos assuntos tratados nas universidades. Posteriormente, na pergunta “Você já havia participado de algum curso ou minicurso acerca dessa perspectiva de etnomatemática do ensino de probabilidade?” 94,3% dos cursistas afirmaram não terem visto essa abordagem. Ademais, 97,1% dos participantes afirmaram que o curso trouxe alguma contribuição para suas práticas em relação a matemática. Em seguida foi feita atribuição do conceito ao curso, que recebeu de 85,3% dos participantes o conceito “Excelente”, os outros 14,7% atribuíram o conceito “Bom”.

No curso intitulado “Atividades matemáticas interculturais para o ensino fundamental: estudo de simetria na (lu)sona africana”, participaram 46 pessoas e foi indagado aos cursistas “Você viu alguma disciplina na sua formação (magistério ou graduação) que enfatizasse a valorização da negritude?” no qual 54,3% afirmaram não ter visto nada em sua formação voltado à cultura negra. Em outra pergunta que dizia “Você já havia participado de algum curso ou minicurso acerca dessa perspectiva do conceito de simetria ou de outros conceitos da matemática?” 93,5% dos participantes afirmaram não ter contato com nenhum curso que abordasse a matemática dessa forma, algo extremamente delicado, partindo da perspectiva que a cultura negra é fortíssima no Brasil. 100% dos participantes afirmaram que o curso trouxe alguma contribuição para a formação deles, os quais 76,1% atribuíram o conceito “Excelente” ao curso e o restante atribuiu o conceito “Bom”.

No último curso online na pandemia, sobre geometria, com o título “Atividades matemáticas interculturais para o ensino fundamental: geometria plana na arte africana e no grafismo Tembê”, teve 68 participantes, no qual foi explorado as pinturas corporais do povo Tembê, a arte mural do povo *Ndbele* e a geometria presente em alguns tabuleiros de jogos africanos. Na avaliação, via questionário, ao ser perguntado se “Você viu alguma disciplina na sua formação (magistério ou graduação) que enfatizasse a valorização da negritude ou dos povos originários?”, 69,1% dos participantes afirmaram não ter visto alguma disciplina voltada ao estudo dessas culturas. Quando perguntado sobre a participação dos cursistas em outros cursos que abordassem o ensino de matemática contextualizado nas culturas em questão, 91,2% deles disseram que não haviam participado de nada semelhante, podendo ser percebido, baseado nesses dados, a importância que todas as formações tiveram. Analisando todo caráter do curso, na visão dos participantes, tal formação foi conceituada com 73,5% de “Excelente” e 22,1% com “Bom”.

Frente a essas considerações, entende-se que os momentos elaborados na pandemia alcançaram os resultados desejados e geraram dados que evidenciam a importância da elaboração de formações que visam um caráter de contextualização nas culturas aqui apresentadas, desenvolvendo uma matemática consistente de valorização cultural e respeito às diversidades.

No ano de 2022, voltando ao contato presencial com a comunidade, foi realizado um minicurso intitulado “Atividades matemáticas interculturais para o ensino fundamental: estudo de probabilidade com dados e jogos africanos”, que teve 26 participantes de uma turma de graduação em pedagogia e foi avaliado via questionário. Ao perguntar aos graduandos “Você viu alguma disciplina na sua formação (magistério ou graduação) que enfatizasse a valorização da negritude?” 64,5% marcaram que viram, mas a maioria afirmou ter sido somente em Antropologia. Neste minicurso, 100% dos discentes não haviam participado de outro momento abordando a probabilidade com elementos da cultura afro, acrescentando que esse mesmo percentual afirmou que o minicurso trouxe uma nova percepção de suas práticas e tratamento desta cultura, principalmente no que rege o saber matemático. Na avaliação conceitual, 69,2% avaliaram o minicurso com “Excelente” os outros 30,8% avaliaram com “Bom”.

CONCLUSÕES

Observou-se, por meio das avaliações através do período analisado, que é de fundamental importância abordar a matemática de forma contextualizada nas culturas dos variados povos, além de abordar o respeito a essa variância, pois é identificado muitos preconceitos norteando a sociedade, ideais que precisam ser desconstruídos para que os grupos sociais possam viver em harmonia. Entende-se que no meio educacional não pode ser diferente, é necessário que as abordagens visem desconstruir ideais preconceituosos, que firam a liberdade do indivíduo.

Além disso, em se tratando de cultura negra e dos povos indígenas no Brasil, se observa que existe uma vasta riqueza de conhecimentos matemáticos contidos no cotidiano desses povos, o ato da pintura corporal, construções arquitetônicas, jogos, danças e muito mais. Ou seja, é muito pertinente explorar esses conhecimentos principalmente com os indivíduos da sua própria cultura nas escolas quilombolas e indígena, por exemplo.

Ademais, no que norteia o ensino de matemática, observa-se que ela é muito sobressaltada das outras ciências, pois é considerada, erroneamente, uma ciência complicadíssima, na qual apenas poucas pessoas têm acesso, além disso, muitos professores acabam reforçando essa ideia relacionando a matemática apenas a cálculos intrincados e demonstrações gigantescas que o estudante pouco aproveita e tem por finalidade apenas se vangloriar a partir do domínio desta pequena parte desta ciência, metodologia que Frago (2001) denomina como algebrismo.

Por todo o exposto, conclui-se que o ambiente que se discute conceitos matemáticos pode ser um meio, no qual se discute valorizações de culturas, contextos históricos e eventos cotidianos, modelando o estudo de maneira a se encaixar na realidade dos indivíduos, promovendo conscientização e desmistificando o ensino de matemática, mostrando que não é algo inalcançável, que está mais perto do que se pensa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017.

BRUNEHILDE, Carina; CORDEIRO, Nilton José; OLIVEIRA, Francisco Robson . Jogando com Probabilidade e Estatística, 2018.

CUNHA, Débora Alfaia da. Brincadeiras africanas para a educação cultural. Castanhal, PA: Edição do autor, 2016.

CUNHA, Débora Alfaia da. Mancalas e tabuleiros africanos [recurso eletrônico]: contribuições metodológicas para educação intercultural. 1. ed. -- Castanhal, PA : Ed. do Autor, 2019.

CHAVES, A. C.; CUNHA, D. A.; CONCEIÇÃO, G. V. Sona africana na aula de matemática: estudos de simetria em um contexto de valorização da negritude. In: Congresso Brasileiro de Pesquisadores/ as Negros/as, 10. 2020, Curitiba. Anais Eletrônicos. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2020. p. 183-190.

CONCEIÇÃO, G. V.; CUNHA, D. A.; CHAVES, A. C. Entre búzios, dados egípcios e tabuleiros: noções de probabilidade por meio do lúdico africano. In: Congresso Brasileiro de Pesquisadores/ as Negros/as, 11. 2020, Curitiba. Anais Eletrônicos. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2020. p. 398-405.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática. Da Teoria à Prática. 7ª Edição. Campinas: Papyrus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005.

GERDES, P. Incorporar ideias matemáticas provenientes da África na educação matemática no Brasil? Quipu, 14 (1), 2012.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. Cadernos CEDES, v. 28, p. 57-73, 2008.

NEVES, Ivânia dos Santos; CARDOSO Ana Shirley Penaforte. Patrimônio Cultural Tembé-Tenetchara : terra indígena alto rio Guamá. Belém : Iphan-PA, 2015.



MODELO MATEMÁTICO PARA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE TORRES DE TRANSMISSÃO DE SINAL CELULAR

Gomes, Herminio Simões, herminio.gomes@gmail.com¹
Gomes, Cristiane Ruiz, cris.ruiz.gomes@gmail.com¹²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Ceará

Resumo: Este artigo propõe um modelo matemático para localização ótima de torres de transmissão de sinal celular. A otimização proposta tem como objetivo maximizar a área de cobertura de sinal. Com isso mais usuários serão atendidos restrito a um padrão mínimo de qualidade de sinal. Para validar o modelo foram feitas campanhas de medição em 44 pontos em um cenário residencial no município de Castanhal-PA, nas frequências de 1800 MHz e 2600 MHz. As saídas do modelo fornecem a potência recebida, a perda média e a localização ótima da nova torre a ser instalada.

Palavras-chave: Modelo Matemático, Otimização, Radio Propagação, Classificador KNN.

INTRODUÇÃO

Os fenômenos do eletromagnetismo foram descritos inicialmente, no século dezenove, por James Maxwell e desde então muitos progressos tecnológicos decorrentes deste fenômeno tem ajudado a humanidade nas mais diversas áreas. Entre essas áreas, as telecomunicações sem fio ocupam um destaque sem paralelo. As comunicações móveis (celulares) e serviços de internet sem fio (wireless) demandam uma continua melhora para atender a clientela cada vez maior e mais exigente por bons serviços (TAUFIQUE, 2017). A necessidade de uma melhor compreensão da propagação dos sinais nos diversos ambientes é fundamental para a construção de modelos. Com estes modelos é possível promover melhorias nos sistemas de transmissão-recepção.

A validação de modelos, em especial de modelos empíricos, é um dos principais passos para um estudo mais aprofundado relacionando o sinal propagado com o seu ambiente de propagação. Este artigo tem como objetivo validar o modelo proposto por Gomes et al. (2020), mas em um cenário diferente daquele inicialmente proposto. O modelo aqui proposto é baseado na técnica KNN (K-nearest-neighborhood) (MURPHY, 2012), onde cada ponto medido do ambiente estudado está relacionado com seu espaço vizinho, se há arborizações, edificações ou não nas proximidades. Para isso o mapa do ambiente deve ser discretizado em pequenos quadrados para se fazer um primeiro ajuste para se contemplar locais não medidos. No presente trabalho o ajuste inicial foi feito usando-se uma pequena rede neural radial de base. Este ajuste inicial mostrou bons resultados já que o ambiente não possui pontos *outliers*.

MODELO PROPOSTO

O modelo proposto por Gomes et al. (2020) usa padrões de frequências para determinar o comportamento do sinal com a finalidade de o modelo ser utilizado em frequências que não foram medidas. As curvas de tendência de propagação foram traçadas para as frequências medidas de 521 MHz, 2100 MHz e 2600 MHz.

Primeiramente, para cada frequência medida, foi gerada uma curva de tendência logarítmica expressa na forma:

$$y = a + b \ln(x)$$

Onde y é a curva de tendência de potência recebida em uma frequência de dados, x a distância ao ponto de referência e a $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, i = 1,2,3$ são parâmetros determinados por ajuste de mínimos quadrados lineares. Para uma frequência diferente daquelas que são padrões pode-se calcular tanto \mathbf{a} como \mathbf{b} usando uma interpolação parabólica a partir dos $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, i = 1,2,3$. Isso é sempre possível pois as frequências utilizadas estão sempre entre os valores 521 MHz e 2600 MHz, além do mais os valores obtidos para os parâmetros $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, i = 1,2,3$ são bem comportados.

Posteriormente, é realizada a discretização e categorização do cenário em estudo a discretização é realizada dividindo-se o mapa da região em pequenos quadrados. Cada pequeno quadrado do mapa possui uma característica própria, podendo conter vegetação, edificação ou sem vegetação e sem edificação (são as ruas) temos, portanto, três características para um classificador numérico. O classificador K-Nearest Neighbors (KNN) foi utilizado para classificar os quadrados do grid que não possuíam uma classificação prévia de vegetação e edificações.

Para o classificador KNN utilizou-se um conjunto de treinamento para determinar a classe de um elemento que não pertence ao conjunto de treinamento, o classificador KNN procura os K elementos do conjunto de treinamento que estão mais próximos do elemento desconhecido, ou seja, possuem a menor “distância”. Verifica-se quais classes desses elementos K são as classes mais frequentes. Esta classe é atribuída ao elemento desconhecido (MURPHY, 2012). Aqui, foi utilizada a métrica mais comum, que é a distância euclidiana, dada por:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pertencem a \mathbb{R}^n .

Por fim, o cálculo da intensidade do sinal recebido em cada ponto depende da soma total das perdas em cada quadrado no trajeto entre o ponto (quadrado) considerado e a torre de transmissão. Cada ponto medido está a uma distância diferente da antena transmissora, o que significa que há a necessidade de determinar a) quantos e b) que tipos de quadrados foram cruzados.

A função de perda ou potência recebida depende do número de pontos cruzados e, portanto, da distância. Assim, esta função pode ser expressa pela fórmula em (3):

$$\text{Perda}_{\text{ponto}} = F(\sum(\text{Perda em cada quadrado atravessado}))$$

Neste trabalho a função F é a função identidade, ou seja, a perda no ponto considerado é a soma das perdas no trajeto do sinal. Como o cenário consiste em um mapa com uma malha de discretização, uma linha reta entre dois pontos arbitrários no mapa pode ter uma linha irregular ou serrilhada, em forma de escada. O que importa para os propósitos deste estudo é contar quantos e quais tipos de quadrados foram atravessados pela linha acima mencionada, que liga o transmissor ao ponto medido, isto é feito para se calcular a perda de potência decorrente do caminho percorrido pelo sinal.

Um sistema linear de equações foi formado por meio dos dados de medição e do número característico de cada tipo de quadrado utilizado. Então há uma equação do sistema para cada ponto medido. N pontos medidos, implica que existem N equações, O número de colunas do sistema é igual ao número de características consideradas no classificador, no presente caso são três. As equações do sistema são da forma:

$$q_{i,1}\alpha_1 + q_{i,2}\alpha_2 + q_{i,3}\alpha_3 = b_i, \quad i = 1, \dots, N$$

com: α_j : perdas em cada tipo de quadrado a ser calculado, estes são os parâmetros do ambiente; q_{ij} : número de cada tipo j do quadrado cruzado na Equação i ; b_i : intensidade do sinal recebido no ponto i proveniente dos dados medidos. Este sistema é incompatível. Uma solução de mínimos quadrados foi calculada para se obter os parâmetros do ambiente.

CAMPANHAS DE MEDIÇÃO

As medições foram realizadas nas bandas de 1800 MHz e 2600 MHz, utilizando o aplicativo Android Network Cell Info instalado no dispositivo móvel Motorola One, a fim de monitorar a intensidade do sinal recebido em dBm. Este aplicativo é uma ferramenta de medição e monitoramento de sinal que suporta diversas redes celulares. As medições foram realizadas em uma região privada (condomínio), localizada na cidade de Castanhal no estado do Pará-Brasil, com área de aproximadamente 0,33 km². Os dados foram coletados a partir de $N = 44$ pontos. O dispositivo móvel utilizado para obter o sinal foi conectado a diferentes redes. A torre Estação Rádio Base (ERB) mais próxima da região está localizada em (1,282137°S, 47,949870°W). A Fig. 1 mostra a imagem de satélite contendo os locais de medição (marcador verde) e a torre de transmissão mais próxima (marcador vermelho).

Figura 1. Cenário sob estudo. Torre de transmissão (marcador verde), pontos de medição (marcadores vermelhos)



Fonte: Elaborado pelos autores

MODELO AJUSTADO

O modelo de determinação da localização ótima para instalação de novas torres, maximizando cobertura e minimizando perdas, foi ajustado e aplicado em um cenário diferente do original, para teste e validação.

A área do condomínio residencial foi dividida em uma malha de 30 por 16 quadrados, cada um com 29,5 m de lado. A Fig.2 mostra o cenário em estudo com a rede. A cada um dos quadrados foi atribuída uma característica numérica. Número 1 se for um local aberto, número 2 se for um local com construções baixas e 3 se for um local com alguma arborização.

Em seguida, foi feito um mapa das potências recebidas para cada ponto da grade usando um regressor generalizado (função *newgrnn* do Matlab®). Assim, foi possível estimar um valor de potência para cada quadrado da rede.

Figura 2. Cenário com grid

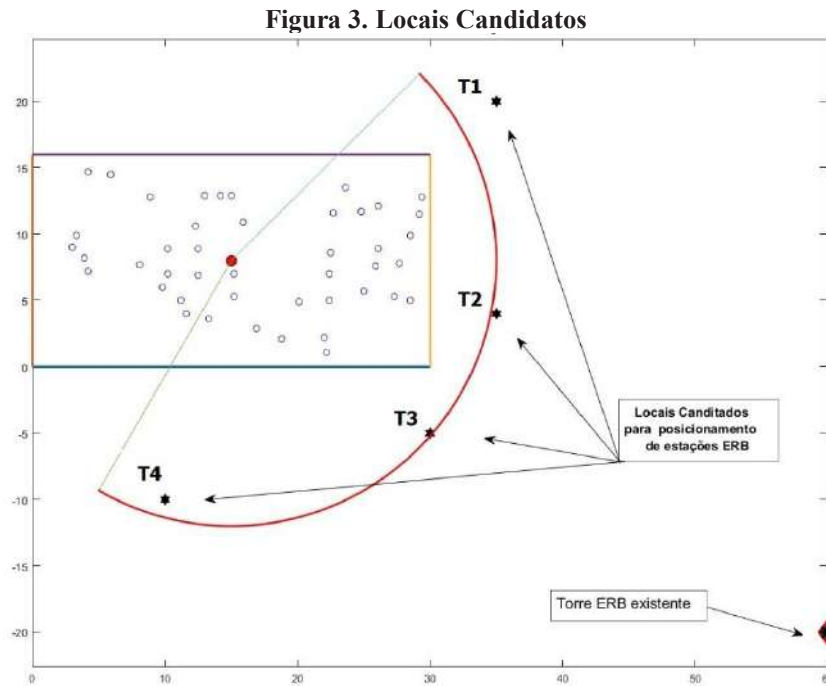


Fonte: Elaborado pelos autores

Assumindo que o sinal sofre interferência do ambiente, assumiu-se que a quantidade de quadrados cruzados e suas características estão relacionadas às perdas até o quadrado considerado. A perda em cada ponto foi calculada da torre de transmissão até o ponto da rede, contando-se o número total de cada característica cruzada naquele quadrado. Isso foi feito para todos os 480 pontos da grade.

Utilizando (4) para o caso em estudo, montou-se um sistema de 44 equações com 3 incógnitas, que são: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, parâmetros do ambiente. A otimização consiste em determinar a menor perda total dentro da área de estudo, contando todas as situações possíveis.

Neste trabalho foram considerados quatro possíveis locais candidatos, estes foram localizados há uma distância aproximada de 590 m do centro do condomínio. A Fig. 3 mostra a localização das torres em relação ao condomínio.



Fonte: Elaborado pelos autores

Com os alfas calculados, foram obtidos dois mapas de cobertura, um para cada nova torre colocada. Os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, são respectivamente 2,11, 2,35 e 1,14.

Para determinação da melhor posição de uma ERB, foi calculada a perda média para cada torre considerada. A Tabela 1 apresenta os resultados.

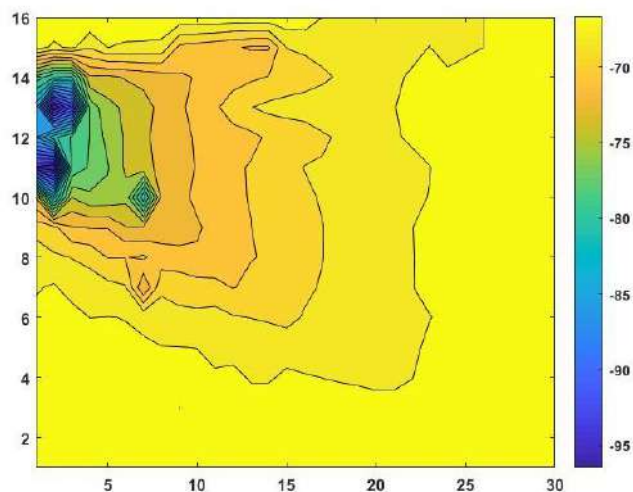
Tabela 1: Perda média calculada para cada cenário considerando cada torre individualmente.

Torre ERB	Perda Média (dB)
T1	59,74
T2	37,52
T3	44,17
T4	49,03

Da Tabela 1, observamos que o cenário que apresenta menor perda média é para a torre T2.

A Fig. 4 apresenta a distribuição de potência recebida estimada para recepção celular para a torre T2 (melhor posição). A coloração amarela indica boa intensidade de sinal enquanto as colorações azuladas indicam uma intensidade baixa de sinal provocando uma recepção ruim. A escala lateral é dada em dBm.

Figura 4. Distribuição da potência (dBm) recebida para a torre T2.



Fonte: Elaborado pelos autores

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um modelo matemático para determinar a localização ótima de uma ERB, baseada em modelo no classificador KNN, bem como a metodologia associada à aplicação do modelo. Os resultados se apresentam coerentes com os dados determinados através da campanha de medições realizada. Os resultados também mostram que podemos obter diferentes previsões de sinal dependendo da localização das torres, facilitando a escolha final da instalação considerando o objetivo de maximizar a área de cobertura do sinal.

Para trabalhos futuros, pretende-se realizar uma nova campanha de medição em cidades litorâneas e aplicar o modelo a esses cenários, a fim de verificar as possíveis diferentes influências na degradação do sinal.

REFERÊNCIAS

GOMES, Cristiane R. et al. Optimum Positioning of Base Station for Cellular Service Devices Using Discrete Knowledge Model. *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, v. 19, p. 428-443, 2020.

TAUFIQUE, Azar et al. Planning wireless cellular networks of future: Outlook, challenges and opportunities. *IEEE Access*, v. 5, p. 4821-4845, 2017.

MURPHY, Kevin P. *Machine learning: a probabilistic perspective*. MIT press, 2012.

EVIDÊNCIAS DA MATEMÁTICA CONTIDAS NAS MITOLÓGICAS

LOPES JÚNIOR, José Erildo, juniormat2003@yahoo.com.br

Universidade Federal do Pará – UFPA

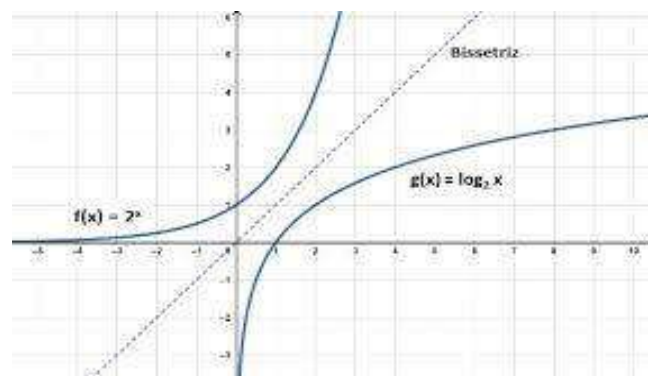
Resumo: Este trabalho é resultado de uma pesquisa de doutorado em andamento que visa transformar costumes, hábitos e pensamentos relacionados às Mitológicas de Claude Lévi-Strauss em conhecimentos práticos associados ao currículo do Ensino Fundamental II de matemática da Educação Básica, por meio das potencialidades e provocações. Seu objetivo central é apresentar propostas interdisciplinares que utilizem a produção do conhecimento com profundidade por meio da inserção de adaptações explorando e ressaltando conhecimento refletido na dinâmica de análise das questões. No que se refere a metodologia, nos apoiaremos em concepções da pesquisa qualitativa, por meio de atividades que estimulem um espaço de diálogo, ação, reflexão crítica, pensamento e consciência progressiva. Para tanto, é apresentada uma forma de abordagem, pontual e realista, cuja proposta é criar mecanismo para abordar temáticas de forma diversificada, oferecendo aos alunos mecanismos para refletir sobre a prática, criar autonomia em suas aprendizagens, inovar e autoformar-se. Dessa forma, é importante destacar que sua exposição pode proporcionar uma ressignificação dos conceitos, prática coletiva transformativa e estabelecimento de uma identificação própria ofertada pelo processo de mediação com a atividade.

Palavras-chave: Míticas, Investigação, Interdisciplinaridade, Conhecimento Matemático.

INTRODUÇÃO

No contexto reflexivo acadêmico, podemos fazer relação com o gráfico da função logarítmica e o cenário das míticas. Para o primeiro sabemos que o domínio (valores que a função não pode expressar para satisfazer sua condição de existência) é o conjunto dos números reais para uma função $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, enquanto que o segundo busca proximidade com a linguagem visual e linguagem escrita, cria um espaço para discussão, construção e socialização das ideias com espaços para a reflexão crítica, o que pode se aproximar de um cenário real.

Figura 1



Essa relação de ordem e grandeza se justifica porque assim como “a implementação algébrica dos logaritmos foram ocupando o lugar dos métodos propostos pela aritmética básica que envolvia progressões como uma alternativa para explicar o conceito de logaritmos” (MENDES e SOARES, 2019, p.149), as míticas oferece a possibilidade de recorrência da matemática como pensamento enfatizando que os fragmentos, figuras ou adaptações podem resultar em questões interpretativas de cunho matemático, obtidas por nós, e assim permitir uma mobilização de conteúdos oriundas da grade curricular de matemática da educação básica.

De fato, Lévi-Strauss (2012) utilizou a matemática como inspiração a fim de transitar com o rigor desta ciência em suas obras e atingir o ápice em suas investigações. Por isso, aproxima linguagem visual e linguagem escrita, cria um espaço para discussão, construção e socialização das ideias com espaços para a reflexão crítica. Tais considerações nos fazem reconhecer que é fundamental termos claro que nas obras mitológicas as convergências matemáticas entre as fórmulas e equações que aparecem embora sejam ilustrativas e superficial, podem possibilitar o preenchimento das lacunas e o estabelecimento de conexões que se estruturam na relação que se estabelece entre forma e conteúdo.

O empréstimo destes símbolos ou fórmulas possibilita a reprodução de uma estrutura discursiva e expositiva a fim de que haja apreensão nas relações e transformações estabelecidas. Isto é confirmado por Roxo (1937, p.190) quando diz que “os exercícios sobre transformação e resolução de fórmulas oferecem um ótimo ensejo para familiarizar os alunos não só com as ideias, mas com a linguagem e a notação própria das funções”. Entretanto, a investigação das relações matemáticas presente nas míticas nos remete às possibilidades de articulações pedagógicas, em que tais dinâmicas podem ser transportadas para o ensino de matemática. Isto porque, esta manifestação de pensamento nos remete a uma situação contextualizada na qual o mundo natural e as criações mitológicas podem convergir, de modo que se possam reproduzir no mundo concreto construções de pensamentos elaboradas a partir de mitos.

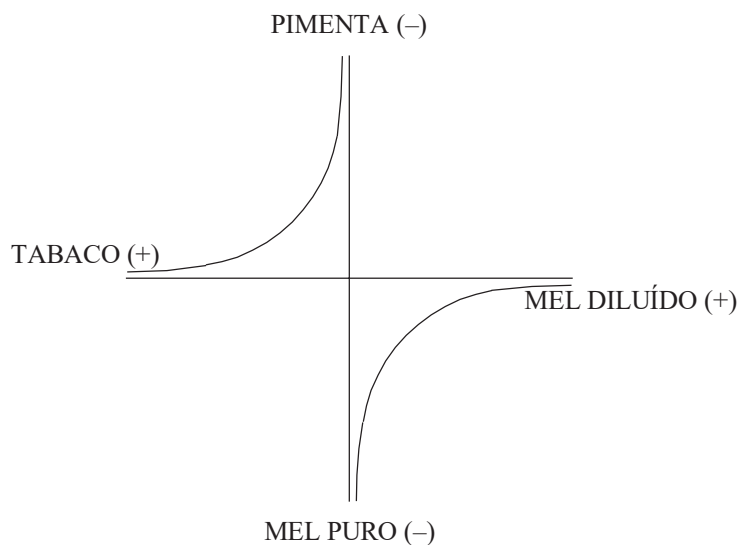
PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

A metodologia aplicada foi ler o livro *Do mel às cinzas* de Lévi-Strauss e procurar conectar as míticas com os conteúdos da grade curricular da Educação Básica procurando ressignificar contextos, articular o pensamento, fundamentar desafios por meio de uma prática que pensasse e refizesse problematizações. Dessa forma, apresentamos na sequência o mito em análise buscando interpretar o contexto matemático implícito em suas entrelinhas.

M204 BOTOCUDO: ORIGEM DOS ANIMAIS

Outrora, os animais eram como os humanos e todos eram amigos. Eles tinham o suficiente para comer. Foi a irara quem teve a idéia de jogá-los uns contra os outros. Ela ensinou a cobra a morder e matar suas vítimas e disse ao mosquito para sugar o sangue. A partir daquele momento, todos se transformaram em bichos, inclusive a irara, para que ninguém pudesse reconhecê-la. Sem conseguir pôr as coisas em ordem, o xamã que fornecia comida aos animais transformou-se em pica-pau e seu machado de pedra transformou-se em seu bico. (Nim. 1946b: 112) (LEVI-STRAUSS, 2004, p. 79-81).

Este mito nos permite inferir que o mel sem água (= forte demais) possui, em relação ao mel diluído, o mesmo valor de limite que a fumaça de pimenta em relação ao tabaco, compreendendo que a irara, dona do mel sem água, possa desempenhar, no mito botocudo, um papel que se atribui a uma fumaça que queima no sentido próprio (fogo) ou no sentido figurado (pimenta), em um sistema global (LEVI-STRAUSS, 2004, p. 81), que podemos representar da seguinte maneira:



- A figura representada lembra uma função exponencial ou logarítmica?
- A curva representada é uma parábola ou hipérbole?
- Em qual quadrante está representado o tabaco e a pimenta?
- Em qual quadrante está representado o mel puro e o mel diluído?
- A função que representa o tabaco e a pimenta é crescente ou decrescente?
- A função que representa o mel puro e o mel diluído é crescente ou decrescente?
- É correto afirmar que na função logarítmica o domínio são todos os reais positivos?
- A função logarítmica apresenta na imagem todos os números reais?

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesta atividade mesmo abordando conteúdos que exigem domínio de conceitos matemáticos, há a possibilidade de ampliar a concepção destes campos conceituais através do estabelecimento da compreensão entre função crescente e decrescente. Partindo desta ideia podemos explorar a ideia de diretamente e inversamente proporcional, uma vez que na representação gráfica uma função logarítmica é crescente a medida que atribuindo maiores quantidades a x , o resultado de y se amplia, ao passo que se caracteriza como decrescente a proporção que atribuindo maiores valores a x , o resultado correspondente a y se reduz. Logo o comportamento de x e y na função crescente é diretamente proporcional, enquanto que na função decrescente o comportamento de x e y é inversamente proporcional.

Um traço característico é que a região do universo em que a função pode ser definida é o conjunto dos números reais positivos, tem a base positiva e não é possível calcular-se logaritmos e um número negativo. Sua imagem compreende todos os números reais. Além disso, podemos explorar os conceitos, características e especificidades acerca de parábola e hipérbole, bem como aproveitar a ocasião para ampliar o campo conceitual referente aos quadrantes. Cabe ressaltar, ainda, o contraste relacionado à funções logarítmicas e exponenciais. Enquanto na primeiro o crescimento é lento gerando uma relação de dependência entre a variável e o número real, na segundo é rápido. Aqui não exploramos a lei de formação, mas, caso sinta necessidade e ache importante, o professor pode utilizar para justificar algumas propriedades e conceitos específicos.

Face a análise da atividade, ela permite que o estudante, expanda seu campo de conhecimentos e contextualize a matemática em seu uso social, não se limitando a obter um resultado final, pronto e acabado, mas compreender o problema para relacionar conceitos, definições e propriedades de forma interdisciplinar. Nesse sentido, corroboramos com Mendes e Soares (2019, p.149) quando diz que “a interdisciplinaridade está além dos valores relacionais, compreende a busca constante de novos caminhos, outras realidades, novos desafios, a ousadia da busca e do construir”. Por isso, não é necessário propor grandes listas com questionamentos repetitivos, mas aos poucos tornar as questões mais complexas e com maior possibilidade de busca de estratégias para a resolução, visto que o interesse e a curiosidade afloram quando diversificamos o contexto interdisciplinar das atividades.

CONCLUSÕES

Neste encontro de pensamentos, ideias e conceitos e com o objetivo de materializar o desejo de um experimento social, percebemos que é possível reformular nosso pensamento diário imergindo para saber como articular o conteúdo matemático com a mítica através de uma leitura pautada no pensamento e na reflexão. A estratégia é desenvolver um exercício repetitivo da leitura para que a proposta se torne clara, lúdica, agradável, que desperte a curiosidade e interesse pela problematização. Seus enunciados devem ser claros e objetivos buscando ter fluidez em toda sua constituição e análise, assim como procure estabelecer uma comunicação direta com o leitor.

Isto porque as questões devem ter sentido e significado com o objetivo de corresponder as expectativas do leitor. Afinal, eles só terão disposição, interesse e motivação se os questionamentos refletirem o exercício investigativo para se estabelecer metas pautadas em um raciocínio reflexivo. Tudo isto porque não há receita pronta. Ao contrário há uma necessidade de cada aluno se dispor a adquirir novos conhecimentos e buscar construir a sua própria personalidade acadêmica estudantil, através da leitura, escrita e oralidade.

Neste pequeno exemplo de uma mítica com um conteúdo de matemática pudemos perceber quão vasto são as possibilidades para diversificar nossas práticas. Não temos dúvidas que para proporcionar este modelo variado de conhecimento é essencial que o professor tenha um repertório vasto e diversificado de conhecimentos. De fato, os estudantes gostam de ser surpreendidos com questões que estimulem o raciocínio e não modelos de exercícios repetitivos que incentivam a memorização e repetição de mecanismos e fórmulas.

Com essas perspectivas, o profissional, no contexto de sala de aula, deve ousar em suas propostas. Fugir de práticas prescritivas e lineares percebendo que o processo investigativo interdisciplinar pode despertar nos alunos motivação, interesse, participação e cumprimento dos exercícios fundamentos na reflexão, análise e construção do conhecimento. É precisamente por isso que é fundamental trabalhar em um ambiente dialógico voltado para uma produção coletiva e materialização dos conhecimentos com potencial dinâmico e cíclico que objetive a tomada de consciência e transformação do ser.

REFERÊNCIAS

LÉVI-STRAUSS, Claude. **O pensamento selvagem**. 12. ed. Tradução Tânia Pellegrini. Campinas, SP: Papirus, 2012.

LÉVI-STRAUSS, Claude. **Do mel às cinzas**. Mitológicas 2. São Paulo, Cosac & Naify, 2004. 500p.

MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. **Logaritmos (números da razão):** enfoques históricos, epistemológicos e escolares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

ROXO, Euclides. **A matemática na educação secundária**. São Paulo; Companhia Editora Nacional, 1937.



UMA ABORDAGEM SOCIOCULTURAL DOS SABERES MATEMÁTICOS E SUAS RELAÇÕES COM A CONSTRUÇÃO NAVAL NA AMAZÔNIA.

Dias, Robson do Carmo Dutra, binho87dias@gmail.com¹
Brandemberg, João Cláudio, brand@ufpa.br²
Moia, Romulo Everton de Carvalho, romuloecm08@gmail.com³
¹ Universidade Federal do Pará – UFPA – PPGECEM
² Universidade Federal do Pará – UFPA – PPGECEM
³ Universidade Federal do Pará – UFPA – PPGECEM

Resumo: O trabalho em questão faz uma abordagem sobre os saberes matemáticos e suas relações com a construção naval na Amazônia, evidenciando as práticas socioculturais dos carpinteiros navais artesanais da Mesorregião do Baixo Tocantins/PA, a partir das consequências da implantação dos grandes projetos governamentais nas práticas desses profissionais, como a construção da Usina Hidrelétrica de Tucuruí (UHT), assim como, o desenvolvimento das cidades e o crescimento populacional. Tem por objetivo apresentar alguns estudos que tratam sobre os saberes matemáticos e suas relações com a carpintaria naval artesanal. Faz relações das práticas socioculturais com uma abordagem Etnomatemática, fundamentadas em autores como: D’Ambrosio (2005), Mendes e Farias (2014), Knijnik (1993), entre outros. Verificou-se que os saberes matemáticos e outros conhecimentos ditos científicos, são adquiridos através de aprendizados com carpinteiros mais velhos e também através dos erros e acertos na prática diária. O pouco conhecimento escolar que possuem não interfere na confecção das embarcações. Entretanto, as práticas socioculturais desses sujeitos, assim como os conhecimentos matemáticos, são poucos ou não são utilizados no contexto da matemática escolar.

Palavras-chave: Saberes Matemáticos, Construção Naval, Amazônia Tocantina, Etnomatemática.

INTRODUÇÃO

A sociedade que estamos inseridos passa por constantes mudanças nos mais diversos aspectos, como cultural, socioeconômico, científico, etc. Diante de tais mudanças, a Matemática está presente no quadro daquelas que contribuem significativamente para as conquistas do conhecimento humano. Além de fazer parte do cotidiano das pessoas, ela serve para compor os alicerces e é peça importante para as atividades de diferentes ramos de muitas ciências.

Neste contexto de mudanças, a matemática vem evoluindo ao longo da história. Desde sua utilização pelos povos pré históricos até sua afirmação como ciência por excelência, ela vem sendo discutida e desdobrada. Segundo D’Ambrósio (1996), o ensino, de maneira geral, passou por transformações no decorrer dos anos e a Matemática também foi alvo dessas transformações, sofrendo influências de acordo com seu contexto histórico.

Para Brandemberg (2015, p.187) “a Matemática é utilizada em todas as sociedades e é a única matéria ensinada na grande maioria das escolas do mundo inteiro. Uma Matemática revestida de aspectos sociais, culturais, institucionais e pedagógicos, que determinam processos de ensino diferentes em comunidades diferentes.”

Mendes (2016) afirma ainda que a matemática a qual nos referimos é a cultura matemática, ou seja, a matemática construída socioculturalmente. Trata-se de uma cultura de práticas pensadas, experimentadas e refletidas socialmente.

Neste contexto de afirmação da matemática como instrumento pelo qual o indivíduo pode conquistar sua autonomia e inclusão social, a construção das embarcações utilizadas pelos povos amazônicos, requerem conhecimentos gerais e específicos tanto da região, quanto da cultura, do tipo de madeira a ser utilizada, de medidas, da aplicação de conceitos matemáticos, físicos e outros adquiridos através dos anos de experiência. “A construção de embarcações foi (e ainda é) uma atividade que surgiu da necessidade de locomoção da população indígena pelos rios e igarapés amazônicos”. (PANTOJA, 2015, p.72). A construção naval na Amazônia, surgiu em função dos conhecimentos herdados tanto pelos europeus, que por aqui passavam, quanto pelos índios. Suas técnicas se entrelaçaram tornando a construção dos barcos uma atividade econômica e fazendo das embarcações um dos meios de transportes mais importante da região.

A partir da colonização e povoação da região amazônica, quer seja para fins de resguardar a soberania nacional, quer para exploração dos recursos naturais, minerais e turísticos, sua população cresceu consideravelmente. Com isso, houve necessidade de adaptar e aumentar a frota de embarcações. Nesse contexto, o trabalho artesanal dos carpinteiros, não seria suficiente para suprir a necessidade da demanda imposta. A partir de então, surgiram as indústrias navais, para construção de embarcações de grandes portes, com matéria-prima extraída da própria região, objetivando transportar grandes quantidades de cargas e passageiros. Os profissionais da carpintaria naval local também foram utilizados pela industrial naval, tanto nas atividades principais do processo de construção quanto no processo de reparos, uma vez que as embarcações por serem de madeira, se desgastam de forma mais rápida.

Essas atividades artesanais dos carpinteiros que são passadas de geração para geração, dentro de um contexto cultural, D'Ambrósio (2005) caracteriza como Etnomatemática. A partir disso, a pesquisa de cunho bibliográfica em questão, buscou apresentar alguns estudos que tratam sobre os saberes matemáticos e suas relações com a carpintaria naval artesanal. Observou-se que os saberes e/ou conhecimentos matemáticos foram/são adquiridos pelos carpinteiros navais artesanais através de aprendizados com carpinteiros mais velhos e também através dos erros e acertos na prática diária. O pouco ou nenhum conhecimento escolar que possuem, não interfere na construção desses meios de transportes. As práticas socioculturais desses sujeitos, porém, assim como os conhecimentos matemáticos, são poucos ou não são utilizados no contexto escolar.

DESENVOLVIMENTO

A Amazônia, por ser uma região interligada por muitos rios, há localidades onde só é possível chegar através de embarcações. Formigosa, Lucena e Silva (2017), afirmam que

Navegar por entre os rios, igarapés e furos que “cortam” essa região é entrar num universo de uma diversidade sociocultural que se renova de acordo com a geografia desses rios, igarapés e furos ou a cada comunidade ribeirinha que surge ao longo das suas margens ou a cada curva que o rio dá, quando aparece uma casa isolada ou algum outro elemento natural, ou ainda no vai e vem das pessoas, que por esses “caminhos d’água” vão atravessando suas vidas. (FORMIGOSA; LUCENA; SILVA, 2017, p. 3).

Os autores mostram que a navegação pelos rios da Amazônia requer meios de transportes peculiares e adaptáveis a este ambiente. Os barcos são, na maioria das cidades amazônicas e suas comunidades, o meio de locomoção mais utilizados pelos povos ribeirinhos para o “*ir, vir e fazer*” de suas necessidades sociais, econômicas, culturais e profissionais. A construção destas embarcações também necessita de conhecimentos gerais e específicos sobre a região, a cultura, o tipo de madeira a ser utilizada, as medidas, aplicação de conceitos matemáticos, físicos e outros adquiridos através dos anos de experiência, errando e acertando.

Segundo Pantoja, Silva e Palheta (2017), “a construção naval é um símbolo cultural da Amazônia. Tal cultura foi gerada e organizada desde a época em que fora habitada por seus primeiros moradores, os índios”. É bem verdade que algumas cidades localizadas nessa região, vêm sofrendo influência dos meios tecnológicos e de comunicação. No entanto, a construção das embarcações de pequeno e médio porte, que são os meios de locomoção mais comuns, ainda são realizadas pelos carpinteiros navais.

Muitos destes carpinteiros, são ribeirinhos¹ ou possuem origens ribeirinhas. Esses profissionais trabalham de maneira minuciosa e detalhada, aplicando os diversos conhecimentos adquiridos ao longo de sua vida e de sua profissão, aprendendo sozinhos através dos erros e acertos ou com outros carpinteiros mais experientes, na

¹ Segundo Pantoja, Silva e Palheta (2017) “Ribeirinhos são pessoas que habitam as beiras dos rios da Amazônia. Geralmente vivem do artesanato, da agricultura, da caça, do extrativismo vegetal e, principalmente, da pesca”.

construção das embarcações. Nesse sentido, buscaremos evidenciar esses saberes, principalmente os matemáticos, discutindo com os mais variados teóricos que tratam sobre a temática.

De acordo com D'Ambrósio (2005),

Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo ticas] para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer [que chamo matema] como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo etnos]. (D'AMBRÓSIO, 2005, p. 60).

Ainda segundo D'Ambrósio (2005), a Etnomatemática, procura entender o ciclo da geração, organização intelectual, organização social e difusão do conhecimento matemático das diversas culturas. Para Machado, Soares e Gonçalves (2008), “todas as pessoas, todos os povos, em diferentes culturas, possuem formas de lidar com o conhecimento matemático que lhes são próprios, sejam eles os grupos indígenas da Amazônia, sejam as comunidades agrícolas do interior do Brasil, sejam os moradores dos grandes centros urbanos, todos produzem, de alguma forma, conhecimentos matemáticos. É claro que estes conhecimentos estarão muito fortemente ligados às práticas e vivências (e necessidades) de cada um destes grupos em questão.” (MACHADO; SOARES; GONÇALVES, 2008, p. 49).

Segundo Knijnik (1993), a Matemática precisa ser compreendida como um tipo de conhecimento cultural gerado por diferentes culturas, assim como a linguagem, as crenças, os rituais, as técnicas específicas de produção, dessa forma, a abordagem Etnomatemática deve ser compreendida como “a investigação das concepções, tradições e práticas matemáticas de um grupo social subordinado e o trabalho pedagógico que se desenvolve na perspectiva de que o grupo interprete e codifique seu conhecimento; adquira o conhecimento produzido pela matemática acadêmica, utilizando, quando se defrontar com situações reais, aquele que lhe parecer mais adequado.” (KNIJNIK, 1993, p.88).

Nessa perspectiva, Mendes e Farias (2014) afirmam que “é possível admitir que as matemáticas são, naturalmente, uma parte das culturas. Cada sociedade herda de seus predecessores, ou vizinhos contemporâneos, alguns modos de contar, calcular, medir e exercitar outras habilidades que fazem com que as matemáticas se tornem uma forma de conduta em busca de respostas às questões geradas no contexto sociocultural.” (MENDES; FARIAS, 2014, p.43).

As práticas socioculturais exercitadas pelos carpinteiros navais artesanais na Amazônia, na visão de Pantoja *et al* (2017, p.8) “traz consigo tradição e cultura por meio dos saberes e fazeres”. Diante disso, Vergani (1991) *apud* Mendes e Farias (2014) considera que há uma relação inseparável entre matemática, sociedade, cognição e cultura. Daí a autora propor a expressão matemática, sociocognição e cultura para expressar sua forma de pensar e agir com as matemáticas no processo de educação matemática na formação educativa em todos os níveis de ensino. (*apud* MENDES; FARIAS, 2014, p.44).

Esses saberes, mesmo que as vezes imperceptíveis, segundo Gualberto (2009, p. 20) *apud* Pantoja *et al* (2017, p.8), constam de “[...] saberes no campo da matemática, da química, da física, da geometria, da educação, da administração, da economia, da ética, da arte, da história”, enfim, áreas de conhecimento ensinadas na escola que são desenvolvidas e exercitadas por carpinteiros no ofício do seu trabalho diário sem que tenham tido contato com tais saberes nas escolas.

CONCLUSÃO

A matemática precisa transcender os muros da sala de aula, ir além de tarefas e exercícios desconectados da realidade do sujeito, pois ela é importante para a compreensão e análise do fluxo de informações que recebemos diariamente através das mídias e das diversas interações sociais típicas da atividade humana. A cultura matemática está sempre conectada às práticas sociais realizadas no contexto de diferentes atividades humanas. Quando as intencionalidades de uma prática social estão explicitadas, elas podem se tornarem práticas educativas, que ocorrem dentro e fora da escola. Essas práticas sociais só se tornarão educativas pela explicitação/ compreensão/ conscientização de seus objetivos, tarefa da investigação científica na educação.

Tomando como ponto de partida a região amazônica do Baixo Tocantins, onde até a década de 70 a carpintaria naval era predominante e, posteriormente, com a construção da Usina Hidrelétrica de Tucuruí e a modernização das cidades, os estaleiros da região começaram a entrar em decadência e, os profissionais da carpintaria naval foram sendo pulverizados para atuar nos mais diversos ramos que poderiam sobreviver. Muitos deles continuaram a

exercer a atividade de forma artesanal, construindo embarcações de pequeno e médio porte, sob encomenda e outros foram para trabalhar na construção da referida hidrelétrica.

Diante desse contexto, observou-se que os saberes matemáticos e outros conhecimentos ditos científicos, são adquiridos através de aprendizados com carpinteiros mais velhos e também através dos erros e acertos na prática diária. O pouco conhecimento escolar que possuem, não interfere na confecção das embarcações. Entretanto, as práticas socioculturais desses sujeitos, assim como os conhecimentos matemáticos são poucos ou não são utilizados no contexto da matemática escolar.

REFERÊNCIAS

BRANDEMBERG, J. C. Enculturação, formação de professores e ensino de matemática: uma discussão sobre visão ampliada dos valores culturais e conhecimento aprofundado do conteúdo. *Revista Margens Interdisciplinar*, Abaetetuba, v. 9, n. 12, p. 186-202, jun. 2015. DOI: <http://dx.doi.org/10.18542/rmi.v9i12.3057>. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/12892>. Acesso em: 24-dez-2020.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Papirus. Campinas, SP, 1996.

D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. 2, ed. Belo Horizonte (MG), Autêntica, 2005.

FORMIGOSA, M. M.; LUCENA, I. C. R.; FARIAS, C. A. Um navegar pelos saberes da tradição na Amazônia ribeirinha por meio da Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, Universidad de Nariño, Colômbia, vol. 10, núm. 1, p. 88-100, mar. 2017. Disponível em: <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/342>. Acesso em: 09-dez-2020.

GUALBERTO, A. J. P. *Embarcações, Educação e Saberes Culturais em um Estaleiro Naval da Amazônia*. 2009. 151 f. Dissertação (Mestrado em Saberes Culturais e Educação)-PPGED/UEPA, Belém, 2009.

KNIJNIK, G. O saber acadêmico e o saber popular na luta pela terra. *Educação Matemática em Revista*, Blumenau, n. 1, p. 5-11, 1993.

MACHADO, A. G. J.; SOARES, N. das N.; GONÇALVES, T. O. *Introdução à pesquisa no/do ensino de matemática*. Belém, UFPA, 2008.

MENDES, I. A.; FARIAS, C. A. *Práticas Socioculturais e Educação Matemática*. 1ª ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. – (Coleção contextos da ciência).

MENDES, I. A. Palestra: Práticas Socioculturais Históricas como objetos de significação para o ensino de Conceitos Matemáticos. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 2016.

PANTOJA, L. F.; SILVA, R. E. da C.; PALHETA, D. F.; ALBUQUERQUE, S. M. L.. Etnomatemática e construção naval: os saberes de geometria dos carpinteiros navais da Vila do Itapuá -Vigia/PA. *Revista COCAR*, Belém, Edição Especial N.3, p. 207 a 224 – Jan./Jul. 2017. Disponível em: <http://páginas.uepa.br/seer/index.php/cocar>. Acesso em: 20-set-2020.

PANTOJA, P. L. do R. *Saberes do trabalho na carpintaria naval artesanal no distrito de Carapajó - município de Cameté – PA*. 2015. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação - Políticas Públicas Educacionais) -PPGED/UFPA, Belém, 2015.



MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MAGNÉTICOS APLICADOS AO CARREGAMENTO *WIRELESS* DE VEÍCULOS ELÉTRICOS

Gomes, Ian Wanderley, wanderleygomesian@gmail.com¹
Lima, João Felipe Ximenes Paiva, joaofxpl@gmail.com¹
Gomes, Cristiane Ruiz, cris.ruiz.gomes@gmail.com^{1 2}

¹Universidade Federal do Ceará (UFC), Brasil.

²Universidade Federal do Pará (UFPA), Brasil.

Resumo: *O carregamento wireless, desenvolvido com base no conhecimento de ressonância magnética, tem proporcionado um grande avanço no ramo dos carros elétricos, por sua proeminência na transmissão eficiente e prática de energia durante o carregamento, sendo de grande importância para uma provável transição que a sociedade irá presenciar: a substituição de veículos movidos a combustão por elétricos. Mas uma das barreiras que impedem essa transição, é o tempo de recarga dos carros, que atualmente ainda está distante de ser adequado, durando cerca de horas, e o que a implantação do carregamento wireless poderia suplantar, já que o veículo poderá carregar enquanto estiver estacionado de maneira que sua bateria estará constantemente em capacidade próxima a máxima. A eficiência desse carregamento, é outro motivo gerador de discussões e de impasses para aplicação do sistema sem fio de recarga. Porém, diferente da “indução normal” vista no carregamento de aparelhos eletrônicos como celular e tablet, o fenômeno da ressonância magnética permite que o espaço entre as bobinas seja maior e mais eficiente, tornando esse tipo de carregamento equivalente ao de um “tradicional”. Assim, este artigo apresenta um modelo matemático para a análise de uma das topologias dos circuitos de carregamento wireless, possibilitando uma estimativa da eficiência e de outros parâmetros desse sistema.*

Palavras-chave: *Modelo Matemático, Carregamento Wireless, Ressonância Magnética, Eficiência.*

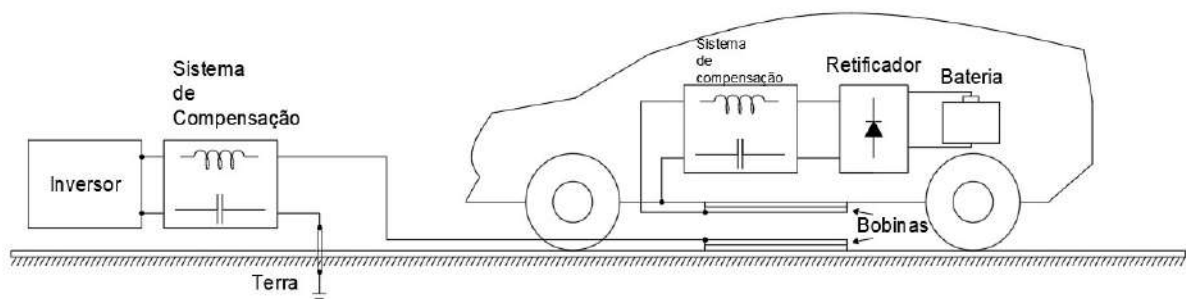
1. INTRODUÇÃO

Com a crescente popularização e comercialização de veículos elétricos (VE) e sua grande potencialidade de reduzir o impacto ambiental causado pela queima de combustíveis fósseis em veículos tradicionais, vêm impulsionando pesquisas que visam conceber aprimoramentos no design, eficiência, custo e carregamento desses meios de transporte. Nesse sentido, a constante demanda de praticidade dos veículos tem suscitado, primordialmente, a necessidade de melhorias dos métodos utilizados para o carregamento dos geradores elétricos empregados na sua movimentação, buscando tanto agilidade quanto redução de custos e ampliação do rendimento na recepção de cargas (TRIVIÑO; GONZÁLEZ-GONZÁLEZ; AGUADO, 2021). Por esse motivo, os sistemas ressonantes magnéticos (e os sistemas de transmissão de energia sem fio em geral) despontam como meios bastante convenientes e seguros para esse carregamento, quando comparados com os métodos tradicionais de contato físico, já que possibilitam a transferência de energia sob largas distâncias, com alta eficiência, rapidez (carregamento dinâmico), e segurança o que o faz ser o principal tópico de estudos desenvolvidos na área.

Os sistemas magnéticos ressonantes de *Wireless Power Transfer* (Transferência de energia sem fio) operam através da ação conjunta de uma série de componentes elétricos. Primeiramente uma bobina transmissora (ou

primária), disposta no solo, é alimentada por uma corrente alternada (CA), de maneira que, como estabelecido pela Lei da Indução Eletromagnética, uma outra corrente é induzida numa bobina receptora (ou secundária) presente no substrato do veículo. Em seguida, ela é então retificada em um filtro retificador, para que flua, na bateria automotiva, uma corrente contínua (CC) da qual o carregamento depende, de maneira que, assim o fornecimento CA é convertido em uma alimentação CC unidirecional. Além disso, conforme representado na Figura 1, as bobinas ou indutores estão conectadas a redes de compensação utilizadas para garantir a ressonância entre os circuitos transmissores e receptores (quando as reatâncias capacitivas e indutivas, correspondentes a uma oposição a passagem de corrente elétrica nos capacitores e indutores, respectivamente, são iguais). Essas redes correspondem a dois circuitos elétricos ligados às bobinas, tal que a sua topologia desempenha um fator determinante na eficiência da transmissão, uma vez que dependendo da disposição dos componentes (capacitores, resistores e indutores) são alcançados valores diferentes de correntes induzidas no enrolamento secundário, gerando-se, conseqüentemente, uma potência distinta conforme o arranjo. No caso de sistemas indutivos há basicamente dois tipos de topologias: uma mono-ressonante, constituída de um único indutor e outra multi-ressonante que apresenta múltiplos indutores (TRIVIÑO; GONZÁLEZ-GONZÁLEZ; AGUADO, 2021).

Figura 1 – Ilustração do sistema de carregamento *wireless* de um veículo elétrico.



Fonte: Elaborado pelos autores.

O objetivo do presente trabalho é determinar um modelo matemático que possibilite calcular as correntes elétricas e impedâncias de uma topologia mono-ressonante série-série (*SS topology*) e sua respectiva eficiência, e, com isso, definir um dos critérios necessários para se determinar sua viabilidade no carregamento wireless de VEs.

1.1 FUNDAMENTOS DE CIRCUITOS CA

Um sinal de corrente alternada é aquele que possui uma dependência temporal, e que é capaz de gerar um fluxo de elétrons o qual não segue um único sentido. Diferente do contínuo, um sinal alternado apresenta um caráter oscilante e variável no tempo, de modo que a corrente elétrica produzida por ela tem sua direção modificada a uma frequência constante e bem definida.

No geral, tensões e correntes alternadas podem ser matematicamente expressa por funções periódicas, como as funções seno, cosseno ou uma combinação linear de ambas. Assim uma representação típica para uma tensão (V) e uma corrente alternada (I) são:

$$V = V_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (1)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (2)$$

em que V_0 e I_0 são as amplitudes da tensão e da corrente, respectivamente, ω ($2\pi/T$), a suas frequências angulares e φ , a suas fases (que permite determinar a posição do sinal alternado em relação ao eixo de equilíbrio).

Utilizando a relação de Euler para números complexos, conforme Nussenzveig (2015), pode-se reescrever a equação (1), como

$$V = V_0 \cdot \text{Re}\{e^{j(\omega t - \varphi)}\} = \text{Re}\{V_0 e^{j(\omega t - \varphi)}\} \quad (3)$$

No caso de um circuito constituído de um indutor alimentado por uma fonte CA, a tensão no indutor, que é representada pelo produto da sua indutância L pela derivada temporal da corrente elétrica i que flui através dele, pode ser escrita como:

$$L \frac{di}{dt} = \text{Re}\{V_0 e^{j(\omega t - \varphi)}\} \quad (4)$$

já que a tensão no indutor é igual a gerada pela fonte. Assim, teremos a partir de (4), a seguinte equação diferencial:

$$di = \text{Re}\left\{\frac{V_0}{L} e^{j(\omega t - \varphi)}\right\} dt \quad (5)$$

Resolvendo essa equação, tem-se:

$$\int_0^{i(t)} di = \int_0^t \text{Re}\left\{\frac{V_0}{L} e^{j(\omega t - \varphi)}\right\} dt = \text{Re}\left\{\int_0^t \frac{V_0}{L} e^{j(\omega t - \varphi)} dt\right\} = \text{Re}\left\{\frac{V_0}{j\omega L} e^{j(\omega t - \varphi)}\right\} \quad (6)$$

Com isso, pode-se definir, por analogia com uma expressão anteriormente citada para a corrente alternada, que

$$I_0 = \frac{V_0}{j\omega L} \quad (7)$$

de maneira que $j\omega L$ possui unidade de resistência (já que é dada pelo quociente entre tensão e corrente), e é chamada de impedância indutiva (Z_L), a qual representa uma oposição ao fluxo de corrente em um indutor.

Já para um circuito formado por um capacitor e um gerador de corrente alternada, a corrente no capacitor, que é representada por $d(CV)/dt$, em que C é a sua capacitância e V a tensão nos seus terminais pode ser escrita por,

$$i(t) = \frac{d(CV)}{dt} = \frac{d(\text{Re}\{CV_0 e^{j(\omega t - \varphi)}\})}{dt} = \text{Re}\left\{\frac{d(CV_0 e^{j(\omega t - \varphi)})}{dt}\right\} \\ i(t) = \text{Re}\{V_0 j\omega C e^{j(\omega t - \varphi)}\} \quad (9)$$

E como foi realizado anteriormente para o indutor, pode-se definir que a impedância capacitiva é dada por:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (10)$$

No geral, a impedância de um circuito é um número complexo, cuja parte real é constituída pela resistência de um dado elemento (de um solenoide, por exemplo) e a parte imaginária, apresenta as reatâncias (indutiva ou capacitiva, se possuir apenas um indutor ou capacitor, respectivamente, ou ambas, se indutor e capacitor estiverem presentes), que são o módulo das impedâncias indutiva e capacitiva. Assim, a impedância Z é dada por:

$$Z = R + Xj \quad (11)$$

em que X é a reatância.

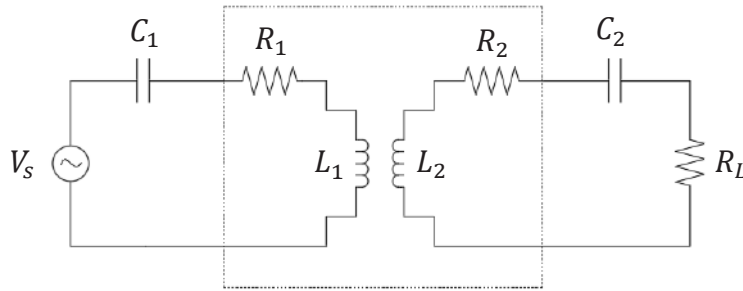
2. TOPOLOGIA MONO-RESSONANTE SÉRIE-SÉRIE (SS TOPOLOGY).

O circuito ressonante proposto para o carregamento wireless de veículos elétricos apresenta uma topologia mono-ressonante denominada série-série (SS topology). Ela é constituída de um circuito primário, que contém um indutor de indutância L_1 e resistência R_1 e um capacitor com capacitância C_1 , todos eles associados em série, e de um circuito secundário, que apresenta uma bobina secundária, de indutância e resistência interna, L_2 e R_2 , respectivamente, um capacitor de capacitância C_2 e uma resistência de carga R_L (resistência da bateria), igualmente conectados em série, conforme representado na Figura 2.

Primeiramente pode-se escrever equações relacionando as tensões nos componentes de cada “malha” do circuito. A malha corresponde a um “ciclo” do circuito, isto é, uma parte dele que começa em um certo ponto e se encerra no

mesmo. Considerando inicialmente a única malha do circuito primário, tem-se que a soma das das amplitudes tensões em cada componente ao longo dela deve ser igual a zero. Isso porque os pontos inicial e final são sempre os mesmos, e assim, possuem o mesmo potencial, de modo que a diferença total dessa grandeza é nula (CAI et al., 2018). Portanto, tem-se, utilizando as equações (7) e (10), que:

Figura 2 – Topologia Série-Série



Fonte: Elaborado pelos autores.

$$V_s - j\omega L_1 I_1 - \frac{I_1}{j\omega C_1} + j\omega M I_2 - R_1 I_1 = 0 \quad (12)$$

em que o termo I_1 é a corrente que flui no circuito primário, I_2 , a que flui na bobina secundária e M a indutância mútua entre as bobinas (pois além de apresentarem uma autoindução, isto é, aquela produzida pelas correntes que passam nelas individualmente, a corrente elétrica que atravessa uma das bobinas gera uma variação de fluxo magnético na outra e vice-versa, a chamada indução mútua) (NUSSENZVEIG, 2015). Além disso, alguns termos são negativos por representarem uma diferença de potencial negativa (pois sempre há uma queda de potencial em indutores, capacitores e resistores). Já para o circuito secundário, pode-se escrever:

$$j\omega L_2 I_2 + \frac{I_2}{j\omega C_2} - j\omega M I_1 + R_2 I_2 = 0 \quad (13)$$

Uma matriz de impedância pode também ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} Z_{L_1} & Z_{L_2} \\ Z_{C_1} & Z_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega L_2 \\ 1 & 1 \\ j\omega C_1 & j\omega C_2 \end{bmatrix}$$

Assim, tem um sistema linear constituído pelas equações (12) e (13) o qual possui como solução, o par ordenado

$$I_1 = V_s \frac{(Z_{L_2} + Z_{C_2} + R_2 + R_L)}{(Z_{L_2} + Z_{C_2} + R_2 + R_L)(Z_{C_1} + Z_{L_1} + R_1) + \omega^2 M^2}$$

$$I_2 = V_s \frac{j\omega M}{(Z_{L_2} + Z_{C_2} + R_2 + R_L)(Z_{C_1} + Z_{L_1} + R_1) + \omega^2 M^2}$$

Sabendo-se então que a eficiência η de um circuito mono-ressonante é fornecida pela expressão

$$\eta = \frac{|I_o|^2 R_L}{|I_1|^2 Re\{Z_t\}} \quad (14)$$

em que I_o é a corrente que flui na carga e Z_t é a impedância total do circuito primário.

No caso da *SS topology*, a impedância total do circuito primário é:

$$Z_t = \frac{V_s}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \left(\frac{j\omega M}{Z_{L_2} + Z_{C_2} + R_2 + R_L} \right) + R_1 =$$



ESQUEMA NUMÉRICO ENTRÓPICO ESTABLE Y BIEN BALANCEADO PARA EL MODELO DEL FLUJO SANGUÍNEO A TRAVÉS DE LAS ARTERIAS CON EL HOMBRE EN ETERNO REPOSO

Valbuena, Sonia¹, soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Vega, Carlos², cvega@uninorte.edu.co

¹Universidad del Atlántico, Colombia

²Universidad del Norte, Colombia

Resumo: Simulaciones numéricas para el modelo del flujo sanguíneo en arterias tienen una amplia aplicación en medicina (Formaggia et al., 2006; Kolachalama et al., 2007). Estos modelos se usan con éxito desde los aportes de Euler (Alastruey et al., 2011; Müller. & Toro, 2014). El sistema formulado es estrictamente hiperbólico de dos leyes de balance escalares (Britton & Xing, 2020; Ghigo et al., 2017; Mynard & Nithiarasu, 2018; Sherwin et al., 2003). En general, los métodos numéricos estándar no satisfacen en su versión discreta el balance entre el gradiente del flujo y el término fuente en los estados estacionarios o cerca estos y llegan a introducir oscilaciones espurias, a menos que se usen mallas muy refinadas, lo que implica mayor costo computacional. El objetivo del trabajo es construir un esquema numérico bien balanceado y entrópico estable, simple, eficiente y con alta precisión para el flujo sanguíneo unidimensional en arterias, que preserve el hombre en eterno reposo. En la metodología se construye un esquema de volúmenes finitos entrópico conservativo para el modelo de flujo sanguíneo basado en el enfoque de Tadmor (1987; 2016). Se utiliza un par de entropía y se construye un flujo entrópico estable de alto orden basado en la teoría de Fjordholm et al. (2011; 2012) y Lefloch et al. (2002), en la discretización temporal se usa Strong-Stability-Preserving Runge-Kutta (Gottlieb et al., 2001). Se concluye que el esquema resultante es bien balanceado (Delestre & Lagrée, 2013; Britton & Xing, 2020) y se verifica su buen desempeño para aproximar soluciones.

Palavras-chave: modelo del flujo sanguíneo, esquema bien balanceado, esquema entrópico estable

INTRODUÇÃO

Los modelos unidimensionales para estudiar el flujo sanguíneo han cobrado relevada importancia actualmente, dado que sirven para describir fenómenos cardiovasculares y además se acoplan con modelos tridimensionales que son más completos pero que resultan computacionalmente más costosos, luego lo que se hace es combinarlos teniendo en cuenta que en la práctica se requieren tomar decisiones en tiempo real.

El movimiento del flujo sanguíneo en una arteria con simetría axial y un perfil de velocidad plano, puede ser descrito por el siguiente modelo unidimensional de sistemas de leyes de conservación:

$$\partial_t A + \partial_x(AU) = 0, \quad \partial_t U + U\partial_x U = 1/\rho\partial_x P \quad (1)$$

Donde,

x es la coordenada axial a lo largo del vaso sanguíneo (artéria), t es la variable temporal, el área de sección transversal del vaso es $A(x, t) = \pi R(x, t)^2$, $R(x, t)$ es el radio del vaso dependiente del tiempo, $U(x, t)$ es la velocidad media de la sangre en la dirección axial, ρ es la densidad de la sangre, $A_0 = A_0(x)$ es el área de sección transversal del vaso en reposo (puede ser variable, como en los casos de patologías como el aneurisma o la estenosis), $P = P(A)$ es la presión interna, $P = P_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0})$, P_{ext} asumida constante es la presión externa, β es un coeficiente que depende de las propiedades elásticas del vaso (asumido aquí constante). Incluyendo la expresión para la presión interna en el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1) se obtiene el sistema A-U:

$$\partial_t A + \partial_x(AU) = 0, \quad \partial_t U + \partial_x\left(\frac{U^2}{2} + \beta/\rho A^{1/2}\right) = \beta/\rho\partial_x A^{1/2} \quad (2)$$

Así el sistema de Leyes de balance es escrito como:

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{S}(x) \quad (3)$$

En la literatura en general se tienen métodos numéricos (Delestre & Lagrée, 2013; Britton & Xing, 2020; Ghigo et al., 2017) para aproximar las soluciones de este problema con los cuales se tiene estabilidad pero para el caso de esquemas con volúmenes finitos son escasos por que el detalle está en que no es posible discretizar por un lado la ley de conservación y luego el término fuente, puesto que se corre el riesgo que no se satisfaga alguna propiedad de los estados estacionarios del sistema.

El sistema cuasilineal tiene entonces la forma:

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{H}(\mathbf{w}) \partial_x \mathbf{w} = \mathbf{S}(x)$$

Con \mathbf{H} la matriz jacobiana de \mathbf{f} , $\mathbf{c} = \mathbf{c}(A)$ es la velocidad de la onda (Moens-Korteweg)

$\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} U & A \\ c^2/A & U \end{bmatrix}$, $c = \left(\frac{\beta}{2\rho} A^{1/2}\right)^{1/2}$, para $A > 0$, condición necesaria para tener soluciones físicamente relevantes. Resolviendo para los valores característicos de \mathbf{H} se obtienen los autovalores $\lambda_{1,2} = U \mp c$, y, los autovectores correspondientes dados por $\mathbf{r}_{1,2} = (\mp 1, c/A)^T$.

Es bien sabido que los sistemas (3) en general no tienen solución única en consecuencia es necesario introducir un criterio de admisibilidad que en general está relacionado con una condición de entropía, recordando que un par de entropía lo conforman un par de funciones escalares (E,G), E es la función de entropía y G es el flujo de entropía asociado, con \mathbf{v} el vector de variables de entropía de forma tal que satisface que:

$$\nabla_{\mathbf{w}} G(\mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{v} = \left(\partial_{w_1} E(\mathbf{w}), \dots, \partial_{w_n} E(\mathbf{w}) \right)^T$$

Seguindo a Ghigo et al. (2017) el par de entropía considerado para el modelo (3) es:

$$E = \frac{AU^2}{2} + \frac{2\beta}{3\rho} A^{3/2} - \frac{\beta}{\rho} AA_0^{1/2}, \quad G = \frac{AU^3}{2} + \frac{\beta}{\rho} UA^{3/2} - \frac{\beta}{\rho} AUA_0^{1/2} \quad (4)$$

El modelo A-U admite soluciones no triviales en el estado estacionario una de estas se conoce como *hombre en eterno reposo*, o *man-at-eternal-rest*, el cual es el equivalente del *lake at rest* de las ecuaciones de aguas poco profundas o *shallow water*. Estas ecuaciones del *hombre en eterno reposo* para el caso de Presión no cero para que haya un buen balance, desde el sistema (2) obtenemos:

$$U = 0, \quad A^{1/2} - A_0^{1/2} = \text{constante} \quad (5)$$

Cuando la presión es cero se tiene el caso particular:

$$U = 0, \quad A = A_0 \quad (6)$$

Esquema numérico entrópico conservativo y estable

El sistema de leyes de conservación discretizado en la variable espacial tom la forma:

$$\frac{d\mathbf{w}_j(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}} \right), j \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Siendo la aproximación a la solución; esto es, el promedio en una celda en un tiempo t ; y el flujo numérico asociado a $\mathbf{x}_{j+\frac{1}{2}}$ dados respectivamente por:

$$\mathbf{w}_j(t) = \mathbf{w}(x_j, t), \quad \mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_{j-p+1}, \dots, \mathbf{w}_{j+p})$$

El esquema semidiscreto (6) es entrópico estable si satisface la desigualdad de entropía discreta:

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{w}_j(t)) + \frac{1}{\Delta x} \left(\tilde{G}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{G}_{j-\frac{1}{2}} \right) \leq 0 \quad (7)$$

Con flujo numérico dado por $\tilde{G}_{j+\frac{1}{2}}$ y consistente con el flujo de entropía asociado G. En el caso que se cumpla la igualdad en (7), el esquema (6) es entrópico conservativo.

Los pasos a seguir en la metodología para obtener el esquema objetivo en este trabajo, es obtener primero un esquema entrópico conservativo, discretizar el termino fuente y luego agregar difusión numérica para obtener el esquema entrópico estable.

En ese orden de ideas, haciendo uso de un resultado de Tadmor (Tadmor 1987) construimos el flujo numérico entrópico conservativo de dos puntos:

$$\tilde{F}_{j+1/2} = \begin{pmatrix} (\overline{AU})_{j+1/2} \\ \frac{1}{2}(\overline{U^2})_{j+1/2} + \frac{\beta}{\rho} \overline{(A^2)}_{j+1/2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Y a partir de (8) utilizando un procedimiento de Lefloch et al. (2002) que permite extender ese flujo a un orden mayor considerando combinaciones lineales del flujo de dos puntos, construimos así un flujo numérico entrópico conservativo de cuarto orden, dado por:

$$\tilde{F}_{j+1/2}^4 = \frac{4}{3}\tilde{F}(w_j, w_{j+1}) - \frac{1}{6}\tilde{F}(w_{j-1}, w_{j+1}) + \tilde{F}(w_j, w_{j+2}) \quad (9)$$

En la discretización del término fuente utilizamos diferencias centrales, con: $A_{0,j} = A_0(x_j)$ y es dado por:

$$S_j = \frac{\beta}{12\rho\Delta x} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ A_{0,j-2}^{1/2} - 8A_{0,j-1}^{1/2} + 8A_{0,j+1}^{1/2} - A_{0,j+2}^{1/2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por tanto, el esquema de volumen finito entrópico conservativo en su forma semidiscreta toma la forma:

$$\frac{dw_j(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left(\tilde{F}_{j+1/2}^4 - \tilde{F}_{j-1/2}^4 \right) + S_j \quad (11)$$

El esquema (11) se prueba que es también bien balanceado, esto es, que preserva la versión discreta del *man-at-eternal-rest*. Y este esquema tiene buen desempeño en regiones suaves, sin embargo, se producen oscilaciones de alta frecuencia cerca a las discontinuidades por lo que siguiendo un procedimiento de Fjordholm et al. (2012) agregamos la difusión numérica adecuada para garantizar que la entropía sea disipada y finalmente obtuvimos el flujo numérico a utilizar:

$$F_{j+1/2} = \tilde{F}_{j+1/2}^4 - \frac{1}{2}D_{j+1/2} \langle\langle v \rangle\rangle_{j+1/2} \quad (12)$$

Aquí D es la llamada matriz de difusión numérica calculada a partir de los valores característicos de la matriz jacobiana H de la función de flujo f , con la matriz diagonal Λ conformada con los autovalores λ y la matriz R con los correspondientes autovectores r y finalmente $\langle\langle v \rangle\rangle_{j+1/2}$ corresponde a la reconstrucción de las variables de entropía. Estas matrices son dadas respectivamente por:

$$D_{j+1/2} = R_{j+1/2} \Lambda_{j+1/2} R_{j+1/2}^T, \quad \langle\langle v \rangle\rangle_{j+1/2} = v_{j+1} \left(x_{j+1/2} \right) - v_j \left(x_{j+1/2} \right)$$

Para la reconstrucción de las variables de entropía en este trabajo usamos el método ENO de orden cuatro el cual satisface la llamada propiedad del signo (Fjordholm et al., 2012) con lo cual garantizamos que el esquema dado por (11) construido con el flujo numérico dado por (12) es entrópico estable.

Por último, obtuvimos la discretización total del modelo de flujo sanguíneo discretizando la variable temporal para lo cual se hizo uso del método Strong-Stability-Preserving Runge-Kutta (Gottlieb et al., 2001) de tercer orden, y el esquema numérico construido tiene entonces la forma:

$$w^{(1)} = w^n + \Delta t \mathcal{L}(w^n), \quad w^{(2)} = w^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(w^{(1)}), \quad w^{n+1} = \frac{1}{2}(w^n + w^{(2)}) \quad (13)$$

Donde

$[\mathcal{L}(w)]_j := -\frac{1}{\Delta x} \left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2} \right)$, y, Δt calculado adaptativamente para cada paso n , usando la condición CFL.

EXPERIMENTAÇÃO NUMERICA

Se presenta aquí uno de los ejemplos donde se pone a prueba el desempeño del esquema (13) propuesto, seleccionamos el caso de la patología de una aneurisma, esto es, un *man-at-eternal-rest* por un aneurisma.

Con este caso mostramos como propósito que el esquema preserve la presión cero. La configuración que utilizamos para las condiciones iniciales del problema son: $U(x, 0) = 0, A(x, 0) = A_0(x) = \pi R_0^2(x)$

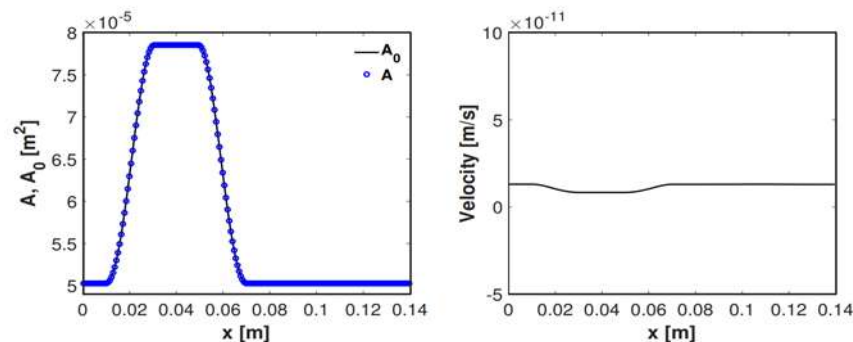
$$R_0(x) = \begin{cases} \tilde{R}, & \text{para } x \in [0, x_1] \cup [x_4, L] \\ \tilde{R} + \frac{\Delta R}{2} \left(\sin\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \pi - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right), & \text{para } x \in (x_1, x_2) \\ \tilde{R} + \Delta R, & \text{para } x \in [x_2, x_3] \\ \tilde{R} + \frac{\Delta R}{2} \left(\cos\left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \pi\right) + 1 \right), & \text{para } x \in (x_3, x_4) \end{cases}$$

Con

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= 4 \times 10^{-3} m, & \Delta R &= 1.0 \times 10^{-3} m, & x_1 &= 1.0 \times 10^{-2} m, & x_2 &= 3.05 \times 10^{-2} m, \\ x_3 &= 4.95 \times 10^{-2} m, & x_4 &= 7.0 \times 10^{-2} m, & L &= 0.14 m, \\ \beta &= \pi^{-1} \times 10^8 Pa/m \end{aligned}$$

Los resultados presentados en la figura 1 muestran que hemos verificado numéricamente que el esquema es bien balanceado, esto es, se preservan las soluciones en el estado estacionario.

Figura 1



El esquema fue puesto a prueba para el caso de otra patología de los vasos sanguíneos como lo es la estenosis, encontrando-se que se obtienen los comportamientos esperados desde las comparaciones realizadas con trabajos de autores como Delestre y Lagrée (2013) y de Britton & Xing (2020) en los cuales utilizaron esquemas diferentes al aquí propuesto y evitándose el uso de la reconstrucción hidrostática.

CONCLUSÕES

En este trabajo se ha construido para el modelo del flujo sanguíneo unidimensional un esquema numérico simple de alto orden; cuarto orden; y entrópico estable tanto para aproximar soluciones discontinuas, como para verificar la propiedad de bien balanceado encontrándose un buen desempeño para obtener tanto soluciones continuas como discontinuas además de preservar soluciones en el estado estacionario como el hombre en eterno reposo.

REFERÊNCIAS

ALASTRUEY, J., KHIR, A. W., MATTHYS, K. S., SEGERS, P., SHERWIN, S. J., VERDONCK, P.R, PARKER, K. H., & PEIRO, J. Pulse wave propagation in a model human arterial network: assessment of 1-D visco-elastic simulations against in vitro measurements, *Journal of biomechanics*, v. 44, n. 12, p. 2250–2258, 2011.

- BRITTON, J. & XING, Y. Well-balanced discontinuous Galerkin methods for the one-dimensional blood flow through arteries model with man-at-eternal-rest and living-man equilibria, *Computers & Fluids*. v. 203, p. 1-32, 2020.
- DELESTRE, O. & LAGRÉE, P.Y. A well-balanced finite volume scheme for blood flow simulation, *Int. J. Numer. Methods Fluids*. v. 72, p. 177-205, 2013.
- FORMAGGIA, L., LAMPONI, D., TUVERI, M. & VENEZIANI, A. Numerical modeling of 1D arterial networks coupled with a lumped parameters description of the heart. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, v. 9, p. 273-288, 2006.
- FJORDHOLM, U.S., MISHRA, S. & TADMOR, E. Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially nonoscillatory schemes for systems of conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* v. 50, p. 544-573, 2012.
- FJORDHOLM, U.S., MISHRA, S. & TADMOR, E. Well-balanced and energy stable schemes for the shallow water equations with discontinuous topography, *J. Comput. Phys.* v. 230, p. 5587-5609, 2011.
- GHIGO, A.R., DELESTRE, O., FULLANA, J.M. & LAGRÉE, P.Y. Low-Shapiro hydrostatic reconstruction technique for blood flow simulation in large arteries with varying geometrical and mechanical properties, *J. Comput. Phys.* v. 331, p. 108-136, 2017.
- GOTTLIEB, S., SHU, C.-W. & TADMOR, E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods, *SIAM Rev.* v. 43, p. 89-112, 2001.
- KOLACHALAMA, V.B., BRESSLOFF, N. W., NAIR, P. B. & SHEARMAN, C. P. Predictive Haemodynamics in a one-dimensional human carotid artery bifurcation. Part I: application to stent design. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 54:p. 802-812, 2007.
- LEFLOCH, P.G., MERCIER, J.M. & ROHDE, C. Fully discrete entropy conservative schemes of arbitrary order, *SIAM J. Numer. Anal.* v. 40, p. 1968-1992, 2002.
- MÜLLER, L. O. & TORO, E. F. A global multiscale mathematical model for the human circulation with emphasis on the venous system, *International journal for numerical methods in biomedical engineering* v. 30 n. 7, p. 681–725, 2014.
- MYNARD, J.P. & NITHIARASU, P. A 1D arterial blood flow model incorporating ventricular pressure, aortic valve and regional coronary flow using the locally conservative Galerkin (LCG) method, *Commun. Numer. Methods Engrg.* v. 24, p. 367-417, 2018.
- SHERWIN, S.J., FRANKE, V., PEIRÓ, J., & PARKER, K. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables, *J. Eng. Math.* v. 47, p. 217-250, 2003.
- TADMOR, E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I, *Math. Comp.* v. 49, p. 91-103, 1987.
- TADMOR, E. Entropy stable schemes, Chapter 18 in R. Abgrall and C.-W. Shu (eds.), *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems: Basic and Fundamental Issues*, vol. 17 of *Handbook of Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, p. 467-493, 2016.



AS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Baia Alves, Kenji, kenjibaia@gmail.com

Maria Elizete Baia Alves

Resumo: A pandemia do novo coronavírus ao transferir as aulas presenciais para o ensino remoto ou híbrido; mostrou-nos a importunância do uso das tecnologias no ensino e, o quão o leque de possibilidades que se cria quando lançamos mãos das TICs e as REDS (Recursos Educacionais Digitais) no ensino. O Ensino da Matemática não foge a esta realidade. O presente artigo aborda o uso de alguns desses recursos digitais em sala, como subsídio pedagógico, e o quanto a importunância destes recursos se fazem presentes na prática escolar. O uso das tecnologias podem ser abordadas sob vários aspectos, seja: ilustrar, raciociocinar, representar, analisar, enfim. Há dados significativos que mostram o quanto os recursos tecnológicos melhoram o processo ensino aprendizagem, desde que usados adequadamente. Aqui abordarei o Gcompris, Matific e GeoGebra como exemplos.

Palavras-chave: Tecnologia, Ensino, Matemática

INTRODUÇÃO

O ensino atual, demanda de uma educação sintonizada com a realidade dos alunos e o meio social em que os mesmos estejam inseridos. Nesse sentido, a escola passa a ser um local, onde possibilidades são construídas baseadas nas vivências e anseios destes alunos. Para tal, a escola não pode mais pautar seu ensino em bases notoriamente ultrapassadas, onde apenas a reprodução de algo então apresentado era tido como aprendizagem.

A Matemática não foge a este cenário. O ensino baseado apenas no ensino mecânico de fórmulas, cálculos e decoração precisam atentar para a sociedade, e para que seres humanos queremos formar. As tecnologias se fazem cada vez mais presentes e não podemos fingir. Sejamos humildes em reconhecer que há um inúmeros aplicativos voltados ao ensino e que precisamos nos aperfeiçoar nos mesmos e fazê-los presentes em salas de aulas.

Porém, como ensinar a Matemática com auxílio de recursos tecnológicos, e que este ensino seja de fato satisfatório e não apenas alegórico? Para tal questão precisamos avaliar as práticas já desenvolvidas em outras escolas com tais recurso. Reconhecer que o ensino da matemática apresenta deficiência e inumeros problemas que precisam serem revistos. Que professores precisam rever sua práticas educativas e reconhecer que precisamos avançar. Nosso ensino perante os outros países em termos de resultados é sofrível. Na última edição do Pisa¹, ocorrido em 2015, o Brasil foi classificado na 66ª colocação em Matemática, demonstrando assim as dificuldades dos alunos brasileiros nesse componente curricular.

Ainda sobre o questionamento anterior, precisamos também pensar a rotina em sala de aula, e como estamos nos planejando frente a conteúdos expostos no quadro, onde muitas das vezes é difícil tal compreensão pela complexidade envolvida. Muitos aplicativos apresentam situações que seriam impensadas no quadro de sala, como o caso do Geogebra, onde é possível manipular formas geométricas em 3D.

Em classes tradicionais de Matemática os estudantes são ensinados pela primeira vez a teoria e, em seguida, eles são convidados a resolver alguns exercícios e problemas que

¹Pisa - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, tradução de Programme for International Student Assessment. O Pisa é um estudo comparativo internacional, realizado de três em três anos pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico).

têm mais ou menos soluções algorítmicas usando mais ou menos o mesmo raciocínio e que raramente são conectados com as atividades do mundo real (Stoica, 2015, p. 702).

.PLATAFORMAS E APLICATIVOS EDUCACIONAIS

.O ensino remoto demandou de letramento digital, principalmente por parte de educadores, que em sua maioria, dentro do ensino fundamental, carecem de formação adequadas para uso das TICs e as REDS. Em resumo são professores analfabetos digitalmente. Isso impactou nesse novo cenário onde o isolamento social levou as escolas a procurarem outras formas de ofertar educação. Nesse sentido muitos professores encontraram muitas dificuldades ao deparar-se com esse cenário onde o letramento digital era exigido. Frente a isso, precisamos paltar instruções e treinamentos a professores em mídia digital.

[...]nem todos os educadores brasileiros, tiveram formação adequada para lidarem com essas novas ferramentas digitais, precisam reinventar e reaprender novas maneiras de ensinar e de aprender. Não obstante, esse tem sido um caminho que apesar de árduo, é essencial realizar na atual situação da educação brasileira (CORDEIRO, 2020, p. 10).

.A BNCC, determina que o ensino fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento de habilidades como raciocinar, representar, analisar, comunicar e argumentar matematicamente. Nesse aspecto, várias mídias digitais são direcionadas a essas habilidades.

[...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2015, p. 8).

.Inumeras plataformas e aplicativos são desenvolvidos para fins educacionais. Países com melhores rendimentos educacionais utilizam com maior frequência, em seus sistemas educacionais, tais recursos, obtendo assim rendimentos satisfatórios em termos educacionais. Cito aqui alguns desses recursos que podem melhorar significativamente o ensino da matemática.

.Gcompris

O Gcompris é uma suíte educacional multiplataforma completa para crianças entre 2 e 10 anos de idade e é parte do projeto GNU. Estão incluídas mais de 140 atividades de entretenimento que ajudam crianças pequenas a aprenderem habilidades como o reconhecimento de letras e números, o uso do mouse e teclado, treinamento de álgebra básica, leitura de tempo em um relógio analógico, desenhar vetores, aprender idiomas por meio de jogos e muito mais. O programa inclui um processador de texto simples para produzir documentos com um estilo básico de texto. Um outro recurso é a ferramenta de animação, que pode ser empregada como um método simples e efetivo para dar suporte a contar histórias, de forma a melhorar a comunicação com crianças e ajudando-as a se expressar²

.Matific

.O matific é uma plataforma educacional de tecnologia israelense implementada em vários países e em algumas escolas brasileiras. Segundo seus desenvolvedores é uma plataforma alinhada a BNCC no que tange a construção das habilidades la elencadas.

“Plataformas de tecnologia educacional como a da Matific são atualmente grandes aliadas para que a Base Nacional Comum Curricular de fato aconteça no ‘chão da escola’ a partir da prática em sala de aula”. Dennis Szyller, CEO da Matific Brasil.³

.O sistema Matific já é adotado em 45 países, com cerca de 5 milhões de alunos ao redor do mundo, três milhões de jogos executados por mês e diversos prêmios internacionais por sua pedagogia e tecnologia. No Brasil, a plataforma de matemática atende 500 mil alunos, de cerca de 1 mil instituições de ensino, com uma galeria de 1,6 mil exercícios gamificados e atualização semanal.⁴

.GeoGebra

²Fonte: [GCompris - Projeto GNU - Free Software Foundation](#) Acesso em: 26 de mar. de 2022.

³Fonte: [Escolas públicas adotam gamificação em aulas de matemática | Channel360º](#) Acesso em: 26 de mar. de 2022.

⁴Fonte: [Escolas públicas adotam gamificação em aulas de matemática | Channel360º](#) Acesso em: 28 mar. de 2022.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA. O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.⁵

.CONCLUSÕES

Sabemos o quanto ainda há de resistência por parte de professores, quanto a mudança de algumas práticas educativas; e a recusa em se usar as TICs ou REDS no contexto educacional, porém, é sabido também, o quanto é falho a formação docente neste país, e o quanto os sistemas educacionais resistem em gastar, quando a questão é, formação continuada. Muitos educadores não possuem a formação adequada para o uso de tais recursos. As formações continuadas precisam ser recorrentes na carreira docente para que sejam supridas tais dificuldades.

Por fim, tais formações devem contemplar essas dificuldades digitais, precisar se preparar o educador para trabalhar com estes recursos, porém na prática, não apenas com formações teóricas discursivas. Só assim caminharemos para um ensino de matemática sem lacunas na aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

- CORDEIRO, Karolina Maria de Araújo. **O Impacto da Pandemia na Educação: A Utilização da Tecnologia como Ferramenta de Ensino**. Repositório institucional. Manaus, 2020.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2015.
Disponível em: <https://bit.ly/3hfivNY>. Acesso em: 25 mar. 2022.
- STOICA, A. Using math projects in teaching and learning. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, v. 180, p. 702-708, 2015.

⁵Fonte: [Instituto Geogebra São Paulo](https://www.geogebra.org/m/InstitutoGeogebraSaoPaulo) Acesso em 29 de mar. de 2022.



BoaMática: Decolonizando a Matemática através da Robótica

Balbina da Silva Lopes Miguel, Vanessa, vanessalaboamatica@gmail.com

CAP-UERJ

Profa. Dra. Costa Santos, Eliane, elianecostasantos@unilab.edu.br

UNILAB-BA

Profa. Dra. Baião, Jonê, jonebaiiao@gmail.com

CAP-UERJ

Resumo: *Através da robótica a BoaMática a utilizou como uma forma de mostrar que a matemática também é presente na realidade de cada um de nós. Trazendo uma matemática uma cultura maker (cultura de inovação que está em nossas mãos podendo ser por auxílios tecnológicos ou não - podemos considerar como métodos de aprendizagem) sendo mais próxima a realidade das pessoas racializadas, mostrando outras formas de se aprender e aplicar a matemática dentro do seu âmbito social, decolonizando o ensino e unindo saberes em todos os espaços.*

Palavras-chave: *BoaMática, Robótica, Decolonial, Racializar.*

INTRODUÇÃO:

Apresentamos neste texto o conceito de boamática, cunhado por uma das autoras, como uma prática de ensino curricular da matemática na ed. Básica escolar. Até aqui quem tem fracassado na escola são aqueles sujeitos racializados, dialogamos com o professor Gabriel Nascimento que afirma: “[...] Sempre que invocamos a noção raça para projetar uma identidade positiva afim de enfrentar o racismo, não podemos esquecer ou negligenciar seu papel enquanto signo criado e mantido pelo colonialismo.” (Nascimento. Racismo Linguístico p. 76).

BoaMática: Origem e fundamentos.

Após alguns anos dando aula, eu como professora de matemática lembrei os períodos de sua vida como estudante e como docente. Eu buscava entender o motivo de meus alunos não entenderem a disciplina, já que na minha cabeça as aulas eram maravilhosas! “Me disseram que existe uma diferença entre saber matemática e saber ensinar matemática. A base dessa disciplina não era só um quadro cheio de fórmulas e cálculos complexos, a mente de alunos frustrados só aumentava por não entenderem a matéria, essa ação nas aulas estava sendo aplicada e repassada por mim”

Como educadora dei aulas em escolas com grande disparidade social entre os alunos. Muitos não tinham o que comer, outros chegavam do trabalho e iam direto para a escola. Foi aí que precisei adaptar a matemática para alcançá-los e criou o projeto BoaMática. Uma ação para aproximar os estudantes do conhecimento de forma afetuosa, dando significado ao conteúdo e usando uma linguagem informal, afetando os jovens de forma que eu, como professora, fosse afetada pela realidade deles.



Figura 1

Ação para aproximar os estudantes do conhecimento de forma afetuosa

O projeto começava a germinar entre 2006 e 2010, como uma brincadeira durante as aulas e como uma resposta a uma frase “se a matemática fosse boa não começaria com má”. A ideia é desfazer as ideias vigentes, que afastam as pessoas da matemática, de que muitas não vão compreendê-la, que só quem tem o dom irá entendê-la e que só super-humanos são capazes.

O projeto é um método de ensino intercultural da matemática que não distancia o aluno do mundo glocal (global+local), tornando-se uma ação de aplicação e transformação em respeito a uma sociedade multicultural, considerando o tempo de aprendizagem e transformando as diferenças em algo positivo e construtivo dentro da aplicação da BoaMática.

Figura 2



O projeto é um método de ensino intercultural da matemática que não distancia o aluno do mundo glocal (global + local)

São métodos pedagógicos (Cultura Maker) que ajudam desde o despertar do interesse dos alunos no conteúdo até aumentar a sua autoestima, fornecendo um espaço de protagonismo na construção do seu próprio conhecimento em um ambiente mais enriquecido dos saberes de estudantes e professores. “Dentre esses métodos temos as aulas invertidas, colaborativas, gamificação, ‘Dê tempo ao tempo’, que respeita o tempo de aprendizagem de cada aluno, e a minha favorita, que seria o estudo do erro. Dá para sentir o conhecimento se construindo nesse método, pois mesmo os erros nos resultados são importantes. Nada é desperdiçado! O fato de saber como aquele resultado foi alcançado é de suma importância nesse modo de ensino, uma vez que descobrindo o erro dificilmente voltamos a repeti-lo”.

Entre 2018 e 2019, participei de um curso de especialização no Programa PRD-CPII (Programa Residência à Docência no Colégio Pedro II no Rio de Janeiro), e no período do curso houve uma palestra que abordava a fenomenologia, que a fez criar as primeiras ideias para o projeto BoaMática: ressocializando jovens através da ciência. Projeto esse que no futuro entraria para o Prêmio Shell e me tornaria uma das finalistas no concurso. A atividade foi implementada para jovens no sentido de uma instituição de socioeducação para menores infratores com o objetivo de mostrar que, através de uma educação afetiva, significativa e que estivesse ligada à realidade deles, despertaria o seu interesse pela ciência e mudaria suas vidas de forma positiva.



A BoaMática e a Robótica.

Pouco tempo depois, um torneio de robótica veio como uma grande oportunidade de exibir na prática os conteúdos aprendidos em sala de aula. “Começamos os estudos com todos os conteúdos centrados na programação do robô. Entre eles, alguns aplicados nas aulas, como: operações básicas, regra de três simples, potência e unidades de medida. Situações de como converter o giro de uma das rodas do robô de graus para centímetros percorridos foram resolvidas com o conhecimento que eles aprenderam.

O tema do torneio era relacionado ao meio ambiente e especificamente à água, aos seus ciclos, tratamento, uso e reaproveitamento da chuva. A equipe focou nas missões que dariam mais pontos dentro de um tempo estipulado, com as estratégias prontas continuando as práticas até o dia do torneio de robótica. No grande dia do evento principal, todos os alunos de todas as equipes dentro da instituição estavam sendo avaliados, antes e durante o evento, como o trabalho e espírito de equipe, divisão das tarefas, animação, foco e outros quesitos adotados pela banca de jurados. Ao fim do árduo trabalho, a vitória, o primeiro lugar no torneio.

Afirmo que os resultados positivos que se obtêm são um aumento da autoestima dos alunos, que perderam o medo de arriscar, aprenderam a calcular ganhos e perdas. Lições essas que são muito importantes para a vida dentro e fora da escola. Os usos dessas ferramentas ajudam a BoaMática a transformar a matemática em um tesouro da cultura humana.

Concepção da BoaMática sobre o Decolizar e Descolonizar

Há muito tempo a partir da minha inquietude de mudanças nas aulas de matemática com as possíveis perguntas do “porquê utilizaria na minha vida aquele conteúdo?”, notas baixas, cobranças, etc. A partir de muitos estudos passei talvez em um momento da minha vida não percebendo, mas passei a ter a transformação de descolonização, descolonizar e de colonizar no ensino da matemática com a BoaMática o que significa essas duas palavras a descolonização (descolonizar) o prefixo des seria um movimento de mudança através da minha inquietude para as minhas aulas de matemática. Então esse prefixo des significa transformar, tirar, desfazer o que me incomodava e a partir do momento que eu comecei esse movimento de mudança os alunos entenderem um processo das aulas, as perguntas de como utilizar esse na minha vida foram diminuindo, aplicando métodos, metodologias através de conteúdos passou a ter a descolonização a de colonizar, ou seja, uma ação contrária um

movimento que eu estava trabalhando então a descolonizar, que é um movimento, é uma transformação e o de colonizar é uma ação contrária, aquele movimento, aquela transformação no ensino na qual eu proponha.

Dos resultados positivos vindos desse novo método de ensinar matemática um deles foi que os alunos perderam a vergonha ou a timidez de falar a profissão de seus pais, pois alguns deles eram "catadores" e devido a sua situação social muitos não gostavam de falar sobre isso. Devido às aulas laboratoriais relacionados a cultura Maker que se utilizava de material reciclável, dos saberes e realidades vividas por cada aluno, o conhecimento matemático era mais valorizado, características essas vendas da etnomatemática, isto junto ao ensino de robótica. paralelo a isso muitas meninas também despertaram interesse no aprendizado matemático pois viram que elas também são capazes e que essa história de Tecnologia e Informática serem conhecimentos somente para meninos não existia e que elas podiam fazer e aprender quando e como queriam.

Referências

D' AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2007

BAIÃO, JONÊ CARLA. -SE ELES FAZEM MIL, TEMOS DE FAZER MIL E UM- - E ELA FEZ! TRAJETÓRIA ACADÊMICA DE UMA DOUTORA NEGRA NOS ANOS 1970. REVISTA TRANSVERSOS, v. 1, p. 222-240, 2021.

SANTOS, Eliane Costa. As ticas da matema de algumas etnias africanas: supor-te para a decolonialidade do saber. Revista da Associação Brasileira de Pes-quisadores/as Negros/as ABPN, v. 10, p. 88-112, jan. 2018.

SANTOS, Eliane Costa. Para além dos números... África e africanidade na formação de professores: enfoque etnomatemático para uma reorientação educacional. 2014. f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

SANTOS, Eliane Costa. The "Ticas" of "Matema" of an African People: an exercise for the Brazilian Classroom. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, v. 1, n. 2, p. 27

Nascimento, Gabriel. Racismo Linguístico



A NAVEGAÇÃO COMO CONTEXTO PARA O ENSINO DE VETORES: UMA PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Abrantes, Wagner, wagnercn@hotmail.com¹

¹IFTM – Instituto Federal do Triângulo Mineiro

Resumo: Este artigo consiste em um recorte de uma pesquisa mais ampla sobre o ensino de vetores inseridos no contexto da navegação, tendo como público-alvo alunos do primeiro ano do Ensino Médio e sob as orientações metodológicas do Design Experiment. Este texto apresenta três momentos ao longo da pesquisa: a aplicação de uma atividade diagnóstica, um encontro para debate sobre a atividade diagnóstica e a aplicação de um bloco de atividades de intervenção, nessa ordem. A análise dos dados mostra que houve melhora significativa de rendimento dos alunos após o encontro. Neste sentido, o objetivo deste estudo é fazer uma análise preliminar sobre a contribuição do contexto da navegação na aprendizagem de vetores, lançando mão do aporte teórico dos Três Mundos da Matemática. Após a análise dos protocolos e dos diálogos dos alunos, foi possível concluir que a contextualização dos vetores na navegação auxiliou no incremento da habilidade de abstração, tendo contribuído para a significação do vetor e possibilitando um breve percurso pelos mundos corporificado e simbólico pela maioria dos alunos.

Palavras-chave: Vetor, contextualização, navegação, Três Mundos da Matemática.

INTRODUÇÃO

Este artigo traz um recorte da tese de doutorado desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo, cujo objetivo era analisar o desenvolvimento do pensamento matemático de alunos de Ensino Médio em relação ao estudo de vetores, a partir da proposição de tarefas relacionadas ao cálculo de deslocamento e velocidade de navios no contexto de rotas de navegação.

Cabe ressaltar que esta pesquisa traz a contextualização inserida na sua dinâmica, entendendo-a como essencial no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e estimulada pelos documentos oficiais que norteiam o currículo da Educação Básica, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (2000), que são ainda mais abrangentes, pois apontam a importância de relacionar o contexto com a capacidade de abstração e a cultura geral como contribuição para a formação de cidadãos que possam continuamente aprender.

Além disso, o ensino de vetores na Educação Básica ganha protagonismo na disciplina de Física, uma vez que ele é utilizado como ferramenta no estudo da Dinâmica. Contudo, cabe ao professor de Matemática buscar participação nesse processo, respaldado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.77), que afirma que é desejável, também, que o professor de matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor.

Neste sentido, nosso objetivo com este recorte é fazer uma análise preliminar sobre a contribuição do contexto da navegação na aprendizagem de vetores sob o aporte teórico dos Três Mundos da Matemática, de Tall (2013).

OS VETORES E OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, Tall (2013, p. 22) afirma que o desenvolvimento intelectual depende de como nós usamos nossas experiências para lidar com novas situações, de forma que aquilo que aprendemos em um determinado estágio irá influenciar a nossa maneira de pensar no próximo estágio. Esses

conhecimentos mobilizados e influenciadores foram abordados por Tall (2013) e traduzidos por Lima (2007, p. 86) como “já-encontrados”, definidos formalmente como uma estrutura que temos no nosso cérebro em um determinado momento como resultado de experiências que vivenciamos antes.

Os Três Mundos da Matemática estão relacionados às experiências referentes ao desenvolvimento do conhecimento e construção do pensamento matemático em longo prazo. Tall (2013, p. 16) associa a aprendizagem da matemática a três distintos, porém interligados, mundos da matemática: o mundo conceitual corporificado, o proceitual simbólico e o axiomático formal.

O mundo conceitual corporificado, ou apenas corporificado, é dos objetos corporificados que podem ser fisicamente manipulados ou concebidos mentalmente. Este mundo nos permite compreender conceitos e características de um dado objeto matemático não apenas por meio de agentes físicos, mas também através de agentes mentais que despertem nossos sentidos. Nesse sentido, a corporificação dos vetores se dá a partir da concepção de algumas grandezas físicas, como força, velocidade e aceleração, que nos permitem compreender suas características e propriedades, tais como o módulo, a direção e o sentido.

O mundo proceitual simbólico, ou apenas simbólico, é aquele que utiliza os símbolos para cálculos e manipulações na álgebra e na aritmética. Esse mundo leva em consideração os proceitos, caracterizado por Tall (2013) como símbolos que representam, ao mesmo tempo, um processo e um conceito. O simbolismo do vetor se dá geometricamente, como um segmento de reta orientado, ou algebricamente, como uma matriz coluna ou uma n -upla ordenada.

O mundo axiomático formal, ou apenas formal, é composto pelos axiomas, teoremas, propriedades, definições que formam o sistema axiomático com o qual se desenvolve a matemática formal. O formalismo do vetor se dá no espaço vetorial.

É importante destacar que os três mundos, apesar de interagirem entre si, são independentes, isto é, não existe uma hierarquia entre esses mundos. Além disso, a trajetória percorrida ao longo dos três mundos varia de pessoa para pessoa.

A CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A inclusão de conceitos matemáticos em contextos do cotidiano é uma ferramenta metodológica usada por muitos professores no intuito de motivar os alunos e contribuir para que um determinado objeto matemático ganhe significado.

Porém, para entendermos o ato de contextualizar, precisamos entender o significado de contexto. Segundo Spinelli (2011), contexto é o conjunto de circunstâncias capazes de estimularem relações entre significados conceituais. Portanto, para que o aluno possa trabalhar em um ambiente contextualizado, Spinelli (2011) afirma que é fundamental o poder de abstração para a construção dos significados.

Dreyfus (2002) traz o processo de abstração como uma ferramenta importante para a evolução no pensamento matemático e corrobora o entendimento de Spinelli (2011) sobre a relação entre abstração e contextualização, uma vez que as situações matemáticas estão intrínsecas aos contextos utilizados no ensino de Matemática. Dreyfus (2002) acrescenta que o processo de abstração se dá por meio de duas características essenciais: a generalização e a sintetização.

Sendo assim, a relação entre a abstração e a contextualização está intimamente ligada à construção de significados pelo aluno. Ademais, o contexto deve contribuir para abstrações que irão gerar significados a quem aprende. Para Maioli (2012), dois aspectos gerais podem ser associados à contextualização são o cognitivo e o sócio-histórico-cultural.

Com isso, o intuito de relacionar a navegação e o ensino de vetores vai ao encontro da realidade dos alunos que participaram da pesquisa. A escola na qual estes alunos frequentam está localizada no bairro da Ilha do Governador, um bairro insular no Rio de Janeiro que, apesar de ser integrado ao continente por vias rodoviárias, possui rotas de transporte marítimo, por meio de barcas, com linhas diretas para o centro da cidade e que são utilizadas com frequência por moradores daquela comunidade como alternativa ao trânsito conturbado de uma grande metrópole.

Sobre a formação do contexto, Spinelli (2011) conclui elencando a importância do docente nesse processo, a partir da criação da narrativa e da metáfora. Para ele, a narrativa criada pelo professor é estruturadora da sequência de eventos, enquanto que a metáfora empregada na narrativa é composta pelos recursos linguísticos que irão auxiliar o professor a transmitir novos conceitos aos alunos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DE DADOS

Esta pesquisa foi realizada sob as orientações metodológicas do Design Experiment, de Cobb *et al* (2003), tendo como público alvo doze alunos voluntários do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular. Esses alunos realizaram, individualmente, uma atividade diagnóstica e, em dupla, onze atividades de intervenção divididas em cinco blocos e que tratavam sobre vetores inseridos em um contexto de navegação que envolvia o cálculo de deslocamento e velocidade de embarcações.

Foram estimados seis dias para aplicação de todas as tarefas, com uma hora e quarenta minutos por dia, sendo o primeiro dia destinado à atividade diagnóstica e os demais para a aplicação das atividades de intervenção. Contudo, após a aplicação da atividade diagnóstica, houve a necessidade de um encontro de cinquenta minutos com os alunos para debater os protocolos gerados, antes da aplicação do primeiro bloco de atividades de intervenção.

A tarefa da atividade diagnóstica sobre vetores, que traz uma embarcação navegando em um rio, buscou verificar se os alunos conseguiam corporificar o vetor como velocidade, calculando o seu módulo e indicando simbolicamente, por meio de um segmento de reta orientado, sua direção e sentido.

No item a, a embarcação estava navegando a favor da correnteza, isto é, a velocidade proporcionada pelo motor da embarcação e a velocidade da correnteza têm a mesma direção e mesmo sentido. No item b, a embarcação estava navegando contra a correnteza, isto é, a velocidade proporcionada pelo motor da embarcação e a velocidade da correnteza têm a mesma direção e sentido oposto. No item c, a embarcação estava navegando de uma margem à outra e perpendicular à correnteza, isto é, a velocidade proporcionada pelo motor da embarcação e a velocidade da correnteza são perpendiculares.

Ao iniciarmos a análise dos protocolos referentes às questões sobre vetores da atividade diagnóstica, apresentaremos a síntese dos dados obtidos (Tabela 1) e, em seguida, daremos início à análise dos dados obtidos.

Tabela 1

	Integralmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Em branco
Questão	00	10	00	02
Análise da segunda questão por itens				
Item a	00	10	00	02
Item b	00	10	00	02
Item c	00	08	01	03

Nos itens a e b, com os vetores u e v no mesmo sentido, dez alunos realizaram a operação $u + v$ de maneira escalar, somando os módulos desses vetores. De modo análogo, quando os vetores u e v estavam em sentidos opostos, os mesmos alunos realizaram a operação $u - v$ de maneira escalar, subtraindo os módulos desses vetores. Apesar de terem encontrado o valor correto do módulo da velocidade resultante, não foi dado um tratamento vetorial ao cálculo da velocidade, já que não apresentaram a direção e o sentido da velocidade resultante.

No item c, oito alunos ligaram a origem do vetor u à extremidade do vetor v por meio de um segmento de reta não orientado, chegaram ao triângulo retângulo e calcularam o valor da medida da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras. Mesmo que os alunos tenham encontrado o valor correto do módulo do vetor da velocidade resultante, eles não utilizaram corretamente a regra do paralelogramo e tampouco se preocuparam em apresentar a direção e o sentido do vetor. Um aluno resolveu este item a partir da subtração entre os módulos de u e v .

A análise dos dados obtidos nos itens a e b nos permite evidenciar o comprometimento da corporificação do vetor como velocidade, haja vista que nenhum aluno deu o tratamento vetorial à velocidade, sendo que a maioria deu o tratamento escalar a esta grandeza. Essa evidência é corroborada pelos dados do item c, pois não houve a preocupação dos alunos em buscar representar a direção e o sentido da velocidade.

Essa visão da velocidade como uma grandeza escalar pode ser consequência do estudo da cinemática na disciplina de Física. Neste sentido, a generalização também fica comprometida, causando prejuízos ao poder de abstração do aluno sobre esse tema. Este prejuízo fica evidente na medida em que o aluno não percorre o mundo simbólico do vetor, haja vista a ausência, nos protocolos gerados, de representação simbólica dos vetores como um segmento de reta orientado.

Em virtude dos “já-encontrados” observados na atividade diagnóstica, se fez necessário intervir antes de dar prosseguimento à pesquisa, a partir de um debate com os alunos, visando a corporificação do vetor como deslocamento e velocidade.

Para debater a questão que abordava vetores, foi apresentado um globo terrestre escolar de pequeno porte e, a partir da sua visualização, foi identificada e planejada na lousa uma área do oceano pacífico, com suas latitudes e longitudes.

Com a representação exposta na lousa, o pesquisador fez o seguinte questionamento aos alunos: “Suponhamos que a distância do ponto O para os demais pontos marcados seja de 3.000 Km. Se uma embarcação encontra-se no ponto O e navega 3.000 Km, qual a localização da embarcação?” Após alguns segundos de silêncio, um aluno respondeu: “Tem que dizer para que lado a embarcação está indo”, claramente se referindo à direção e ao sentido do deslocamento. Após essa ponderação, o pesquisador então complementou: “A embarcação navegou verticalmente”. Um aluno prontamente respondeu: “A embarcação está no ponto B”. Porém, em seguida, uma aluna completou: “Tem que dizer se está indo para cima ou para baixo”, se referindo ao sentido do movimento. Com isso, o pesquisador completou: “Quando eu disse que a embarcação navegou 3.000 Km, eu estava me referindo ao comprimento ou módulo do deslocamento. Quando eu disse que a navegação foi feita verticalmente, eu estava me referindo à direção do deslocamento. Se eu complementar que a navegação foi para o sul, estarei me referindo ao sentido do deslocamento. Neste caso, vocês saberiam me dizer qual a posição da embarcação?”. Prontamente, os alunos responderam: “Ponto D”. De modo análogo, o pesquisador também propôs essa reflexão com a velocidade.

Após a análise dos “já-encontrados” e o debate supracitado, iniciou-se a aplicação das atividades para a pesquisa. O primeiro bloco de atividades de intervenção é composto por duas tarefas com três questões cada, que abordam a corporificação do vetor como deslocamento e velocidade e sua relação com o mundo simbólico, a partir da sua representação geométrica como segmento de reta orientado.

Iremos iniciar a análise dos protocolos do primeiro bloco de atividade com uma síntese dos dados obtidos (Tabela 2) e, em seguida, faremos a análise qualitativa dos resultados obtidos.

Tabela 2

	Integralmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Em branco
Atividade 1	06	00	00	00
Atividade 2	04	02	00	00
Análise da primeira atividade por questão				
Questão 1	06	00	00	00
Questão 2	06	00	00	00
Questão 3	06	00	00	00
Análise da segunda atividade por questão				
Questão 1	06	00	00	00
Questão 2	04	00	02	00
Questão 3	06	00	00	00

Referente à primeira atividade, evidenciamos que todas as duplas conseguiram representar geometricamente, na malha quadriculada, o vetor deslocamento como um segmento de reta orientado com módulo, direção e sentido indicados corretamente. A segunda e a terceira questões também obtiveram índices de 100% de acerto. Identificamos que algumas duplas expressaram diretamente as características de módulo (ou comprimento), direção e sentido da grandeza deslocamento em suas respostas. Contudo, pudemos evidenciar também que algumas duplas, apesar de não terem expressado diretamente essas características, deixaram-nas subentendidas em suas respostas.

Referente à segunda atividade, pudemos evidenciar que todas as duplas conseguiram representar geometricamente, na malha quadriculada, o vetor velocidade como um segmento de reta orientado com módulo, direção e sentido. Todas as duplas afirmaram que não seria possível representar geometricamente o vetor sem a informação do módulo, porém duas duplas afirmaram que seria possível fazer essa representação sem a informação de direção e sentido.

Com isso, evidenciamos que essas duas duplas tiveram problemas na corporificação do vetor como velocidade, haja vista que ainda possuem a visão da velocidade como uma grandeza escalar. Acreditamos que o fato de essas

duas duplas terem representado a velocidade como um segmento de reta orientado, ainda que não tenham corporificado o vetor como velocidade, tenha ocorrido por influência do enunciado, que já traz essa representação na malha quadriculada.

As demais duplas mostraram progresso entre a atividade diagnóstica e o primeiro bloco de atividades de intervenção, pois deram um passo importante no caminho da generalização e, conseqüentemente, da abstração, pois conseguiram corporificar o vetor como deslocamento e velocidade, identificando semelhanças entre essas grandezas, com o intuito de dar o mesmo tratamento vetorial a ambas, isto é, iniciar o percurso no mundo simbólico, a partir de suas representações como segmentos de retas orientados.

CONCLUSÕES

A partir desse progresso evidenciado na maioria dos alunos, pudemos concluir sobre a importância da contextualização na compreensão das características de um vetor (módulo, direção e sentido). A abordagem dos vetores inseridos no contexto da navegação, proposto pelo pesquisador durante o debate realizado após a aplicação da atividade diagnóstica, proporcionou à maioria dos alunos a compreensão de que algumas grandezas não dependem apenas do seu módulo para serem determinadas.

Portanto, é necessário destacar a importância da narrativa criada pelo pesquisador dentro do contexto proposto e dos recursos empregados durante o debate. Os questionamentos feitos aos alunos, inserindo-os no contexto proposto, permitiram que eles próprios concluíssem que deslocamento e velocidade são grandezas que dependem de outras características além do seu módulo, como ocorre com as grandezas escalares, contribuindo para corporificação dos vetores. Essa compreensão proporcionou que iniciassem seus percursos pelos Mundos da Matemática referente aos vetores e incrementassem suas habilidades de abstração.

Isso foi relevante para que superassem os conflitos referentes aos “já-encontrados” oriundos do estudo da cinemática no ensino da disciplina de Física, identificassem semelhanças entre o deslocamento e a velocidade e dessem um tratamento vetorial a ambas, isto é, corporificassem o vetor tanto como deslocamento quanto como velocidade. A partir dessa generalização, a maioria dos alunos transitou entre os mundos corporificado e simbólico, representando essas grandezas com um mesmo símbolo: um segmento de reta orientado. Essa dinâmica sugere que a contextualização proposta contribuiu para que o objeto matemático vetor ganhasse significado para os alunos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Vol. 2 - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio – Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2000.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research**. Educational Researcher, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking Processes**. In: Tall, D. Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, Vol. 11. Springer, 2002.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2007.

MAIOLI, M. **A contextualização na matemática do Ensino Médio**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2012.

SPINELLI, W. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da matemática**. Tese (Doutorado em Educação) da Universidade de São Paulo – 2011.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.



ENSINO DE FATORAÇÃO PARA ALUNOS COM BAIXA VISÃO

Almeida, Antonia Cristina Batista, cris343556criativa@gmail.com
Aragão, Rígle da Costa, email²

¹ Universidade federal do Sul e sudeste do Pará (Unifesspa), Instituto de Ciências Exatas (ICE), Faculdade de Matemática.

² Universidade federal do Sul e sudeste do Pará (Unifesspa), Instituto de Ciências Exatas (ICE), Faculdade de Matemática.

Resumo: O presente trabalho trata do ensino da fatoração para alunos com baixa visão. A matemática é uma matéria de extrema importância para a vida em sociedade, e como tal, é preciso estar acessível a todos, independente de cor, raça, condição econômica e deficiência. A pesquisa foi motivada por observarmos as dificuldades de aprendizagem de um aluno com baixa visão durante as aulas de matemática na escola Therezinha Abreu Vita no município de Santana do Araguaia PA. A finalidade desta pesquisa é apresentar uma proposta de ensino de fatoração para alunos de baixa visão do 8º ano do ensino fundamental. A pesquisa é um estudo de caso de caráter exploratório, combinada com observações de campo que proporcionam maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito. Os resultados foram satisfatórios de acordo com a metodologia de ensino desenvolvida e os objetivos propostos, pois o aluno compreendeu como fatorar polinômio, utilizando os materiais manipuláveis para aprender o ensino de fatoração.

Palavras-chave: Fatoração, Baixa visão, inclusão

INTRODUÇÃO

Compreende-se a educação inclusiva como um conceito que visa proteger o direito de todos à educação, de forma a considerar a diversidade racial, social e cultural, ou seja, proporcionar a todos uma educação de qualidade. A educação é um direito de todos garantido pelo artigo 205 da Constituição Federal de 1988, ou seja, todo aluno com deficiência tem o direito de receber educação, devendo estar inserida principalmente nas aulas regulares (ABREU, 2014).

A consolidação deste direito deve ocorrer dentro do espaço educacional, quando o aluno possui algum tipo de dificuldade física ou psicológica é necessário trabalhar enquanto docente com metodologias que promovam a inclusão deste aluno no espaço escolar. Para tanto, destaca-se que a educação inclusiva pode ser compreendida como uma ação de perceber a dificuldade do aluno e criar mecanismos que se adequem as suas dificuldades sem prejudicar os demais alunos (ATAYDE, 2019).

A pesquisa foi motivada por observar as dificuldades de aprendizagem de um aluno com baixa visão durante as aulas de matemática na escola Therezinha Abreu Vita. O município de Santana do Araguaia tem uma dificuldade muito grande de incluir alunos com deficiência visual por não contarem com pessoas especializadas e escolas adaptadas com material didático e tecnológico para isso.

A finalidade desta pesquisa é apresentar uma proposta de ensino de fatoração para alunos do 8º ano do ensino fundamental através de uma sequência didática, trabalhando com materiais manipuláveis que têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias. A pesquisa é um estudo de caso de caráter exploratório, combinada com observações de campo que proporcionam maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito. A revisão bibliográfica está embasada nas seguintes referências: Januzzi (2004), Mazzota (2011) e outros autores.

A educação inclusiva é importante dentro do espaço educacional, tornando-se uma preocupação válida entre professores, alunos e toda a comunidade escolar. É fundamental a troca de experiências na busca de uma educação

de qualidade para alunos com e sem dificuldades de aprendizagem ou deficiência, de modo que todos os alunos possam se integrar à sociedade, à cultura e ao ambiente escolar e ter as mesmas oportunidades de participação e aprendizagem que os demais alunos. Portanto, é necessário lidar com a educação inclusiva de forma a promover o senso de responsabilidade e a consciência da integração social na comunidade escolar (BERNARDO, 2016).

DEFICIÊNCIA VISUAL

A deficiência visual é a nomenclatura dada a perda da capacidade de enxergar de forma total ou parcial, neste caso, mesmo com a melhor correção, ou qualquer utilização de dispositivo óptico, como óculos ou lentes de contato, a permanência da dificuldade de enxergar permanece. Além das dificuldades práticas que dificultam a qualidade de vida do aluno, destacam-se o preconceito e a intolerância, por exemplo, conotações pejorativas como “quatro olhos”, “ceguinho”, que reforçam o psicológico de forma negativa. (BRUNO; NASCIMENTO, 2019).

Existem vários métodos para avaliar a perda de visão ou o aumento da cegueira. Uma das principais causas da cegueira irreversível é o glaucoma avançado, que é uma doença ocular caracterizada por alterações no nervo óptico que causa danos irreversíveis às fibras nervosas. Portanto, perda de visão. Esse dano pode ser causado por aumento da pressão intraocular ou alterações no fluxo sanguíneo da cabeça do nervo óptico. Outro motivo é a degeneração macular relacionada à idade, que pode levar à perda do centro do campo visual (RIBEIRO; OLIVEIRA, 2018).

As pessoas cegas ou com baixa visão pode ser denominadas de deficientes visuais, ou seja, caracterizam-se pela restrição ou perda das funções básicas dos olhos e do sistema visual. Porém, as pessoas completamente cegas não têm percepção visual devido a diversos fatores fisiológicos ou neurológicos, ou seja, são caracterizadas por uma visão completa sem luz e forma, que podem ser congênitas ou adquiridas. Devido às limitações físicas causadas pela cegueira, a educação para essas pessoas é oferecida de diferentes maneiras (BRUNO; NASCIMENTO, 2019).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA E O ENSINO DE FATORAÇÃO NO 8º ANO

A inclusão educacional implica considerar as diferenças individuais, a desigualdade e suas sugestões pedagógicas, isto é, aceitar, respeitar e valorizar como componente natural no processo de ensino aprendizagem as pessoas com deficiências, priorizando assim o atendimento. Assim, observa-se que é dever do Estado garantir um ensino de qualidade a todos os alunos, principalmente às pessoas com deficiência, inserindo-as nas escolas regulares de ensino, diminuindo assim a marginalização e acabando com discriminação social e cultural. Para ter uma educação de qualidade e inclusiva, é necessário que os professores tenham uma formação de qualidade para atender às necessidades da atualidade que é inserir todos os alunos com alguma deficiência nas redes regulares de ensino.

Para adentrar na fatoração, é necessário compreender aspectos relacionados às expressões algébricas, pois “As expressões em que aparecem letras no lugar de números são chamadas de expressões algébricas” (SOUZA, 2015, p. 90). Nesse sentido, as fatoraões são compostas por expressões algébricas com as suas devidas variáveis, e busca-se através de ambos os exercícios substituir uma variável de uma expressão algébrica por um número para que possam ser realizados os cálculos e se chegar ao valor numérico de uma expressão.

Compreendemos que existem partes da matemática responsáveis por resoluções, adições, subtrações, dentre outras contas, e a parte responsável por estudar o emprego das letras para representar números ocultos é a álgebra. Os cálculos então passam a ser compreendidos por diversas perspectivas influenciados diretamente pelas culturas grega e hindu, que já utilizavam desde os primórdios da matéria as letras para substituir os números (SOUZA, 2015, p. 90).

MATERIAIS E MÉTODOS

Trabalhamos a partir do delineamento como estudo de caso que nos permite analisar uma situação específica, em particular, ou conexões e reflexões mais amplas da teoria relacionada ao tema (Gil, 2002). O nosso problema se adequa ao caso de termos um objeto em estudo bem definido, pois exploraremos uma situação da vida real para o qual queremos descrever a situação do contexto em que está sendo feita a pesquisa.

Nossa unidade-caso é delimitada à aplicação de uma sequência didática para um aluno com baixa visão do 8º ano de uma escola de ensino fundamental de Santana do Araguaia, integrado à sua realidade. Para levantamento de dados, foram feitas entrevistas semiestruturadas escritas com a pedagoga, o professor de matemática, a monitora e o aluno com deficiência visual. Também foi produzido o material didático para ser trabalhado com o aluno de baixa visão. A sequência de ações realizadas foi: construção de kit pedagógico; reunião com os agentes da pesquisa; entrevistas e planejamento pedagógico.

Esta primeira etapa de prática dependeu de todo um processo de observação da sala de aula, compreensão das necessidades do aluno de baixa visão e conversa com a equipe pedagógica, que conseguiu apresentar quais ferramentas poderiam ser elaboradas e tratadas dentro do ambiente escolar. Foi criado um kit com materiais manipuláveis para trabalhar o ensino de fatoração com o aluno de baixa visão, o qual continha os seguintes itens:

- ✓ 01 caixa grande;
- ✓ 01 flanelógrafo;
- ✓ 20 envelopes grandes;
- ✓ 400 quadrados grandes e pequenos nas cores amarelo liso e verde áspero; e
- ✓ 200 retângulos nas cores amarelo liso e verde áspero de E.V.A, que foi doado para a escola trabalhar com os alunos e, em especial, com os alunos com deficiência visual.

No primeiro momento, houve uma intervenção com diretores, coordenador pedagógico, mãe do aluno, professor e monitora, ou seja, um diálogo com os participantes para falarmos sobre a proposta de abordagem que seria aplicada na sala de aula, quais os objetivos da pesquisa e pedir a autorização para que ela fosse realizada.

Os planos de aula foram realizados através de uma sequência didática desenvolvida pela autora da pesquisa, a qual foi baseada no planejamento anual da escola e com conteúdo programático para cada um dos semestres letivos. Para preparação da sequência didática foi levado em conta o livro didático utilizado pelo professor e foram aplicados os seguintes assuntos: Álgebra e Fatoração. O objetivo dos planos de aulas foi elaborado para ser aplicado em uma sala de ensino regular que recebe um aluno com baixa visão.

Houve a elaboração de quatro planos de aulas que buscaram estruturar as necessidades dos conteúdos programáticos escolares, aliados às necessidades especiais que implicam no processo de aprendizagem do aluno de baixa visão. Assim, os conteúdos das aulas foram: introdução de fatoração, revisar área de quadrilátero e polinômio, situações problemas e definição de fatoração e monômio.

RESULTADOS

No primeiro momento, foi apresentado o kit de material para toda turma, explicando qual o objetivo de utilizar esse material entregue para os alunos, em dupla, manusear à vontade para analisar as cores, tamanhos e textura, principalmente, para o aluno com baixa visão. Os alunos manusearam bastante cada peça do material, formando diferentes tipos de desenhos como bonecos, casas e jogo da velha. Ressaltamos que nosso foco foi aplicar a sequência didática para o aluno com baixa visão, mas que isso não impediria que os demais alunos utilizasse o material, pois, avaliamos que também os ajudariam.

No segundo momento, foi entregue uma atividade fotocopiada com as seguintes questões: O que acha desse material? Todas as peças do material são iguais? Sabe quais formas geométricas representam cada peça do material apresentado? Tem alguma peça com textura diferente? Por que tem alguma peça com textura diferente? Quais conteúdos de matemática podemos estudar utilizando esse material?

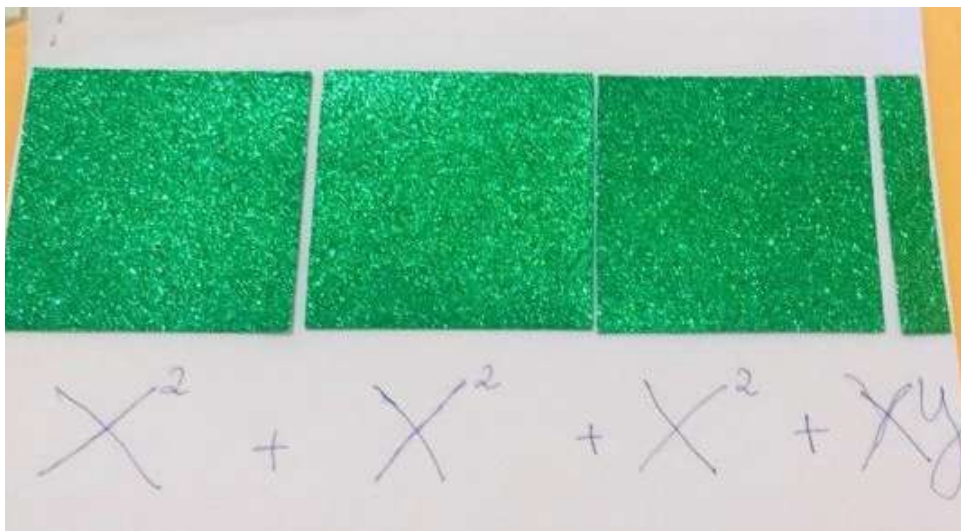
Analisando as respostas do aluno com baixa visão, ele argumentou que os materiais eram muito bons, tinham peças diferentes com textura áspera e lisa no formato de quadrados e triângulos, provavelmente essa diferença era para facilitar o significado de cada peça e os conteúdos que poderiam ser trabalhados utilizando o material manipulável seriam formas geométricas e ângulos. Ele também entendeu com facilidade que cada peça do material manipulável é representada por um monômio. Através de diálogo com o aluno, identificamos que compreendeu que os quadrados têm textura diferentes, sendo o verde, que é áspero, é representado por um x^2 e o amarelo por $-x^2$, é liso. Já os retângulos são representados assim: o verde por xy e o amarelo por $-xy$ e os quadrados pequenos o verde é igual y^2 e amarelo $-y^2$.

A sequência didática trabalhada com material manipulável aprimorou o conhecimento do aluno com baixa visão. Comprovamos isso através da nota do aluno no teste, passado para toda turma como avaliação parcial da disciplina, valendo 5,0 pontos. O aluno alcançou a nota máxima do teste, isso demonstrou que houve aprendizado, ou seja, a aplicação da sequência didática teve êxito.



Fonte: elaboração do autor (2020).

Figura 1. Aluno com baixa visão trabalhando com material manipulável



Fonte: elaboração do autor (2021).

Figura 2. Representação da questão A

CONCLUSÕES

Este trabalho possibilitou um contato com aluno de baixa visão em processo de desenvolvimento escolar, em meio a sua turma. Isso enriqueceu a observação e, conseqüentemente, a preparação dos planos de aula. A observação levou a compreender as limitações da escola e do professor devido falta de acessibilidade em toda a escola, da falta de piso tátil ao recurso didático para ser usado na sala de aula. A inclusão ainda é um processo feito de qualquer forma e sem compromisso do poder público. O que supera as dificuldades, muitas vezes, é o compromisso da coordenação pedagógica e do professor, que mesmo não recebendo formação continuada e suporte estão tentando superar os obstáculos.

Conseguiu-se apresentar práticas positivas através da realização de atividades sobre fatoração, de modo, a proporcionar ao aluno de baixa visão recurso didático alternativo de ensino e a inclusão no ambiente da sala de aula.

Os resultados foram satisfatórios de acordo com a metodologia de ensino desenvolvida e os objetivos propostos, pois, o aluno compreendeu o conceito de fatoração.

Outro ponto importante, é que o material foi aplicado pelo próprio docente da turma e de acordo com seu planejamento. Isso possibilita ter uma compreensão mais realista do dia a dia e ainda, de forma prática, envolvendo o próprio docente que, com certeza, foi influenciado pelo estudo que ajudou a construir.

REFERÊNCIAS

- ABREU, L. A. F. Geometria para deficiente visual: uma proposta de ensino utilizando materiais concretos. **Campos dos Goytacazes**, 2014.
- ALMEIDA, A. C. B. Ensino de fatoração para alunos com baixa visão. **Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará**, Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica, Instituto de Ciências Exatas, Curso de Matemática, Trabalho de Conclusão de Curso, p. 1-55. 2020.
- ATAYDE, S. T. S. O uso das libras na matemática do ensino fundamental: [manuscrito]: uma proposta de glossário. **Revista Atlas**, v. 5, n. 4, p. 11-45. 2019.
- BERNARDO, F. G. Recursos e adaptação de materiais didáticos para inclusão de alunos com deficiência visual no ensino da matemática. IV Seminário Internacional Inclusão em Educação: Universidade e Participação - Inclusão, Ética e Interculturalidade. 11-13 de maio, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, 2016.
- BRANDÃO, J. C. Matemática e deficiência visual. São Paulo: **Scoretecci**, 2006.
- BRASIL. O aluno cego e de baixa visão no meio escolar. Adriana Domingos dos Anjos. **Ministério da Educação**. 2013.
- BRUNO, M. Escolarização das pessoas com deficiência visual: algumas reflexões sobre o atendimento educacional especializado e a prática pedagógica. **Mercado de Letras**, p. 1-50. 2013.
- BRUNO, M. M. G; NASCIMENTO, R. A. L. Política de acessibilidade: o que dizem as pessoas com deficiência visual. **Seção temática: Educação Especial, Psicanálise e experiência democrática**, v. 44, n. 1, p. 45-78. 2019.
- CAMPOS, P. C.; GODOY, M. A. B. O Aluno Cego, a Escola e o Ensino da Matemática: Preparando Caminhos para a Inclusão com Responsabilidade. **Revista Educação & Realidade**, v. 6, n. 7, p. 66-87. 2008.
- GONZAGA, Ana. Materiais adaptados ajudam a incluir. **Gestão Escolar**. 2012. Disponível em: <<https://gestaoescolar.org.br/conteudo/350/materiais-adaptadosajudam-a-incluir>>. Acesso em: 22 de nov. 2021.
- RIBEIRO, L. O. M; OLIVEIRA, W. R. Espaço vivido e aprendizagem significativa: o educando com deficiência visual nos iniciais do ensino fundamental. **Revista Educação, Artes e Inclusão**, v. 14, n. 4, p. 56-78. 2018.
- SOUSA, A. C. L. L; SOUSA, I. S. A inclusão de alunos com deficiência visual no âmbito escolar. **Revista Estação Científica da UNIFAP**, v. 6, n. 3, p. 42-50. 2016.



**ME DÊ MOTIVO: UM ENSAIO SOBRE O ENSINO DA
MATEMÁTICA SUPERIOR SOB APLICAÇÕES EM
CROCHÊ**

MATHEUS LUZ, MARLY NUNES E EDILENE ROZAL

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1. **Prefácio**
2. **Introdução**
3. **Procedimentos metodológicos**
4. **Resultados**
 - 3.1. Processo dedutivo e construtivo
 - 3.2. Possibilidades pedagógicas
5. **Conclusões**
6. **Referências bibliográficas**

PREFÁCIO

Este trabalho visa apresentar uma proposta que fomente a aplicação matemática através da correlação entre os dois formatos de ensino, por meio do conteúdo matemático de Isometria, Sequências e Séries, com uso no *crochê* e *software GeoGebra*. Pois, é cada vez mais crescente/necessário a abordagem aplicada dos conteúdos matemáticos ministrados e nessa linha, podemos destacar o florescimento de volumosas pesquisas desenvolvidas nas áreas de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) ou de práticas Culturais Tradicionais, mas raramente executadas no ensino superior, e geralmente são condicionadas ao antagonismo. Assim sendo, realizamos pesquisas bibliográficas didático-pedagógica e de apropriação de técnicas dos elementos específicos dos assuntos a serem trabalhados, ao passo que caminhamos pela Modelagem Matemática e Etnomatemática. Como resultado, modelamos *Motivos de Crochê*¹ com Sequências e Séries correspondente as suas partes, de modo parcial ou genérico; ressignificamos tal peça como construção do *software GeoGebra*, utilizando os comandos Polígonos, Sequências, Vetores e Controles deslizantes; e, correlacionamos práticas de ensino na aplicabilidade matemática.

¹ Pequenas peças de *crochê* construídas radialmente, com a finalidade de compor um objeto maior ou usadas separadamente.

INTRODUÇÃO

No contexto matemático-acadêmico pouco se observa o uso aplicado dos conteúdos ministrados. São várias as alegações para tal fenômeno, porém as principais estão na carga horária enxuta para um cronograma extenso, ou na falta de interesse/domínio didático-pedagógico docente, centrado no argumento de que tais profissionais possuem formação acadêmica em Matemática Pura, e que seu dever está na mera transmissão teórica. Um possível cenário que parece explicar a pouca demanda de estudantes em áreas exatas (seja bacharelado ou licenciatura), os maiores índices de reprovação em disciplinas teóricas, o mercado com mais oportunidades, e o aumento contínuo de graduandos em processo de desistência/trancamento por turmas do ingresso a conclusão do curso.

Nessa conjuntura, entendemos, conforme Titoneli (2017), que o “trabalho do professor é importante sempre propiciar para os alunos uma forma de construir os conceitos e não apenas recebê-los sem que façam sentido algum para o aprendiz”. Afirmando, então, que a peça principal do figurino docente (professor atuante independente de sua linha de pesquisa) é a sua capacidade de lecionar e desenvolvê-la de maneira inteligível. Ora, os conhecimentos aprendidos nas instituições de ensino são decorrentes de um processo cíclico de observações, generalizações, validações (em ambiente concreto ou hipotético) e transmissão.

Por outro lado, no curso do desenvolvimento desta pesquisa se deu a aprovação e instalação do Laboratório Pedagógico de Matemática, para o curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Pará - UFPA, Bragança/PA (Pgrad-Labinfra 2019). Logo, ratificando a iniciativa de propor meios de desenvolvimento de recursos que fossem destinados, de modo acessível e permanente, ao uso de professores e alunos de graduação como completude formativa ou recurso pedagógico.

Dessa forma, partiu-se do planejamento de material didático como uma proposta voluntária, interessada ao referido laboratório. Contudo, não se tratando de um recurso que apenas transmitisse a simples transformação

concreta, *3D*, esboço, imagem ou dado de um determinado assunto, mantendo a sua característica abstrata de conhecimento generalista. Mas conciliar elementos que agreguem valor significativo de modo singular. Ou seja, a confecção de materiais que possam ser utilizados, reutilizados e refigurados as perspectivas das áreas da Matemática, da multidisciplinaridade e de conhecimento de mundo.

Assim, definimos como assunto base Sequências e Séries. Isto por se tratar de um assunto ligado a disciplinas com maiores índices de reprovação acadêmico matemático, onde buscamos a sua transcrição aplicativa em elementos tradicionais, pois como comenta Bandeira (2016, p. 11) a primeira influência cultural que está relacionada com a Matemática surge do ambiente cultural no qual determinado grupo está inserido. E, pra realização deste fato, foi escolhido o artesanato de *crochê*, devido as pré-noções de que esta confecção carregaria quanto padrões repetitivos que pudessem ser vinculados ao assunto base e, além disso, por transmitirem conhecimentos populares/regionais.

Porém, por que não conceber recusos pedagógicos que comunguem entre si na conciliação de conhecimentos Tradicionais/Artesanais e Tecnológicos? Pois, o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação - TIDC nos “permitem a utilização de ferramentas para mediação dos processos de aprendizagem. Tais ferramentas são vastas e vão além do uso de artefatos na sala de aula, mas permitem modos de comunicação que possibilitam o desenvolvimento da inteligência e ampliam os processos de aprendizagem” (BRASIL, 2018, p. 37). Sendo um exemplo disso o *software GeoGebra*, uma vez que viabiliza o processo em ferramentas que promovem acessibilidade, dinamicidade e popularidade. E, neste ponto, a correlação de práticas Artesanais e Tecnológicas evidenciam a conciliação de um conjunto de áreas do conhecimento e da própria Matemática.

Dessa forma, este trabalho busca apresentar alguns dos produtos educacionais que são frutos da correlação entre os *motivos de crochê* e construções geométricas no *GeoGebra*, norteado pelos conteúdos de Sequências, Séries e Isometria como mecanismo aplicado interessado ao favorecimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, escrever estes produtos educacionais - materiais didáticos, tendo por base os *motivos de crochê* e o *software GeoGebra*, destinados à melhoria da qualidade do ensino da Educação Superior, produzido através de pesquisa voluntária discente com apoio da coordenação/supervisão do programa Pgrad-Labinfra 2020.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente, este trabalho a partir dos procedimentos técnicos se mostra uma *Pesquisa Bibliográfica* tocante ao acúmulo de fontes semelhantes a temática ou aos assuntos bases de fomento a pesquisa (*crochê*, *GeoGebra*, Sequências, Séries e Isometria). Desse modo, tal formato de pesquisa se constitui quando

elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. Em relação aos dados coletados na internet, devemos atentar à confiabilidade e fidelidade das fontes consultadas eletronicamente. Na pesquisa bibliográfica, é importante que o pesquisador verifique a veracidade dos dados obtidos, observando as possíveis incoerências ou contradições que as obras possam apresentar (PRODANOV, 2013, p. 54).

Além disso, na perspectiva de sua natureza, a identificamos por Pesquisa Básica, uma vez que “objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais” (PRODANOV, 2013, p. 54).

Posto isso, de posse de todos os dados necessários, fora pensada a aplicação matemática para elaboração dos materiais didáticos sob o Processo de Identificação Matemática. Neste caso, optamos em escolher um modelo *crochê* pré-estabelecido e, a partir deste, efetuar as deduções matemáticas do assunto desejado. Ademais, criar elementos digitais representativos por meio do *software GeoGebra*, com apropriação de comandos e conhecimentos de Isometria.

Dessa forma, notamos fundamental a condução pela Etnomatemática e Modelagem Matemática. A primeira se justifica em ser um campo da Educação Matemática que trata a “capacidade e as maneiras, de domínio de um grupo cultural identificado, de observar, conjecturar, experimentar, inferir, classificar, ordenar, contar e medir” (D’AMBRÓSIO, 1988,

p.02). Ora, compreender que “a influência da herança cultural é uma resposta para solucionar problemas matemáticos internos que são próprios ao grupo” (BANDEIRA, 2016, p. 59) elenca saberes adquiridos, que podem

parecer implícitos realçando-os, e dessa forma “capacitar os alunos a descobrir que eles já pensam matematicamente e, portanto, podem aprender a Matemática escolar” (BANDEIRA, 2016, p. 65).

Além disso, a “modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2002, p. 16-17). Dessa forma, sendo fundamental no processo de uso dos entes matemáticos a aplicação.

Quanto a construção nesse processo de Identificação, foi tomado *gráfico*² e peça de *crochê* de três *motivos*, quadrangular, triangular e circular (por serem os gráficos que possuem uso corriqueiro dentre os artesãos e estruturas básicas de confecção) e, para identificação do padrão sequencial sob os blocos de *pontos altos*³ em *carreira*⁴. Posterior a isso, pautou-se na construção no *GeoGebra*, adotando ferramentas do *software* e conhecimentos isométricos.

² Conjunto de símbolos próprios do *crochê* com intenção ilustrativa do objeto real.

³ Espaços preenchidos do objeto por um conjunto de *nós*.

⁴ Contorno completo da peça feito por *pontos altos* intercalados sob uma ordem específica do artesão.

RESULTADOS

3.1. PROCESSO DEDUTIVO E CONSTRUTIVO

Após o levantamento teórico sobre os *motivos de crochê*, assuntos matemáticos (Sequências, Séries e Isometria) e das funcionalidades do *GeoGebra*, seguiu-se à análise e elaboração do roteiro para associação dos padrões algébricos e construção digital dinâmica. Disto, podemos constatar que o total os blocos de *pontos altos* por *carreira* possui uma Sequência correspondente. De modo similar, para o total de *blocos de pontos altos* no objeto por completo há uma série associada, esta que a cada novo acréscimo de carreira acumula o somatório de todas as anteriores.

A partir de gráficos disponibilizadas em sites de pesquisa, foi permitida a tessitura concreta das peças por uma artesã, e a construção digital. A elaboração no *GeoGebra* se deu com base no uso das ferramentas Ponto, Vetores, Polígono, Ângulo, Comando Sequência e Controles Deslizantes, de modo isolado ou simultâneo, conforme as necessidades de composição. Tendo a finalidade estética e lúdica, foram alterados os dados de coloração, postas animações e caixas de texto animadas. Assim, atuando conforme o argumento base de que “quando o docente incorpora as tecnologias no contexto educacional, ele permite um desenvolvimento cognitivo mais amplo e voltado para o que há de mais moderno na relação professor-aluno” (RODRIGUES, 2018, p. 41).

Dessa forma, conseguimos:

- Para o *Motivo Quadrangular*, encontramos como padrão sequencial $a_n = 4n$ (que conta o total de blocos de *pontos altos* por *carreira*), e como série $q_q = \sum_{i=0}^n 4n, n \in \mathbb{N}$ (que indica o quantitativo de blocos de *pontos altos* na peça inteira). Com os seguintes registros dos recursos desenvolvidos:



Figura 1 - Gráfico, Peça e Construção no GeoGebra do Motivo Quadrangular

- Para o *Motivo Triangular*, devido o seu formato, *sequência* encontrada fora diferente da primeira, sendo a mesma $a_n = 3n$, e conseqüentemente sua *série* alterou-se para $q_q = \sum_{i=0}^n 3n, n \in \mathbb{N}$. E, os registros de recursos desenvolvidos foram:

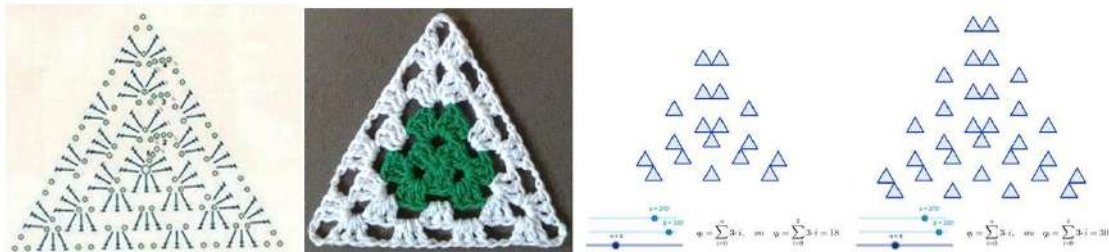


Figura 2 - Gráfico, Peça e Construção no GeoGebra do Motivo Triangular

- Por fim, para o *Motivo Circular*, a *sequência* encontrada foi $a_n = 2^{n+1}$, e com *série* $q_q = \sum_{i=0}^n 2^{n+1}, 1 \leq n \leq 6 \in \mathbb{N}$. Com os seguintes registros de recursos desenvolvidos:

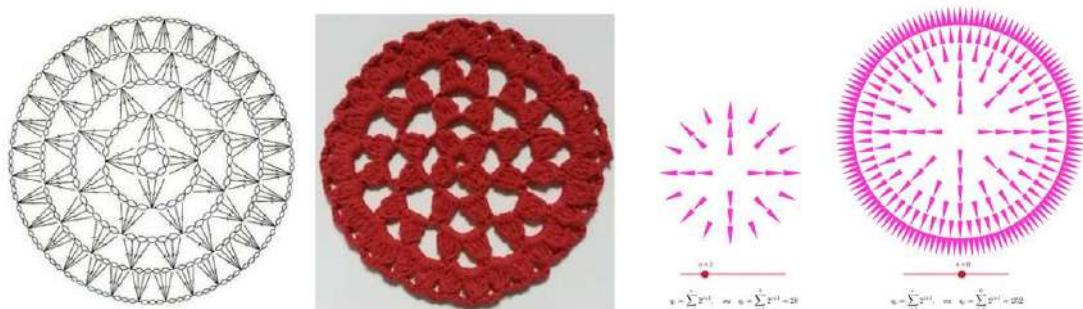


Figura 3 - Gráfico, Peça e Construção no GeoGebra do Motivo Circular

3.2. POSSIBILIDADES PEDAGÓGICAS

Deve-se a construção do objeto e aos seus usos pedagógicos destinados ao ensino superior, no sentido de ganho informativo/formativo tanto discente quanto docente, pois: desenvolve a aplicabilidade nos estudos de Sequências, Séries e Isometria; resgata elementos de práticas Tradicionais; evidencia a existência “implícita” da abordagem matemática em técnicas tradicionais; mostrar a relação de atividades tradicionais e o uso das tecnologias digitais; aguça a criatividade docente/discente, reforça o papel da multidisciplinaridade acadêmica; aponta a reflexão, análise e interpretação de resultados aplicados; pode ser abordado o aspecto social profissionalizante; os materiais em crochê podem ser recursos de educação inclusiva a alunos com deficiência visual; as construções, seja digital ou concretas de *crochê*, são versáteis/modificáveis em adaptações de padrões sequenciais, seriais e isométricas; e, o próprio roteiro para construção dos itens feito nesta obra pode ser proposto (sujeito a adaptações) como sequência didática.

CONCLUSÕES

O trabalho efetuou a descrição genérica de produtos educacionais – materiais didáticos, voltados ao enriquecimento formativo do Ensino Superior, produzido de modo voluntário/autônomo discente e destinado ao Pgrad-Labinfra 2019. E em seu desenvolvimento foram tomados o *crochê* e *GeoGebra* de modo associativo em amarres do tema Sequências, Séries e Isometria. Associação esta, que possibilita a aplicação de forma dinâmica, singular em inovação e plural as áreas de conhecimento, para a aprendizagem da matemática.

A proposta de elaboração de materiais pedagógicos obteve êxito com viés duplo. Uma vez que, durante a elaboração da proposta foram desenvolvidos conhecimentos próprios à equipe autora, com o desenvolvimento dos materiais mencionados. Por outro lado, os resultados podem ser compreendidos e refigurados ao uso posterior sob demanda educacional dos materiais desenvolvidos que estão disponíveis, por meio do laboratório de matemática – Labinfra, para o uso de discentes e docentes da Faculdade de Matemática como recurso didático.

Portanto, aplicações feitas nesta obra sob os *motivos de crochê*, aqui apresentados, devem dar motivos a sua reprodução em sala de aula. Destacando, assim, o empenho/entusiasmo pelos ganhos educacionais gerados pela adoção de tais práticas, não sejam ofuscados pela justificativa da existência dos problemas estruturais e sociais enfrentados e conhecidos do cenário educacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BANDEIRA, F. A. **Pedagogia etnomatemática**: reflexões e ações pedagógicas em matemática do ensino fundamental. Natal: EDUFRRN, 2016.
- [2] BASSANEZI, R. C. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- [3] D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática se ensina? **Boletim de Educação Matemática – Bolema**, Rio Claro, v. 03, n. 4, p. 3, 1988. ISBN 978-85-89082-23-5.
- [4] PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.
- [5] RODRIGUES, A. C. L. **TDIC e os processos cognitivos**. Curso de Graduação em Tecnologia Educacional. Programa Universidade Aberta do Brasil. Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá: 2018.
- [6] TITONELI, L. M. B. **A observação de padrões**: modelagem matemática através de sequências numéricas e objetos geométricos. 2017. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio) - Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PRESENTE NO LIVRO DIDÁTICO EM UMA INSTITUIÇÃO DE ENSINO FUNDAMENTAL DO MUNICÍPIO DE CAMETÁ-PA

Moia, Romulo Everton de Carvalho, romuloecm08@gmail.com¹
Dias, Robson do Carmo Dutra, binho87dias@gmail.com²
Melo, Laércio de Jesus Machado de, laerciomat@yahoo.com.br³

¹Universidade Federal do Pará – UFPA

²Universidade Federal do Pará – UFPA

³Secretaria Estadual de Educação – SEDUC/PA

Resumo: *A presente pesquisa tem como objetivo analisar a inserção da História da Matemática presente em dois livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental escola pública do município de Cametá-PA. Assim, pretende-se enfatizar a essencialidade da abordagem do aspecto histórico da matemática, pois desse modo o ensino se torna mais significativo no que tange a assimilação dos conteúdos através do ensino contextualizado. A metodologia empregada foi a descrição e análise de livros didáticos e seus respectivos conteúdos, bem como a análise bibliográfica de autores que abordam a história da matemática e o referido tema (análise de livros didáticos). Nesse sentido, esta análise faz-se necessária uma vez que a apropriação do conhecimento matemático e de sua história é uma via para a construção da matemática vinculada à vida prática e relacionada às diversas áreas do conhecimento, o que gera a compreensão desta ciência e seus objetivos. Portanto, é essencial fomentar a relação do conteúdo com a realidade do educando, para viabilizar aplicações práticas do que é estudado, em outras palavras, por meio do conhecimento da história da matemática é possível mostrar aos alunos de que forma e para qual finalidade as operações, fórmulas e outros conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos em seus determinados contextos, utilizando situações práticas e de vivência.*

Palavras-chave: *História da Matemática, Ensino, Matemática, Livro Didático.*

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática tem passado por muitas mudanças de caráter metodológico e curricular (FIORENTINNI, LORENZATTO, 2012, p. 44). O que se vê hoje, no ramo de ensino e aprendizagem com a aplicação de técnicas modernas de ensino, em que é testada a capacidade do aluno de raciocinar, interagir, resolver problemas, é resultado proveniente de anos de estudos e pesquisas realizadas por vários intelectuais da educação.

Desse modo, é muito importante que se faça um estudo aprofundado e mais detalhado da matemática e da educação matemática em si, com vistas a conhecer suas histórias, seus precursores, e os fatos ocorridos ao longo de suas difusões pelo mundo, chegando ao que é hoje. Nesse viés, o presente estudo faz-se necessário uma vez que a compreensão e apropriação do conhecimento da matemática e de sua história é um meio para a construção de uma matemática vinculada à vida prática e com relação com as diversas áreas do conhecimento humano – ocasionando, ainda, o entendimento desta ciência e suas finalidades.

Quando a função da matemática no processo de ensino-aprendizagem é discutida, é significativo avaliar e investigar a maneira como esta se manifesta nas escolas, ou seja, conhecer de que modo a matemática é ensinada. Nesse sentido, o objeto selecionado a ser investigado foram os livros didáticos de matemática utilizados por uma

escola pública do Ensino Fundamental do município de Cametá-PA, haja vista que, em geral, são estes que norteiam as práticas docentes.

Nessa perspectiva, Santos e Carneiro (2006. P. 206) apontam que “o livro didático assume essencialmente três grandes funções: de informação, de estruturação e organização da aprendizagem e, finalmente, a função de guia do aluno no processo de apreensão do mundo exterior”.

Assim, a presente investigação foi realizada com o objetivo de analisar a inserção da História da Matemática presente em dois livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental escola pública do município de Cametá/PA.

Em outras palavras, dada a importância de um ensino da matemática contextualizado historicamente, a análise desses instrumentos didáticos nos permitirá ponderar acerca das limitações existentes nesse sentido, além de afirmar a relevância que a história da educação matemática possui para o processo educacional.

Para a realização deste trabalho, foi adotada como metodologia a descrição e análise da história da matemática presente nos livros didáticos utilizados por uma escola pública do Ensino Fundamental do Município de Cametá/PA. Para efetivá-la foi feita uma revisão bibliográfica, análise e observação de dois exemplares de livros didáticos de matemática atribuídos ao ensino fundamental, especificamente no 9º ano do ensino fundamental.

Vale salientar que hoje, a educação matemática e a história da educação matemática são objetos de investigação de vários pesquisadores do meio educacional e estão dentro das técnicas modernas de ensino e aprendizagem atuais. Focam não apenas no aprendizado de fórmulas e equações característicos da matemática, mas em sua história e evolução dentro do quadro educacional.

Nesse sentido, entendemos que a Educação Matemática é descrita como um ramo da educação, uma especialização da Matemática, e ainda, como o estudo e o desenvolvimento de técnicas ou modos mais eficientes de se ensinar a Matemática, além de ser considerada como estudos de ensino e aprendizagem da matemática e como metodologia de seu ensino. (D’AMBROSIO, 1993).

Logo, o raciocínio matemático está relacionado com construções humanas que se desenvolvem “dentro de um contexto histórico-social e que tem reflexões e aplicações neste”, que devem ser estendidas a todos e completamente compreendidas por todos, e não apenas por um grupo pequeno de intelectuais e especialistas. (MENDES, 2009).

DESCRIÇÕES E ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Livro 1: Projeto Teláris - Foi publicado no ano de 2015, cuja autoria é de Luiz Roberto Dante. É um livro didático com quatro volumes, que envolve do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. A Figura 1 mostra a capa do livro estudado.

Figura 1 - Capa do Livro Projeto Teláris



O livro Projeto Teláris apresenta seu conteúdo em várias seções muito bem elaboradas, afim de que seus leitores tenham uma forma diferente e atrativa de aprenderem matemática. Várias dessas seções apresentam diversos

conteúdos que estão relacionados à história da matemática. Na unidade 1 do livro, por exemplo, a história da matemática aparece na seção “Outros contextos”, onde o livro apresenta várias questões de vestibulares e Enem, e em uma dessas questões está contido um texto contando como se deu a criação do nome de dois dos maiores números que têm nome. São eles o Googol e o Googolplex. O livro explicita que um googol vale e um Googolplex vale e, segundo o livro, quem foi o autor desses nomes foi o matemático norte-americano Edward Kasner, em 1938. O livro cita ainda, detalhes de como se deu essa criação.

No capítulo 2 da unidade 1 a história da matemática se apresenta na introdução do capítulo, na página 29, no assunto de Equação e sistemas de equações do 2º grau; onde há um texto na introdução ressaltando que ao longo da história da matemática, vários povos deram importantes contribuições ao desenvolvimento dessa ciência (matemática), entre eles, os egípcios, babilônios, gregos, romanos, hindus, árabes e muitos outros. O livro revela ainda que um desses povos, os babilônios, tiveram um importante papel na construção de áreas na Matemática, como a Álgebra e a Geometria, e que os conhecimentos matemáticos dessa civilização que habitou a antiga Mesopotâmia foram extremamente valiosos para que ela se desenvolvesse e prosperasse em campos como a agricultura, arquitetura e astronomia. Ainda segundo o livro, esses conhecimentos eram aplicados em várias situações, desde cálculo dos dias meses e anos até a construção de templos e palácios. Nessa mesma página há também uma foto da reconstrução do portal de Ishtar, no museu de Pérgamo, em Berlim, Alemanha; segundo o livro, é uma das maravilhas arquitetônicas do povo babilônio, construída em 600 a. C. Essa construção revela o domínio de vários conhecimentos matemáticos.

Ainda no capítulo 2 da unidade 1, na página 30, o livro mostra a foto de uma placa de argila, tida como um dos vários documentos que os babilônios deixaram, e que está guardada no museu britânico, em Londres, Inglaterra. O livro expõe um problema contido nessa placa de argila, em que se pergunta: Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?

O livro resolve o problema tornando-o como uma equação do 2º grau. Há também nessa mesma página uma ilustração artística representando um homem babilônico tentando resolver um problema matemático.

Seguindo no capítulo 2 da unidade 1, na página 47, na seção “Leituras” tem-se um texto contando quem foi Bháskhara e o porquê do termo conhecido como “fórmula de Bháskhara”. O texto resalta a importância e a riqueza das obras de Bháskhara mais conhecidas, Lilavati e Vijaganitos, que tratam de Aritmética e Álgebra, contendo vários problemas sobre equações de 1º e 2º grau. No entanto, o texto não atribui à Bháskhara a fórmula de resolução da equação do 2º grau que leva seu nome, e revela que não foi escrita por ele.

Livro 2: Projeto Araribá - O ano de publicação foi 2010. É uma obra coletiva, cujo responsável é Fábio Martins de Leonardo. É um livro didático com quatro volumes, que envolve do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. A Figura 2 apresenta a capa do livro estudado.

Figura 2 - Capa do Livro Projeto Araribá



A parte 1 do livro não possui explicitamente a história da matemática. Há apenas uma ilustração com fotos de uma pirâmide egípcia, na página 17, em que se calcula a idade aproximada da pirâmide usando a notação científica. No entanto, o objetivo da ilustração não é de apresentar a história da matemática. Já na parte 2 do livro, a história da

matemática aparece detalhadamente na página 56 em uma proposta de atividade do assunto: Resolução de uma equação do 2º grau completa; em que há uma ilustração com foto do livro *Al-jabr Wa'l muqabalah*, escrito por Mohammed ibu-Musa Al-Khwarizmi, matemático árabe do século IX. A ilustração revela que Al-Khwarizmi utilizou um método geométrico para encontrar raízes de uma equação do 2º grau, em que ele procurou traçar uma figura cuja área representasse o 1º membro da equação, feito isso, ele completava a figura para que formasse um quadrado. A atividade do livro propõe que se tente responder a uma questão baseando-se no método utilizado por Al-Khwarizmi. Este mesmo capítulo destaca que os matemáticos indianos da época de Al-Khwarizmi, também já tinham interesse pela equação do 2º grau, e destacou que o matemático mais importante da Índia foi Bháskara, ressaltando que em sua obra mais conhecida *Lilavati*, Bháskara apresenta muitos problemas que são resolvidos por equações de 2º grau.

Na parte 3 do livro, história da matemática aparece introduzindo o assunto de Tales e a aplicação da semelhança de triângulos, na página 90, onde o livro conta um pouco sobre a vida de Tales de Mileto e seus cálculos. O livro cita que Tales, por volta de 600 a. C., em uma de suas viagens ao Egito, foi desafiado pelo faraó a calcular a medida da altura da pirâmide Quéops. O livro ilustra ainda, um esquema de como Tales fez esse cálculo. Ainda na parte 3 do livro, a história da matemática se faz presente no assunto de Relações métricas no triângulo retângulo, na página 99, onde cita o filósofo e matemático grego, Pitágoras. O livro fala da escola pitagórica em Crotona, e diz que serviu de centro de estudos de Filosofia, Ciências Naturais e Matemática; faz menção ainda, ao teorema que leva o nome de Pitágoras: “O Teorema de Pitágoras”, na página 100, faz uma ilustração com a imagem da tradução em árabe do Teorema de Pitágoras, que consta na obra *Al-Jabr Wa'l muqabalah*, de Al-Khwarizmi, citado aqui anteriormente. O livro ressalta também, na página 100, que uma das primeiras demonstrações desse teorema foi desenvolvida por Euclides, em sua obra *Os Elementos*, por volta de 300 a. C.

Na parte 4 do livro não aparece nenhum vestígio de história da matemática.

Na parte 5 aparecem vestígios de história da matemática no assunto de Relações métricas nos polígonos regulares, na página 190, em que mostra fotos de figuras desenhadas no solo conhecidas como geoglifos que demonstram um conhecimento matemático de um período ainda desconhecido, haja vista que não se sabe, segundo o livro, a origem desses geoglifos. O capítulo destaca ainda, nesse mesmo assunto, a arte indígena, que há muito tempo, desde os seus primórdios fazem o uso da matemática, ainda que informalmente, transformando-a em arte e cultura, onde fazem pinturas pelos corpos com a forma de figuras geométricas.

A seguir serão apresentadas três propostas atividades relacionadas ao assunto Função Afim, tendo como recurso principal o *software GeoGebra*. Dessa forma, objetivamos demonstrar que esse recurso vem a ser, não apenas mais um objeto tecnológico e sim um suporte didático para o professor de matemática. A primeira proposta atividade e para ser desenvolvida antes de ser inserida em sala, as outras duas para serem desenvolvidas durante as aulas.

CONCLUSÕES

Neste artigo busquei discutir a educação matemática, bem como sua história e sua presença/ausência nos livros didáticos a partir de uma análise feita em dois livros de uma escola pública do município de Cameté-pa.

A partir disso, verificou-se que os livros didáticos que foram analisados, como instrumentos de inserção da História da Matemática no ensino se mostram como uma ferramenta potencial e ao mesmo tempo limitada, pois pode-se dizer que o livro Projeto Teláris dá grande ênfase à história da matemática ao expor seu conteúdo organizadamente em várias seções inteligentes e atrativas a qualquer leitor, sendo que uma dessas seções é destinada especificamente para apresentar leituras e ilustrações, geralmente relacionadas à história da matemática. Além disso, em várias outras seções do livro estão contidas leituras, textos em introduções de unidades e de capítulos; além de atividades propostas que fazem menção à história da matemática e que destacam fatos em ilustrações com fotos e até mesmo ilustrações de reportagens referentes à matemática de várias épocas. Por outro lado, o livro Projeto Araribá apresenta em seu conteúdo poucos pontos que remetem à história da matemática. Os trechos que geralmente citam algo referente à história da matemática estão contidos em introduções de assuntos, em algumas atividades propostas ou em seções de leituras. No entanto, diferentemente do livro Projeto Teláris, o livro Projeto Araribá não apresenta uma seção específica destinada para expor qualquer conteúdo que seja referente à história da matemática.

Fica evidente, então, que o livro didático pode ser o instrumento a partir do qual sejam criadas possibilidades para que o professor possa desenvolver uma prática que favoreça o processo de ensino e aprendizagem do educando, com a história da matemática em consonância com outros conteúdos. Com isso, é essencial compreender que a História da Matemática se apresenta como um instrumento didático potencial, que possibilita extrair da história suas competências didáticas para um ensino que tenha mais relação com a vivência prática, originando, assim, saberes mais sólidos e uma visão mais ampla da realidade.

Por fim, ressaltamos que o texto apresenta alguns análises referentes a história da matemática presente nos dois livros estudados e utilizados na rede pública do município de Cametá. Salientamos que outros estudos podem ser feitos com os mesmos livros a partir de outros focos de pesquisa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática- Ministério da Educação e do Desporto - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: 1998.

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: Uma Visão do Estado da Arte. Vol. 4. Pro-posições.1993.

FIorentini, D; Lorenzato, S. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Ver. Campinas, SP. Autores Associados, 2012.

MENDES, I. A. Matemática e Investigação em Sala de Aulas: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Educação. Revista Livraria da Física, São Paulo, 2009.

SANTOS, W. L.; CARNEIRO, M. H. da S. Livro Didático de Ciências: Fonte de informação ou apostila de exercícios. In: Contexto e Educação: Ano 21. Julho/dezembro, Ijuí: Editora Unijuí. 2006.



O CONHECIMENTO MATEMÁTICO NA PERSPECTIVA DA FILOSOFIA LOGICISTA

Freitas Lima, Ana Paula, anapaulaflima@gmail.com¹
Xavier Nunes, João Henrique, jhnunes95@gmail.com email²
de Vasconcelos Barros, Thiago, thiago.barros@aluno.uepa.br³

¹Graduanda – Universidade do Estado do Pará

²Graduando – Universidade do Estado do Pará

³Graduando – Universidade do Estado do Pará

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns aspectos sobre o conhecimento matemático na perspectiva do Logicismo matemático. A metodologia da pesquisa é do tipo bibliográfica na qual revisamos os estudos de Meneghetti (2010). Assim percebemos na corrente de pensamento logicista, buscou-se fundamentar a matemática por meio da lógica, sendo desenvolvida principalmente nos trabalhos de Frege, Russell e Whitehead, ocasionando o progresso Lógica Matemática Moderna.*

Palavras-chave: *história da matemática, filosofia da matemática, conhecimento matemático, logicismo*

INTRODUÇÃO

Para Da Silva (2007, p.15), os questionamentos dentro da matemática são constantes na qual vertem as suas limitações e requerem um contexto de papel filosófico para serem tratados de maneira adequada. Ademais, a Filosofia da Matemática é o ramo da filosofia que estuda os pressupostos filosóficos, os fundamentos e as implicações da matemática e ao cursar a disciplina Introdução a Educação matemática tivemos a oportunidade de discutir um pouco sobre a filosofia da matemática e suas correntes filosófica.

De acordo com Meneghetti (2005), o objetivo da filosofia matemática é fornecer um relato da natureza sobre as metodologias da matemática e entender o lugar da matemática na vida das pessoas, ou seja, esta perspectiva filosófica estuda a natureza lógica e estrutural da própria matemática, na qual torna este estudo amplo e único entre seus homólogos filosóficos. A partir deste contexto, destacaram-se diversos estudos diante das compreensões da natureza e as formas do conhecimento matemático, de modo que em meados do século XIX, houve o nascimento de três formas de conhecimento matemático, como correntes filosóficas, tais como: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo (MENEGETTI, 2009, p. 108). Neste trabalho daremos enfoque para a corrente logicista.

Nesse contexto, surgiu o interesse em desenvolver um trabalho sobre as ideias logicistas e seus representantes. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar alguns dos aspectos do conhecimento matemático nas concepções da filosofia logicista. E temos como questão de pesquisa: O que é conhecimento matemático na visão de alguns logicistas como Frege, Russell e Whitehead?

O LOGICISMO E SEUS REPRESENTANTES

O texto deve se A discussão sobre a constituição do conhecimento matemático deu origem a muitas discussões que promoveram a origem de diferentes concepções filosóficas, dentre elas temos à corrente absolutista da

matemática composta pelo logicismo, intucionismo e formalismo, conhecida também como os fundamentos da matemática, que defende que o conhecimento matemático ou é um objeto puro da razão é advindo exclusivamente da intuição, considerando-os sempre como excludentes (MENEGHETTI, 2006). Neste trabalho vamos abordar as ideias dos logicistas representados pelos filósofos Frege, Russel e Whitehead.

Para Meneghetti (2010, p. 109-110), o Logicismo surgiu a partir de contribuições iniciais de Gottlob Frege e caracteriza-se pelo objetivo de reduzir toda a matemática à lógica, através processo de aritmetização da análise, pois acreditava-se que seus axiomas poderiam ser deduzidos de um conjunto de axiomas verdadeiramente lógicos.

A base epistemológica do logicismo é derivada do pensamento realista de Platão, na qual ele determinava que os objetos matemáticos são gerados exclusivamente por via do intelecto humano, em que tais elementos matemáticos são dados logicamente, logo inquestionáveis. (SILVA, 2007). E que, posteriormente, serviriam de inspiração para outros filósofos logicistas como Bertrand Russel, Alfred North Whitehead e Giuseppe Peano.

1. Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848/1925)

Nasceu na Alemanha em 8 de novembro de 1848, estudou na Universidade de Jena e na Universidade Göttingen, começou a lecionar em Jena quando ainda era discente e posteriormente recebeu sua cátedra. Sua formação é em matemática, mas direcionou seus estudos para a área da filosofia da matemática. Os estudos de Gottlob Frege deram início ao logicismo (ALCOFORADO, DUARTE e WYLLIE, 2018, p. 5).

Frege tomou como base de seus estudos o realismo platônico, como afirma Mondini:

“O realismo, fundamentado no platonismo, foi base filosófica para o movimento logicista. Movimento este que tinha por objetivo mostrar a Matemática como uma Ciência consistente e completa e expô-la como uma linguagem simbólica para simplificar suas formas de apresentação.” (MONDINI, 2008, p. 3-4)

Frege teve como ponta pé inicial para a sua pesquisa uma investigação sobre o que é número, ele então se dedicou a conceituar esse elemento tão primordial para a matemática. De acordo com Meneghetti (2006), seus estudos podem ser divididos em quatro períodos que serão apresentados a seguir.

O primeiro começa em 1879, com a publicação do livro “Begriffsschrift” (Ideografia é uma tradução sugerida em carta pelo próprio Frege). Neste livro o autor apresenta um sistema lógico próprio, em linguagem simbólica, que ele usou como base para suas futuras descobertas. Este sistema de representação simbólica foi o grande contributo de Frege para a lógica matemática para representar formalmente a estrutura dos enunciados lógicos e suas relações, e a contribuição para a implementação do cálculo dos predicados (substituindo a velha dicotomia sujeito-predicado, pela oposição matemática função-argumento) e da articulação do conceito de quantificação como as expressões "para todo o x" e "existe um x". (MONDINI, 2008).

O segundo período, se inicia em 1884, quando Frege publicou o primeiro volume do livro “Os Fundamentos da Aritmética”, onde ele examinou como a lógica poderia estar na base de algumas bases matemáticas sem torná-las totalmente triviais (MENEGHETTI, 2006).

Este livro pode ser dividido em duas partes, uma positiva onde Frege crítica as definições aritméticas de número como a empirista e a dos lógicos psicologistas, outra positiva em que ele ocupa-se em esboçar sua própria definição para número, considerando-os como algo suscetível de ser conhecido por meios psicológicos e subjetivo. (SOUZA, 2007). Segundo Alcoforado, Duarte e Wyllie:

“Como se vê, segundo Frege, os números (cardinais) e as demais noções fundamentais da aritmética podem ser definidos com exatidão, em última instância, levando-se em conta apenas as noções da lógica formal; e as proposições acerca dos números (isto é, os teoremas da aritmética) podem ser derivadas a partir dos axiomas e das regras de transformação da lógica.” (ALCOFORADO, DUARTE e WYLLIE, 2018, p. 10).

Entre 1884 e 1903 ele fez a publicação do segundo volume intitulado “As Leis Fundamentais da Aritmética”, que é a marca do terceiro momento de sua carreira. Antes que fosse publicado seu livro Frege sofreu duras críticas por parte de Bertrand Russell e por esse motivo foi levado a alterar alguns conceitos de sua Ideografia, mudanças que foram publicadas por ele em três artigos: “Função e Conceito”, “Sobre o Sentido e a Referência” e “Conceito e Objeto” (MENEGETTI, 2010, p. 112).

No quarto momento, em 1902, ele se dedicou a solucionar o questionamento levantado por Russell, o conhecido Paradoxo de Russell, mas como não obteve êxito ele voltou-se para outros assuntos como explicito por Meneghetti (2010, p. 112): “Nesse período a maior parte de seus trabalhos foi publicada em 1969, entre eles O pensamento, A Negação, Conexões de Pensamento. Uma quarta investigação, Generalidade Lógica, ficou inacabada devido à morte do autor”.

Frege, fracassou em sua tentativa de reduzir a aritmética a lógica, pois havia axiomas que não admitiam explicações lógicas, uma das coisas que ele não conseguiu condicionar a leis lógicas foi a noção de frequência. O seu trabalho levou tempo para ser reconhecido, foi somente a partir do momento em que foi questionado por Russell, que Frege ganhou notoriedade. (MENEGETTI, 2010).

2. Bertrand Arthur William Russell (1872-1970)

Russell nasceu em 18 de maio de 1872, em Trelleck, País de Gales, quando criança perdeu os pais e assim foi criado pelos avôs paternos. Aos 18 anos ingressou no curso de matemática no Trinity College de Cambridge, não visando uma carreira matemática, mas tendo interesses filosóficos. Contudo os estudos em matemática pouco contribuíram na sua busca pela certeza matemática, assim após a sua formação em matemática cursou filosofia, também em Cambridge (GRIFFIN, 2003, p. 2- 4).

Segundo Griffin (2003), o envolvimento de Russell com a lógica iniciou-se em 1900 no Congresso Internacional de Filosofia em Paris, onde descobriu sobre o trabalho de lógica simbólica de Peano. Dessa forma começou a desenvolver o próprio projeto pretendendo reduzir não somente a aritmética a lógica, como Frege, mas sim toda a matemática, principalmente por meio de sua obra o Principia Matemática, dividida em três volumes publicados em 1910, 1912 e 1913.

No Principia Matemática, Russell tinha o objetivo formular os axiomas base da matemática por meio da lógica, definidos como axiomas primitivos, por meio da lógica simbólica, além de proposições lógicas e do cálculo de predicados, para formular e demonstrar os axiomas. Dessa forma os fundamentos lógicos são os princípios para alcançar a verdade matemática, sendo assim livre de contradições e paradoxos. (MENEGETTI, 2010).

Além disso, na obra Russell também estabeleceu o axioma do Princípio do Círculo Vicioso e a chamada teoria dos tipos para solucionar paradoxos e contradições em sua obra. Por meio do Princípio do Círculo Vicioso definiu-se que os objetos lógicos possuem uma hierarquia, dessa forma “Nenhuma entidade pode ser definida em termos de sua totalidade da qual ela é, por si mesma, um possível membro” (MENEGETTI, 2010, p. 133). Assim um famoso paradoxo descoberto por Russell foi evitado, o chamado Paradoxo de Russell. O Paradoxo foi descoberto em maio 1901 e surge ao considerar o conjunto de todos os conjuntos que não são membros deles próprios, então esse conjunto contém a si próprio? Caso afirmativo, se ele contém a si próprio, não satisfaz a condição para conter a si, caso contrário, ele não contém a si próprio, vai satisfazer a condição, assim surgindo uma contradição. (GRIFFIN, 2003).

Desse modo, Meneghetti (2010) assenta que por meio desse princípio surge a hierarquia entre objetos, a teoria dos tipos simples, nela os elementos são divididos em níveis hierárquicos, em que elemento de ordem mais baixas e mais simples pertencem ao nível mais baixo e poderem formar os elementos de uma classe superior, sendo também utilizado também em resposta ao Paradoxo de Russell.

Contudo além do Principia Matemática, outras obras de Russell também desenvolvem a relação entre a lógica e a matemática. Em Introdução a filosofia matemática (1919) Russell trata no capítulo XVIII da relação da matemática e a lógica. Segundo Russell (1919) a matemática e a lógica eram trabalhadas em campos de estudo diferentes, mas ambas vinham se desenvolvendo e dessa forma a matemática se tornava mais lógica e a lógica mais matemática.

3. Alfred North Whitehead (1861-1947)

Alfred North Whitehead nasceu no dia 15 de fevereiro em Rasgate, Reino Unido. Formado em Cambridge Whitehead é um dos filósofos e matemáticos mais reconhecidos por conta de seus trabalhos envolvendo lógica matemática, junto a Russell no desenvolvimento do Principia Matemática, e em filosofia da ciência que posteriormente se tornariam de extrema importância para o advento da metafísica. Sua carreira foi iniciada no Trinity College, em Cambridge, a partir de 1884, a qual lecionou durante 25 anos e tornou-se professor de Bertrand Russell. Ademais, Whitehead e Russell passaram a trabalhar juntos e concluíram livros sobre os fundamentos da matemática. (DESMET; IRVINE, 2018).

Na primeira metade do século XX, com a produção do livro “Um Tratado de álgebra Universal”, Whitehead afirma que a matemática é o estudo de padrões a qual considerou a álgebra universal como objeto mais aprimorado a este estudo, porém após conhecer as pesquisas de Giuseppe Peano, suas perspectivas mudaram para a lógica simbólica. Em contrapartida, com o auxílio de Whitehead, Russell em “Princípios da Matemática”, produziu um relato sobre a nova lógica abordada, na qual seria chamada de “Lógica Matemática” com o objetivo de incorporar toda a matemática existente à lógica, onde estes filósofos se tornaram autores públicos desta reconstrução (GANDON, 2012).

Diante da transição de projeto da Álgebra Universal para o Principia Matemática, é evidenciada como a mudança da álgebra para a Lógica Matemática como linguagem mais adequada à incorporação de padrões matemáticos. Assim, o filósofo Whitehead visualizava como uma ferramenta para nortear exercícios de importância significativa do matemático, sem a intenção de substituir a intuição matemática pelo seu rigor lógico. De acordo com Gandon (2012), em 1901, Russell contava com a participação ativa de Whitehead para a produção do segundo volume dos Princípios, na qual a tese estudada era relacionada ao “Raciocínio Simbólico”. Em contrapartida, Whitehead abandonou alguns desses problemas filosóficos e produziu a obra “Sobre os conceitos matemáticos do mundo material”, em 1905, sendo seu único livro que emprega os simbolismos do Principia (LOWE, 1985).

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho era apresentar alguns dos aspectos do conhecimento matemático nas concepções da filosofia logicista. E temos interesse em responder: O que é conhecimento matemático na visão de alguns logicistas como: Frege, Russell e Whitehead?

A partir dos estudos que fizemos e expusemos neste trabalho, entendemos que para Frege o conhecimento matemático é sistemático, rigoroso independente da experiência, para ele o saber matemático tem sua origem no mundo das ideias por isso é verdadeiro, puro e absoluto. Russell afirma que a matemática e a lógica são campos que estão intimamente relacionados, e que por meio da lógica se consegue alcançar a verdade matemática, sendo assim o instrumento lógico seria a base dos conhecimentos matemáticos. E para Whitehead, os pressupostos logicistas são como projeto de reconstrução da matemática por meio da redutibilidade total da matemática à lógica, com concepções axiomáticas, na qual serviu de base para o desenvolvimento da programação binária.

Entendemos que para esses filósofos o conhecimento matemático é algo puro e imutável, tem sua origem no mundo inteligível de Platão, que deve ser descoberto, e não sofre influência do mundo externo. Com isso eles pretendiam explicá-lo por meio de leis lógicas, pois acreditavam que as verdades matemáticas são verdades lógicas e não dizem respeito ao conhecimento empírico.

A corrente filosófica logicista falhou em seu objetivo pois alguns axiomas matemáticos, a exemplo o Axioma da Infinitude e o Axioma da Escolha, não podem ser considerados proposições lógicas (MENEGETTI, 2001). Apesar de tudo, há de se destacar o grande mérito da escola logicista ao incrementar grandemente o progresso da Lógica Matemática Moderna e ao confirmar a íntima união entre matemática e lógica.

REFERÊNCIAS

ALCOFORADO, P.; DUARTE, A.; WYLLIE, G. CONCEITOGRAFIA: Uma língua formular do pensamento puro decalcada sobre a da Aritmética. Ed. do PPGFIL-UFRRJ: 1º edição, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <<https://netmundi.org/filosofia/wp-content/uploads/2019/07/Gottlog-Frege-Conceitografia.pdf>>. Acesso: 3 nov. 2019.

CABRAL, J. F. P. "Epistemologia ou Teoria do conhecimento em Platão"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/filosofia/epistemologia-ou-teoria-conhecimento-platao.htm>. Acesso em 28 de setembro de 2019.

DE SOUZA, I. C. I. O princípio do contexto de Gottlob Frege: Uma Análise Sistemática. Dissertação (mestrado): Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/6174/1/arquivo6743_1.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2019.

DUMENTT, M. A. E. Gottlob Frege. Encyclopedia Britannica. Disponível em: < <https://www.britannica.com/biography/Gottlob-Frege>>. Acesso em: 25/09/2019.

GANDON. S. Russell's Unknow Logicism: A study in the History and Philosophy of matematics, Londres. Palgrave Macmilan. 2012.

GRIFFIN, Nicholas (Ed). The Cambridge Companion to Bertrand Russell. Nova York. Cambridge University Press. 2003. p. 1-49. Disponível em: <https://www.academia.edu/6907620/The_Cambridge_Companion_To_Bertrand_Russel_-_Edited_By_Nicholas_Griffin>.

LOWE, V. Alfred North Whitehead: The man and his work. Baltimore. The Jonh Hopkins Univerity Press. 1985.

LOWE, Victor. Alfred North Whitehead. Encyclopedia Britannica. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Alfred-North-Whitehead>>. Acesso em: 28/09/2019.>

MENEGHETTI, R. C. G. Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas. 1. ed. Londrina: EDUEL, 2010. v. 1. p. 109-137.

MENEGHETTI, R. C. G. Pensando uma Filosofia da Educação matemática à Luz da História e da Filosofia da Matemática. In: Meneghetti, Renata Cristina Geromel. (Org.). Educação Matemática: vivências refletidas. 1ed.São Paulo: Centauro, 2006, v. 01, p. 57-78.

MONDINI, F. O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus Diferentes Modos de Pensar a Matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática.12. 2008. Rio Claro. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/287-1-A-gt2_mondini_ta.pdf> Acesso em 25 ago. 2019.

MONK, Ray. Bertrand Russell. Encyclopédia Britannica. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Bertrand-Russell>>. Acesso em: 28/09/2019.



RECORTES HISTÓRICOS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Vasconcelos, Veraciv, veraciv466@gmail.com¹
Chaquiam, Miguel, miguelchaquiam@gmail.com²

¹ Discente da Universidade do Estado do Pará (UEPA)

² Docente da Universidade do Estado do Pará (UEPA)

Resumo: Apresentamos um recorte das pesquisas realizadas no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), sobre a unidade temática probabilidade. Ressaltamos a pouquidade de trabalhos científicos voltados para ensino dessa unidade temática, trabalhos que associem história e matemática, bem como a constituição e evolução dos conceitos relacionados a teoria da probabilidade. Buscou-se orientações na BNCC (2017) e fundamentos em autores que defendem o uso da história da matemática no ensino, como Mendes (2021), Roque (2012), Brandemberg (2021), Chaquiam (2020). Autores que contribuem para o processo de uso da história da matemática no ensino de conteúdos matemáticos, buscam e elaboram materiais que podem auxiliar os professores em suas práticas diárias. Desse modo, um dos objetivos é proporcionar possibilidades de ensinar probabilidade com a inserção da história da matemática, aproximar o aluno de fatos históricos que geraram os conceitos hoje utilizados no campo da teoria da probabilidade, fatos que podem ser evidenciados nos recortes da história da probabilidade e nas atividades para sala de aula.

Palavras-chave: História da Matemática, História da Probabilidade, Ensino de Probabilidade.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um recorte históricos da história da probabilidade, pesquisa vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA). É válido evidenciar a pouquidade de trabalhos científicos voltados para o ensino da probabilidade relacionados a sua história, principalmente que abordem a constituição e evolução dos conceitos dispersos na teia da história da matemática, visto que a história no ensino de matemática está ganhando uma dimensão diferenciada quanto a metodologia e/ou recurso didático e, segundo Brandemberg (2021, p. 23), “o papel da história da matemática se faz recorrente nas últimas décadas, como podemos observar nos apontamentos presentes nos trabalhos de vários autores”, que defendem o uso da história para ensinar matemática de modo a estimular discussões a partir de determinado conceito e contribuir para compreensão das relações entre ciência e sociedade.

Alguns questionamentos relevantes vieram de um conjunto de informações e orientações, que vem se fortalecendo e contribuindo para a ampliação desta pesquisa, desde a especialização, entre alguns questionamentos temos: Como fazer para tornar o ensino, utilizando a história da matemática, algo mais atrativo e possível de se executar numa sala de aula? Como tornar ensinável a probabilidade por meio da história da matemática? Como recorrer a história da matemática para introduzir os conteúdos relacionados a probabilidade na educação básica? Essas questões foram alçadas por Pereira (2020) durante sua especialização e adaptadas aos objetivos da pesquisa.

De acordo com Roque (2012, p. 22), “o papel da história da matemática pode ser justamente exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram. Para além da reprodução estéril de anedotas visando “motivar” o interesse dos estudantes”, por isso a importância de mostrar aos alunos que é possível melhorar uma situação sobre o que existe e por meio da história da matemática é possível conhecer os problemas enfrentados e estes podem ser adaptados ou (re)construídos conforme a necessidade e interesse do professor, de modo a proporcionar aos alunos a elaboração de situações semelhantes aos encontrados na história da matemática.

Para organizar esta pesquisa, utilizou-se diagrama-metodológico, proposto por Chaquiam (2021), que vem sendo aperfeiçoado desde 2005, constructo que vêm contribuindo com o desenvolvimento de trabalhos acadêmicos onde entrelaça história e conteúdos matemáticos, uma proposta que baliza e contribui para a escrita de recortes históricos, aproxima os alunos dos contextos que envolvem o objeto de conhecimento em estudo, neste caso, conteúdos relacionados a probabilidade, cujo resultado é elaborar um texto e atividades para uso em sala de aula.

1. HISTÓRIA PARA ENSINAR MATEMÁTICA

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) há orientações quanto ao uso da história da matemática no sentido de contribuir para o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais à aprendizagem dos alunos, nesse sentido é fundamental “incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2017, p. 295). Orientações que também estão nos documentos curriculares oficiais da Educação Básica, nas literaturas educacionais, na formação de professores, entre outras ações que beneficiam o ensino e aprendizagem na história da matemática.

Segundo Roque (2012, p. 22) por meio da História pode-se “analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da matemática como um saber operacional, técnico ou abstrato”, assim pode proporcionar aos alunos a oportunidade de conhecerem os primeiros passos que levaram os estudiosos da época a demonstrar e validar suas teorias, mostrando fatos de que é possível solucionar problemas, tendo oportunidade de discutir sobre várias formas de interpretação, solução e resolver situações problemas com estratégias diferentes.

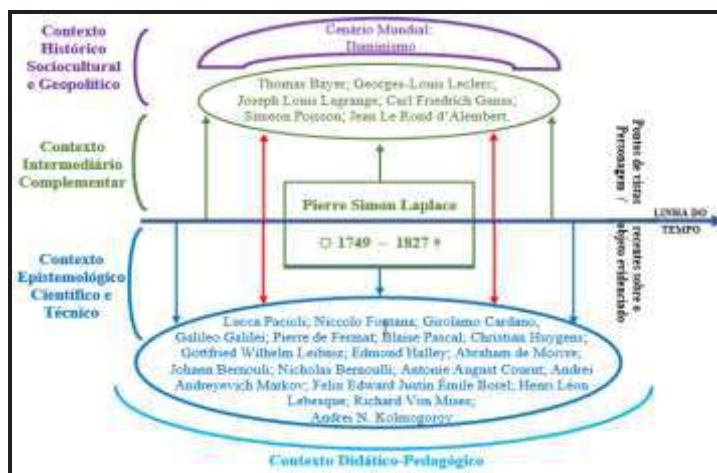
Mendes (2017) sugere o uso da história da matemática no ensino de um conteúdo matemático como uma investigação histórica, pois “usar a investigação no ensino de matemática oportuniza aos estudantes um exercício de leitura, de escrita e de discussão das ideias matemáticas, bem como suas relações com outras áreas de conhecimento” (MENDES, 2017, p. 146), tornando-os ativos na busca por compreender como foi evoluindo o objeto matemático investigado e propondo que eles possam reproduzir como atividade, por exemplo.

Brandemberg (2021, p. 26) sugere o uso da história da matemática, utilizando textos históricos e a partir deles apresentar ou produzir atividades matemáticas, “que sejam elaboradas considerando o conteúdo matemático a ser estudado e conformadas estruturalmente com temas e objetivos bem definidos ligados a obtenção do conhecimento matemático direcionado a um/ou mais conceitos específicos”, de forma que os alunos compreendam e valorizem a aprendizagem e o conhecimento que ganham com esta construção. De acordo com este autor, problemas originais de uma época, podem ser resolvidos e/ou adaptados, criando “possibilidades de comparação das estratégias de resolução antigas com as atuais, identificando suas vantagens e desvantagens” Brandemberg (2021, p. 28).

2. Diagrama Metodológico para organizar uma História - Metodologia.

Na figura 1 tem-se o diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2017), adaptado à teoria da probabilidade, que, dentre outros, irão contribuir à formatação dos recortes históricos voltados ao ensino.

Figura 1: Diagrama Metodológico – Teoria da Probabilidade



Segundo Chaquiam (2017, p. 12) o diagrama pode contribuir para a compreensão do desenvolvimento do tema escolhido, “bem como, possibilitar melhor localização em tempo e espaço a partir da integração dos elementos que compõem os contextos, técnico-científico, pluridisciplinar e sociocultural e avivar as correlações entre história e matemática, que de um modo geral são tratadas separadamente”.

De acordo com Chaquiam (2020), a partir do diagrama é possível estabelecer recortes históricos sobre a temática, evidenciar problemas que estão dispersos na história – problemas que podem ser selecionados e reorganizados de forma diretiva à sala de aula – e mostrar como estes foram solucionados no passado e como podem ser solucionados hoje. Sem dúvidas são longos questionamentos e ideias que surgem com a intenção de buscar analisar uma relação de conhecimento que possibilite uma aprendizagem significativa.

Com certeza, é um desafio e demanda tempo implementar esse recurso em sala de aula de modo a proporcionar aos alunos a oportunidade de reconhecer que a Matemática é “uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente” (CHAQUIAM, 2016, p. 02) é uma forma de asseverar o quanto a matemática é importante na escola e na vida.

3. A PROBABILIDADE NOS CONTEXTOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O contexto histórico do personagem evidenciado, se remete ao século XVIII, foi o século do fim da Idade Moderna para o início da Idade Contemporânea. Um cenário que marcou bastante esse período foi o Iluminismo, “foi uma época de fortes mudanças sociopolítica e produziu um crescimento enorme da difusão do conhecimento e da educação” segundo Warsi, (2020, p.180), crescimento significativo também no mundo da Matemática, especificamente no ramo da teoria da probabilidade com as contribuições dos matemáticos Thomas Bayes (1702-1761), Georges-Louis Leclerc (1707-1788), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Carls Friedrich Gauss (1777-1855), Simeon Denis Poisson (1781-1840).

A escolha por Pierre Simon Laplace (1749-1827) como personagem em destaque decorreu deste ter introduzido a probabilidade no mundo da matemática e constituído lições sobre ela, além de ter publicado obras como *Ensaio filosófico sobre as probabilidades* e *Teoria analítica das probabilidades*. Com essas obras “abriu-se uma nova era, marcada pelas aplicações do cálculo das probabilidades às mais diversas questões” (LAPLACE, 2010, p. 14). Que, de acordo com Gouraud (1848, apud LAPLACE, 2010, p. 14) a teoria analítica das probabilidades foi dada a “ciência matemática dos acasos, uma unidade sistemática que ainda lhe faltava após um século e meio de sua existência”

No contexto pluridisciplinar, evidencia-se os personagens contemporâneos a Laplace, limitando esta pesquisa aos personagens que contribuíram para o desenvolvimento/evolução da teoria da probabilidade, dentre eles, Thomas Bayes (1702-1761), que introduziu uma outra forma de análise na probabilidade, conhecida como o teorema para probabilidades condicionais; George-Louis Leclerc (1707-1788), que abordou sobre a questão de probabilidade geométrica, conhecido como “problema da agulha” e analisou sobre usar a “teoria das probabilidades em situações que envolvem o julgamento humano” (EVES, 2011, p. 468); Simeon Denis Poisson (1781-1840), que segundo Eves (2011), inventou a distribuição de probabilidade que leva seu nome e é aplicável a fenômenos raros ou estranhos; Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que segundo Zindel (2018), foi influenciado por Laplace, sua contribuição se deu na elaboração da a teoria dos erros, apoiado em trabalhos de Jacob Bernoulli, De Moivre, Bayes e Quételet, além de ter contribuído em parceria com Laplace nos estudos em astronomia e estatística.

No contexto técnico-científico, cita-se personagens/matemáticos que contribuíram para a constituição/evolução da teoria da probabilidade, a exemplo, Lucca Pacioli (1445-1517), que escreveu um problema conhecido como *repartição das apostas*, voltado a jogos de azar; Niccolo Fontana (1499-1557), que publicou a obra *Tratado Geral*, onde abordava os problemas propostos por Pacioli, embora tenha considerado que os problemas dos pontos nunca “pudessem ser resolvidos de forma a convencer todos os jogadores de sua equidade” (Warsi, 2020, p. 164).

Girolamo Cardano (1501-1576), nome elencado no geral, por ter pela primeira vez referenciado o conceito de probabilidade. Segundo Warsi (2020, p. 162), Cardano “produziu análises profundas de lances de dados”, devido ao seu grande envolvimento com jogos. “Cardano escreveu um manual do jogador em que abordou algumas questões interessantes de probabilidade” Eves (2011, p. 37). Este registro após um século foi publicado em forma de livro, nomeado “*Liber de ludo aleae*” (livro dos jogos de azar), neste livro é abordado sobre o “problema dos pontos” de autoria de Pacioli. Galileo Galilei (1564-1642), escreveu manuais sobre jogos de azar, por solicitação de Ferdinando dei Medici, o grão-duque de Toscana, que desejava melhorar seu desempenho no jogo (ZINDEL, 2018).

Foi no século XVII que surgiram as primeiras publicações com estratégias sobre técnicas utilizadas para a resolução de problemas sobre os casos de probabilidade, atribuído as correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que utilizaram também as estratégias de Cardano em suas soluções. Para melhor esclarecimento, nesta

parte, é preciso relatar sobre Antonie Gombaud (1610-1685), um apostador de jogos de azar, que “propôs a Pascal, solucionar problemas envolvendo apostas de jogos, este se interessou pelo problema e o levou ao conhecimento de Fermat. Seguiu-se uma notável correspondência entre os dois matemáticos, na qual foi resolvido de forma correta, mas diferentemente por cada um deles. (EVES, 2011, p. 365-366).

Blaise Pascal (1623-1662), recebeu a proposta enviada pelo Cavalheiro de Méré, sua estratégia de solução para os problemas, foi utilizando seu famoso triângulo de pascal, de acordo com Warsi (2020, p.158) “[...] o triângulo de Pascal é campo fértil para vários ramos da mais alta matemática, como álgebra, teoria dos números, probabilidades e combinatória”. Segundo Almeida (2005, p. 09) “a contribuição de Pascal é considerada essencial pois forneceu um critério quantitativo e rigoroso como base para a teoria matemática de probabilidade e como uma referência para uma interpretação do conceito de probabilidade”.

Pierre de Fermat (1601-1665), recebeu os problemas enviados por Pascal e apresentou sua solução utilizando a combinação das possíveis alternativas de ganhar ou de perder durante as jogadas, ou seja, Fermat organizou a situação e representou a solução deste caso, considerando que o “jogador A precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador B de 3” e afirmando que como “quatro partidas decidem o jogo, seja a uma partida ganha por A e seja b uma partida ganha por B ”, organizou todas as possibilidades de a e b , formando 6 arranjos completos (EVES, 2011, p. 393). E assim, Pascal e Fermat resolvem, cada um de sua forma, entretanto não publicaram suas soluções.

Então, Christian Huygens (1629-1695), foi o matemático que publicou as correspondências entre Pascal e Fermat, tornando público, as soluções sobre o problema dos pontos, sobre os jogos de azar, entre outros problemas que ele estudava, publicou proposições sobre as chances de jogadas para obter sucesso. Em 1657 escreveu o primeiro tratado formal sobre a teoria da probabilidade, intitulado “*De Ratiocinnis in Ludo Aleae*” (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados) (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, tradução nossa).

Jacob Bernoulli (1654-1705), publicou sua obra *Ars Conjectandi*, foi o que intensificou os estudos sobre a teoria da probabilidade, entre outros estudos no ramo da matemática, como a demonstração das leis dos grandes números, a *distribuição de Bernoulli* e o *teorema de Bernoulli* da estatística e da teoria das probabilidades (EVES, 2011). Sobre Abraham De Moivre (167-1754), publicou “A doutrina da Sorte” considerado por estudiosos da época como sendo “A chave para o início da história de probabilidade”, ou seja, organizou a teoria das probabilidades de forma estruturada. (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, tradução nossa).

Contribuições sobre a teoria da probabilidade no século XIX: Antonie August Cournt (1801-1877); Jules Henri Poincaré (1854-1912), Andrei Andreyevich Markov (1856-1922); Felix Edward Jutin Émile Borel (1871-1956); Henri Léon Lebesque (1875-1941); Richard Von Mises (1883-1953); John Maynard Keynes (1883-1946) e Frank Hyneman Knight (1885-1972).

No século XX, o russo Andrei N. Kolmogorov (1903-1987), apresenta a Teoria Probabilidade sobre uma forma axiomática, baseada na Teoria dos Conjuntos e reduzindo a Teoria das Probabilidades à Teoria da Integração. Segundo Almeida (2005), Kolmogorov desenvolveu uma estrutura matemática para a teoria das probabilidades, tratada como uma “medida”, no sentido da teoria das funções. Dessa forma todos os teoremas do cálculo clássico das probabilidades podem ser considerados no quadro da axiomática de Kolmogorov. Em 1950, Kolmogorov completou um dos trabalhos mais importantes em Estatística “Estimadores subestimados” (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, p. 87, tradução nossa). De acordo com Retrespo e González (2003), os estudos de Kolmogorov proporcionaram um crescimento exponencial à teoria das probabilidades, hoje um ramo importante da matemática.

Para contemplar o objetivo desta pesquisa, em andamento, será analisado, de acordo com Chaquiam (2020), fatos importantes da constituição e da evolução do tema ou do objeto matemática, para o contexto didático pedagógico. “Esse complemento enriquecerá o trabalho, proporcionará questões para debates e bem como diferentes visões e/ou interpretações a respeito do personagem principal e/ou do tema, podendo gerar novas pesquisas para maiores esclarecimentos” (CHAQUIAM, 2017, p. 35), logo, algumas questões podem auxiliar na conclusão desta pesquisa, para então ser levada para sala de aula, tais como:

Onde e quando apareceram os primeiros traços sobre o tema Probabilidade?; Quais foram os primeiros teóricos a estudar sobre probabilidade?; Qual a necessidade que ocorreu para surgir a probabilidade?; No passado como se resolvia problemas sobre probabilidade?; Quando foi que surgiu no contexto da história da matemática a fórmula da probabilidade?; Quem de fato foi a criador da fórmula?; Como foi descoberta, criada ou proposta a fórmula ou foi uma conexão de saberes da matemática que fez ela fazer parte?; Como, hoje você solucionaria o problema dos pontos, proposto desde Pacioli, de forma que convença todos os jogadores de sua equidade?; Como seria adaptado, construído ou reconstruído situações das apostas dos jogos de azar daquela época para a realidade de hoje?;Teria muita mudança quanto ao contexto da realidade das apostas/jogadas as situações?.

CONCLUSÕES

É evidente que todo professor, em sua práxis, que pretende organizar e planejar situações didáticas, que incluam a história da matemática como um elemento no ensino de conteúdos matemáticos, tem consciência que esse momento exigirá tempo e esforço. Entretanto, será um recurso que apoiará com a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem, fato que pode corroborar no sentido de analisar a constituição e evolução de conceitos matemáticos, neste caso, a teoria da probabilidade, além de contribuir à formalização dos conceitos inerentes a essa temática.

Por meio da história da matemática é possível desmistificá-la, ensinando que alguns caminhos tomados no passado nos remeteram a erros, ou seja, que a Matemática não é algo imutável, linear e sem equívocos, além disso, os erros cometidos no passado podem ser erros que os alunos cometem hoje.

Quanto ao diagrama-metodológico proposto por Chaquiam (2020), é possível perceber que é uma forma eficaz, que apresenta potencialidades como um constructo organizador e balizador de todo o processo de pesquisa, incluindo a elaboração do texto e das atividades dentro de contextos que entrelaçam história e matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Alfredo Betâmio de. **O Problema Epistemológico da Probabilidade e a contribuição de Karl Popper para o respectivo debate**. Universidade Nova Lisboa, 2005. Disponível
- BRANDEMBERG, João Cláudio. **Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática sob o olhar da Pluralidade**. Curitiba. CRV, 2021, p. 23-46.
- BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base**. MEC, Brasília - DF, 2017.
- CHAQUIAM, M. História e Matemática Integradas por meio de um Diagrama Metodológico. Revista **Paradigma**, v. XLI, Nº Extra1; 2020 / 197-211.
- CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio Temáticos: história e matemática em sala de aula**. SBEM-PA, Belém, 2017.
- CHAQUIAM, Miguel. O Uso da História da Matemática e dos Conteúdos Matemáticos na Sala de Aula. *In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo. 2016
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Editora da Unicamp. Campinas, SP. 2011
- GOURAUD, Charles. **Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours**. Paris: Librairie D'Auguste Durand, 1848.
- LAPLACE, Pierre-Simon. **Ensaio Filosófico sobre as probabilidades**. Tradução: Pedro Leite de Santana. Ed. PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2010.
- MENDES, Iran Abreu. **Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática sob o olhar da Pluralidade**. Curitiba. CRV, 2021, p. 63-74.
- MENDES, Iran Abreu. **História para o Ensino da Matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula**. Revista COCAR, Edição Especial N.3, Belém, 2017, p. 145-166.
- RESTREPO B, Luis F; GONZÁLEZ L, Julián. **La Historia de la Probabilidad**. Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias. Universidad de Antioquia, vol. 16, núm. 1, marzo, Medellín, Colombia. 2003. ISSN: 0120-0690.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012
- WARSI, Karl. **O Livro da Matemática**. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. Globo livros. Rio de Janeiro, 2020.
- ZINDEL, Marcia Longen. **Tomada De Decisão E Risco: A Contribuição Dos Matemáticos E Estatísticos**. Estadística y Sociedad, México, p. 05-30, n.5, 2018.



ETNOMATEMÁTICA NAS RELAÇÕES ENTRE ENSINO DA MATEMÁTICA E AS VIVÊNCIAS RIBEIRINHAS NO SOME EM ABAETETUBA - PA

Costa, José, ojosecstinha@yahoo.com.br
Silva, Odirlay, email: odirleyrock@hotmail.com
Barros, Osvaldo, o.barros@yahoo.com.br

UFPA (Universidade Federal do Pará)
SEDUC (Secretaria Executiva de Educação do Estado do Pará)
UFPA (Universidade Federal do Pará)

Resumo: Esta comunicação oral trata sobre a nossa pesquisa para a dissertação de mestrado em docência em educação em Ciências e Matemáticas, que tem como objetivo buscar estabelecer conexões entre os conteúdos curriculares dos alunos das escolas ribeirinhas da região das ilhas de Abaetetuba e as práticas cotidianas desses alunos, Práticas culturais ribeirinhas, com base nos princípios da Etnomatemática, seguindo ensinamentos de D'Ambrósio (2018), Vergani (2007) e Bishop (1999). O desenvolvimento do nosso estudo nos conduziu à realização de uma pesquisa de finalidade aplicada, quanto à realização das propostas didáticas, organizadas em um produto educacional para o ensino dos conceitos matemáticos disciplinares em turma do Ensino Fundamental II. Adotamos uma abordagem qualitativa, conforme apresenta Severino (2007, p. 119). No sentido de discutirmos as práticas pedagógicas de ensino da matemática em escolas ribeirinhas, fazendo um estudo de caso das turmas do SOME, realizado nas ilhas de Abaetetuba. Com o produto educacional esperamos colaborar com o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos e sua possível utilização no cotidiano dos alunos ribeirinhos. Como resultados da pesquisa temos a construção de um produto educacional que emergiu de uma grande interação nossa com pessoas das comunidades através das nossas atividades de ministrar aulas de matemática, nas ilhas de Abaetetuba, no Sistema de Organização Modular de Ensino-SOME, e de entrevistas com pessoas dessas localidades; podemos citar também como resultado um histórico sobre o SOME e informações de seu funcionamento como sistema educacional, principalmente para novos professores, novos gestores e pesquisadores interessados ao tema.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Etnomatemática, Práticas culturais ribeirinhas, Sistema de Organização Modular de Ensino.

INTRODUÇÃO

As práticas de ensino da matemática em espaços diferenciados dos centros urbanos, precisam se adequar às necessidades de aprendizagem dos estudantes, assim como as condições de práticas docentes que se mostram precárias em muitas áreas como as regiões ribeirinhas da amazônia tocantina.

No sentido de contribuir com as proposições de práticas de ensino que se adequam às necessidades de aprendizagem dos estudantes das escolas ribeirinhas, da região das ilhas de abaetetuba, apresentamos nosso estudo que traz proposições de diálogos entre os conceitos matemáticos e as práticas cotidianas, vivências e memórias que podem contribuir para a compreensão e exercícios dos conceitos disciplinares em salas de aulas de escolas ribeirinhas.

SEÇÃO I - MEMORIAL DE FORMAÇÃO

O memorial de formação descreve nossa trajetória educacional e profissional, desde o ingresso em uma escola com o piso de chão batido ao desenvolvimento de suas atividades profissionais como professor no Sistema de Organização Modular de Ensino-SOME.

SEÇÃO II: SISTEMA DE ORGANIZAÇÃO MODULAR DE ENSINO - SOME.

COMUNICAÇÕES ORAIS

Ser educador no SOME é viver uma realidade que muito provável não será a sua, é levar conhecimento e trazer ideias de aprendizagem, é buscar vida para sua família nos seios de outras famílias, é desiludisse com a realidade educacional local e logo entender que ensinar é preciso, é aprender que o pensar diferente pode não ser errado, despir-nos de preconceitos é uma obrigação, é ter a certeza que vidas mudarão para melhor. Portanto, nesta seção discorreremos sobre o Sistema de Organização Modular de Ensino - SOME, os professores em deslocamento e ensino, convívio em equipes, a região das ilhas e suas diversidades, as práticas educativas e a avaliação aos alunos.

2.1- O que é o SOME?

Segundo informações da SEDUC Estado do Pará fundou o SOME, um sistema Educacional funcionando em módulos “para assegurar o 2º grau, à demanda de alunos existente nos municípios do interior do estado, observando as características de cada região e as dificuldades estruturais considerando que não seria viável a construção de escolas regulares e que havia escassez de recursos humanos qualificados”. (Fonte SEDUC).

2.2- Sistema de rodízio.

Os professores trabalham em sistema de rodízio pelas localidades. Esse sistema, na sua implantação, foi bem aceito por gerar uma maior organização e justiça entre os professores. Quatro grupos desses profissionais deslocam-se por um grupo de quatro dessas localidades, um para cada, chamado de circuito. São vinte e uma localidades distribuídas em cinco circuitos, I, II, III, IV e V. Apenas o circuito I é composto por cinco localidades. Isso durante o ano letivo. O grupo de vinte e uma localidades é coberto por vinte equipes de professores.

QUADRO DOS CIRCUITOS E SUAS RESPECTIVAS LOCALIDADES	
CIRCUITOS	LOCALIDADES DO CIRCUITO
I	Rio Urubueua Fátima, Rio Tucumanduba, Rio Ajuai, Rio Paramajó e Ramal Mauba.
II	Rio Mauba, Rio Maracapucu Tomaz Lourenço, Rio Piquiarana e Rio Itacuruçá.
III	Rio Paruru, Rio Maracapucu Mario Lancelot, Rio Maracapucu sagrado e Ilha do Capim.
IV	Rio da Prata, Rio Sapucajuba, Rio Caripetuba e Rio Guajará de Beja.
V	Rio Panacuera, Rio Doce, Rio Sirituba e Rio Xingu.

SEÇÃO III: VIVÊNCIAS DE RIBEIRINHOS

Nesta seção vamos conhecer nossos ribeirinhos entrevistados destacando um pouco de suas histórias de vidas familiares, ensino, vivências, práticas culturas, trabalhos, e um pouco do quanto a matemática escolar pode ter conexão com as praticas desses ribeirinhos, a importância dessas práticas na vida deles nas comunidades.

3.1- Senhor Gildo, quem é?

O nosso pesquisado é o meu pai, o senhor Gildo Rodrigues da Costa, 68 anos, viúvo de Domingas Rodrigues da Costa, pai de dez filhos, aposentado especial da previdência social, nascido e criado na região das ilhas do município de Abaetetuba-pa, mais especificamente na comunidade Sagrado Coração de Jesus do Rio Genipaubá. Em sua adolescência encontrou muita dificuldade para ter acesso a estudos. Conta que é alfabetizado desde adolescente, que estudou apenas seis meses na escola e que as participações em atividades de comunidades eclesiais de base da igreja católica contribuíram muito com seu desenvolvimento na leitura, na escrita e com seu desenvolvimento pessoal.

3.2- Saberes ribeirinhos

Fazer paneiro, tipiti, porto de miritizeiro, rasa, artesanato de brinquedo de miriti, armadilhas para caçar, fogões e fornos de tabatinga, identificar pesqueiros são alguns exemplos de saberes ribeirinho que tendem a resolver problemas do cotidiano com recursos, a maioria, do meio onde vivem.

3.3- Porto de miritizeiro, saberes da tradição e o ensino da matemática

Na região das ilhas de Abaetetuba podemos perceber em várias das práticas ribeirinhas o uso de estratégias para resolver problemas cotidianos. Uma dessas práticas é a construção de portos de miritizeiro, vemos na foto 01, identificados como pequenos portos construídos de miritizeiro, desde a escolha do vegetal adequado até a utilização do porto em suas mais diversas finalidades como embarque e desembarque de pessoas e mercadorias, acesso a áreas de trabalho, igrejas, casas, escolas, campos de futebol, centros de lazer e outros.

Figura 1: porto de miritizeiro



3.4- O miritizeiro

O miritizeiro, *Mauritia flexuosa L. f.*, uma das maiores Palmeiras da Amazônia, possuindo de 30 a 50 centímetro de diâmetro e de 20 a 35 metros de altura. Seu fruto nutritivo é importante para as pessoas e animais por onde se encontra. “Está presente em toda a região amazônica, o norte da América do Sul e estende-se pelo nordeste e centro-sul do Brasil”. (SHANLEY, SERRA; MEDINA, 2010). Não impossível encontrá-la em terra firme, porém prefere áreas alagadas, igapós, beira de igarapés e rios, onde é encontrada em grandes concentrações”.

Em Abaetetuba, mais especificamente na zona rural do município, os ribeirinhos utilizam-se de todas as partes desse vegetal. As folhas são usadas em coberturas de casas, plantações, produtos, fazer artesanatos, cestos, tala para orientar fogos de artifício artesanais, cordas, fibras; dos Pecíolos, braços do miriti, é feito uma enorme variedade de artesanato como os brinquedos de miriti, tipiti, abano, rasa, paneiro, gaiola, alçapão; mundé que é uma espécie de armadilha para caça. O tronco do miritizeiro que possui formato cilíndrico é usado na construção de pequenos portos.

3.5- Entrevista com senhor Gildo

Nosso diálogo com senhor Gildo, que é meu pai, ocorre em torno do miritizeiro. Ao pedir para ele falar sobre as utilidades do miritizeiro, foi logo afirmando:

Gildo - José, do miritizeiro tende a se aproveitar tudo: o grelo, estrutura do miritizeiro que vai formar a folha mais nova, é usado na confecção de artesanatos, cordas, fibras. A folha madura usamos para fazer coberturas feitas de palha. A folha seca de árvores adultas tem tala que é utilizada na fabricação de fogos de artifícios artesanais para orientá-los na subida.

3.6- Entrevista com dona Eliana

Na pesquisa com dona Eliana podemos entrevistá-la sobre a construção e utilização das cestarias:

Jose - o que motivou a senhora a aprender fazer as cestarias?

Eliana - eu aprendi quando me casei, mais por curiosidade e também o meu sogro trabalhava em roça de mandioca, quando precisava de paneiro tinha que pedir para outras pessoas fazerem, mesmo que pagasse, as pessoas ficavam enrolando, enrolando,... e sabe, eu fui aprender eu mesma.

SEÇÃO IV - NOSSO TEMA RELACIONADO A OUTRAS PRODUÇÕES ACADÊMICAS E TEORIAS

Trazemos nesta seção citações de alguns autores com o intuito de dialogar com o nosso tema abordado. Ainda fazemos resumos de dissertações de mestrado que contribuem com pesquisas sobre a nossa temática escolhida.

4.1- A Educação Matemática

Para Vergani (2007) é desde a Grécia Clássica que a matemática ocupa o núcleo dos programas escolares de forma obrigatória de um modelo de pensamento lógico, núcleo este que não chega a ser ocupado pela maioria das outras disciplinas do currículo escolar. Considera indiscutível sua beleza, seu rigor estético, dependendo da teoria que a torna robusta. Contudo, a inquietude do pensamento paira sobre quais pessoas podem ter acesso a essa matemática as suas belas formas? Não chega nem de perto do alcance tomado pelas artes na sociedade, mesmo estas ocupando as margens dos currículos estudados em sala de aula. A ideia de exclusão social é mais nítida para a grande massa dos alunos. “No que diz respeito à utilidade, nos perguntamos a quem servirá esta „utilidade“ que se transformou em filtro de seleção social, ou prova de competição na corrida ao „sucesso“ que é sinônimo de „poder“.” Vergani, (2007).

4.2- A Etnomatemática.

COMUNICAÇÕES ORAIS

A busca pela sobrevivência do indivíduo e a de sua espécie faz ele recorrer aos recursos da natureza e outro da sua espécie para procriar, macho/fêmea. A espécie humana tende a procurar outro que comungue de comportamentos, ideias, objetivos semelhantes capazes de os manterem associados e em sociedade. (D'Ambrosio, 2018, pag. 18).

ETNO é hoje aceito como algo muito amplo, referente ao contexto cultural, e portanto inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos. MATEMA é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender. E TICA vem sem dúvida de techné, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, poderíamos dizer que ETNOMATEMÁTICA é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender, nos diversos contextos culturais. (GERDES, 2012, p.11).

4.3- Resumo de dissertações as quais nosso tema se relaciona.

Em “Geometria ribeirinha: aspectos matemáticos da ilha do Urubuéua Fátima Abaetetuba-pa”, Silva questiona o fato de a geometria euclidiana, estudada nas escolas, nem sempre dar conta de muito dos problemas da geometria vivenciada pelos ribeirinhos, abordagem que o autor chama de “geometria ribeirinha”.

Castro, em “Sistema de medidas e os saberes socioculturais de ribeirinhos do Pindobal Miri no Baixo Tocantins”, questiona os aspectos em que os saberes socioculturais de uma determinada comunidade ribeirinha, quanto às técnicas de medição do açaí e do pescado, levarão a uma melhor compreensão, da parte dos alunos, no ensino do sistema métrico de medidas.

Em sua dissertação de mestrado, Vilhena questiona como ocorre o processo de ensino aprendizagem da matemática nos ambientes escolares ribeirinhos e a percepção, em seu cotidiano, da matemática estudada nas escolas? A autora ainda percebe que precisa-se atribuir mais importância no ensino da matemática e que portanto é necessário relacionar a matemática escolar a vivência cultural dos alunos ribeirinho.

SEÇÃO V - AS VIVÊNCIAS R E OS CONCEITOS MATEMÁTICOS

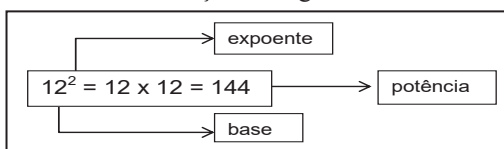
Nesta seção estabelecemos a estruturação de atividades de ensino dos conceitos matemáticos para alunos de escolas ribeirinhas, levando em consideração que essas atividades exigem do professor uma criatividade didática e uma percepção mais aguçada das relações entre as práticas culturais e os conceitos disciplinares. Assim, propomos a aplicação de conceitos matemáticos relacionados a vivência do seu Gildo como a construção de fogos artesanais, portos flutuantes com uso do miritizeiro; e os relacionados a vivência de dona Eliana como a construção de rasas para acondicionar e transportar açaí.

5.1- Potenciação

Para estabelecer a definição de potenciação, Leonardo afirma que “de modo geral, na potenciação com números naturais, a base é o fator que se repete na multiplicação e o expoente indica quantas vezes esse fator se repete e que isso não vale para potências com expoente zero ou 1”. Leonardo (2010). Para tanto, fincou em sua definição que tratar das exceções é necessário: quando o expoente for 1, a potência é igual à própria base e quando o expoente for zero e a base da potência diferente de zero, a potência é igual a 1”. (LEONARDO 2010, p 68).

Na entrevista com o senhor Gildo, ele declarou quanto à comercialização de fogos artesanais:

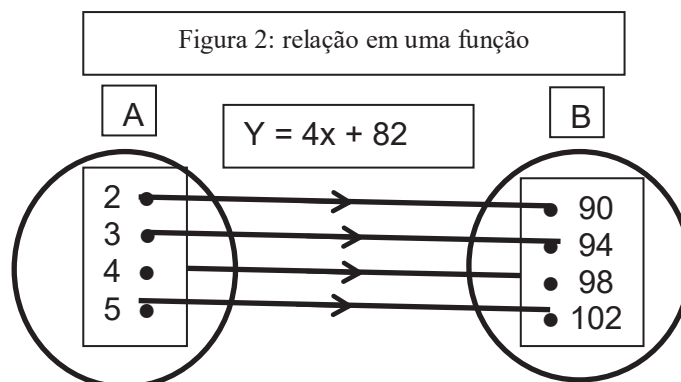
$$\begin{aligned} 12 \times 12 &= 144 \\ 12 \times 12 &= 12^2 \\ 12^2 &= 12 \times 12 = 144 \end{aligned}$$



Questão 1: Uma grossa de fogos de artificieis corresponde a 12 dúzias desses fogos. Qual item corresponde essa quantidade?

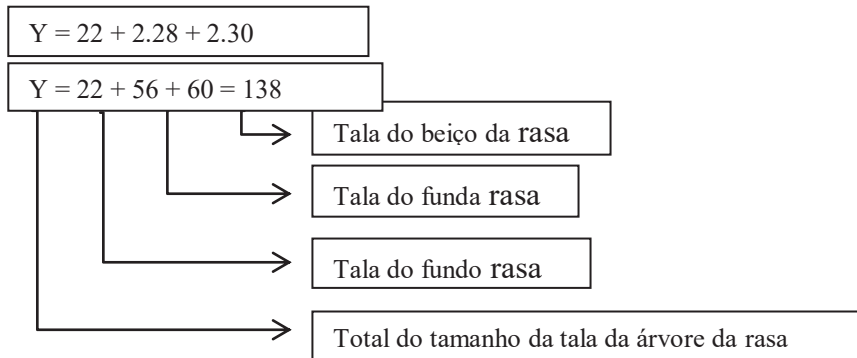
- a) $\frac{12}{12}$ b) $12 + 12$ c) 12^2 d) 2×12

4.2- Função afim



É notória a importância da matemática na vida das pessoas. O mundo perpassa por constantes transformações buscando auxílio nesse conhecimento. O ensino da matemática sofre com essas transformações. Com isso, “o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (BRASIL, 2018, p.265).

Então, para construir uma rasa que suporte 14 quilogramas de açaí são necessárias talas medindo 138 centímetros de comprimento em sua árvore. Desse total, 22 centímetro estarão no fundo do artesanato, 56 centímetros estarão compondo a altura da rasa na lateral e o restante de 2 vezes 30 centímetros vai formar a parte que é a circunferência que forma o “beicho da rasa”.



CONCLUSÕES

Dos resultados da pesquisa temos a construção de um produto educacional que emergiu de uma grande interação nossa com pessoas das comunidades através das nossas atividades de ministrar aulas de matemática, nas ilhas de Abaetetuba, no Sistema de Organização Modular de Ensino-SOME, e de entrevistas com pessoas dessas localidades que exercem atividades artesanais e tipicamente ribeirinhas que as têm como parte das práticas culturais ribeirinhas; um histórico sobre o SOME e informações de seu funcionamento como sistema educacional, principalmente para novos professores, novos gestores e pesquisadores interessados ao tema

REFERÊNCIAS

- BISHOP, A. J. Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Trad. Genís Sánchez Barberán. Barcelona, Espanha: Paidós, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: agosto. 2021.
- D'AMBROSIO, Ubiratan, Etnomatemática-elo entre as tradições e a modernidade. 5º. Ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2018.
- GERDES, Paulus, Etnomatemática – Cultura, Matemática, Educação: Colectânea de Textos 1979-1991. Moçambique: Instituto Superior de Tecnologias e Gestão, 2012.
- GOUVEIA, Rosimar. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/funcao-afim>. Acesso em 20/01/2022.
- LEONARDO, Fábio Martins de, Projeto Aribabá. São Paulo: Moderna, 2010.
- SEVERINO, Antônio Joaquim, Metodologia do Trabalho Científico, 23 ed. Ver. Atualizada. São Paulo, Cortez, 2007.
- SHANLEY, SERRA; MEDINA, Frutíferas e plantas úteis na vida amazônica. 2ª Ed. rev. ampl..São Paulo: Bogor, 2010.
- VERGANI, Teresa, Educação Etnomatemática: o que é?. Natal: Flexa do Tempo, 2007.



CÁLCULO DAS RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA A PARTIR DA FORMA ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Lobato Júnior, José Maria dos Santos, junioredumat@gmail.com¹

Lobato, Marinaldo Carvalho, marinaldo.lobato@gmail.com²

Costa, José Francisco da Silva, jfsc@ufpa.br³

¹Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará – Campus Tucuruí, Pará – Brasil

²Professor aposentado da Secretaria de Educação do Estado do Pará

³Professor da Universidade Federal do Pará – Campus Abaetetuba, Pará – Brasil

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar um novo método para o cálculo das raízes de uma função quadrática, também chamada de função polinomial do 2º grau, sem recorrer a fórmulas conhecidas na literatura em Matemática. Nesse sentido, dispensa-se a expressão do discriminante delta (Δ) e fórmulas de cálculo das raízes reais ou imaginárias e utiliza-se o número complexo na forma algébrica $x = m + ni$. Aborda-se, na sessão de aplicações, alguns problemas em que se faz a comparação do cálculo das raízes, considerando o desenvolvimento a partir de expressões conhecidas e compara-se com o método proposto neste trabalho com a finalidade de validar o que foi proposto. Verificou-se que o método do uso dos números complexos para o cálculo das raízes de uma função de grau 2 não se tem a necessidade de aplicar as fórmulas conhecidas, pois o desenvolvimento matemático conduz a resolver apenas um sistema com duas variáveis m e n , por exemplo, em que m vai representar a abscissa do vértice da parábola da função dada e n pode ser escrito como uma expressão que envolve o discriminante Δ , como será verificado. Concluiu-se que, considerando o número complexo na forma $x = m + ni$ o método apresentado é de simples aplicabilidade e de grande relevância para o cálculo das raízes de uma função quadrática.

Palavras-chave: Função quadrática, Número complexo, Cálculo de raízes.

1. INTRODUÇÃO

O número complexo surgiu a partir da resolução de uma equação polinomial do 2º grau (BERRIMAN, 1956), quando se obteve valor negativo para o discriminante delta (Δ). No início não se tinha uma explicação lógica capaz de interpretar situações em que houvesse o cálculo de raiz quadrada onde o valor sob o radical fosse de sinal negativo, por isso a grande dificuldade em encontrar tais resultados. Historicamente, resolver equações sempre trouxe grande fascinação para um número significativo de matemáticos (FRAGOSO, 1999), principalmente os matemáticos antigos da Babilônia que no início conseguiram resolver algumas equações do 2º grau utilizando a ideia de completar quadrados. Os gregos, no entanto, passaram a desenvolver importante papel no formalismo da matemática onde resolveram alguns tipos de equações do 2º grau com régua e compasso (GARBI, 1997). Os matemáticos hindus foram os que conseguiram avançar nas pesquisas em Álgebra, e, Bháskara foi o matemático que desenvolveu estudo para o cálculo de raízes de uma função quadrática. É devido a ele que se consagrou a expressão “fórmula de Bháskara”, no entanto, vale ressaltar que a descoberta da referida fórmula é atribuída ao matemático hindu Sridhara (DO CARMO; MORGADO; WAGNER, 1992). Assim sendo, a fórmula de Bháskara conduz que as raízes sejam:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sendo o número $\Delta = b^2 - 4ac$ real é possível que venha ter um valor negativo, o que causou uma enorme perturbação para muitos matemáticos da época. A resposta para essa situação era a questão de não haver solução. Essa

ideia de não solução permaneceu por muito tempo até que na Itália, no século XVI, a partir de uma disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução de uma equação do 3º grau que se pensou que os números reais não eram suficientes para responder o problema apresentado. Dessa maneira, sentiu-se a necessidade de introduzir na área da matemática um conjunto \mathbb{C} que fosse “maior” que o conjunto dos números reais, abrindo caminhos para um desenvolvimento matemático em que coubesse uma melhor interpretação algébrica para solucionar esse tipo de problema (CARMO *et al.*, 1991).

Dos muitos matemáticos que passaram a tratar o tema, levando em conta o corpo complexo, Leonhard Euler foi quem mais trabalhou na produção e publicação. Dos diversos trabalhos desenvolvidos, seu empenho foi notável na melhoria da simbologia. Muitas das notações que se utiliza hoje foi introduzida por esse brilhante matemático. Dentre as representações propostas por Euler destaca-se o i substituindo por $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $x = m + ni$ onde m e n são números reais, tal que $i^2 = -1$. Os elementos representados dessa forma são chamados de números complexos. Atualmente, os números complexos podem ser utilizados em diferentes áreas científicas como na Física, na Matemática, na Engenharia e etc. (ÁVILA, 1996).

Nesse presente artigo utiliza-se o número complexo com objetivo de calcular as raízes de uma equação polinomial de grau 2 sem, no entanto, recorrer à conhecida fórmula de Bháskara. Para melhor desenvolver essa pesquisa, abordou-se alguns pontos como pré-requisitos para melhor compreensão do tema e, em seguida, desenvolver o método de resolver uma equação do 2º grau utilizando o número $x = m + ni$ como forma de obter as raízes desta equação.

Para melhor interpretar e analisar a relevância do trabalho demonstrou-se um teorema que conduz aos valores dos parâmetros m e n que representam a parte real e a parte imaginária, respectivamente, do número complexo $x = m + ni$. Aplicou-se o teorema a alguns problemas matemáticos e físicos para consolidar e mostrar a veracidade e importância do teorema, utilizando uma comparação entre os dois formalismos. Acredita-se que as aplicações são importantes alternativas para uma melhor compreensão e consolidação do referido tema.

A metodologia a que propõe a pesquisa concentrou-se no fato de que qualquer equação quadrática, independentemente do valor delta ser positivo ou negativo, pode ser resolvida não pelo método usual (RIBEIRO, 2009), mas sim com base em dois parâmetros, m e n . Podemos, ainda, considerar a condição de que o valor numérico de n pode ser utilizado para discussão das raízes da equação quadrática do mesmo modo como é feito com o discriminante da equação do 2º grau (REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA nº 39, 1999).

Verificou-se no desenvolvimento dos problemas que a solução da equação acontece com a resolução de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas, oriundo da operação de igualdade entre números complexos, em que a solução não envolve o uso da fórmula de Bháskara. Outra questão a ser observada é a razão de constatar que o número complexo, apesar de ter sido um grande impasse que influenciou e motivou inúmeros matemáticos para analisar e desenvolver solução para o caso em o discriminante era negativo, pode ser utilizado para calcular raízes de qualquer equação do 2º grau, como será visto ao longo dessa abordagem.

2. O CÁLCULO DAS RAÍZES DA FUNÇÃO A PARTIR O NÚMERO COMPLEXO

Antes de apresentar e demonstrar o teorema de forma generalizada que leva a determinação das raízes de uma equação quadrática utilizando o número complexo e com a solução de um sistema linear, consideremos, primeiramente, o seguinte exemplo:

Seja a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$, queremos obter as raízes x_1 e x_2 sem utilizar a fórmula resolvente.

Solução: Uma forma de encontrar tais raízes está no procedimento que segue. Denotamos que $x = m + ni$ em que x representa a raiz da função. Substituindo x na função, tem-se que

$$f(m + ni) = (m + ni)^2 - 6(m + ni) + 8 \Rightarrow 0 = (m + ni)^2 - 6(m + ni) + 8.$$

Desenvolvendo a última expressão, vem que:

$$m^2 + 2mni + (ni)^2 - 6m - 6ni + 8 = 0 \Rightarrow m^2 + 2mni - n^2 - 6m - 6ni + 8 = 0$$

Agrupando os termos para obter o novo número complexo, obtém-se:

$$(m^2 - n^2 - 6m + 8) + (2mn - 6n)i = 0 + 0i \Rightarrow \begin{cases} m^2 - n^2 - 6m + 8 = 0 & (I) \\ 2mn - 6n = 0 & (II) \end{cases}$$

Nesse caso, observamos que a igualdade de números complexos conduz a um sistema linear de duas equações e duas variáveis. Logo, de (II), tem-se:

$$2mn - 6n = 0 \Rightarrow n(2m - 6) = 0$$

De imediato, vamos considerar $n \neq 0$ e mais adiante discutiremos o porquê dessa condição. Assim,

$$2m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{6}{2} \Rightarrow m = 3$$

Fazendo a substituição de m por 3 em (I), vem que:

$$m^2 - n^2 - 6m + 8 = 0 \Rightarrow 3^2 - n^2 - 6.3 + 8 = 0 \Rightarrow -n^2 - 1 = 0 \Rightarrow n = \pm i$$

Como se supôs n assumir um valor não nulo, encontramos dois valores para n : $n_1 = i$ e $n_2 = -i$, logo:

$$\begin{aligned}x_1 = m + n_1i &\Rightarrow x_1 = 3 + i.i \Rightarrow x_1 = 3 - 1 \Rightarrow x_1 = 2 \\x_2 = m + n_2i &\Rightarrow x_2 = 3 + (-i).i \Rightarrow x_2 = 3 + 1 \Rightarrow x_2 = 4\end{aligned}$$

Dessa forma, verifica-se que a função dada admite raízes 2 e 4.

2.1 Teorema

“Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, as raízes x_1 e x_2 de f são obtidas considerando a forma algébrica do número complexo $x = m + ni$, tal que

$$m = -\frac{b}{2a} \text{ e } n = \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Demonstração:

Seja a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e seja $x = m + ni$ o número complexo de modo que x seja raiz de f , então,
 $f(m + ni) = a(m + ni)^2 + b(m + ni) + c \Rightarrow 0 = a(m + ni)^2 + b(m + ni) + c.$

Desenvolvendo a última expressão e fazendo os agrupamentos, segue que:

$$(am^2 - an^2 + bm + c) + (2amn + bn)i = 0$$

Observa-se que a igualdade de números complexos conduz a um sistema linear de duas equações e duas variáveis

$$(am^2 - an^2 + bm + c) + (2amn + bn)i = 0 + 0i \Rightarrow \begin{cases} am^2 - an^2 + bm + c = 0 & (I) \\ 2amn + bn = 0 & (II) \end{cases}$$

De (II), vem que:

$$2amn + bn = 0 \Rightarrow n(2am + b) = 0$$

Considerando $n \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}2am + b &= 0 \\ m &= -\frac{b}{2a}\end{aligned} \tag{1}$$

A relação (1) mostra que a parte real do número complexo representa a abscissa do vértice do gráfico de f .

Substituindo o resultado (1) em (I), tem-se:

$$\begin{aligned}am^2 - an^2 + bm + c = 0 &\Rightarrow a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - an^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Rightarrow a\frac{b^2}{4a^2} - an^2 - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \\ &\Rightarrow \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = an^2 \Rightarrow an^2 = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow n^2 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2}\end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, obtém-se:

$$n^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$$

ou,

$$n = \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \tag{2}$$

A expressão (2), mostra que o n representa uma relação com o discriminante da função o qual assumiria o valor nulo apenas quando o Δ também for nulo. Assim, as raízes das funções serão números reais iguais, o que garante que a equação terá que ser um trinômio quadrado perfeito.

Dessa maneira, pode-se substituir os valores obtidos de m e n em x , resultando em,

$$x = m + ni \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}i.i \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Demonstra-se, portanto, uma maneira de obter as raízes da função polinomial do 2º grau utilizando a forma algébrica do número complexo e resolução de um sistema linear de variáveis m e n .

2.2 Discussão das raízes e forma canônica

- Se n for imaginário puro, então $x_1 \neq x_2$ serão raízes reais;
- Se n for real não-nulo, então $x_1 \neq x_2$ serão raízes imaginárias (complexas, mas não reais);
- Se n for nulo, então $x_1 = x_2$ serão raízes reais e, dessa forma, a equação será um trinômio quadrado perfeito;

É importante nesse ponto, considerar que em termo de número complexo, a parte imaginária carrega a condição que discute a natureza das raízes e se pode comparar o valor de n com o discriminante da função que também faz análise da natureza das raízes (**Tabela 1**).

Tabela 1: Comparação entre o discriminante e n para discussão de raízes da equação quadrática

Discriminante	Parte imaginária n	Raízes da equação quadrática
$\Delta > 0$	n é imaginário puro	$x_1 \neq x_2$ serão raízes reais distintas
$\Delta < 0$	n é real não-nulo	$x_1 \neq x_2$ serão raízes imaginárias
$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	n é nulo	$x_1 = x_2$ serão raízes reais iguais

Fonte: Os autores (2022)

Utilizando-se (2), podemos escrever a forma canônica da função quadrática fazendo mudanças de variáveis. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ f(x) &= a[(x - m)^2 + n^2] \end{aligned} \quad (3)$$

2.3 Aplicações

A seguir abordamos aplicações que envolvem a fundamentação matemática construída nas seções 2.1 e 2.2.

Aplicação 1: Dada a função $y = 9x^2 + 6x + 10$ obtenha as raízes x_1 e x_2 utilizando:

- a fórmula resolvente;
- a forma algébrica dos números complexos.

Solução:

a) Sendo $f(x) = 9x^2 + 6x + 10$, tem-se que $a = 9$; $b = 6$ e $c = 10$, assim,
 $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.9.10 = 36 + 360 = -324$

logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-324}}{2.9} = \frac{-6 \pm 18i}{18} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6 + 18i}{18} = -\frac{1}{3} + i \\ x_2 = \frac{-6 - 18i}{18} = -\frac{1}{3} - i \end{cases}$$

b) De acordo com o teorema em 2.1, seja $x = m + ni$ e substituindo na função o valor dado a x , ou seja, substituindo o número complexo dado na função polinomial do 2º grau, vem que:

$$y = 9(m + ni)^2 + 6(m + ni) + 10 \Rightarrow y = 9m^2 - 9n^2 + 18mni + 6m + 6ni + 10.$$

Sendo x raiz da função, então:

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9m^2 - 9n^2 + 6m + 10 = 0 & (I) \\ 18mn + 6n = 0 & (II) \end{cases}$$

De (II), vem que:

$$n(18m + 6) = 0 \Leftrightarrow n \neq 0 \text{ e } m = -\frac{1}{3}.$$

Assim, de (I), tem-se:

$$9m^2 - 9n^2 + 6m + 10 = 0 \Rightarrow 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 9n^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 10 = 0 \Rightarrow -9n^2 + 9 = 0 \Rightarrow n = \pm 1$$

Logo, como n é real, então as raízes de y são complexas (ver **Tabela 1**). Assim, para $n_1 = 1$,

$$x_1 = m + n_1i \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} + i$$

e, para $n_2 = -1$,

$$x_2 = m + n_2i \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} - i$$

o que mostra que se obtém os mesmos valores.

Aplicação 2: Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 5$ escreva sua forma canônica.

Solução:

Tendo em vista o teorema desenvolvido anteriormente, o valor de $x = m + ni$ representa a solução da equação.

Logo, para $f(x) = x^2 - 4x + 5$, tem-se que:

$$(m + ni)^2 - 4(m + ni) + 5 = 0 \Rightarrow m^2 + 2nmi - n^2 - 4m - 4ni + 5 = 0$$

Assim,

$$m^2 - n^2 - 4m + 5 = 0 \text{ e } (2m - 4)n = 0$$

Seja $n \neq 0$, então, $2m - 4 = 0$

$$m = 2 \tag{4}$$

Para o cálculo de n , basta substituir $m = 2$ em $m^2 - n^2 - 4m + 5 = 0$, resultando em $4 - n^2 - 8 + 5 = 0$ e, portanto,

$$n^2 = 1 \tag{5}$$

Substituindo os valores em (4) e (5) na expressão (3), conclui-se que:

$$f(x) = [(x - 2)^2 + 1]$$

que expressa diretamente as coordenadas do vértice $V = (2,1)$ da parábola.

CONCLUSÕES

Ao longo do desenvolvimento deste artigo, apresentou-se um estudo com a função quadrática e cálculo raízes de uma função quadrática fazendo aplicação da forma algébrica dos números complexos com a resolução de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas, m e n . Com base nesse estudo, tornou-se possível a elaboração de uma técnica de resolução para encontrar raízes de uma função polinomial de grau 2 sem a necessidade de introduzir fórmulas presentes na literatura em matemática. Nesse novo método de solução, o aluno desenvolve o cálculo sem a necessidade de memorizar expressões, bastando apenas utilizar o formalismo matemático, como se apresentou no exemplo e em uma das aplicações.

Essa metodologia de encontrar as raízes de uma função polinomial do 2º grau, da maneira como foi exposto nesse artigo, possui grande relevância e uma atenção especial, pois a teoria apresentada tem a vantagem de mostrar que apesar da forma algébrica de um número complexo não está incluso no conjunto dos números reais, pode ser utilizado e aplicado em problemas que podem levar a valores reais ou até mesmo imaginários como se observou nos exemplos e aplicações dadas.

Outro fato de interesse nessa aprendizagem é que a discussão para o estudo das raízes da equação não mais se restringe no discriminante Δ , agora, a discussão das raízes se concentra no parâmetro n (**Tabela 1**), que na verdade representa uma nova abordagem de discussão das raízes da equação do 2º grau, pois se verificou que para n complexo as raízes são reais, para n real as raízes são complexas e para n nulo as raízes são iguais.

Portanto, a abordagem desenvolvida pode ser utilizada como uma forma alternativa para calcular raízes de uma função quadrática por não se recorrer ao auxílio de fórmulas presentes na literatura matemática e se fazer uso de ferramentas básicas como valor numérico de uma expressão algébrica, desenvolvimento de produtos notáveis, conhecimentos iniciais do conjunto dos números complexos e resolução de sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Variáveis Complexas e Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

BERRIMAN, A. E. The Babylonian Quadratic Equation. The Mathematical Gazette, vol. 40, no. 333, Mathematical Association, 1956, pp. 185–92, <https://doi.org/10.2307/3608807>.

CARMO, M.P. et al. Trigonometria e Números Complexos. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

DO CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria - Números Complexos. Editora IMPAVITAE, 1992.

FRAGOSO, V.: Equação do 2º Grau: Uma Abordagem Histórica. 2ª Edição. Ijuí: Unijuí, 1999.

GARBI, Gilberto G. O Romance das Equações Algébricas, Makron Books, 1997.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. A Fórmula é de Bháskara? nº 39, 1º Quadrimestre de 1999, p. 54. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/39/12.htm>.

RIBEIRO, Alessandro J. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, vol. 2, nº 1, jan./abr. 2009.



GEOMETRIA RIBEIRINHA: ASPECTOS MATEMÁTICOS EM PRÁTICAS TRADICIONAIS RIBEIRINHAS.

Silva, Odirley, odirleyrock@hotmail.com¹.
Barros, Osvaldo, o.barros@yahoo.com.br².
Costa, José, ojosecostinha@yahoo.com.br³.

¹Professor da SEDUC-Pa, lotado no SOME.

²Professor da UFPa Campus Abaetetuba.

³Professor da SEDUC-Pa, lotado no SOME.

Resumo: *A matemática escolar, em alguns casos, mostra-se limitada às necessidades de aprendizagem dos alunos de escolas ribeirinhas, pois a solução não é satisfatória para resolver problemas cotidianos desses estudantes, ou seja, a disciplina acaba se desvinculando do contexto prático, isso acaba dificultando a dinâmica no ensino e da aprendizagem. Este artigo refere-se a uma pesquisa etnográfica com a intenção de coletar elementos matemáticos contidos em práticas tradicionais ribeirinhas, tivemos como objetivo a composição de questões contextualizadas que possibilitem novos caminhos para ensino da matemática e a busca de uma aprendizagem com significação para os estudantes oriundos dessas regiões; a observação concentra-se nos aspectos geométricos contidos nos contextos ribeirinhos e a forma como os mesmos resolvem seus problemas utilizando uma geometria própria, que denominamos de geometria ribeirinha. O trabalho foi desenvolvido com base em pressupostos epistemológicos da educação etnomatemática proposto por Vergani (2000); D'Ambrósio (1986, 1993, 2001) e Bishop (1988, 1999, 2006), este último propõe seis atividades que condicionam o conhecimento matemático no indivíduo, exemplificamos cada uma delas a luz das práticas cotidianas ribeirinhas e em seguida elaboramos as questões. A partir disso, observamos novos elementos surgirem, favorecendo assim o processo de ensino, além de proporcionar novas formas de leituras de mundo e contribuir com a valorização e respeito das práticas tradicionais, promovendo assim um ensino numa perspectiva transcultural.*

Palavras-chave: *Ensino de Matemática. Geometria. Educação Ribeirinha palavra.*

1. INTRODUÇÃO.

Observando as dificuldades que os alunos ribeirinhos apresentavam para compreender certos conceitos e conteúdos de matemática a partir dos exemplos e exercícios propostos pelo livro didáticos distribuídos pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), verificamos a necessidade de inserir de maneira introdutória, com exemplos e exercícios, elementos do contexto cotidiano desses alunos para estimular e propiciar uma aprendizagem com significação. Bishop (1999) afirma que as verdades matemáticas são universais, contudo isso não significa que o ensino de matemática deva ignorar a individualidade dos alunos e o contexto social e cultural no ensino. Portanto, verificamos a partir da pesquisa e observações feitas em locus, que nas práticas cotidianas dos alunos ribeirinhos havia muitos elementos matemáticos interessantes para serem explorados, e que poderiam favorecer o processo de ensino e aprendizagem, logo percebemos a importância do diálogo entre ciência e cultura para a abertura de caminhos que aproximassem as aulas de matemática das práticas culturais.

A pesquisa tem como elemento norteador a geometria, foi realizada uma coleta de dados feita por meio de entrevista, utilizamos um questionário com perguntas semiestruturadas, o objeto de nossa pesquisa foi um típico morador ribeirinho, este reside na comunidade Ribeirinha Urubuêua Fátima que está localizada na ilha Caripetuba,

região pertencente ao município de Abaetetuba-Pa. As práticas tradicionais ribeirinhas elencadas em nossa pesquisa indicam que, grande parte está ligada à sobrevivência das pessoas dessas comunidades, esse conhecimento empírico manifesta-se nos mais imperceptíveis detalhes que constituem as motivações particulares presentes na vida de cada ser humano, portanto pescar, caçar, plantar, coletar, colher, construir e deslocar-se, representa não somente a tarefa cotidiana sendo executada, mais sim a garantia de sobrevivência e de transcendência desses povos.

As informações obtidas na pesquisa deram suporte para elaboração de questões que aproximassem a realidade do aluno para a matemática, realizamos a proposta com uma turma do 9º ano do ensino fundamental da escola Nossa Senhora de Fátima, localizada na comunidade Urubuêua Fátima, as interações e discursões que surgiram em sala foram bastante interessantes e estimulantes. Essa proposta é mais uma de muitas já existentes que visam promover um ensino com foco em um público específico, no caso em questão, os ribeirinhos. Acreditamos que o livro didático é necessário para o entendimento dos conceitos e conteúdos de matemática de forma global, porém o ponto de partida deverá ser os saberes ligados à tradição dos alunos.

2.METODOLOGIA DE PESQUISA.

Optamos como encaminhamento metodológico a realização de uma pesquisa de campo de caráter descritivo e etnográfico, fizemos o levantamento de informações para a elaboração de questões que contemplassem a realidade dos alunos ribeirinhos, objetivando direcionar a compreensão dos estudantes para que eles concebessem que as estruturas matemáticas estão presentes, e são desenvolvidas dentro e fora da sala de aula, sobretudo no ambiente que os circundam. Logo,

Isto nos conduz a atribuir à matemática o caráter de uma atividade inerente ao saber humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e consequentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido. (D' AMBROSIO, 1996, p.36).

Aplicamos as ideias contidas no programa de pesquisa em etnomatemática, pois acreditamos que abre espaços para discussões e reflexões acerca dos diferentes saberes relacionado ao fazer matemático, estimulando dessa forma, uma significação e ressignificação da disciplina para os educandos, ocasionada por uma aprendizagem com finalidade prática para os mesmos.

A Geometria Ribeirinha materializa-se nos elementos de cada prática e nas estratégias singulares existentes em cada atividade. Portanto, fizemos uma análise das informações obtidas e destacamos essas singularidades nas práticas, para tal utilizamos fundamentos de Alan Bishop (1988,1999,2006), segundo o teórico, são seis as atividades denominadas por ele de panculturais, elas seriam condições necessárias e suficientes para a base do desenvolvimento do conhecimento matemático. São elas:

- I-Contagem.
- II-Localização.
- III-Medição.
- IV-Desenho.
- V-Jogo.
- VI-Explicação.

Identificamos as atividades panculturais descritas por Bishop nas práticas ribeirinhas e a partir disso elaboramos questões. Simplificadamente, temos:

A contagem está presente em práticas pesqueiras de pequeno e médio porte por meio da utilização da braça como unidade de medida.

A localização refere a leituras espaciais do ambiente e seus símbolos.

A medição pode ser presenciada na comercialização do açaí, pois é utilizado tal como unidade de massa a rasa.

O desenho esta contido na construção e estrutura de funcionamento do matapí para a pesca do camarão.

O jogo pode ser exemplificado nos algoritmos utilizados na brincadeira do “bole-bole”.

A explicação foi identificada na “lenda do boto”.

3.OBJETIVO GERAL.

► Possibilitar um olhar crítico e positivo das relações entre as práticas culturas ribeirinhas e a matemática escolar.

4.OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- ▶ Investigar elementos matemáticos presentes em práticas tradicionais ribeirinhas.
- ▶ Proporcionar uma aprendizagem significativa para os alunos ribeirinhos.
- ▶ Valorizar as práticas dos ribeirinhos.

5.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

Propondo uma educação transcultural e esclarecendo o sentido e significado do programa de pesquisa em etnomatemática, Teresa Vergani (2000) e Ubiratan D'Ambrósio (1986,1996). Ao falarmos de pesquisa etnográfica em contexto de um grupo específico, objetivando analisar práticas tradicionais para coletar elementos que possam dinamizar o processo de ensino e aprendizagem, temos D' Ambrósio (1993), com sua obra "Etnomatemática. Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer", o autor propõe metodologias de ensino da matemática diferenciadas, considerando que a disciplina deve ser concebida com naturalidade em qualquer ambiente.

Temos ainda o teórico Alan Bishop, ele descreve as habilidades presentes nas práticas culturais, que no geral são transmitidos pelos mais velhos ou experientes para os mais jovens membros das comunidades, havendo parentesco ou não entre os mesmos, o autor analisa as interações sociais entre os indivíduos, estas que são fundamentais para o compartilhamento desses conhecimentos entre os membros de uma mesma comunidade, ele define esse processo como enculturação; segundo Alan Bishop (1999, p.160) "Enculturação é um processo interpessoal e, conseqüentemente, um processo interativo entre pessoas. Neste sentido, a Enculturação Matemática não é diferente de qualquer outra enculturação". Ainda sobre enculturação Bishop afirma que,

A enculturação, como é conhecida de maneira formal, é um processo criativo e interativo no qual há a interação entre quem vive na cultura e quem nasce dentro dela, e que tem como resultado ideias, normas e valores que são similares de uma geração a outra, embora seja inevitável que haja diferença em algum aspecto devido à função «recriadora» por parte da geração seguinte (BISHOP, 1999, p. 119).

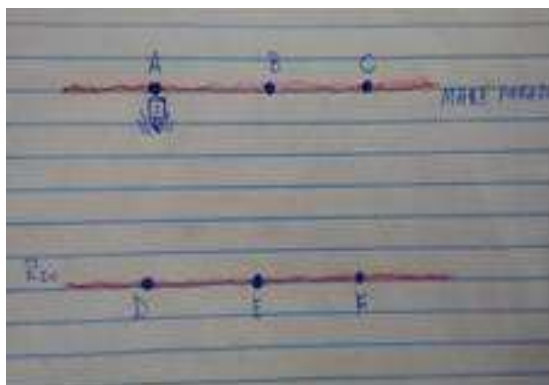
Os teóricos citados indicam que a matemática é uma atividade espontânea presente nas praticas culturais e tradicionais dos grupos, pois existe um entrelaçamento entre matemática, sociedade e cultura, portanto o professor deverá analisar o ambiente que está atuando, para que a partir disso, possa construir e reconstruir os conceitos matemáticos situados na cultura dos educandos, promovendo dessa forma metodologias diferenciadas.

6.PROPOSTA SENDO APLICADA.

Após a coleta de informações feita pela pesquisa e observações realizada na comunidade, construímos e propomos questões para a turma, iremos expor nesse trabalho dois itens.

Na primeira questão, um barco devera atravessar o rio de um ponto para outros pontos contidos em outra margem, considerando que a maré esteja sem fluxo, ou seja, parada. Temos:

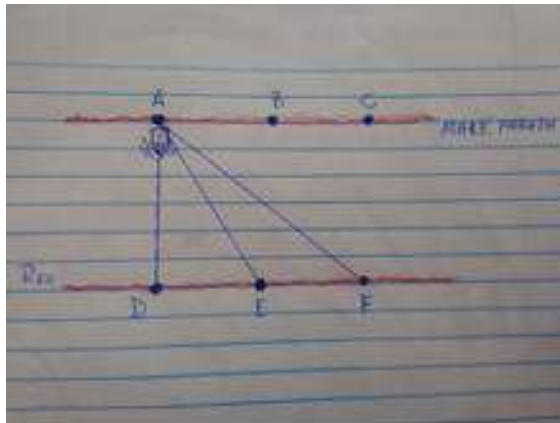
Figura 1: Ilustração para as questões.



A segunda questão o barco deve fazer a mesma travessia considerando que a maré esta agora com fluxo, ou seja, em movimento da esquerda para direita.

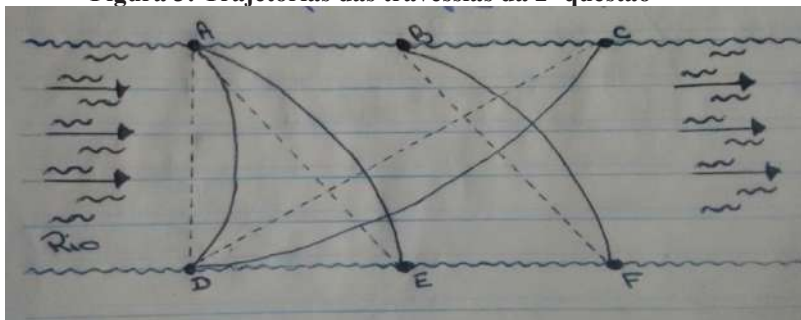
Após propor as questões foi possível observar um interesse e empenho bastante acentuado dos discentes para a resolução do problema, a primeira questão quando a maré está parada teve como solução a figura abaixo, unanime e indiscutível entre os alunos.

Figura 2: Trajetórias das travessias da 1º questão



A segunda questão ocasionou grande debate, pois para fazer as travessias existia o elemento natural que não permitiam o trajeto mais curto e econômico, contudo a turma chegou a um consenso e foi apresentada como solução do problema a figura abaixo.

Figura 3: Trajetórias das travessias da 2º questão



Na primeira questão percebemos que a solução foi direta, embasado na Geometria euclidiana, e nela é possível trabalhar com os alunos vários conceitos matemáticos, tais como: segmentos de reta, menor distância entre dois pontos, polígonos semelhantes, relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, entre outros que os professores com sua criatividade podem desenvolver.

Na segunda questão podemos perceber que a solução não se embasa na Geometria euclidiana, pois a mesma não contempla uma solução satisfatória, isso se deve ao condicionante natural atribuído ao problema, desta vez para se chegar a um resultado plausível, entra em cena o que denominamos de Geometria ribeirinha, esta que apresenta uma resposta convincente, pois expressa a realidade de fato para os alunos ribeirinhos, pois segundo eles, a ação proposta no segundo problema é bastante comum em seus cotidianos.

Os traçados na figura 3 representativos dos movimentos de travessia do barco com fluxo de maré, significam:

1º) O traçado abaixo representa o movimento ideal para o barco fazer, leva menor tempo e menos combustível, pois é a menor distância entre os dois pontos, mais devido à força da maré é muito difícil realiza-lo, sendo arriscado tentar fazê-lo.

2º) Esse traçado seguinte expressa o movimento que é realizado com segurança respeitando o condicionante natural que é a força da maré, apesar dele levar mais tempo e utilizar mais combustível é a solução real para a questão.

Com as questões propostas foi possível perceber o dinamismo existente na disciplina de matemática, sobretudo quando se utiliza os elementos presentes no âmbito cultural dos alunos, tínhamos com isso a intenção de desenvolver um olhar mais crítico e sensível para a disciplina. Portanto, explorar a matemática com naturalidade em contextos específicos e diversificados é propor um processo de ensino multicultural, e também significa sugerir uma metodologia possível e viável para as regiões ribeirinhas.

7. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.

Percebemos o dinamismo que existe quando se desenvolve os conceitos e conteúdos matemáticos priorizando um ensino pautado no âmbito cultural dos alunos, é isso que propomos e que pretendemos desenvolver mais profundamente, utilizando a maior quantidade de elementos matemáticos que pudermos identificar. O olhar mais sensível e crítico do educar e do educando possibilita novas formas do ensino ser desenvolvido e da aprendizagem ser concebida, as práticas culturais ribeirinhas são reais, palpáveis e fornecem os subsídios necessários para auxiliar no ensino da matemática.

8. REFERÊNCIAS.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática**. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Trad. Genís Sánchez Barberán. Barcelona, Espanha: Paidós, 1999.

_____, A. J. **Aspectos sociales e culturales de la Educación Matemática**. Enseñanza de las Ciencias. Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona. v.6, n. 2, p. 121-125, (1988).

_____, A. J. Alan Bishop: **Por Uma Educação Matemática Fundada em Uma Abordagem Cultural**. Entrevista concedida a Diogo Faria, Cristina Frade e Maria Laura M. Gomes. Presença Pedagógica, Belo Horizonte, v. 12, n. 71, p. 5-21, ago./set. 2006.

_____, A. J. **The relationship between mathematics education and culture**. Opening address delivered at the Iranian Mathematics Education Conference in Kermanshah, Iran, 1997.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Realidade a Ação: Reflexão Sobre Educação Matemática**. São Paulo: Summus Editorial, 1986.

_____, Ubiratan. **Etnomatemática. Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer**, 2ª edição [1ª ed. 1990]. São Paulo, Ed. Atual, 1993.

_____, Ubiratan. **Da realidade à Ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2ª edição. São Paulo: Summus editorial, 1996.

VERGANI, Teresa. **Educação Etnomatemática: O que é?** Portugal, Lisboa: Pandora, 2000.



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PANTOGRÁFICAS

Ruffino, Paulo
Departamento de Matemática- IMECC. UNICAMP

Resumo: A intenção dessa palestra de nível de graduação é mostrar um tipo curioso de equações diferenciais ordinárias com retardo, isto é, equações diferenciais cujas derivadas dependem, de uma maneira peculiar, do passado da solução. São as chamadas equações com retardo proporcional, ou equações pantográficas.

Palavras-chave: EDO, equações com retardo proporcional, equações pantográficas

INTRODUÇÃO

A intenção dessa palestra é mostrar, sem formalidades, a parte interessante dos resultados do artigo de divulgação publicado em [1]. Iremos mostrar aos participantes um tipo curioso de equações diferenciais ordinárias com retardo, isto é, equações diferenciais cujas derivadas dependem, de uma maneira peculiar, do passado da solução. São as chamadas equações com retardo proporcional, ou equações pantográficas.

Como motivação geral para equações com retardo, não faltam exemplos de fenômenos na natureza que são modelados desta maneira. Se uma estrela tem sua massa variando com o tempo, dadas as distâncias astronômicas envolvidas, os planetas que orbitam ao redor dela só sentem essa variação algum tempo depois. Pensando no nosso Sol, por exemplo: uma hipotética explosão demoraria oito minutos para ser sentida no nosso planeta. Modelos biológicos, econômicos, bioquímicos, hidráulicos e vários outros sistemas, intrinsecamente tem um comportamento com retardo. Até mesmo circuitos eletrônicos apresentam atrasos de nanossegundos que em altas frequências precisam ser considerados. Esse tipo de raciocínio pode ser levado ao extremo a ponto de dizermos que todo fenômeno da natureza, mesmo nos problemas clássicos, apresenta algum retardo: uns mais perceptíveis do que outros.

Típicamente, nos modelos de equações com retardo existe uma função (funcional, linear ou não) que associa para cada trajetória em um intervalo de tempo no "passado imediato" dessa solução, uma velocidade da solução no ponto em consideração.

O tipo de equação diferencial com retardo mais conhecida é a com retardo constante, isto é, em que a derivada do sistema no instante t depende somente de onde o sistema estava no instante $t-r$, para um certo tempo de retardo fixo $r > 0$. Mais precisamente: seja $\eta: [-r, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua na reta \mathbb{R} (a condição inicial) e considere o seguinte problema: encontrar uma função contínua $x: [-r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça

$$x'(t) = F(x(t-r))$$

para $t > 0$ com $x(t) = \eta(t)$ para t em $[-r, 0]$, onde F é uma função (campo de vetores) contínua. Equações deste tipo já são relativamente bem conhecidas, figuram em textos clássicos da área, ver por exemplo J. Hale [1] e as referências ali contidas.

Nesta palestra queremos chamar a atenção da audiência para um outro tipo especial de equações com retardo, relativamente pouco conhecido, onde o parâmetro no tempo que define o campo de vetor que dirige sua solução tem um retardo crescente, que é proporcional ao tempo. Fixamos a proporção do retardo q em $(0,1)$ e um ponto base $a \geq 0$. Considere uma função inicial $\eta: [qa, a] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Dada uma função (campo de vetores) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, considere a equação diferencial com retardo:

$$x'(t) = F(x(qt)).$$

A solução é uma função contínua $x(t)$ definida em algum sub-intervalo de $(qa, +\infty)$ de tal maneira que para t em $[qa, a]$, temos $x(t) = \eta(t)$. Equações deste tipo são chamadas por alguns autores de equações diferenciais pantográficas.

A equação pantográfica modela por exemplo a situação de duas partículas se movendo na reta, uma mais lenta que a outra por um fator $q \in (0,1)$, onde a partícula que está a frente, mais rápida, obedece comandos de velocidade dados em função da posição da segunda partícula, mais lenta. Outras situações onde as equações pantográficas podem aparecer é em sistema com duas escalas de tempo, por exemplo nas estruturas onde se estudam os chamados "princípios de médias". Na palestra e no artigo mencionado abaixo mostramos propriedades básicas interessantes dessas equações.

Por favor, veja mais detalhes na referência [1] abaixo disponível neste link:
<https://www.dropbox.com/s/n702d3xsd7yyqz8/Ruffino-RMU-2015-fev.pdf?dl=0>

link

REFERÊNCIAS

RUFFINO, P. Equações diferenciais pantográficas: retardo proporcional. Revista Matemática Universitária, SBM. fev. 2015.



PARADOXOS E SOFISMAS MATEMÁTICOS – UM CONVITE À INVESTIGAÇÕES NA ESCOLA BÁSICA

Fonseca, Rubens Vilhena, rubens.vilhena@uepa.br¹
Figuerola, Teodora Pinheiro, teodora.pinheiro@gmail.com²

¹Universidade Estadual do Pará

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo: *O presente artigo se enquadra no eixo temático sobre Tópicos Especiais de Matemática e, destina-se a todos que tem interesse na área de educação em matemática em todos os níveis de ensino. Pretendemos discutir a importância do uso de Paradoxos e/ou Sofismas em sala de aula na Educação Básica e, em cursos de formação de professores. O objetivo é responder à pergunta: Por que devemos considerar esses problemas atípicos e que inicialmente parecem não ter nenhuma lógica? Para responder esta pergunta procuraremos evidenciar os elementos importantes e, imprescindíveis à matemática e ao fazer matemático, destacando o que rege os documentos balizadores da Educação Básica.*

Palavras-chave: *Paradoxos, Sofismas, Educação Básica, Formação de Professores*

INTRODUÇÃO

Courant, Robbins (2000, prefácio) comentam em seu livro “O que é Matemática” que o ensino da matemática tem algumas vezes degenerado em exercício repetitivo e vazio de solução de problemas, o que pode desenvolver capacitação formal, mas não conduz a uma real compreensão ou maior independência intelectual.

Em seu texto introdutório “O que é Matemática” afirma que:

A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade, e o supremo valor da Ciência Matemática. (Courant, Robbins, 2000, p. XI)

Este trabalho tem como foco trazer à discussão estes elementos básicos da matemática, como: a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade a partir de algumas situações envolvendo paradoxos matemáticos, os quais também, foram muito importantes para o desenvolvimento desta ciência. E dessa forma revelar as potencialidades do uso de paradoxos e/ou sofismas em situações de sala de aula na Educação Básica, bem como em cursos de formação de professores.

Segundo Monteiro e Mondini (2019), o vocábulo paradoxo é composto, etimologicamente, pelo prefixo grego “para” (contra) e pelo sufixo “doxa” (senso). Ou seja, um paradoxo é uma afirmação que expressa ou parece expressar uma incoerência lógica, uma sequência de pensamentos que leva a um absurdo, uma ideia contrária ao senso comum.

No livro Compêndios de Matemática e Lógica Matemática, Dias (1999, apud MONTEIRO; MONDINI, 2019) define Paradoxo da seguinte forma:

Paradoxo é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, a qual é contrária à nossa intuição. Os paradoxos podem ser classificados em Paradoxos

Verídicos (aqueles que apresentam conclusões verdadeiras) e em Paradoxos Falsídicos (aqueles que apresentam conclusões falsas). (DIAS, 1999, p. 53, apud MONTEIRO; MONDINI, 2019)

Os paradoxos sempre estiveram presentes na história do desenvolvimento da matemática e, trouxeram importantes contribuições, Bell (1945, apud KLEINER; HADAR, 1994) e Davis (1964, apud KLEINER; HADAR, 1994) relatam sobre isso:

Os erros e dificuldades não resolvidas do passado em matemática sempre foram as oportunidades para o seu futuro (BELL, 1945, p. 283, apud KLEINER; HADAR, 1994).

Um dos aspectos infinitamente atraentes da matemática é que seus paradoxos mais espinhosos têm uma maneira de florescer em belas teorias. (DAVIS, 1964, p. 55, apud KLEINER; HADAR, 1994).

As grandes descobertas surgiram de erros e/ou acertos, mas acima de tudo de questionamentos. Segundo Byers (2007):

A lógica abomina o ambíguo, o paradoxal e, principalmente, o contraditório, mas o matemático criativo acolhe situações problemáticas porque levantam a questão: ‘O que está acontecendo aqui?’ Assim, o problema sinaliza uma situação que vale a pena investigar. Os problemas são uma fonte potencial de nova matemática.’ (BYERS, 2007, p.6)

Nesta mesma direção, a proposta é mostrar as potencialidades e/ou curiosidades da matemática para todos e da importância do ensino através de paradoxos e sofismas na Educação Básica evidenciando a sua importância e os seus elementos imprescindíveis para a formação e informação de alguns tópicos de matemática, tendo como pergunta chave: Por que devemos considerar esses problemas atípicos e que inicialmente parecem não ter nenhuma lógica?

POTENCIALIDADES DO USO DE PARADOXOS E SOFISMAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Segundo Tassara, Moraes, Abbud (2018) a questão dos paradoxos sempre intrigou os estudiosos de Lógica, desde a antiguidade até nossos dias, dentre os quais, pode-se destacar Crisipo e Zenão. Isso porque o rigor lógico e a sistemática do pensamento humano encontraram, nos paradoxos, um obstáculo quase intransponível. Historicamente os paradoxos constituíram uma série de problemas que desafiaram e ainda desafiam muitos matemáticos e filósofos.

Segundo Campos (2016) um paradoxo matemático tem como objetivo instigar o aluno e provocar nele a curiosidade. Sendo assim, o aluno pode atuar no papel de pesquisador, construindo uma nova relação com o saber numa postura investigativa e construtiva.

E esta postura investigativa é contemplada na competência específica 5 da BNCC, a qual relata sobre a importância dos alunos se depararem com problemas que exigem o desenvolvimento de habilidades relacionadas à capacidade de investigação e de formulação de explicações e argumentos.

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p.540)

Além disso, exercícios instigantes e reflexões sobre os paradoxos podem naturalmente envolver os alunos e oferecer-lhes uma oportunidade de entender mais completamente sobre aspectos do desenvolvimento da história da matemática.

De acordo com as orientações da BNCC:

Na área de Matemática e suas Tecnologias para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas

para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. (BNCC, 2018, p.529)

Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar. (BNCC, 2018, p.530)

Nesta mesma direção, um dos requisitos da Matriz de Referência de matemática do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), cuja edição de 2021 é focada em matemática, define os fundamentos teóricos da avaliação matemática com base no conceito fundamental de literacia matemática¹. (PISA, 2021)

Mas, o que se entende por raciocinar matematicamente?

A capacidade de raciocinar logicamente e apresentar argumentos de modo honesto e convincente é uma capacidade que se está a tornar cada vez mais importante no mundo de hoje. A matemática é uma ciência que estuda objetos e noções bem definidos, que podem ser analisados e transformados de maneiras diferentes usando “raciocínio matemático” para obter conclusões certas e invariáveis no tempo. Na matemática, os alunos aprendem que, com raciocínios e hipóteses apropriados, podem chegar a resultados que podem confiar plenamente por serem verdadeiros numa ampla variedade de contextos da vida real. (PISA, 2021)

Sendo assim, acredita-se que para que o processo de ensino e aprendizagem seja eficaz faz-se necessário expor os alunos a desafios intelectuais, por envolvimento ativo, de modo que ele seja protagonista da experiência. Pois acreditamos que essas experiências proporcionarão aos alunos conhecimento e aprendizado associados a raciocínios lógicos, processos de descobertas e de criatividade.

Logo, o foco deste trabalho é a discussão de alguns paradoxos, os quais revelarão as sutilezas de questões conceituais matemáticas associadas a determinados assuntos matemáticos.

ALGUNS TIPOS DE SOFISMAS E PARADOXOS

O reconhecimento do papel pedagógico dos exercícios matemáticos que refutam as provas falsas sugere um esforço de análise sobre a sua fundamentação teórica, como uma condição necessária para que haja uma escolha racional e, para a aplicação desse material na escola com o objetivo de que os alunos vivenciem situações que envolvam conclusões falsas e, assim, a partir da intuição e raciocínio lógico, análise e desenvolvimento do saber em jogo, capacidade de generalização e, individualidade (do objeto matemático em si e, da relação do indivíduo com este objeto) possam construir uma base sólida para refutá-las.

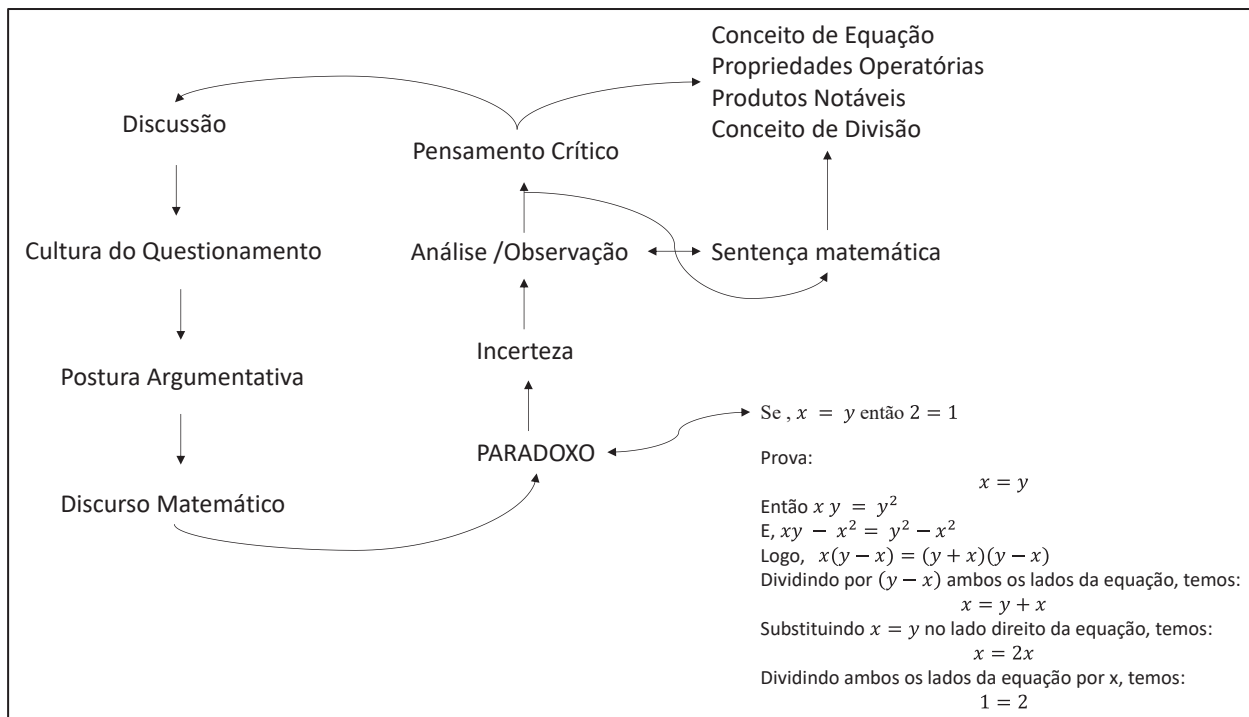
A Figura 1 apresenta um esquema que evidencia os elementos da Situação 1, a qual envolve um paradoxo Falsídico, ou Sofisma.

Situação 1: A afirmação: “Se $x = y$ então $2 = 1$ ” pode levar o aluno a uma situação de incerteza, o que colocará em jogo a sua intuição e raciocínio lógico, elementos imprescindíveis em uma situação de análise e observação da sentença matemática (saber em jogo) apresentada, bem como dos conhecimentos pertinentes à mesma, neste caso, conhecimentos a respeito de Equação, das propriedades Operatórias, Produtos Notáveis, da operação de divisão. Esta análise e observação acerca da sentença matemática e, dos saberes em jogo contribuirão para o desenvolvimento do pensamento crítico, discussão no coletivo, com a turma de alunos, promovendo a cultura do

¹ A capacidade de raciocinar logicamente e apresentar argumentos de modo honesto e convincente é uma capacidade que se está a tornar cada vez mais importante no mundo de hoje. A matemática é uma ciência que estuda objetos e noções bem definidos, que podem ser analisados e transformados de maneiras diferentes usando “raciocínio matemático” para obter conclusões certas e invariáveis no tempo. Na matemática, os alunos aprendem que, com raciocínios e hipóteses apropriados, podem chegar a resultados que podem confiar plenamente por serem verdadeiros numa ampla variedade de contextos da vida real. (PISA, 2021)

questionamento, a postura argumentativa, estreitando a relação do indivíduo com o objeto matemático e, a capacidade de generalização, elementos fundamentais para o desenvolvimento e construção do discurso matemático.

Figura 1: Esquema evidenciando elementos de uma situação envolvendo um Sofisma



Fonte: Autores

No exemplo da Figura 1, o amálgama dos elementos citados anteriormente trará a luz o fato de que como x é igual a y ($x = y$), a divisão de ambos os lados da igualdade: $x(y - x) = (y + x)(y - x)$ por $(y - x)$, resulta em uma divisão por zero. Por isso, o resultado $2 = 1$.

Situação 2: Seja

$$\sqrt{x} + x = 2$$

Um aluno escreveu os seguintes cálculos em seu caderno

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2 - x \\ x &= (2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x_1 &= 4; \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Este aluno, é de se esperar, está convencido da correção de seus cálculos e, por esse motivo, ficou muito desanimado com os resultados obtidos quando da substituição do valor $x_1 = 4$ na equação dada. Ele não entendeu o valor absurdo $6 = 2$.

Como vocês explicariam este fato?

A Situação 2 traz as mesmas contribuições da Situação 1 e, que estão explícitos na Figura 1, ou seja, é uma situação que leva o aluno a momentos de observação/reflexão/análise acerca de seus conhecimentos matemáticos, o que estreita a relação do aluno com o objeto matemático em questão, no caso a raiz quadrada de um número. A situação leva o aluno a refletir sobre este número "x", quais valores ele pode assumir? E qual o significado da raiz quadrada de "x"? O professor como mediador desta situação poderá trazer elementos da história da matemática (ROQUE, 2012, p. 61) para a compreensão dos alunos sobre a epistemologia deste objeto matemático (o cálculo da raiz quadrada de x se refere a encontrar o lado de um quadrado de área x) e, assim, os alunos terão condições de desenvolver o pensamento crítico e ter uma postura argumentativa para o desenvolvimento e construção de seu discurso matemático sobre o ocorrido com o aluno "fictício" da Situação 2.

CONCLUSÕES

Esta proposta é um recorte de um projeto de pesquisa que tem como objetivo mostrar a importância do uso de paradoxos em situações de sala de aula e, em cursos de formação de professores.

Logo, a resposta da questão inicial e, tema deste trabalho: Por que devemos considerar esses problemas atípicos e que inicialmente parecem não ter nenhuma lógica?, envolve propor aos alunos situações didáticas à luz da essência da matemática e, dos elementos imprescindíveis ao seu desenvolvimento como ciência, ou seja, desenvolver em sala de aula a cultura do questionamento, da observação e análise para o reconhecimento de padrões, que implicitamente evidenciam seus elementos básicos: a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade.

Além disso, esta proposta vai ao encontro das diretrizes dos documentos que regem a Educação Básica e, que pode também ser aplicada em cursos a nível ensino superior.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 28/03/2022.

BRASIL. PISA – Matriz de referência para pensamento criativo – Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/brasil_no_pisa_2021_matriz_de_referencia_para_pensamento_criativo.pdf. Acesso: 28/03/2022

BYERS, W. How Mathematicians Think – Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics. Princeton University Press, 2007.

COURANT, R.; ROBBINS, H. O Que é Matemática? Ciência Moderna; 1ª edição, 2020.

CAMPOS, R.N.R. Uma proposta de ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos utilizando três paradoxos, 43f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, campus JuazeiroBA, 2016

KELINER, I.; MOVSHOVITZ-HADAR, H. The Role of Paradoxes in the Evolution of Mathematics, The American Mathematical Monthly, vol. 101, n.º. 10, pp. 963-974, Taylor & Francis, Ltd, 1994

MONTEIRO, G.L.; MONDINI, F. Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática, ACTIO, Curitiba, vol. 4, n. 2, p. 30-47, 2019.

ROQUE, T. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

TASSARA, E.T.O.; MORAIS, L.; ABBUD, N. Paradoxos: Zenão de Eléia e os processos de compreensão da inteligibilidade, COGNITIO-ESTUDOS: Revista Eletrônica de Filosofia, São Paulo: CEP/PUC-SP, vol. 15, n.º. 1, 2018, p.1-13



ESTADO DA ARTE SOBRE O ENSINO DE CORPOS REDONDOS

Cordeiro Junior, Fernando Augusto Cunha, Fernando-jr@live.com¹

Alves, Fábio José da Costa, fjca@uepa.com.br²

¹Universidade Estadual do Pará

²Universidade Estadual do Pará

Resumo: Das diversas disciplinas de um currículo escolar, grandes partes dos alunos concordam que a matemática é uma das disciplinas mais difícil do ensino médio, observamos que os alunos do ensino fundamental II e do ensino médio tinham uma certa dificuldade em identificar objetos geométricos, sejam elas na forma de plano ou espacial, e cálculos relacionados a eles. Esta seção do trabalho é a componente que abordará sobre o estado da arte, cuja finalidade é de apresentar as metodologias e os resultados das pesquisas realizadas, anteriormente, sobre o estudo de corpos redondos feitos por professores de matemática, buscando justificar e dar referências para o desenvolvimento desta pesquisa científica. Portanto, durante o levantamento das bibliografias no estudo da arte observamos uma certa dificuldade e carência para encontrarmos pesquisas e trabalhos que abordassem o assunto de corpos redondos dentro do ensino da Geometria Espacial. Os desafios são grandes no ensino da matemática.

Palavras-chave: Corpos Redondos, Geometria Espacial, Ensino de Geometria.

INTRODUÇÃO

Das diversas disciplinas de um currículo escolar, grandes partes dos alunos concordam que a matemática é uma das disciplinas mais difícil do ensino médio. Durante a vida acadêmica, fizemos diversas pesquisas no ensino de matemática e participando de projeto de iniciação à docência, observamos que os alunos do ensino fundamental II e do ensino médio tinham uma certa dificuldade em identificar objetos geométricos, sejam elas na forma de plano ou espacial, e cálculos relacionados a eles.

Segundo Nogueira (2014), por muitos anos a geometria foi tido como pouco abordada pelos educadores matemáticos, muito das vezes a geométrica era vista de forma muito abstrata e teórica, deste modo, os alunos criam uma certa aversão a matéria. Bem diferente do passado, hoje a geometria pode ser estudada em todo o ensino médio e uma boa parte dos anos finais do ensino fundamental.

Nesse ponto, a forma em que ensinamos a geometria também pode contribuir no ensino e aprendizagem da matemática, haja vista que podemos motivar ou desmotivar o aluno. Atualmente, quando se trata de currículo de matemática, existe uma grande discussão acerca da maneira de se lecionar qualquer disciplina e uma grande dificuldade por parte dos professores, em tratar dos conteúdos de forma prática e contextualizada, como pede os documentos curriculares.

Sobre o currículo, a Base Nacional Comum Curricular, BNCC, (BRASIL, 2018) e os Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998), apontam a importância dos conceitos geométricos que constituam um currículo de Matemática, uma vez que o desenvolvimento do pensamento geométrico propicia ao aluno um tipo de visão de mundo e entendimento que lhe permite compreender, de forma organizada, o cotidiano em que vive.

Sanchez (2018) em sua pesquisa de mestrado, constatou em outros trabalhos o resultado de baixo desempenho de aluno do ensino médio, no que diz a respeito aos conceitos geométricos, os autores acreditam que é recorrências das dificuldades na visualização e representação das formas geométrica e não somente no desenvolvimento do pensamento e conhecimento geométrico.

Aliás, várias são as formas matemáticas que vemos no nosso cotidiano, tais como, as formas geométricas, retângulos, triângulos, círculos, cubos, cilindros etc. Segundo Pais (1994), quatro elementos são essenciais no ensino de geometria, trata-se do objeto, do desenho, da imagem mental e do conceito, onde estes elementos constitui o

espaço tridimensional. Vale ressaltar que o objeto e o desenho são os mais utilizados nos contextos atuais. Pais (1994) reforça que a maioria das dificuldades dos alunos nos anos 90 era a identificação e representação das formas geométricas

1. LEVATAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Esta seção do trabalho é a componente que abordará sobre o estado da arte, cuja finalidade é de apresentar as metodologias e os resultados das pesquisas realizadas, anteriormente, sobre o estudo de corpos redondos feitos por professores de matemática, buscando justificar e dar referências para o desenvolvimento desta pesquisa científica que faz parte do texto de dissertação de mestrado.

Para conseguirmos este objetivo, procuramos por acervos online que contêm trabalhos que envolvessem o estudo de corpos redondos, especialmente, àqueles correlacionados a este assunto, bem como, a geometria espacial. Haja vista que, durante nossas averiguações nestes acervos, foi difícil de encontrar trabalhos que abordassem somente o assunto do nosso objeto matemático, corpos redondos.

Sobre as seleções dos trabalhos, eles foram obtidos através das ferramentas de busca do *Google, Google Acadêmico e ERIC*, utilizando as palavras-chaves: “Ensino de Corpos Redondos”, “Estudo de Corpos Redondos”, “Ensino de Corpos de Revolução” e o “Estudo da Geometria Espacial”. Para a plataforma ERICA empregamos os termos: “Teaching Round Bodies”, “Study of Round Bodies”, “Teaching Bodies of Revolution” e “Study of Spatial Geometry”.

Além do mais, consideramos os seguintes critérios de filtro: período dos trabalhos dentre os anos de 2010 a 2021, com o foco em dissertações (qualificadas e defendidas) e artigos científicos completos em revistas e periódicos. Ao todo foram 30 trabalhos, dos quais selecionamos os mais relevantes para este trabalho, sendo 5 artigos e 11 dissertações, que tratavam do ensino de corpos redondos.

1.1 Geometria Espacial: Ensino de Corpos Redondos

Durante a minha experiências em sala de aula, observei que o aluno do ensino médio tinha uma certa dificuldade com o assunto de Geometria Espacial. Os objetos espaciais como os poliedros e os corpos redondos ou corpos de revolução não eram bem compreendendo quando desenhados em um plano do quadro ou ilustrações dos quais os livros didáticos mostravam.

Sobre isso, AMARAL (2018), em seu artigo intitulado Livro Didático De Ensino Médio, Geometria E A Presença Das Tecnologias, analisou as atividades de cinco coleções de livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no âmbito das propostas de uso das tecnologias no desenvolvimento de conteúdos de Geometria.

Para o autor, a Geometria é um tema visto como difícil pelos professores, que costumam ter dificuldade, tanto com seus conceitos como com seu ensino. Porém, a realidade era outra nos anos 80 e 90, onde os professores deixavam o ensino de Geometria por último lugar, pois assim vinha nos livros didáticos daquelas épocas, segundo AMARAL (p.129, 2018): “há alguns anos, no entanto, tem havido ações para reverter essa realidade” e hoje observamos que este assunto vem no início dos livros do ensino fundamental II e médio.

Por outro lado, AMARAL (2018) afirma que os uso de software e tecnologias potencializam os conteúdos da Geometria sugeridos pelos livros didáticos, porém, ter esses recursos ainda é uma realidade distantes para algumas escolas públicas do Brasil.

O procedimento metodológico adotada pelo ator foi da seguinte forma: o seu trabalho segue uma abordagem interpretativa, onde a pesquisa tem característica qualitativa, pois o foco do autor está na integração das tecnologias digitais às aulas de Geometria, em diálogo com os livros didáticos do ensino médio.

AMARAL (2018) iniciou seu processo de investigação nas coleções aprovadas pelo PNLD 2015 e 2018, analisando cinco livros didáticos, chegou em um dos seguintes resultados: desses livros, apenas dois sugeriram o uso de tecnologia (no caso o computador) para desenvolver as atividades no ensino de corpos redondos.

Deste modo, o autor concluir que os “livros destinados ao Ensino Médio, contrariamente ao que recomendam os documentos oficiais, e o relevante papel que indicam as pesquisas em Educação Matemática, a tecnologia pouco se faz presente” (p. 135,2018).

O pesquisador RESENDE (2019), da cidade de Porto Alegre-RS, desenvolveu o trabalho de dissertação de mestrado, tendo o propósito de proporcionar uma exploração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no campo do ensino da geometria com a utilização da Realidade Aumentada (RA). O Autor foi motivado a desenvolver a pesquisa por ter um grande interesse na área da tecnologia na Educação Matemática, além das experiências, trajetória, sentimentos e afinidades tidas na vida acadêmica.

Segundo o pesquisador, a geometria é evidenciada como um dos conteúdos que apresentam mais dificuldades para os estudantes de Ensino Médio, mas ao mesmo tempo beneficiada pelos avanços das tecnologias informatizadas. Para RESENDE (2019) o ensino de geometria não deve ser negligência em sala de aula, como se

fosse algo banal sem valor, pelo ao contrário, deve ser dado valor à geometria devido a sua grandeza e contribuição na história e principalmente da matemática que conhecemos hoje.

Ainda neste contexto, o pesquisador afirma que os livros didáticos aponto a geometria como fatos e que as definições, propriedades e fórmulas estão atrelados a ela sem que se haja uma explicação para tal conhecimento. De acordo com autor, a reconstrução do aprendizado da geometria espacial requer um grande esforço em diferenciar as práticas educativas com o intuito de potencializar esses conhecimentos da geometria.

Uma das dificuldades que RESENDE (2019) vivenciou com os alunos são as poucas percepções do espaço e forma das figuras tridimensionais em perspectiva. Com esta questão, o pesquisador sugere “uma possível alternativa no processo educativo com conceitos de geometria espacial seria utilizar recursos tecnológicos no intuito de ultrapassar esse obstáculo na aprendizagem” (p. 25, 2019).

Para a realização da produção dos dados da pesquisa, Resende (2019) usou-se do caderno de anotações (diário de bordo) para a organização e produção de reflexões; observações diretas dos acontecimentos no ambiente investigado; questionário aplicado aos sujeitos da pesquisa durante a realização das atividades propostas.

O conjunto de participantes da pesquisa é constituído por estudantes do Ensino Médio de uma escola particular do município de Porto Alegre do estado do Rio Grande do Sul. Preservando os participantes da pesquisa, o investigador preferiu identificá-los e classificá-los como: E1, E2, E3 e assim por diante, isto é, Estudante 1, Estudante 2, Estudante 3 e etc.

Desenvolvimento do aplicativo de RA ocorreu por meio da linguagem de programação C#5 e o software Unity 3D6 e disponibilizado no Play Store para os alunos baixarem. O Autor usou a Análise Textual Discursiva (ATD) como método de análise dos dados obtidos na pesquisa, este método constituiu-se de três etapas: desmontagem dos textos ou unitarização; estabelecimento de relações ou categorização e captando o novo emergente ou criação de metatextos (RESENDE 2019).

Na pesquisa, o investigador distribuiu os materiais didáticos para cada estudante da turma do ensino médio contendo os exercícios propostos. Esse material possuía três exercícios sobre dois conteúdos de geometria espacial: sólidos de revolução e poliedros. Em um dos exercícios, “os estudantes foram provocados a fazer esboços de sólidos de revolução gerados por uma forma geométrica plana por meio da interação com aplicativo que permitia uma experiência em RA com os objetos de duas e três dimensões” (RESENDE, p. 61, 2019).

Neste sentido, o pesquisador percebeu que os estudantes destacaram que no momento do uso do aplicativo foi possível verificar como um sólido de revolução é gerado, notou-se que “Nos exercícios de desenho.” (E18) foi perceptível compreender a formação de um sólido de revolução (RESENDE, p. 78, 2019).

Portanto, dentre as conclusões do autor, penso como exemplo uma das frases dos participantes da pesquisa, que as visualizações oriundas dos smartphones durante as atividades vinculadas com a geometria ajudaram “facilitando a visualização do sólido dando a visão em três dimensões do sólido”, dificuldades que o aluno tinha.

A pesquisadora Oliveira (2012), professora desde a década de 90, no estado de Minas Gerais, que dava aula para ensino fundamental e médio, observou que seus alunos do 2º e 3º ano do ensino médio, tinham muitas dificuldades no assunto de Geometria Espacial, especificamente, sobre os sólidos geométricos. Segundo Oliveira (2012), seus colegas de trabalho e ela notaram que os alunos não tinham uma boa noção de geometria plana, por isso a dificuldade de acompanhar o assunto de Sólidos Geométricos.

Neste contexto, a pesquisadora começou a questionar, se os conceitos de Geometria Plana que deveriam ter sido construídos no ensino fundamental não ficaram sedimentados e se esses conceitos são de suma importância para o ensino de sólidos geométricos, o que fazer para resgatá-los? Para Oliveira (2012), a geometria é um conhecimento que ajuda a estruturar o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, dando ao aluno habilidades de examinar, estabelecer relações e compreender o espaço a sua volta.

Apesar disso, não é que se ver, por exemplo, nos livros didáticos a devida dedicação para o ensino de geometria nos anos iniciais do fundamental, onde o aprendizado fica falho, fragmentado, pontual e descontextualizado da realidade do aluno, constata a autora. Então Oliveira (2012) faz uma das questões de pesquisa:” como ressignificar, nas aulas de sólidos geométricos, os conceitos básicos de geometria plana, que deveriam ter sido construídos no ensino fundamental?” (p. 33).

Para sanar esta questão, a autora aproveitar-se da “Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele”, em resumo, a teoria diz que o pensamento geométrico é desenvolvido, pelo sujeito, em cinco níveis sequenciais, tais como, reconhecimento, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Para tanto, Oliveira (2012) afirma que instruções e linguagem não devem se um nível muito alto para o aluno, haja vista que, podem inibir a aprendizagem, sendo esse um dos motivos que causam o fracasso no ensino.

Sobre a metodologia adotada pela pesquisadora, ela fez uma avaliação do conhecimento prévio e do nível de pensamento em geometria dos sujeitos de pesquisa. Observando-a o contexto e os sujeitos, utilizou-lhe os seguintes instrumentos: Teste de Sondagem (Conceitos Básicos de Geometria Plana) e o teste de Van Hiele.

Neste sentido, Oliveira (2012) constatou no processo de avaliação que os alunos lidam precariamente com assuntos sobre ângulos e posição relativa entre as retas (perpendiculares, paralelas e transversais), definição de círculo e as terminologias dos temas. Tendo vista que, estes pontos são de suma importância para o ensino de corpos redondos.

Visando essas dificuldades encontradas no aluno e pensando no resgate de conteúdo obscurecidos, a pesquisadora interveio com um caderno de atividade elaboradas (em módulos) no formato de uma Cartilha, com instruções para o professor. Vale ressaltar o primeiro módulo da cartilha, que aborda o conhecimento Tridimensional, tendo como objetivo fazer com que o aluno, do 2º ano do Ensino Médio, tenha o primeiro contato com os Sólidos Geométricos, identificando-os, agrupando-os e classificando-os. Já no módulo 2, a pesquisadora fez a relação das figuras geométricas com as figuras planas geradas por elas (OLIVEIRA, 2019).

Portando, a pesquisadora conclui seu trabalho de dissertação de mestrado respondendo à questão norteadora, “está em cada um dos módulos de atividades que compõem o produto final dessa pesquisa, a cartilha”; reforça que o material é uma proposta metodológica e um tutorial que auxilie o professor em sala de aula (OLIVEIRA, 2019).

A pesquisadora Viana (2015), realizou seu trabalho em questões de geometria espacial constantes de avaliações feitas em larga escala e analisou desenhos de planificação de figuras geométricas tridimensionais tais como, paralelepípedo, pirâmide, prismas, cilindros e cones.

Em sua disposição estavam 842 alunos do 9º ano do fundamental e 3º ano do ensino médio, baseando na abordagem piagetiana acerca da construção das noções projetivas relativas à construção do espaço representativo, formando categorias de análise referentes a níveis de desenvolvimento dessas noções.

Segundo Viana (2015), as provas de avaliações de Matemática em larga escala, feita por órgãos governamentais, podem ser achar diversas questões referentes à noção em geometria espacial. Em sua grande parte, solicita-se que o aluno identifique a planificação correta de uma figura geométrica tridimensional, por exemplo a do cone.

Não obstante, a pesquisadora afirma que documentos governamentais sugerem uma experiência com objetos do espaço, porém como levar o aluno a observar as formas geométricas presentes nos elementos naturais; comparar objetos do espaço físico; reconhecer objetos geométricos; perceber semelhanças e diferenças entre eles; construir e representar formas geométricas (VIANA 2015).

Ainda mais, espera-se que o aluno do 3º ensino médio domine os conhecimentos sobre corpos redondos; que tenham habilidades para interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações propriamente dito, cortes e desenhos e utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações do cotidiano ou do dia a dia (VIANA 2015).

No entanto, alunos do ensino fundamental, médio e até no ensino superior mostram terem dificuldades para resolverem questões que tenham relação com conceitos e aos desenvolvimentos de habilidades geométricas, como por exemplo, aluno de ensino médio confunde polígonos com poliedros e alunos do fundamental tem dificuldade em reconhecer figuras espaciais (VIANA 2015).

Neste sentido, a pesquisadora formula sua questão norteadora, se “é possível avaliar, por meio de desenhos de planificação apresentados por estudantes ao final do ensino fundamental e do médio, se estes identificam propriedades das figuras geométricas espaciais mais comuns?” (VIANA, p. 845, 2015).

De acordo com a pesquisa Viana (2015), as matrizes de referência utilizadas por alguns sistemas de avaliação, foi observado no bloco Geometria/espaço e forma, descritores relativos à geometria espacial. Foi possível observar que vários descritores recomendam o assunto de planificação como forma do aluno identificar as figuras espaciais, bem como suas propriedades, definições e relações.

Ainda neste contexto, a pesquisadora constatou nas provas as questões que apresentam a planificação, em perspectivas, como forma de avaliar as identificações das figuras geométricas, como por exemplo o cone; porém o aluno tem de movimentar mentalmente os objetos em várias perspectivas (VIANA, 2015).

Para Viana (2015), a maioria das atuações feitas por alunos em tarefas de ensino de geometria espacial solicitam a habilidade de formar imagens mentais, manter essas imagens, inspecioná-las, acrescentá-las, modificá-las e relacioná-las com outras figuras geométricas como referencial.

No procedimento metodológico, a pesquisadora aplicou, individualmente o instrumento de sua pesquisa, onde os alunos tinham que desenhar, com auxílio de papel e lápis, as planificações das figuras geométricas, poliedro e corpos redondo, em perspectivas.

Para analisar os desenhos de planificação, foram criadas cinco categorias indicando níveis crescentes que refletem a qualidade das representações. No primeiro nível a autora constatou que certos desenhos estavam decifrados, com poucas perspectivas para fazer as movimentações para formar a figura sólida. No segundo nível foi verificado que os sujeitos conseguiam fazer as superfícies laterais dos cilindros e cones, mas não as formas corretas dos retângulos e setor, respectivamente; segundo Viana (2015) os círculos parecem “enterrados” na superfície lateral

dessas figuras. Nos restantes dos níveis a pesquisadora percebeu que os sujeitos teriam dificuldades para formularem os conceitos e formas das figuras geométricas.

Portanto, Viana (2015) conclui que entre os assuntos, os corpos redondos, o cilindro é planificado erroneamente por boa parte dos sujeitos, inclusive os do ensino médio. Porém, de todas as figuras geométricas, o cone foi o que a mais demonstrou ser difícil para os sujeitos, já que é alta a soma entre a frequência relativa às planificações de Nível 1 e àquele referente aos que não responderam à questão (83% para o ensino fundamental e 71,8 para o ensino médio).

CONCLUSÕES

Portanto, durante o levantamento das bibliografias no estudo da arte observamos uma certa dificuldade e carência para encontrarmos pesquisas e trabalhos que abordassem o assunto de corpos redondos dentro do ensino da Geometria Espacial. Os desafios são grandes no ensino da matemática.

Porém, os trabalhos levantados até aqui foram satisfatórios e contribuíram para o trabalho final que no caso é a nossa dissertação de mestrado que tem como objetivo produzir um produto educacional sobre o ensino de corpos redondos com auxílio do geogebra.

REFERÊNCIAS

Ensino Médio, Geometria E A Presença Das Tecnologias. *Novas Tecnologias na Educação*, CINTED-UFRGS, V. 16, Nº 2, p. 127-137, dezembro, 2018.

DOS SANTOS RODRIGUES, D.; TERESA KAIBER, C. A Geometria Espacial no Ensino Médio: contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA). *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 12, n. 28, p. 149-167, 11 dez. 2019.

NOGUEIRA, Fernanda. **Uma Experiência no ensino de geometria espacial no terceiro ano do ensino médio**. Orientador: Orlando dos Santos Pereira. 2014. 61f Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2014.

OLIVEIRA, Ricardo Benedito de. Geometria Espacial: Um Estudo De Pesquisas Que Tratam De Corpos Redondos. **22º Encontro Iniciação Científica**, PUC-São Paulo, 2014. Disponível em:
<http://www4.pucsp.br/ic/22encontro/artigos-premiados-21ed/RICARDO-BENEDITO-DE-OLIVEIRA.pdf>

OLIVEIRA, Mariângela de Castro. **Ressignificando o conceito de geometria plana a parti do estudo de sólidos geométricos**. Orientadora: Eliane Scheid Gazire. 2012. 279f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

RESENDE, Bruno. **A aprendizagem da geometria espacial potencializada por meio de um aplicativo de realidade aumentada na perspectiva do mobile learning**. Orientadora: Thaísa Jacinthor Muller. 2019. 149f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

SANCHEZ, Jéssica Barbosa dos Passos. **Mapeamento da Pesquisa Acadêmica Brasileira sobre Geometria Espacial: Período de 2007 a 2017**. Orientador: Saddo Ag Amouloud. 2018. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciência Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

VIANA, Odaléa Aparecida. Avaliação dos desenhos de planificação de figuras geométricas no ensino básico. *Est. Aval. Educ.*, São Paulo, v. 26, n. 63, p. 838-871, novembro. 2015.



ESPIRAL DE TEODORO: DESCOBRINDO A SOMATORIO DA ÁREA

Cordeiro Junior, Fernando Augusto Cunha, fernando-jr@live.com¹

Alves, Fábio José da Costa, fjca@uepa.br²

¹Universidade Estadual do Pará

²Universidade Estadual do Pará

Resumo: *Ao longo da história a matemática vem contribuindo bastante no avanço da humanidade, assim como os números vem se desenvolvendo no decorrer das atividades do homem. O presente trabalho tem como intuito contribuir para o estudo e pesquisa sobre o assunto da espiral de Teodoro, bem como os números irracionais. Este trabalho aborda no seu desenvolvimento dois pontos, o primeiro contexto histórico que se deu o surgimento e avanço dos números, em especial, irracionais e o segundo abordamos e demonstramos nosso método de calcular uma sequência com números de raízes quadradas perfeita e não perfeita. Referenciamos outros trabalhos que abordam este assunto tanto no Brasil como em outros países. Nosso resultado foi entregar um método inovador na área da matemática.*

Palavras-chave: *Espiral de Teodoro, Espiral Pitagórico, Somatório, Irracionais.*

INTRODUÇÃO

Durante as passagens que tivemos em sala de aula como aluno e, agora, pesquisadores, reparamos que a matemática é um dos grandes desafios e visto como uma das matérias mais difíceis para os alunos. Por outro lado, um dos assuntos mais sensacional da matemática são os números irracionais, pois neste conjunto temos: o PI e número de ouro, este último muito usado nas grandes obras de arte, visto como o número da beleza.

Nesse contexto, o que nos impressiona é a complexidade desses números que muito era discutido por haver uma ideia limitada, somente, na ideia de números inteiros e racionais. Mas a humanidade desenvolveu e problemas foram surgindo, como no caso da raiz quadrada de 2, era ela natural, inteiro ou racional? Como definir sua comensurabilidade?

Mediante as essas perguntas, outra chama atenção, é possível somar raízes quadradas de números primos? Pois números primos recai no conjunto das raízes quadradas não perfeitas. No entanto, com os números primos não são possíveis de fatora, pois esse é um dos métodos de chegar ao valor das raízes quadradas. Nesse ponto, nos deparamos com uma figura da Espiral de Teodoro, que mostra uma sequência de triângulos retângulos com valores de raízes quadradas de 1 a 17.

Levantadas essas questões, nosso objetivo é formular um método para calcular a soma da área desses triângulos, porém, para além da raiz quadrada de 17.

1. UM BREVE HISTÓRIA DA INCOMENSURABILIDADE DOS IRRACIONAIS

Neste momento iremos abordar o contexto histórico dos números irracionais e na segunda parte iremos demonstrar e desenvolver o método para calcular a área da Espiral de Teodoro.

Para Rocha (2018), a humanidade sempre teve necessidades ao longo da história, dentre elas a ação de medir e contar, que foram fatores importantes e decisivos para o avanço dos conhecimentos envolvendo os números que conhecemos atualmente.

O desenvolvimento dos povos antigos, com destaque aos povos que viviam na Mesopotâmia (3000 a.C.), em áreas específicas que trabalhavam na agricultura e comércio, impulsionaram o desenvolvimento de cálculos e a utilização de símbolos para representar os números, segundo Rocha (2018), quando foi se tendo a noção de número racional.

Neste ponto, Boyer (1996) e Eves (2004) afirmam que a notação moderna das frações que conhecemos hoje, - Fibonacci (c.1170-1250) foi um dos que começou a usá-la, tem relação com os hindus e árabes. Aos hindus pelo sistema decimal adotado, aos árabes a barra horizontal separando o numerador do denominador.

Segundo Souza e Santa Ana (2021), os egípcios e os babilônicos foram os que mais aplicaram a matemática na prática do cotidiano, aqueles destacaram-se no uso de certas técnicas de cálculo do perímetro da circunferência através do diâmetro e do número 3, (uma certa concepção do PI). Vale ressaltar que o estudo dos números irracionais, como o valor de PI, se deu na antiga Grécia.

Nesse contexto, a descoberta da incomensurabilidade pelos gregos trouxe à tona os números irracionais e um grande discurso dos pensamentos pitagóricos da época, pois eles defendiam que tudo era explicado com número, em termos de arithmos, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, em outras palavras, nas propriedades de números inteiros e razões (LOPES; SÁ, 2018).

Sobre essa descoberta supracitada, ela pode ser definida da seguinte forma: Duas grandezas são incomensuráveis quando não existe uma unidade comum à medição delas, ou seja, dois segmentos A e B dizem-se comensuráveis se são múltiplos de um segmento comum. Em outras terminações, A e B são comensuráveis se existir um segmento C de medida u, escolhido como unidade de medida, e se existirem inteiros positivos m e n tais que $A = mC$ e $B = nC$, então A e B são múltiplos do segmento comum C.

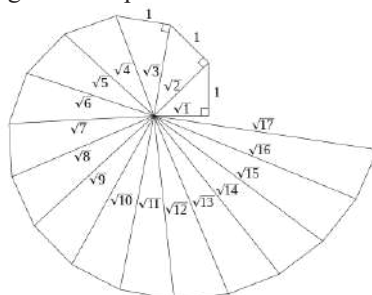
Para Sobrinho Filho (2015) e Rocha (2018), o primeiro a provar a existência dos números irracionais foi o pitagórico Hipaso de Metaponto (Filósofo pré-socrático, nascido em torno do século V aC), quando estudava problemas relacionados as diagonais de um pentágono regular.

De acordo com Lopes; Sá (2018), existem dois caminhos que levaram os gregos à grandeza dos números incomensurável na descoberta do número $\sqrt{2}$, o primeiro caminho é o geométrico e o segundo o aritmético.

1.1 A Questão Das Raízes No Intervalo Dos Inteiros

Neste momento vamos abordar a questão desta pesquisa, como podemos somar uma sequência de raízes quadradas com o radicando pertencendo ao conjunto dos números inteiros positivos (\sqrt{a} , $a \in \mathbb{Z}$). Conforme a imagem abaixo, nosso intuito é chegar a um valor próximo da área da espiral em qualquer intervalo.

Figura 1 - Espiral de Teodoro

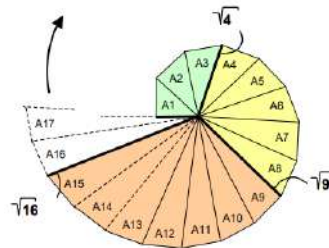


Segundo Gonçalves Junior (2015), Teodoro foi o autor da famosa espiral, onde ele demonstrou, nos triângulos retângulos, 17 raízes quadradas, tentando evidenciar que existem outros irracionais, além do já conhecido $\sqrt{2}$.

Muitos estudiosos se perguntam por que Teodoro não prolongou a espiral, alguns afirmam que ele já tinha definido muito bem as estruturas com elementos bem demonstrados e que o próximo triângulo, $\sqrt{18}$, vai subpor ao primeiro e que também dar para reduzir nas estruturas anteriores, ou seja, $\sqrt{8} = \sqrt{17} + \sqrt{1}$.

Não se sabe ao certo qual era a intenção de Teodoro, porém Gonçalves Junior (2015), afirma que a espiral de Teodoro abre um leque de estudos. A pesquisador alemão Hahn (2007) evidenciou vários temas provenientes da espiral, que mais nos chamou atenção, foram as expressões para tentar calcular a área da espiral.

Figura 2 - Áreas da Espiral de Teodoro



Fonte: Hahn 2007

Para determinar a área da espiral, Hahn (2007) inicia com a seguinte preposição [1]:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{S(M+1)}{S(M)} = 1 \text{ para } S(M) = \sum_{n=M^2}^{M^2+2M} A_n$$

A Demonstração: considera-se a função $g(n) = A_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$. De acordo com a “fórmula de soma de Euler” obtendo:

$$\sum_{n=1}^N g(n) = g(1) + \int_1^N g(x) dx + \int_1^N (x - [x])g'(x) dx.$$

Daí obtém-se:

$$(1) \sum_{n=M}^N \frac{\sqrt{n}}{2} = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{M-1}^N + \frac{1}{4} \int_{M-1}^N (x - [x])x^{-\frac{1}{2}} dx,$$

e o termo de erro é limitado de cima por

$$\frac{1}{4} \int_{M-1}^N x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[x^{\frac{1}{2}} \right]_{M-1}^N.$$

Usando a definição

$$T(M) = \sum_{n=M^2+1}^{(M+1)^2} A_n = \frac{1}{2} \sum_{n=M^2+1}^{(M+1)^2} \sqrt{n}$$

De $S(M) = T(M) - \frac{1}{2}$ obtemos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{S(M+1)}{S(M)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{T(M+1)}{T(M)}.$$

Agora, levando em consideração o ponto (1)

$$T(M) = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{M^2}^{(M+1)^2} + c = \frac{1}{3} (M+1)^3 - M^3 + c$$

Onde o erro é

$$c \leq \frac{1}{2} \left[x^{\frac{1}{2}} \right]_{M^2}^{(M+1)^2} = \frac{1}{2}$$

1.2 Método de soma finita para a série das raízes quadradas

Observe a mesma imagem acima, podemos ver que as sequências das áreas $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, \dots, A_n$, têm, respectivamente, relação com as sequências das raízes quadradas $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \dots, \sqrt{n}$. Podemos ver que nessa sequência entre as duas primeiras raízes quadradas perfeitas ($\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{4} = 2$) temos duas raízes não perfeitas ($\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$).

Neste sentido, no próximo intervalo de raízes quadradas perfeitas ($\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$), temos quatro raízes não perfeitas. Se seguimos essa lógica para n-ésimo termo, podemos chegar na consequente série entre cada intervalo de duas raízes perfeitas: $\sqrt{(n^2)}, \sqrt{(n^2 + 1)}, \dots, \sqrt{(n^2 + 2n)}, \sqrt{(n+1)^2}$, onde o número de termos das raízes não perfeita é igual a $2n$.

Neste ponto, iremos demonstrar um processo para calcular, a priori, a série nesse intervalo entre duas raízes perfeitas. Antes de mais nada, vamos usar uma fórmula (1) conveniente criado por nós.

Temos a seguinte fórmula (1) para determinarmos aproximação de qualquer raiz quadrada \sqrt{a} , $a \in \mathbb{N}^*$, onde b^2 (o menor quadrado perfeito mais próximo de \sqrt{a}), ou seja, b é uma raiz quadrada perfeita.

$$(1) \sqrt{a} = \sqrt{(b^2 + c)} \cong \frac{2b^2 + b + c}{2b + 1}$$

Para comprovarmos essa expressão, elevaremos ao quadrado os dois lados da expressão

$$(\sqrt{(b^2 + c)})^2 = \left(\frac{2b^2 + b + c}{2b + 1}\right)^2 \rightarrow (b^2 + c) = \frac{(2b^2 + b + c)^2}{(2b + 1)^2}$$

Fazendo as contas e simplificando, chegamos na seguinte conclusão

$$(2) c \cong 2b + 1.$$

Perceba-se que, quando mais o valor de $2b + 1$ se aproxima de c , mais exato será o valor para \sqrt{a} . Vejamos então, quando o valor de $2b+1$ chega ser igual a c , temos o valor exato da raiz quadrada. Fazendo a substituição numérica (2) em (1), isto é:

$$\sqrt{(b^2 + c)} \rightarrow \sqrt{(b^2 + 2b + 1)} \rightarrow \sqrt{(b + 1)^2} = b + 1. \quad \text{Q.e.d}$$

Logo $b+1$ é um quadrado perfeito, assim concluímos a prova.

Nesse segundo ponto, voltaremos a questão da soma das raízes quadradas não perfeitas dentro do intervalo supracitada.

$$S_n = \sum_{i=n^2+1}^{n^2+2n} \sqrt{i}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vejamos para $n=1$, temos $\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{1^2 + 2.1} = 3,146264$. Para $n=2$ temos $\sqrt{2^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 2} + \sqrt{2^2 + 3} + \sqrt{2^2 + 2.2} = 10,1597361\dots$. Utilizando a fórmula (1) na série para $n=1$, temos

$$\sqrt{1^2 + 1} \cong \frac{2.1^2 + 1 + 1}{2.1 + 1} = \frac{4}{3}, \sqrt{1^2 + 2} \cong \frac{2.1^2 + 1 + 2}{2.1 + 1} = \frac{5}{3}$$

Onde $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$. Para $n=2$, temos:

$$\sqrt{2^2 + 1} \cong \frac{2.2^2 + 2 + 1}{2.2 + 1} = \frac{11}{5}, \sqrt{2^2 + 2} \cong \frac{2.2^2 + 2 + 2}{2.2 + 1} = \frac{12}{5} \rightarrow$$

$$\sqrt{2^2 + 3} \cong \frac{2.2^2 + 2 + 3}{2.2 + 1} = \frac{13}{5}, \sqrt{2^2 + 2.2} \cong \frac{2.2^2 + 2 + 4}{2.2 + 1} = \frac{14}{5}$$

Aonde $\frac{11}{5} + \frac{12}{5} + \frac{13}{5} + \frac{14}{5} = \frac{50}{5} = 10$.

Podemos generalizar S_n

$$\sum_{i=n^2+1}^{n^2+2n} \sqrt{i} \cong \frac{2n^2 + n + 1}{2n + 1} + \dots + \frac{2n^2 + n + 2n}{2n + 1} \rightarrow \frac{2n.2n^2 + 2n.n + n.(2n + 1)}{2n + 1} = \frac{4n^3 + 4n^2 + n}{2n + 1} = 2n^2 + n$$

Portanto

$$(3) \sum_{i=n^2+1}^{n^2+2n} \sqrt{i} \cong 2n^2 + n \quad \text{q.e.d}$$

Foi verificado em calculadoras modernas que número muito alto para n , em S_n , o valor decimal da soma chega próximo de $0,1666666\dots$, do qual podemos concluir que o erro é menor que $\frac{1}{6}$. Ao contrário do método de Hahn (2007) que seu erro é menor que $\frac{1}{2}$.

Nesse último momento iremos desenvolver a etapa final do nosso método para calcular área da espiral de Teodoro. Sabemos que a soma das raízes não perfeitas que estão entre duas raízes perfeitas é próxima de $2n^2 + n + \frac{1}{6}$, então podemos generalizar para toda \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{i}, \forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \sum_{i=1}^{n=p^2+2p} 2p^2 + 2p + \frac{1}{6} =$$

$$= 2 \left[\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} \right] + \frac{p}{6} = \frac{2p(p+1)(2p+1) + 6p(p+1) + p}{6}$$

$$= \frac{4(p^2 + 2p)(p+1) + p}{6} = \frac{4n(p+1) + p}{6}$$

Resolvendo $n = p^2 + 2p$, igualando a equação a zero, chegamos na seguinte resposta, $p = \sqrt{(n+1)} - 1$.

Ou seja,

$$\frac{4n(p+1)+p}{6} = \frac{4n(\sqrt{n+1}) + \sqrt{(n+1)} - 1}{6} = \frac{(4n+1)\sqrt{(n+1)} - 1}{6} \quad q.e.d$$

CONCLUSÕES

Figura 3 - Fórmula Geral da Série das raízes quadradas

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{i} \cong \frac{(4n+1)\sqrt{(n+1)} - 1}{6}$$

Portanto, esta é a fórmula final desenvolvida por nós neste trabalho, onde o erro de aproximação é menor que 0,01. Sobre nossa pergunta de pesquisa, concluímos que para calcularmos as áreas dos triângulos retângulos da Espiral de Teodoro, basta aplicarmos a fórmula da área do triângulo retângulo para todos os triângulos da espiral, então

Figura 4 - soma das áreas dos triângulos da Espiral

$$A_n = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{2} \cong \frac{(4n+1)\sqrt{(n+1)} - 1}{12}$$

Este método é bem mais simples de definimos esses somatórios com valores que eram difíceis de chegar com uma precisão boa. Sobre o erro de aproximação, ela é prevista, haja vista que nós estamos somando valores que são incomensuráveis, no caso das raízes quadradas não perfeitas, porém as transformamos em valores comensuráveis para facilitar nossas demonstrações.

Contudo, esperamos que esse método venha ajudar nos estudos sobre a Espiral de Teodoro, também em outras áreas da ciência, onde percebemos em artigos de outros países que este assunto é muito estudado e dada grande atenção.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Edgar Bluncher, 1996. 496 p.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 4. ed. Campinas: Unicamp, 2004. 843 p.

GONÇALVES JUNIOR, Eduardo Manuel. Aspectos computacionais na geometria da espiral de Teodoro. 2015. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

LOPES, A. C. M.; SÁ, P. F. de. NÚMEROS REAIS: ASPECTOS HISTÓRICOS. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v.3, n.9, p.79-90, 2018. Disponível em: <https://www.revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56>. Acesso em: 22 fev. 2022.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFGM, 2013.

ROCHA, Rute Ribeiro Meireles. Sensibilização para existência e dos números Irracionais. 2018. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica - RJ, 2018.

SOBRINHO FILHO, José Souto. O surgimento dos números irracionais. 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SOUZA, J. L. de; SANTA ANA, M. de F. . O ENSINO DA MATEMÁTICA E OS NÚMEROS IRRACIONAIS. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 7, p. 1352-1362, 2021. DOI: 10.51891/rease.v7i7.1790. Disponível em: <https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/1790>. Acesso em: 22 fev. 2022



UMA ADAPTAÇÃO AO MÉTODO GELOSIA

Reis, Adriano Rui Pinto dos, drikobarone@gmail.com¹
Nascimento, Rúbia Gonçalves, rubia@ufpa.br²
^{1,2}Universidade Federal do Pará

Resumo: O algoritmo usual da multiplicação que é ensinado na Educação Básica é utilizado efetuando-se o produto de cada dígito do multiplicando por cada um do multiplicador e, em seguida, soma-se adequadamente todos os resultados. Este método requer memorização dos fatos básicos de multiplicação embora tenha outros algoritmos alternativos que os alunos possam achar mais interessante e descomplicado de operar em relação ao método tradicional. Neste trabalho pesquisamos sobre o método Gelosia e propomos uma adaptação a este algoritmo, a fim de que ele se torne mais prático e acessível ao discente. Realizamos uma pesquisa descritiva e verificamos que o método é realmente funcional, que adaptação ao método Gelosia é viável, que o algoritmo é analisado e descrito de maneira detalhada em relação à sua técnica de obtenção de produtos, o que impõe a constatação de que é possível criar interesse e curiosidade nos alunos do Ensino Básico sobre outros métodos alternativos de multiplicação.

Palavras-chave: gelosia, algoritmo, multiplicação, ensino.

1. INTRODUÇÃO

O algoritmo usual, geralmente, é o único a ser apresentado aos alunos do Ensino Básico, o que pode causar uma impressão de que é o único existente no estudo da multiplicação. Esta limitação pode levar o aluno a executar estratégias repetitivas e com pouca reflexão sobre o significado do método. Em muitos casos, o próprio professor não conhece ou não dá muita importância para a existência de algoritmos alternativos de multiplicação. É esperançoso que a abordagem com os diferentes procedimentos multiplicativos pode trazer uma perspectiva diferente para ser trabalhada na sala de aula, sendo uma oportunidade para que o aluno da escola básica perceba o desenvolvimento tecnológico da humanidade através de uma abordagem histórica investigativa da matemática. É neste âmbito que o aluno da educação básica terá oportunidade de encontrar ao longo do processo, meios motivacionais para o avanço da construção do conhecimento. Esta proposta tem como objetivo de analisar e descrever uma adaptação ao algoritmo de multiplicação Gelosia afim de disponibilizar este método de multiplicação aos professores e alunos do Ensino Básico.

2. O MÉTODO GELOSIA

2.1. Descrição do Método

O método exige do operador o domínio da tabuada. A simplicidade da sua aplicação é um argumento forte e convincente pelo que poderia justificar o seu uso até aos dias de hoje. Contudo, como exige a inscrição de linhas e grades, isso torna o processo menos prático (em comparação com a disposição numérica que é ensinado atualmente). A seguir, o método será detalhado através do seguinte exemplo:

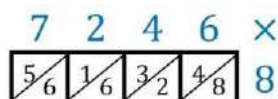
Exemplo 1: deseja-se calcular o resultado de 7246×8 .

Começando por desenhar uma tabela 1×4 , quer dizer uma linha e quatro colunas, uma vez que o fator 8 é composto por um único algarismo e o fator 7246 é formado por quatro algarismos (se dispor esta tabela em ordem contrária, 4×1 , implicará em ocupação maior de linhas para efetuar a multiplicação). Logo acima da tabela ou grade dispõe-se

horizontalmente os algarismos 7, 2, 4 e 6 na primeira, segunda, terceira e quarta coluna, respetivamente, como na figura a seguir.

Em seguida, escreve-se o algarismo 8 do lado direito (verticalmente), de modo a ficar ao lado do quadrado relativo ao algarismo 6. Traçando-se, em seguida, a diagonal do canto inferior esquerdo para o canto superior direito em cada quadrado. Multiplica-se cada par de algarismos, escrevendo o produto em cada célula. Os produtos a serem considerados na linha e da esquerda para a direita são: $7 \times 8 = 56$; $2 \times 8 = 16$; $4 \times 8 = 32$ e $6 \times 8 = 48$. Preenche-se cada quadrado com o produto correspondente de modo que o algarismo das dezenas fique na parte superior da diagonal e o das unidades na parte inferior.

Figura 1



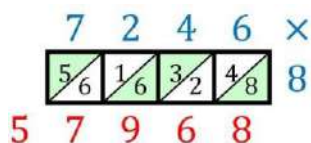
Fonte própria do autor

Utiliza-se as diagonais para indicar somas convenientes dos algarismos obtidos, registrando os resultados na parte inferior e esquerda da tabela. Deste modo, adicionando os algarismos ao longo de linhas paralelas às diagonais e começando da direita para a esquerda, obtêm-se a soma de cada posição. Da direita para a esquerda (ver figura a seguir) tem-se:

- na 1.^a linha diagonal 8 (unidades); na 2.^a linha diagonal $4 + 2 = 6$ (dezenas); na 3.^a linha diagonal $3 + 6 = 9$ (centenas); na 4.^a linha diagonal $1 + 6 = 7$ (unidades de milhar); e finalmente na 5.^a linha diagonal tem-se somente o algarismo 5 que corresponde às dezenas de milhar.

Se a soma ao longo das linhas diagonais for um número formado por dois algarismos, ou seja, um número maior ou igual a 10, registra-se apenas o algarismo das unidades e adiciona-se o das dezenas à próxima linha diagonal. Por último, recorrendo à notação posicional, escreve-se sequencialmente os algarismos relativos às somas parciais obtidas em cada linha diagonal, obtendo-se 57968.

Figura 2



Fonte própria do autor

Portanto $7246 \times 8 = 57968$

2.2. Proposta de Adaptação ao Método Gelosia

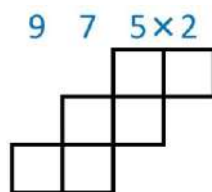
Em virtude da dificuldade em construir a grade com linhas diagonais, é apresentado aqui uma adaptação ao método Gelosia permitindo ao aluno que organize os produtos em tabelas sem linhas diagonais.

Exemplo 2: efetuar 975×2 .

Proposta:

Usa-se o dispositivo constituído de seis quadrados, sendo dois adjacentes na 1.^a linha à direita, dois adjacentes na 2.^a linha ao centro e dois adjacentes na 3.^a linha à esquerda, como na figura a seguir. Observa-se que este dispositivo possui quatro colunas pois 975 e 2 possuem ao todo quatro algarismos. Escreve-se os números 975 e 2 acima do dispositivo da esquerda para a direita, sendo que cada algarismo fica disposto em cada coluna como na figura seguir.

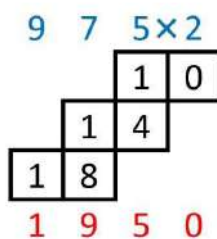
Figura 3



Fonte própria do autor

A cada linha do dispositivo registra-se o produto de cada algarismo de 975 por 2. A 1.^a linha corresponde ao produto de $5 \times 2 = 10$. A 2.^a linha corresponde ao produto de $7 \times 2 = 14$. A 3.^a linha corresponde ao produto de $9 \times 2 = 18$. Registra-se em cada quadrado começando pelo algarismo das unidades e depois dezenas. É observado que o algarismo da unidade do produto de 5 por 2 é escrito na mesma coluna do algarismo do fator 2. Os outros produtos pulam uma casa à esquerda a cada multiplicação nas linhas posteriores. Então soma-se os produtos conforme a ordem dos algarismos nos quadrados.

Figura 4



Fonte própria do autor

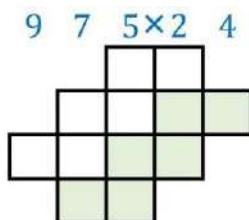
Obtém-se o resultado 1950. Apesar desta adaptação requerer mais linhas horizontais para efetuar a multiplicação, não há necessidade de se usar linhas diagonais no cálculo.

Exemplo 3: efetuar 975×24 .

Proposta:

Repete-se o dispositivo do exemplo anterior para multiplicar 975 por 2. Então é acrescentado outra grade para que seja possível multiplicar 975 por 4. É um dispositivo constituído de doze quadrados, sendo dois adjacentes na 1.^a linha, quatro quadrados adjacentes 2.^a linha iniciando na 3.^a coluna (da esquerda para a direita em relação à 1.^a linha), quatro quadrados adjacentes 3.^a linha iniciando na 4.^a coluna (da esquerda para a direita em relação à 1.^a linha) e dois adjacentes na 4.^a linha iniciando na 3.^a coluna (da esquerda para a direita em relação à 1.^a linha). Observa-se que este dispositivo possui no total cinco colunas pois 975 e 24 possuem ao todo cinco algarismos. Dispõe-se os números 975 e 24 acima do dispositivo de acordo que cada algarismo seja escrito da esquerda para a direita em cada coluna.

Figura 5

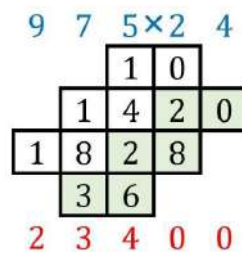


Fonte própria do autor

Efetua-se as multiplicações dos algarismos de 975 por 2 nos quadrados brancos. Mais uma vez é observado que o algarismo da unidade do produto de 5 por 2 é escrito na mesma coluna do algarismo 2 do fator 24. Os outros

produtos pulam uma casa à esquerda a cada multiplicação nas linhas posteriores. Nos quadrados verdes efetua-se as multiplicações dos algarismos de 975 por 4. A 2.^a linha corresponde ao produto de $5 \times 4 = 20$. A 3.^a linha corresponde ao produto de $7 \times 4 = 28$. A 4.^a linha corresponde ao produto de $9 \times 4 = 36$. É observado que o algarismo da unidade do produto é escrito na mesma coluna do algarismo do fator 4. A multiplicação não começa na 1.^a linha que pois os algarismos do produto da multiplicação por 4 poderiam se sobrepor ao produto da multiplicação por 2 na 1.^a linha. Em seguida soma-se os produtos conforme a ordem dos algarismos nos quadrados.

Figura 6



Fonte própria do autor

CONCLUSÕES

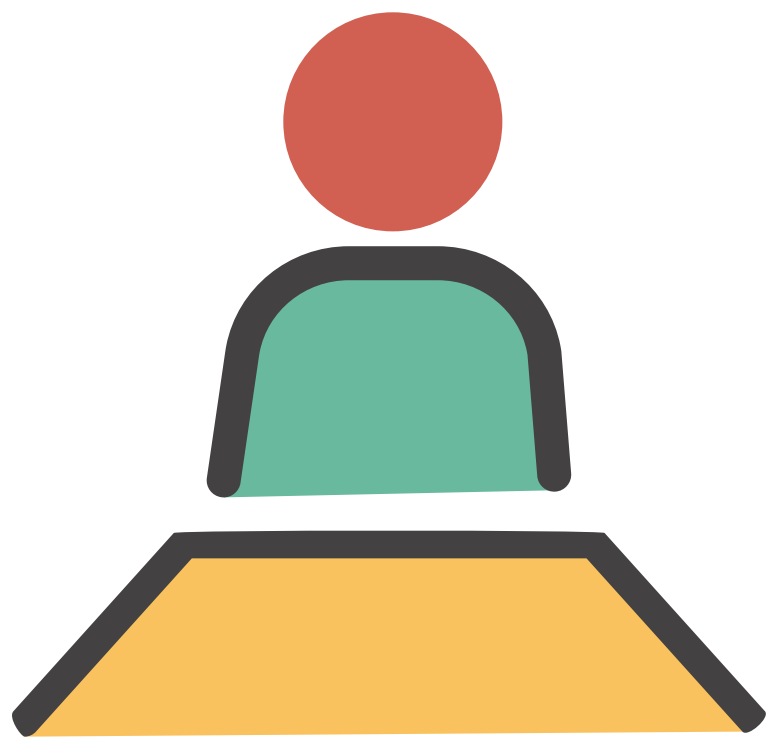
O método surpreende principalmente em relação a sua funcionalidade. Quando você efetua uma multiplicação, independente dos valores envolvidos ele sempre funciona.

O método Gelosia foi adaptado de maneira prática e ilustrada. A adaptação foi meticulosamente apresentada de maneira gradual para que tanto o professor e o aluno da Escola Básica saibam manuseá-lo pedagogicamente.

Em relação ao objetivo geral, o algoritmo foi analisado e descrito de maneira detalhada em relação a sua técnica de obtenção de produtos. Em relação aos objetivos específicos, o método foi estudado perante um contexto histórico em que era esclarecido a presença do algoritmo no cotidiano do país envolvido. A descrição de cada método foi explanada gradualmente de modo mais acessível para o aluno. A proposta adaptação do método Gelosia foi construída de maneira ilustrada e apropriada para o uso docente da Escola Básica.

REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, C.B. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**, tradução: Elza F. Gomide. 2a ed. São Paulo: Blücher, 1996.
- [2] EVES, Howard. **INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
- [3] LARA, Isabel Cristina Machado de. **ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: POSSÍVEIS ARTICULAÇÕES COM A ETNOMATEMÁTICA**. Vidya, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul./dez., 2013.
- [4] MARTINS, Maria do Carmo, **A ARTE DO MÉTODO DA GELOSIA**, Correio dos Açores, 14 de maio de 2015. Professora do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, mika@uac.pt.
- [5] ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza, **ALGORITMOS DE MULTIPLICAÇÃO: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre. Julho de 2016.
- [6] ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza, **MÉTODO GELOSIA: FACILITANDO A MULTIPLICAÇÃO**. Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Letramento e práticas interdisciplinares nos Anos Finais (6^a a 9^a Ano) como requisito parcial para obtenção do título de especialista em Letramento e práticas interdisciplinares. Dezembro, 2015.



Oficinas



FLEXÁGONOS: BRINCADEIRA, ARTE E MATEMÁTICA

ANIURA MILANÉS BARRIENTOS

03 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 Hexaflexágonos

- 1.1 O hexaflexágono de três cores
- 1.2 Um hexaflexágono de seis cores
- 1.3 Um pouquinho de história

2 Fazendo geometria com uma tira de papel

- 2.1 Como construir a tira de triângulos sem instrumentos?
 - 2.1.1 Economizando papel
 - 2.1.2 Desperdiçando (um pouquinho) de papel
- 2.2 Podemos usar uma tira que não seja reta?

Apêndices

A Tiras com triângulos equiláteros

B Uma tira não reta para montar um hexaflexágono

Referências

PREFÁCIO

Cores e desenhos aparecem e desaparecem uma e outra vez quando manipulamos os flexágonos: brinquedos de papel que, dobrados apropriadamente, revelam várias faces escondidas. Eles podem ser confeccionados usando papel, tesoura, cola e lápis de cor. Sua versatilidade surpreende e encanta a todos os que os conhecem, de crianças até adultos.

A palavra *flexágonos* vem do “verbo” *flexigar*, ou seja, manipular o brinquedo de forma que apareçam as faces escondidas. Nesta oficina convidaremos a montar vários *hexaflexágonos*, que, como o nome sugere, são flexágonos com aparência de hexágonos.

O “descobridor” desses brinquedos foi o matemático Arthur H. Stone que, enquanto estudava nos Estados Unidos e com vários ilustres colegas, dedicou um tempinho a brincar e refletir sobre os hexaflexágonos. No entanto, quem mais contribuiu para a popularização desses brinquedos foi Martin Gardner, divulgador da matemática estado-unidense cujo primeiro trabalho sobre hexaflexágonos foi [2]. No Brasil, este trabalho foi publicado no livro [1].

Há várias questões interessantes sobre os hexaflexágonos correspondentes principalmente à área da Matemática Discreta que têm sido estudadas e publicadas. Desde esse ponto de vista, eles poderiam ser considerados como *brinquedos matemáticos*.

Os hexaflexágonos também podem ser utilizados como estopim para atrair a atenção sobre questões de Matemática Básica relacionadas com sua construção. Assim, eles também podem ser considerados como material concreto para as aulas de matemática e podem ser de interesse para professoras e professores dessa disciplina.

ANIURA MILANÉS BARRIENTOS

Nossa participação na X Bienal de Matemática será uma oportunidade muito importante para divulgar esses brinquedos. Esperamos que no final da oficina você esteja feliz de tê-la assistido!

BELO HORIZONTE, JUNHO de 2022

Aniura Milanés Barrientos

HEXAFLEXÁGONOS

Vamos começar aprendendo a montar o hexaflexágono mais simples de todos.

1.1. O HEXAFLEXÁGONO DE TRÊS CORES

Corte uma tira com 10 triângulos equiláteros. Dobre a tira ao longo dos lados dos triângulos para frente e para trás. O objetivo disso é somente marcar as dobras. Coloque a tira como mostrado abaixo e rotule os triângulos da mesma forma.

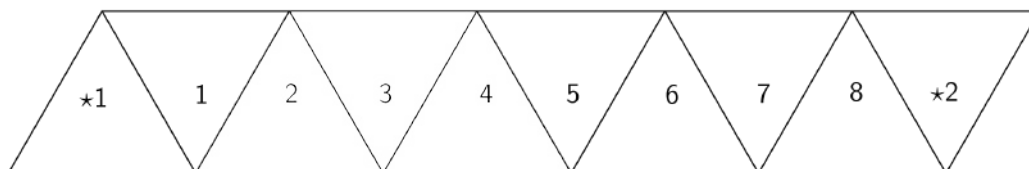


Figura 1.1: Frente da tira

Vire a tira ao longo do comprimento maior e rotule os triângulos no verso como mostrado na figura 1.2.

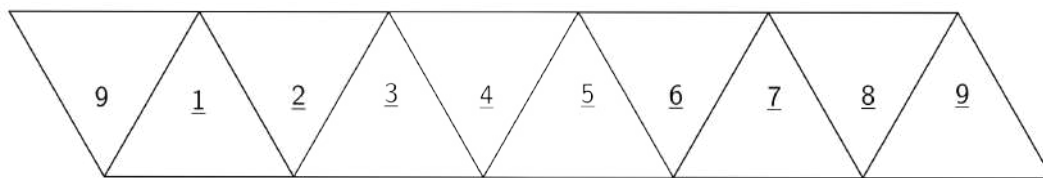


Figura 1.2: Verso da tira

A tira resultante deve ter na frente seu primeiro triângulo rotulado como $\star 1$. Os triângulos seguintes devem aparecer numerados de 1 até 8 e o último deve estar rotulado como $\star 2$. No verso da primeira aba, o triângulo deve aparecer rotulado como 9 e os restantes devem estar numerados de 1 até 9 com números sublinhados. Verifique que o triângulo de número 9 fica no verso do $\star 1$, o 1 no verso do 1, o 2 no verso do 2 e assim sucessivamente até o 8 ficar no verso do 8. Finalmente, 9 deve ficar no verso do $\star 2$.

Vamos agora montar o flexágono. Segure a frente da tira, pegando a aba com a mão esquerda e siga as instruções abaixo, manipulando a tira com a mão direita.

1. Dobre o triângulo 3 sobre o 2.
2. Dobre o triângulo 6 sobre o 5.
3. Coloque o triângulo 9 sobre o 8.
4. Cole os dois triângulos com \star .

Ao final deste processo você obterá uma figura similar à 1.3.

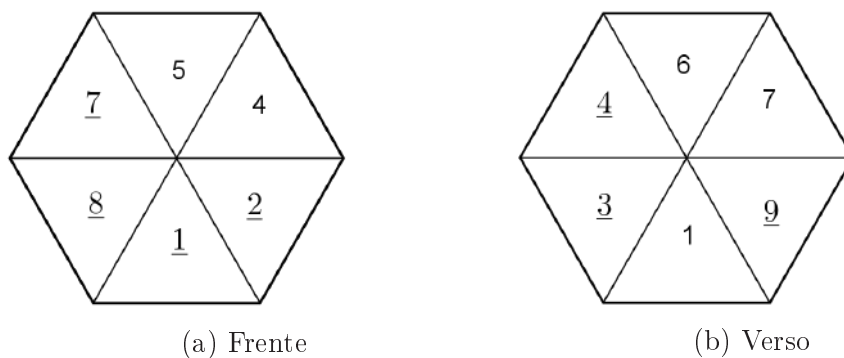


Figura 1.3: Hexaflexágono de três faces montado

Se tudo tiver dado certo, o flexágono já pode ser *flexigado*. Para isto, pressione simultaneamente as três dobras sem furos e abra a ponta central do objeto que se formou. Se isto não ficar claro, você pode ver a animação que ilustra esse processo neste artigo da Wikipedia: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Flex%C3%A1gonos>.

Repita o procedimento e cora cada face como desejar. Analise como muda o desenho de uma face quando ela passa para o verso do flexágono. Tente montar vários hexaflexágonos e fazer diferentes desenhos. É um experimento bastante interessante!



Figura 1.4: Hexaflexágonos montados por vários alunos do Coltec

1.2. UM HEXAFLEXÁGONO DE SEIS CORES

Descreveremos agora como construir um hexaflexágono a partir de uma fita com 19 triângulos equiláteros numerada como mostra a figura 1.5

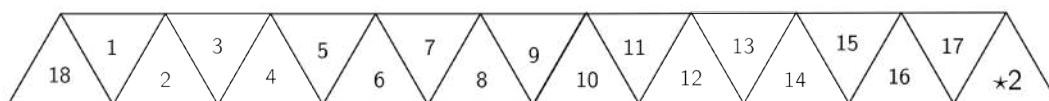


Figura 1.5: Frente da tira

e no verso como na figura 1.6.

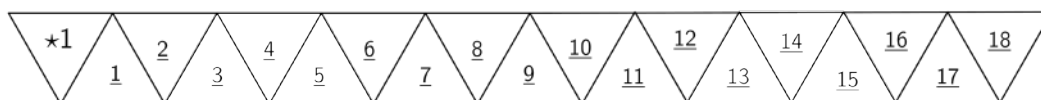


Figura 1.6: Verso da tira

Primeiro, dobre o triângulo 2 sobre o 1; o 4 sobre o 3; 6 sobre o 5; o 8 sobre o 7 e assim sucessivamente de modo que a fita ficará espiralada com um formato similar ao mostrado na figura 1.7.

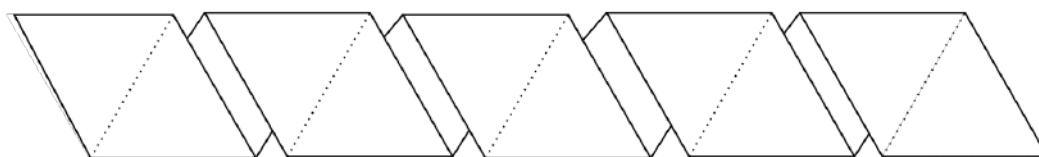


Figura 1.7: Formato da fita após enrolada

A numeração dos triângulos será como mostrado nas figuras 1.8 e 1.9.

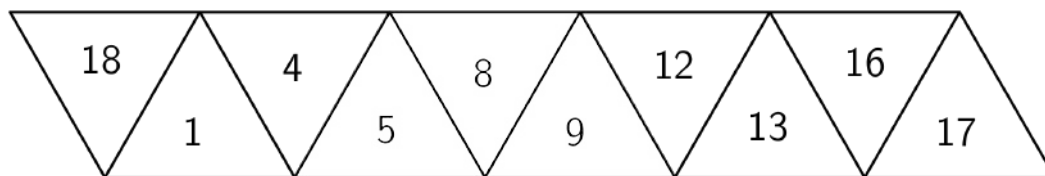


Figura 1.8: Frente da fita enrolada

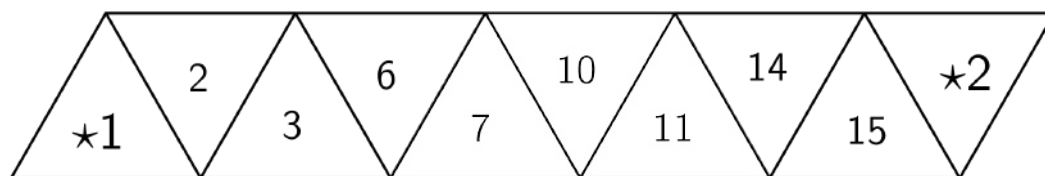


Figura 1.9: Verso da fita enrolada

Para completar a montagem do flexágono, proceda assim:

1. dobre o triângulo 6 sobre o 3;
2. dobre o triângulo 12 sobre o 9;
3. dobre o triângulo 18 sobre o 15;
4. cole as duas abas com *.

Ao final deste processo você obterá uma figura similar à da figura 1.10, na frente e no verso.

Agora pode flexigar e desenhar à vontade!

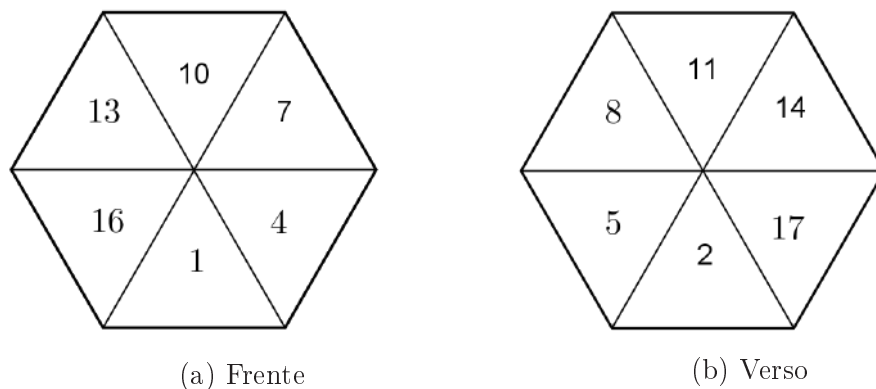


Figura 1.10: Hexaflexágono montado

1.3. UM POUQUINHO DE HISTÓRIA

Os hexaflexágonos foram inventados pelo matemático britânico Arthur Stone (1916 - 2000) em 1939, quando ele estudava na Universidade de Princeton. Para poder colocar as folhas de papel que vendiam nos Estados Unidos no seu fichário inglês, ele precisou cortar delas uma tira de papel e a partir daí, brincando com as tiras, chegou no primeiro flexágono. A partir da descoberta de Stone, 3 colegas dele: John W. Tukey (1915–2000), Richard P. Feynman (1919–1988) e Bryant Tuckerman (1915–2002) começaram a pesquisar padrões no comportamento desses brinquedos e aparentemente chegaram em vários resultados bem interessantes. Infelizmente a Segunda Guerra começou e eles nunca foram publicados, mas outras pessoas realizaram esse trabalho posteriormente.

FAZENDO GEOMETRIA COM UMA TIRA DE PAPEL

Após termos montado vários hexaflexágonos, podemos explorar algumas perguntas interessantes.

2.1. COMO CONSTRUIR A TIRA DE TRIÂNGULOS SEM INSTRUMENTOS?

Para confeccionarmos os flexágonos utilizamos tiras de papel com triângulos equiláteros desenhados sobre elas. Se não tivermos folhas com esses triângulos impressos como a que aparece no apêndice nem instrumentos como régua e compasso, como poderíamos montar essas tiras?

2.1.1. ECONOMIZANDO PAPEL

Imagine que temos uma tira de papel com um triângulo retângulo desenhado num dos extremos como ilustrado abaixo.



Figura 2.1: Tira com triângulo numa extremidade

Nesse caso poderíamos cortar o triângulo retângulo no início da tira e dobrá-la na sequência, de forma que a hipotenusa do triângulo que foi cortado se sobreponha ao lado inferior da tira.

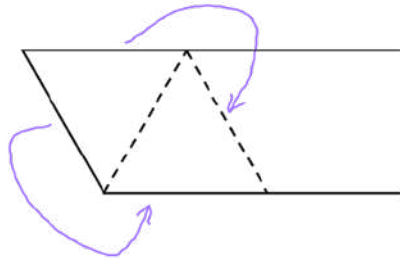


Figura 2.2: Uma maneira de dobrar os triângulos equiláteros

O triângulo demarcado pela dobra é equilátero. Você consegue explicar por quê? Como podemos continuar dobrando triângulos equiláteros?

Voltemos agora à pergunta inicial: como podemos dobrar o triângulo retângulo do início da tira como na figura 2.2?

Segue aqui uma sequência de imagens como sugestão:

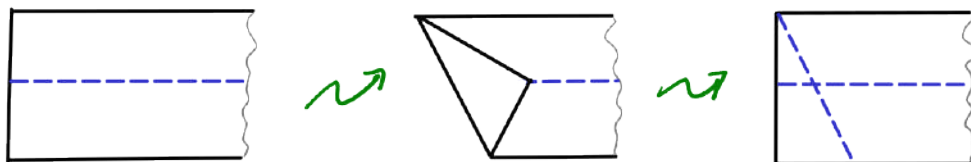
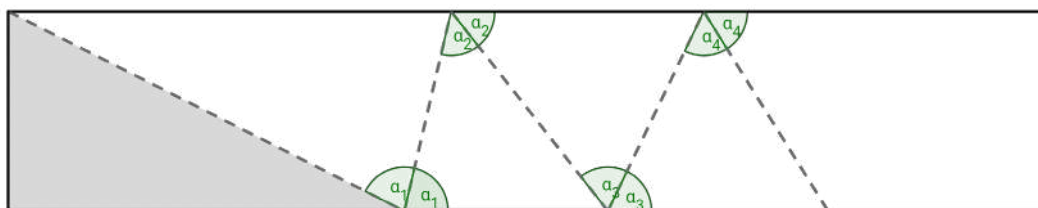


Figura 2.3: Sugestão para obter o triângulo retângulo

Por que funciona?

2.1.2. DESPERDIÇANDO (UM POUQUINHO) DE PAPEL

Suponhamos que o primeiro triângulo da tira não tem um ângulo interno de 30° mas que mesmo assim, dobramos os outros triângulos como mostra a figura a seguir.



1. Use o transferidor para verificar que as medidas dos primeiros ângulos são diferentes de 60° e verifique também que os últimos medem 60° .
2. A partir de quantos triângulos você acha que eles se tornam aceitavelmente equiláteros?
3. Quando é formado um triângulo equilátero as dobras seguintes formam outros triângulos equiláteros. Por quê?

2.2. PODEMOS USAR UMA TIRA QUE NÃO SEJA RETA?

Podemos sim! Na figura B.1 no apêndice mostramos um modelo de “tira não reta”. Com ela podemos montar um hexaflexágono. Você consegue descobrir como? Quantas cores diferentes ele poderia ter?

APÊNDICES

A

TIRAS COM TRIÂNGULOS
EQUILÁTEROS



B

UMA TIRA NÃO RETA PARA MONTAR UM HEXAFLEXÁGONO

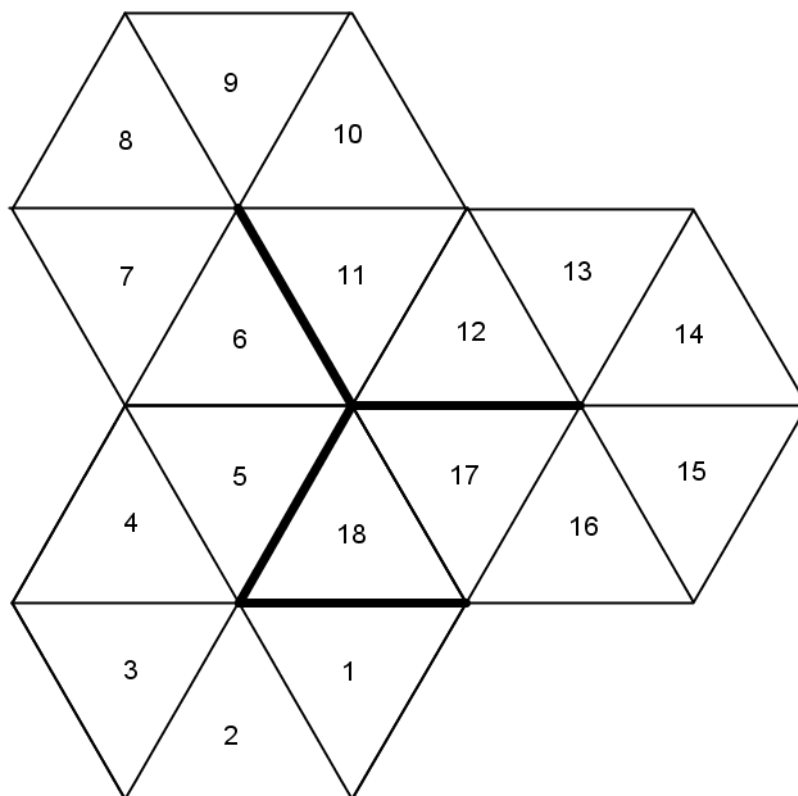


Figura B.1: Uma tira não reta para montar um hexaflexágono

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GARDNER, M. (1998). *Divertimentos Matemáticos*. Ibrasa.
- [2] GARDNER, M. *Flexagons*. Scientific American, 195, p. 162 - 166, 1956.
- [3] HILTON, P e PEDERSEN, J. (2010). *A Mathematical Tapestry: Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics*. Cambridge University Press.
- [4] JOHNSON, D. A. (1957). Paper folding for the mathematics class. University of Michigan Library
- [5] MADACHY, J. S. (1996). *Mathematics on Vacations*. Scribner.
- [6] <http://flexagon.net/>



GAMIFICAÇÃO E EXPERIÊNCIA DE FLOW EM DISCIPLINAS MATEMÁTICAS NO ENSINO SUPERIOR

ANA MARIA LUZ FASSARELLA DO AMARAL

20 A 24 DE JULHO DE 2022

Texto da dedicatória
Ao meu marido e companheiro Thiago e nossos amados filhos Matheus,
Suzana e Ana Leonor.

CONTEÚDO

Prefácio

- 1 Introdução
- 2 Experiência de Flow e Gamificação
- 3 O Uso da Tecnologia e a Metodologia
- 4 Conclusões

Apêndices

- A Exemplo de Atividade para Álgebra Linear
- B Exemplo de Atividade para Cálculo Diferencial e Integral

Referências

PREFÁCIO

A educação superior no Brasil é uma educação especializada por área do saber, onde vemos não contemplada muitas vezes a universalidade dos campos de conhecimento. Essa perspectiva de educação desconhece a interdisciplinaridade e as convergências e divergências das áreas do conhecimento. Essa fragmentação do conhecimento também está presente no ensino muitas vezes voltado exclusivamente para a aprendizagem cognitiva conceitual, que dissocia o pensar, o sentir e o fazer do educando e acaba por desprezar toda a experiência subjetiva, estética e lúdica no processo de aprendizagem.

Muitos profissionais têm se proposto a repensar a prática docente na educação superior em buscas de novos horizontes e novas práticas, procurando formar um egresso que veja toda a totalidade da sua formação, para isso é importante que ele tenha tido um ambiente favorável a um aprendizado significativo e prazeroso durante seus anos na formação superior. Nesta busca por melhorar o processo de ensino aprendizagem nesta etapa da formação educacional podemos encontrar várias referências sobre metodologias pedagógicas inovadoras também neste nível de ensino.

A presente oficina pretende contribuir mostrando como é possível o uso de uma destas práticas pedagógicas inovadoras nas disciplinas matemáticas na educação superior, no caso a gamificação aliada a outras teorias (Flow). Apresentaremos uma metodologia para se realizar uma experiência de ensino gamificado que já foi aplicada pela autora e teve seus resultados mensurados, tais atividades já foram testadas em ensino de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral e proporcionaram entre outras coisas o engajamento dos alunos, a socialização entre os indivíduos assim como enriqueceram as discus-

sões sobre os exercícios apresentados durante as atividades.

Agradeço a participação dos alunos que vivenciaram estas experiências nas minhas aulas e seus comentários sobre as atividades, assim como a Profa. Dra. Tércia Rita Davoglio da PUCRS que contribuiu com seus comentários e observações para realização da pesquisa que deu origem a esta oficina.

Niterói, junho de 2022

Ana Maria Luz Fassarella do Amaral

INTRODUÇÃO

As atividades lúdicas são inerentes ao ser humano. Luckesi, em [6], afirma que a atividade lúdica é aquela que propicia à pessoa que a vive, uma sensação de liberdade, um estado de plenitude e de entrega total para essa vivência. Viver uma experiência plena significa participar verdadeiramente de uma atividade lúdica, isto é, envolver-se por inteiro, ser alegre, flexível e saudável. Não é à toa que atividades lúdicas como a gamificação quando desenvolvidas adequadamente em sala de aula podem levar os alunos ao estado de Flow, que é um estado mental que acontece quando um pessoa realiza uma atividade e se sente totalmente absorvida em uma sensação de energia, prazer e foco total no que está fazendo. Em essência, o flow é caracterizado pela imersão completa no que se faz, e por uma consequente perda do sentido de espaço e tempo. O conceito de flow foi identificado pela primeira vez em 1975 e popularizado pelo psicólogo Mihaly Csikszentmihalyi. Pessoas entram em fluxo dançando, cantando, correndo, praticando esportes, desenhando, pintando, escrevendo, meditando, estudando, trabalhando e jogando. Em sua pesquisa inicial Csikszentmihalyi havia identificado jogos (não eletrônicos) como atividades primariamente desenhadas para obtenção de um estado de flow.

O termo gamificação compreende a aplicação de elementos de jogos em atividades de não jogos. A técnica não é nova, a palavra foi utilizada pela primeira vez em 2010, mas podemos apresentar exemplos que demonstram que o conceito já era usado há muito tempo na educação. Por exemplo, uma criança que tinha seu trabalho reconhecido com estrelinhas (recompensa) ou ditados onde as palavras iam se tornando cada vez mais difíceis de serem soletradas (níveis adaptados às habilidades dos usuários). São exemplos simples que

mostram como muitos de nós já testemunhamos atividades gamificadas. A novidade em relação à este tema reside na compreensão maior do processo e da sua relevância para a educação assim como a responsabilidade em sua aplicação.

Esta oficina não pretende sugerir que a prática da gamificação é preferível em detrimento de outras estratégias pedagógicas de ensino. Trazemos esta estratégia como exemplo de uma atividade lúdica que pode levar os alunos a um estado de Flow, e esperamos que outros professores queiram adotar esta estratégia cientes que a emoção interfere no processo de retenção de informação, logo promovendo uma aprendizagem associada ao prazer e ao engajamento dos alunos, propiciando deste modo uma melhoria na qualidade da aprendizagem dos nossos alunos. O ensino superior, enquanto espaço de ensino aprendizagem, formação e convivência, também deve dar atenção para as necessidades dos sujeitos que estão presentes neste meio. É preciso considerar os discentes como protagonistas de sua aprendizagem tendo o professor como um mediador que pode promover a valorização do lúdico como premissa para corroborar uma educação ativa de qualidade por parte do aluno.

Nesta perspectiva destacamos que tal metodologia já foi aplicada pela autora e teve seus resultados mensurados, como podemos ver em [7]. Apresentaremos aqui neste material uma compilação do levantamento bibliográfico sobre tópicos como gamificação e experiência de flow. Descreveremos mais detalhadamente a escolha do Kahoot! levando em conta as propriedades da gamificação com as características de uma pessoa em estado de Flow, para tal apresentaremos atividades já testadas em ensino de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral. Em [7] é descrito como é possível mensurar se as atividades alcançaram seu objetivo no que diz respeito ao estado de Flow.

EXPERIÊNCIA DE FLOW E GAMIFICAÇÃO

A descrição do estado de fluxo ou Flow é idêntica a descrita por um jogador, que experimentou um estado de imersão em um jogo eletrônico. Durante esta experiência de imersão o jogador perde a noção de tempo e esquece todas as pressões externas. Tais características em comum na experiência de Flow e de imersão em ambientes gamificados têm chamado atenção de muitos pesquisadores nas áreas de gamificação na educação. Mihaly identificou uma característica dinâmica que leva ao estado de Flow (ver Figura 2.1) que está relacionado ao quanto a pessoa se sente desafiada de acordo com suas habilidades. Pense por exemplo em um jogador iniciante de tênis, em quatro momentos distintos de sua aprendizagem, tal situação está representada no gráfico abaixo.

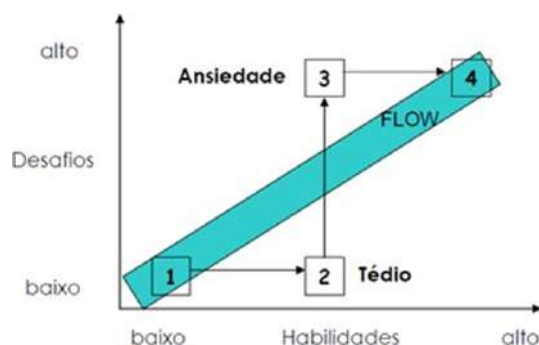


Figura 2.1: Dinâmica que leva ao estado de flow [5]

Ao iniciar suas aulas seu desafio acontece de acordo com sua habilidade

(1), nesse momento, provavelmente, está em estado de Flow, porém isso logo se transforma em tédio (2), pois suas habilidades já aumentaram e não correspondem mais ao desafio inicial. Mas assim que um novo desafio é proposto seu sentimento passa a ser de ansiedade (3), visto que agora pretende superar seu novo desafio e atingir novamente seu estado de Flow (4). Segundo Mihaly, nesta dinâmica envolvendo os desafios e habilidades, o indivíduo vivencia uma gama de emoções, sendo elas (ver Figura 2.2):

- **Apatia:** este estado representa o momento em que o desafio proposto é considerado fácil para o indivíduo, exigindo assim pouca habilidade. A combinação de desafio baixo e pouca exigência hábil pode gerar desmotivação e falta de interesse em prosseguir na realização da atividade.

- **Preocupação:** a partir do momento que a atividade passa a proporcionar um desafio mediano com pouca habilidade para o indivíduo, este se torna um momento de preocupação, pois ainda possui o mínimo de habilidade para se sentir motivado a superar suas próprias habilidades e prosseguir o crescimento.

- **Ansiedade:** quando o desafio se torna difícil e a habilidade do indivíduo passou a ser baixa, a sensação de ansiedade pode ser justificada pelo fato de estar associada à insegurança, podendo atuar como sintoma de tristeza.

- **Excitação:** com a proposta de um desafio difícil, em que o indivíduo apresenta habilidade mediana, o sentimento de excitação pode ser considerado como euforia. Esse tipo de emoção faz com que o indivíduo perceba que sua possibilidade de crescimento aumenta e que tão logo alcançará seu estado de Flow, caso continue a superar suas habilidades com a execução de atividades com níveis de desafios elevados.

- **Fluxo:** é o momento que a atividade atinge um nível de desafio difícil e o indivíduo tem a consciência de que possui muita habilidade em relação ao que está sendo proposto e a realiza com satisfação, buscando cada vez mais se superar para que assim possa atingir a plena sensação de felicidade e prazer.

- **Controle:** quando a atividade passou a apresentar um nível de desafio moderado e o indivíduo percebe que possui muita habilidade para realizar a atividade sente-se no controle, pois sabe o que pode vir a acontecer, apresentando conhecimento das possibilidades futuras.

- **Tédio:** ao perceber que o desafio proposto está com um nível abaixo de

GAMIFICAÇÃO E EXPERIÊNCIA DE FLOW EM DISCIPLINAS MATEMÁTICAS NO ENSINO SUPERIOR⁵

suas habilidades, o indivíduo passa a se sentir entediado, pois não vê chances de crescimento e a conclusão da atividade é feita com facilidade. Dessa forma, sente-se limitado com falta de estímulo.

- Relaxamento: quando a atividade possui nível baixo de desafio e a habilidade no indivíduo é mediana, ocorre sensação de relaxamento, pois este sabe que está fazendo apenas o necessário, não sendo exigido nada além de suas capacidades.



Figura 2.2: Emoções envolvidas no processo de Flow - Gráfico adaptado de “gamification e teoria do flow” [3]

Diante da reflexão sobre quais fatores podem contribuir para que a sala de aula venha a constituir-se em uma experiência de Flow, vários autores chegaram a gamificação como uma possível resposta. A gamificação é a construção de modelos, sistemas ou modo de produção com foco nas pessoas, tendo como premissa a lógica dos games. Esses tipos de modelos levam em consideração a motivação, o sentimento e a participação das pessoas que estão envolvidas no processo (Human focused designer) [1].

O que torna os games atividades catalisadores de flow, é o fato de que, assim como os jogos não eletrônicos, eles foram desenhados para facilitar o alcance da experiência ótima. Os ambientes gamificados tem regras que re-

querem o aprendizado de habilidades, determinam objetivos, provêm retorno e fazem com que o controle seja possível. Segundo Csíkszentmihályi, em [2], os jogos facilitam a concentração e o envolvimento ao fazer a atividade tão distinta quanto possível do que chamamos de “realidade mundana” da existência cotidiana. Em sua pesquisa Csíkszentmihályi identificou nas pessoas comportamentos semelhantes durante a realização da atividade que proporciona o prazer e a felicidade. Essas condições estavam presentes nos momentos que a pessoa considerava estar em Flow. Traçando um paralelo entre as propriedades da gamificação com as características de uma pessoa em estado de Flow, torna-se possível fazer algumas associações. A Tabela 2.1 abaixo mostra estas associações: para cada característica do Flow buscou-se as propriedades mais próximas da gamificação (ou que em sua descrição guardasse alguma relação com essas características ou que de alguma maneira provocasse aquele estado).

GAMIFICAÇÃO E EXPERIÊNCIA DE FLOW EM DISCIPLINAS MATEMÁTICAS NO ENSINO SUPERIOR⁷

Tabela 2.1: Conceitos da Gamificação que contribuem para atingir as características do Flow.

Características do estado de Flow	Propriedades da Gamificação
Foco / Concentração	Antecipação, comunidade, curiosidade, curva de engajamento, desafios, deslumbramento, diversão, justiça, metas e oportunidade
Êxtase	Antecipação, conquistas, deslumbramento, diversão, globalidade, interações sociais, justiça, risco, surpresa e tranquilidade (zen).
Clareza/Feedback	Antecipação, controle, dados, escolhas, feedback, história, metas e tempo.
Habilidades	Campanha, desafios, equilíbrio, escolhas, habilidade, justiça e metas.
Crescimento	Competição, curva de aumento de nível, curva de engajamento, imaginação, influência, progressão e recompensas.
Perda da Sensação do Tempo	Curva de engajamento, diversão, deslumbramento, equilíbrio, experiência do usuário, globalidade, história, interações sociais e justiça.
Motivação intrínseca	Antecipação, autoexpressão, conquistas, curiosidade, curva de aumento de nível, descobertas, diversão, justiça, longevidade, metas, oportunidade, recompensas e status.

O USO DA TECNOLOGIA E A METODOLOGIA

A construção do referencial teórico sobre gamificação e experiência de Flow para estruturar a metodologia da presente oficina visa colocar o aluno no papel do jogador, construindo um ambiente gamificado através do uso de um aplicativo do tipo clicker (também conhecido como sistema pessoal de resposta), os sistemas pessoais de resposta são pequenos aparelhos portáteis que permitem que os alunos respondam rapidamente a questões propostas pelo professor, podem ser usados com smartphones ou tablets, ou mesmo através de notebooks ou pc's. O software de controle do sistema permite ao professor visualizar imediatamente dados estatísticos dos resultados obtidos, aferindo o nível de compreensão da turma em relação ao assunto que está sendo ensinado, ou seja, o professor tem um “feedback” imediato o que permite ajustar o ritmo da aula ou até mesmo alterar a estratégia didática.

Para mostrar como elaborar uma atividade gamificada escolhemos o Kahoot!, que é uma plataforma de aprendizagem gratuita baseada em jogos que tem como missão institucional “desbloquear o potencial mais profundo de cada aluno de todas as idades e em todos os contextos”, através de um aprendizado divertido, mágico, inclusivo e envolvente [4]. Entre as possibilidades disponíveis, essa plataforma possibilita a criação de questionários (quizzes) que podem ser respondidos por usuários que estejam conectados à internet por meio de smartphones ou computadores, bastando para isso a realização de um cadastro na plataforma de ensino virtual. A proposta do Kahoot! é envolver os alunos por meio de estratégias semelhantes a jogos, com pontuação, interação e ranqueamento. Tais aspectos contribuíram para escolha do Kahoot! nas

atividades que já foram testadas pela autora [7]. A Figura 3.1 mostra a imagem de uma das atividades elaboradas pela autora usando a opção preview do Kahoot!



Figura 3.1: Atividade Gamificada de Álgebra Linear usando Kahoot! [7]

Destacamos ainda que usamos aspectos da metodologia Octalysis em complemento a tudo que foi descrito sobre gamificação e estado de flow. Observando que gamificação trabalha diretamente com a motivação das pessoas, Yu-kai Chou, autor do livro “Actionable Gamification: Beyond Points, Badges, and Leaderboards” criou a metodologia ou framework Octalysis. Chou identificou que os jogos de modo geral, estimulam certas forças motrizes - polos (core drivers) do ser humano, capaz de motivá-los a realizar determinadas tarefas em diferentes níveis de consciência. Algumas destas forças motrizes são acionadas a partir de gatilhos, podem motivar de forma inspiradora e capacitadora, enquanto outras de maneira manipuladora e obsessiva. Chou, em [1], destaca oito forças motrizes - polos, colocados em lados de uma forma de octógono (ver Figura 3.2 abaixo) por isso o nome da metodologia ser Octalysis.

Abaixo descrevemos as 8 forças motrizes- polos (com exemplos):

1. **Vocação épica:** Trata-se de dar um senso de propósito para ao jogador. Ele precisa se sentir parte de algo maior e no qual tem uma missão a cumprir. Um exemplo de tática de gamificação desse polo é formar grupos com jogadores de melhor desempenho e lhes conferir tarefas especiais, alardeando que eles são de alguma forma especiais.

2. **Criatividade:** Este polo gira em torno de promover a realização pessoal do jogador, o aumento do seu potencial mantendo-o envolvido em processos criativos. Um exemplo: recompensá-lo com privilégios de edição e configuração do jogo, promovendo-o a um cargo especial.



Figura 3.2: Framework Octalysis- Fonte: <https://edupulses.io/o-que-e-gamificacao/>

3. Sociabilidade: Polo que incorpora todos os elementos sociais que motivam as pessoas, incluído companheirismo ou concorrência e inveja. Um exemplo: “Ei, você sabia que sua amiga Maria acaba de passar de nível?” (A frase escondida é: “O quê? Vai deixar a Maria te superar assim?”).

4. Curiosidade: Nem tudo deve ser regra bem especificada e controle. Os jogadores podem gostar de surpresas. Ex: sorteios.

5. Perda: Há certas coisas que os jogadores devem ter medo que aconteça e fazer de tudo para evitar. Ex: pontos que podem ser perdidos se o jogador passar um determinado tempo sem agir.

6. Escassez: Nada como a presa ou a penúria para motivar, às vezes. Ex: “Você ganhou 1000 pontos. Mas para sacá-los precisa responder este questionário em até 24 horas”.

7. Posse: Alguns jogadores gostam de sentir que estão acumulando coisas, enchendo a carteira ou inventário com algo. Ex: medalhas colecionáveis, estilo complete-o-álbum-de-figurinhas.

8. Desenvolvimento: Trata-se do polo referente ao ato de perceber progressos, desenvolvimento de habilidades. Ex: pontos, medalhas, subir de nível.

A partir dessa metodologia, é possível analisar contextos e cenários, determinando valores para cada polo, de modo a mensurar o nível de gamificação, ou seja, podemos mensurar o quanto o ambiente é motivador o bastante para manter o jogador engajado e comprometido na realização de tarefas. Estas

forças motrizes apontadas por Chou, tem analogia com as etapas da Jornada do Herói de Joseph Campbell. Ele criou em seu livro “O herói de mil faces” um modelo de como seria o passo a passo do percurso de transformação do homem comum em herói, com todas as provações que surgem no meio do caminho. Na jornada do herói de Campbell (estrutura narrativa que se repete em mitologias desde a antiguidade) temos “O Chamado para a aventura”, a “Travessia do Limiar”, “Testes e Antagonismos”, “A Grande provação”, “A Recompensa”, “Viagem de volta”, o “Limiar do retorno”, a “Ressurreição” e o Retorno ao mundo comum”. Um bom jogo deve ter uma boa narrativa para envolver o jogador e este envolvimento pode conduzi-lo ao estado de fluxo.

O Kahhot gera um ranking o que ocasiona competitividade e influencia na ativação do polos de Sociabilidade, Criatividade e Curiosidade segundo a metodologia Octalysis. A pontuação também leva em consideração o tempo de resposta, para a mesma resposta, pontua mais quem respondeu primeiro ativando os polos de Sociabilidade, Curiosidade, Perda e Vocação épica. Além disso no Kahoot! é possível estabelecer um tempo para responder a pergunta, é feita uma contagem regressiva ativando os polos de Perda, escassez. A Tabela 3.1 a seguir apresenta um paralelo entre os Polos ativados da Metodologia Octalysis e as estratégias adotadas pela autora [7].

Tabela 3.1: Polos ativados da Metodologia Octalysis.

Polos ativados da Metodologia Octalysis	Estratégias
Vocação épica e sociabilidade	Apresentar aos alunos os objetivos da atividade e convidá-los a participar
Sociabilidade	Realização das atividades em grupos
Posse	Possibilidade de personalização das equipes (escolher do nome da equipe)
Sociabilidade, Criatividade, Curiosidade	Atividades que envolvam competitividade trazendo ações e reações imprevisíveis
Desenvolvimento	Contagem de pontos
Perda, Escassez	Contagem regressiva de tempo para executar as atividades
Sociabilidade, Curiosidade, Perda, Desenvolvimento	Possibilidade da sua ação interferir na pontuação dos outros jogadores (quem responde mais rápido corretamente pontua mais).

CONCLUSÕES

A ideia de apresentar uma oficina sobre a Gamificação e o Estado de Flow em disciplinas matemáticas no Ensino superior é fruto dos resultados satisfatórios obtidos pela autora no que diz respeito ao estado de Flow e ao uso do jogo como ferramenta didática tanto em disciplinas de Álgebra Linear quanto em Cálculo Diferencial e Integral apresentados em [7]. Obtivemos também as mesmas observações destacadas por outros professores, após experiências realizadas com estes tipos de ferramentas, destacaram-se os seguintes aspectos: a mudança positiva no comportamento do aluno quando ela assume o protagonismo; a socialização entre indivíduos e grupos distintos; o aumento no interesse pelas temáticas das aulas; o comprometimento dos alunos acatando propostas de estudo como a sala de aula invertida; a participação mais assídua dos alunos, enriquecendo os debates nas aulas subsequentes; a proximidade, uma relação mais estreita entre professor-aluno. Destacamos ainda que na revisão bibliográfica realizada para fundamentar a metodologia testada pela autora foi identificado que não há uma maneira padrão de medir a experiência de flow. De um modo geral o estado de flow é utilizado como uma medida da qualidade da atividade no que diz respeito ao engajamento e prazer, ou seja, como uma forma de mensurar a ludicidade presente ao realizar a atividade de modo focado.

APÊNDICES

A

EXEMPLO DE ATIVIDADE PARA ÁLGEBRA LINEAR

O Kahoot apresenta a possibilidade de imprimir a atividade. Abaixo está a versão gerada a partir desta opção para uma atividade proposta de Álgebra Linear.

Kahoot!

"Final Quiz" de Álgebra Linear (todos)
Quiz 4 Final #Kahoot para a turma F1 - 2020.1 de Álgebra Linear (a partir do Quiz 4 em grupos)

0 favorites 3 plays 5 players

A private kahoot

Questions (6)

1 - Quiz
Se $\text{tr}(A) = -\text{det}(B)$ então qual o valor de k ? 240 sec

2 - Quiz
Sendo H é a matriz aumentada do sistema $Ax=b$, onde a matriz A é dos coeficientes, é correto... 240 sec

3 - Quiz
Sobre a matriz A da figura, podemos dizer que $\text{det}(2A^3)$ é igual A 240 sec

4 - Quiz
Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, 6-3x), x \in \mathbb{R}\}$. S é um subespaço vetorial de V ? Marque a resposta correta. 240 sec

5 - Quiz
Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$ dois subespaços de V . A interseção $S_1 \cap S_2$ é um subespaço de V ? 240 sec

6 - Poll
O que achou desta atividade? 120 sec

Figura A.1: Atividade Gamificada de Álgebra Linear usando Kahoot! [7]

B

EXEMPLO DE ATIVIDADE PARA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Colocamos abaixo algumas imagens da atividade de Cálculo Diferencial e Integral simulada (opção de Preview do Kahoot).

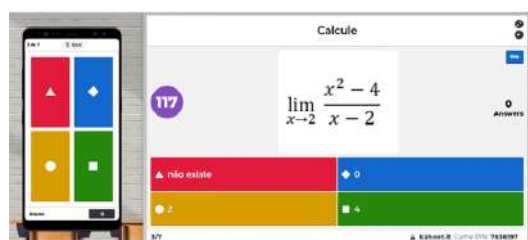


Figura B.1: Preview 1 da Atividade Gamificada de Cálculo usando Kahoot!
[7]



Figura B.2: Preview 2 da Atividade Gamificada de Cálculo usando Kahoot!
[7]



Figura B.3: Preview 3 da Atividade Gamificada de Cálculo usando Kahoot!
[7]

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHOU, Yu-kai. (2016) *Actionable gamification: Beyond points, badges, and leaderboards*. Octalysis Group.
- [2] CSIKSZENTMIHALY, M. (1990) *Flow: the psychology of optimal experience*. New York, NY, USA: Harper Row.
- [3] FADEL, L. M. et al. (2014) *Gamificacao na Educaçã*o. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014. Disponível em: <https://www.pimentacultural.com/gamificacao-na-educacao>. Acesso em 17/12/2019.
- [4] KAHOOT. Disponível em: <http://www.kahoot.it>. Acesso em 02/12/2019.
- [5] KAMEI, H.H. (2010) *Flow: o que é isso? Um estudo psicológico sobre experiências ótimas de fluxo na consciência, sobre a perspectiva da Psicologia Positiva*. São Paulo, 345f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo.
- [6] LUCKESI, Cipriano Carlos.(2002) *Ludicidade e experiências lúdicas: uma abordagem a partir da experiência interna*. In: PORTO, Bernadete de Souza (Org.). Educação e Ludicidade – Ensaio 02, GEPEL/FACED/UFBA, p. 22-60.
- [7] LUZ F. AMARAL, Ana Maria. (2021) *Gamificação e experiência de Flow em disciplinas matemáticas de Ensino Superior*. Orientadora: Tárzia Rita Davoglio. TCC. Especialização em A Moderna Educação: Metodologias, Tendências e Foco no Aluno. PUCRS.



**O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL
COMO RECURSO DIDÁTICO PARA
AUXILIAR NO ENSINO DE SISTEMA
DE NUMERAÇÃO DECIMAL**

NAZARÉ DO SOCORRO MORAES DA SILVA 1
REGIANE DA SILVA REINALDO 2 VERA DEBORA
MACIEL VILHENA 3

JUNHO
DE 2022

*“A Educação
Transforma uma
Sociedade”.*

Autor desconhecido

SUMARIO

Prefacio

1 Material manipulável no Ensino de Matemática

1.1 Teoria das Situações didática

1.2 Sistema de Numeração Decimal

2 Atividade da oficina

Conclusão

Referencias

PREFACIO

A proposta deste minicurso é apresentar aos participantes (Professores da Educação Básica, graduandos das Licenciaturas em Matemática dos anos iniciais), o uso de material manipulável como recurso didático para auxiliar no ensino de noções de SND, na perspectiva da Teoria das situações didáticas (TSD). Sua organização é delineada em três momentos: 1º fundamentação teórica que sustenta o presente estudo, apresentação e o uso de material manipulável. 2º desenvolvimento das atividades com uso das tampinhas de garrafa pet 3º discussão acerca da viabilidade desses recursos como proposta para sala de aula e possibilidades de utilização. As atividades serão desenvolvidas em grupos de até cinco componentes. Ao final aspiramos que este minicurso proporcione momentos de reflexão e aprendizagem aos participantes evidenciando a importância da utilização de material manipulável no ensino e aprendizagem de matemática, bem como fomentar situações de ensino que possa ser planejada e construída pelo professor com intuito de proporcionar ao aluno condições que o leve a aquisição de um novo, que se deseja ensinar.

BELÉM, JUNHO de 2022

Nazaré do Socorro Moraes da Silva 1
Regiane da Silva Reinaldo 2
Vera Debora Maciel Vilhena 3

1. Material manipulável no ensino de matemática

A utilização de materiais pedagógicos manipuláveis é imprescindível para o ensino da matemática, no entanto, ressaltamos que esse material não é garantia ou modelo para um sucesso no processo de ensino e aprendizagem. "Essas aprendizagens só serão possíveis a medida em que o professor proporcione um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias". (BRASIL, 1997, p. 31). Carvalho (2011) destaca a importância de alunos do curso de habilitação ao Magistério, ou seja, futuros professores que trabalharão conteúdos de matemática com alunos da series iniciais do ensino fundamental, aprenderem a manipular o material didático, pois a partir dessa manipulação, poderão reformular alguns conhecimentos matemáticos que já possuem ou até mesmo abordar novos temas, para que possam fazer uso deste com seus futuros alunos. O autor considera material didático manipulável os seguintes materiais: borracha, lápis, caderno, régua, cola entre outros, ele inclui também os materiais que o professor produz ou adquire em lojas especializadas e objetos como sucata, tampas de garrafa ou de tubos, caixas, barbante, palito, revistas, jornais, ábaco, entre outros. Neste contexto, utilizamos as tampinhas de garrafas pet como recurso didático para auxiliar no desenvolvimento das atividades do minicurso.

1.2 Teoria das situações didáticas

Essa teoria foi desenvolvida na década de 70 por Guy Brousseau para modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, criando um modelo de interação entre o aluno, o saber e o milieu (meio). Sobretudo, em que a aprendizagem possa se desenvolver, pois para ele, “o aluno aprende se adaptando ao milieu que é um fator de contradição, de dificuldade, de desequilíbrio, um pouco como fez a sociedade humana” (ALMOULOU, 2007, p. 32).

Para esse processo, Brousseau (1986) procurou desenvolver situações de ensino que valorizassem tanto o conhecimento prévio do aluno e seu envolvimento na construção do conhecimento matemático como o trabalho do professor, ao criar condições necessárias para que o aluno se aproprie de tal conhecimento. Essa situação denominada de situação didática é o objeto central das teorias das situações, na qual corresponde ao conjunto de relações estabelecidas explicita ou implicitamente entre o aluno ou grupo de alunos, o professor e um determinado milieu, para que o aluno adquira um conhecimento constituído ou em constituição (ALMOULOU, 2007).

Esse processo ocorre perante um “jogo hipotético” que expressa um sistema de condições necessárias mínimas para o conhecimento definido, em que pode ocorrer pelas decisões para efeitos observáveis de uma atuação em um meio regido de regras, estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre professor, aluno e conteúdo em jogo, chamado de contrato didático. Este contrato regula as intenções do professor e do aluno perante a situação didática em que os envolvidos assumem responsabilidades recíprocas, o professor com o papel de promover situações de ensino que favoreça ao aluno aprendizagem do conteúdo em jogo e o aluno procura resolver o problema proposto em que a solução se refere a apropriação desse conhecimento.

Segundo Almouloud (2007), a situação didática tem como parte essencial a

situação adidática em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi pensada e construída pelo professor com intuito de proporcionar ao aluno condições que o leve a aquisição do novo saber que se deseja ensinar. As situações adidáticas são construídas com fins didáticos, ou seja, com intenção de ensino, embora sejam situações que não aparentem uma intencionalidade didática, as quais o professor apresenta um problema para o aluno de modo que este possa resolvê-lo sem necessariamente a intervenção do seu mestre.

A situação didática ocorre a partir do momento que o professor propõe o problema ao aluno para que ele resolva, tomando para si parte da responsabilidade pela aprendizagem, denominado de devolução, que por sua vez, deve ter a intenção de provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno o desenvolvimento

autônomo. Essa situação didática conclui-se com a institucionalização, em que o professor dá estatuto ao conhecimento produzido pelo aluno. Agora, se o aluno aceitar tal desafio e obter sucesso, inicia-se o processo de aprendizagem.

Brousseau (2008) analisa esse processo em quatro tipos situações: ação, formulação, validação e institucionalização. Situação de ação: exige que o conhecimento do aluno se manifeste por decisões e ações adequadas e eficazes sobre o meio, sem a necessidade de expressá-las por meio de um discurso, nem explicar esse conhecimento. Situação de formulação: nesta situação o aluno precisa expressar sua tomada de decisão, ou seja, comunicar uma informação matemática, justificando sua solução com base em aspectos teóricos. Situação de validação: nesta situação o aluno precisa provar o seu conhecimento formulado por meio de debates e discussões, confrontando opiniões e procurando entrar em acordo, utilizando argumentos, teoremas que possam validar o seu conhecimento. Situação de institucionalização: esta situação se remete ao professor, o qual dará estatuto aos conhecimentos validados pelos alunos, com intuito de situar um caráter universal, articulando com outros conhecimentos. Tornando assim, o conhecimento novo produzido pelos alunos socialmente aceito.

Essas situações de ação, formulação e validação se caracterizam como didáticas por fazerem parte de momentos que possibilitam a construção do conhecimento por parte do aluno, ou seja, o controle sobre produção do conhecimento está nas mãos do aluno e, por sua vez, o professor tem o controle somente do andamento da situação. Enquanto, a Institucionalização é uma situação de natureza didática, em que o professor tem o controle do conhecimento produzido pelo aluno, reforçando e generalizando, dando-lhe um estatuto, numa passagem desse conhecimento em jogo para uma dimensão histórica e cultural do saber científico. Vale salientar, que para que esse processo ocorra é fundamental um milieu organizado e planejado pelo professor, além do contrato didático para gerir todo

esse processo.

Nesse sentido, procuramos explorar as atividades nesta oficina a partir de situações de ensino que evidencie o papel do professor, em criar condições que possibilite a aprendizagem do aluno acerca de conteúdos matemáticos, em especial a noção SND com o auxílio do uso de garrafas Pet. Além disso, colocar o aluno numa posição de ator principalmente na construção de seus conhecimentos matemático.

1.3 Sistema de Numeração Decimal

GUIMARÃES (2005) enfatiza em seus estudos a importância do SND para uma formação matemática consistente, possibilitando aos professores perceber os conceitos implícitos para que possam se apropriar dos fatos e propriedades que justificam os procedimentos das diversas técnicas operatórias para trabalhar com seus alunos, pois enfatiza que grande parte dos professores que participaram de sua pesquisa ressaltaram existir dificuldade em trabalhar de forma mais didática com este conteúdo, principalmente em relação aos agrupamentos e mudanças de ordens, valor posicional, principalmente do algarismo zero, pois em sua maioria tiveram uma formação tradicionalista com a memorização de dados e regras.

O relatório do Plano de Desenvolvimento da Educação-PDE (2008), ressalta que apenas um quarto dos alunos conseguem responder corretamente ao item que corresponde ao descritor 13 que enfatiza o SND, agrupamentos e base 10, este item avalia as habilidades do aluno perceber os agrupamentos e as trocas de algarismos ao contabilizar agrupamentos de 10 em 10.

Rosas e Selva (2010), consideram inicialmente o SND como um sistema econômico por conter dez algarismos e a partir deles compormos todos os infinitos números do nosso SND, no entanto alertam para que os princípios que os fundamentam precisam ser bem compreendidos para que a partir deles possamos

entender os demais fundamentos da matemática.

Para abordar a representação da escrita numérica, a qual se constitui por meio dos agrupamentos de bases, em particular da base dez, é relevante explorarmos a origem do zero, que surgiu como signo para representar o “nada” que se configurava como espaço vazio, entre as posições para designar um determinado número. Com a função de representar a ausência das unidades de uma certa ordem, eliminando ambiguidades na escrita dos números, no momento de mudanças de ordem.

Enfatizamos por meio de nossas experiências, corroboradas com as ideias dos documentos oficiais e autoras citadas, que este conteúdo é de suma importância para o ensino da matemática. Assim, elaboramos atividades com a utilização de tampinhas de garrafas pet como códigos aos quais serão atribuídos valores de acordo com cada cor: branca terá valor 1; azul valor 10; vermelho valor 100; verde valor 1000 e amarelo valor 10.000. Salientamos que a correspondência desses valores a cada cor, pode ficar a critério do professor que faça uso de tal material, desde que se mantenha esses agrupamentos. É relevante também, destacar que o valor atribuído a cada cor é para poder formar os agrupamentos, isso precisa ser bem explicitado para que os alunos não as relacionem como algo definitivo.

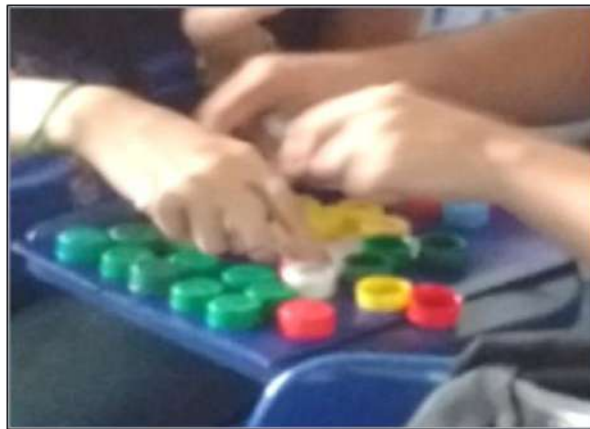
2. Atividades da oficina

Atividade 1: Jogo nunca 10 com tampinhas de garrafas pet.

Objetivo: Identificar os agrupamentos como elemento necessário para a troca de ordem e constituição do número no SND.

Procedimento: os participantes receberão tampinhas de cores variadas, enfatizando os valores atribuídos a cada cor conforme estipulado acima, envolvendo grupos de no máximo cinco componentes. Cada grupo em sua vez, lançará 4 dados e retirará a quantidade de tampinhas representadas pelos dados, feito isso, a cada agrupamento de 10 tampinhas vai trocando de acordo com o valor já estipulado

FIGURA 1 – material manipulável durante a etapa da oficina



FONTE: AUTORES

Atribuir o valor para cada cor de tampinha

- branca terá valor 1, correspondendo a ordem das unidades;
- vermelho valor 10, correspondendo a ordem das dezenas;
- verde 100, correspondendo a ordem das centenas;
- azul valor 1000, correspondendo a ordem de unidade de milhar

obs.: Salientamos que a correspondência desses valores a cada cor, pode ficar a

critério do professor como representação de cada ordem.

Por exemplo ao lançar os dados se soma dos valores de cada face dos dados resultarem em 12 unidades, realiza-se o processo de agrupamento. Inicialmente separa-se 12 tampinhas brancas e realiza-se o processo de agrupamento. Agrupa-se 10 tampinhas brancas e substitui por uma tampinha vermelha, resultando em 1 tampinha vermelha e 2 brancas para representa a quantidade 12 unidades. E assim, sucessivamente. Ganha a jogo nunca dez o participante que finalizar a rodada com o maior valor possível correspondente da ordem de maior valor posicional.

FIGURA 2 - material manipulavel durante a etapa da oficina



FONTE: AUTORES

Ao final do jogo esperamos que os participantes percebam que 10 vezes o 1 é igual a 10 e que o número 10 é formado por dez grupos de 1, 10 vezes o 10 é igual a 100 e que 100 é formado por 10 grupos de 10 e assim sucessivamente, levando os participantes a refletirem por meio das perguntas:

Quem ganhou o jogo? Que estratégias foram usadas para esse objetivo? Alguém fez diferente? Por que o nome do jogo é nunca dez? Utilizando a menor quantidade

de tampinhas como representar estes números? 6, 33, 40, 51, 101, 217, 678, 1208, vamos identificar as ordens? Quantas ordens formam uma classe? Quantas centenas formam uma unidade de milhar? Vamos comparar os resultados? Alguém fez diferente?

Atividade 2: Sistema de numeração decimal utilizando as tampinhas de garrafa pet

Objetivo: Evidenciar por meio da contextualização de uma situação problema as várias possibilidades de fazer agrupamentos, a importância do valor posicional, as possibilidades de composição e decomposição do número

Procedimento: Manipulação das tampinhas na organização, agrupamentos, composição e decomposição numérica. Dez brancas formam 1 vermelha, dez vermelhas formam 1 verde, dez verdes formam 1 azul, dez azuis formam 1 amarela e assim sucessivamente para mais cores.

FIGURA 3 – resultado com material manipulável



FONTE: AUTORES

Atribuir o valor para cada cor de tampinha

- branca terá valor 1, correspondendo a ordem das unidades;
- vermelho valor 10, correspondendo a ordem das dezenas;
- verde 100, correspondendo a ordem das centenas;

- azul valor 1000, correspondendo a ordem de unidade de milhar
- amarela valor 10 000, correspondendo a ordem de unidade de milhar

O Brasil registrou, desde o início da pandemia, 30.261.088 casos confirmados de covid-19, segundo o boletim epidemiológico divulgado hoje (18) pelo Ministério da Saúde. O número total de mortes pela doença é de 662.026. Em 24 horas, foram registrados 8470 casos. No mesmo período, foram confirmadas 66 mortes.

Fonte: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2022-04/covid-19-brasil-registra-84-mil-novos-casos-e-66-mortes> (acesso em 27/05/22)

Com base nas informações acima determine: Quais números aparecem no texto? A partir da cor atribuída a cada tampinha componha cada um dos números representados e depois registre no papel. Observe cada um dos números, quantas centenas podem ter em sua composição?

Enfatizar que o número pode ser composto de várias formas, evidenciado por exemplo que no número **8470**, podemos ter a forma mais habitual de leitura que é **oito unidades de milhar, quatro centenas, sete dezenas** e zero unidades, ou ainda posso dizer que na composição deste número posso ter oitenta e quatro centenas e 70 unidades, ou ainda oitocentas e quarenta e sete dezenas e zero unidades, o importante é refletir sobre as várias possibilidades de composição e decomposição sem se prender unicamente a ordem por eles representadas.

Neste sentido, a movimentação das tampinhas pode oportunizar esse entendimento, associada com a representação dos algarismos.

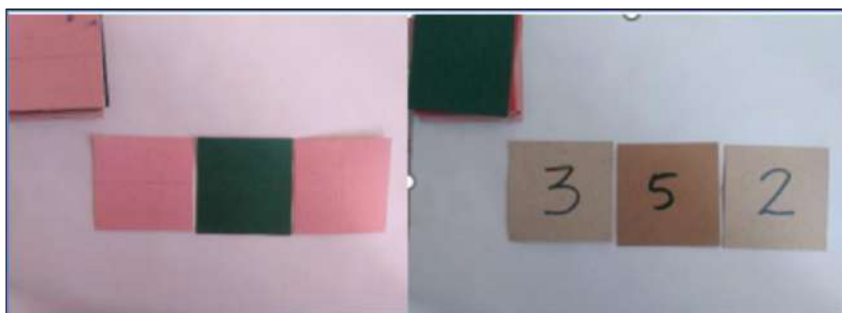
Qual o valor relativo ocupado pelo algarismo 6 nas três posições em que aparece no número 662.026 e o algarismo 8 no número 8.470? Qual o maior valor numérico formado pelos algarismos do número 8.470? E qual o menor? A partir destes questionamentos oportunizaremos a manipulação das tampinhas de forma a possibilitar a compreensão dos conteúdos trabalhados de forma concreta e dinâmica.

Atividade 3: Composição e decomposição aditiva e multiplicativa

Objetivo: Evidenciar a importância da posição do algarismo na constituição do número e suas formas aditivas e multiplicativas de composição e decomposição.

Procedimentos: a partir do sorteio de quatro ou cinco algarismos compostos de 0 a 9, fazer com que cada grupo organize os algarismos sem vê-los e os arrume um ao lado do outro, após isso pedir que virem os algarismos e identifiquem o número que formaram, em seguida fazer as seguintes perguntas:

FIGURA 4 - material manipulável Durante a etapa da oficina



FONTE: AUTORES

Ao representar esses números como podemos decompô-los de forma aditiva? Ouvir as opiniões e conduzi-los a perceberem a composição numérica, em seguida fazer a pergunta: e a forma multiplicativa? Há relações entre elas?

Esperamos que os participantes possam compreender as várias possibilidades de composição e decomposição numérica, percebendo quantas centenas, dezenas e unidades podem conter nos números, as várias formas de representá-lo e a posição de cada algarismo para formar o número. Neste momento também faremos proposições com a utilização do zero enfatizando sua importância e sua utilização indicando que ele precisa estar presente para representar a transformação sofrida numa ordem e a passagem para ordem posterior, pois, se o número 1402 for representado pela forma multiplicativa teremos: $1 \times 1000 + 4 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1$ e na aditiva: $1000 + 400 + 0 + 2$ indicando que embora não tenham quantidades representadas na ordem das dezenas o

zero indica que o número 1402 pode conter 140 dezenas e 2 unidades, 14 centenas e 2 unidades, 1402 unidades, não sendo possível ficar nenhuma ordem sem representação, pois muitas vezes o aluno olha apenas para o valor “preso” a ordem, ou seja, só consegue ver que o número acima tem apenas 4 centenas.

Nesta atividade é possível mostrar que não temos como preencher as ordens com as tampinhas pois elas sempre representam um valor a partir da unidade, mas podemos explicitar que naquela ordem o zero precisa estar presente para poder fazer a representação correta do valor posicional.

CONCLUSÃO

Esperamos que as atividades elaboradas para este minicurso possibilitem momentos de discussão referente, as estratégias apresentadas pelo mesmo, e também pelas estratégias que possam surgir pelos participantes. Além de possibilitar uma alternativa de redimensionar o ensino do conteúdo em questão por meio de situações na perspectiva das situações didáticas de Guy Brousseau. Esperamos que os participantes vislumbrem que essas situações possam situar o aluno como protagonista do seu processo de aprendizagem, por ter em seu bojo a valorização tanto do conhecimento prévio dos alunos e seu envolvimento na construção do conhecimento matemático como o trabalho do professor, ao criar condições necessárias para que o aluno se posicione e possa consolidar o conhecimento, uma vez que essas situações também podem auxiliar na prática docente do professor. Ao analisar os números por meio das tampinhas de garrafas pet, acreditamos

que os participantes possam perceber que cada agrupamento forma uma nova ordem, que o valor posicional é importante na composição numérica, que os códigos atribuídos as tampinhas são necessárias para representar grandes quantidades.

Por fim, acreditamos que os participantes possam refletir sobre suas práticas, ao abordar um determinado conteúdo matemático, com possibilidades de utilização do material manipulável para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, ou ainda, que possam socializar outros materiais manipuláveis utilizados no ensino dos conteúdos dos anos iniciais.

REFERÊNCIAS

BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo da teoria das situações: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da didática da matemática. 2ª edição. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008. 200 p.

BRASIL. Secretaria de educação fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC, 1997. 142p.

GUIMARÃES, A. P. S. Aprendendo e ensinando o sistema de numeração decimal: uma contribuição à prática pedagógica do professor. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e

Matemática) - UFRN. Natal, 2005.

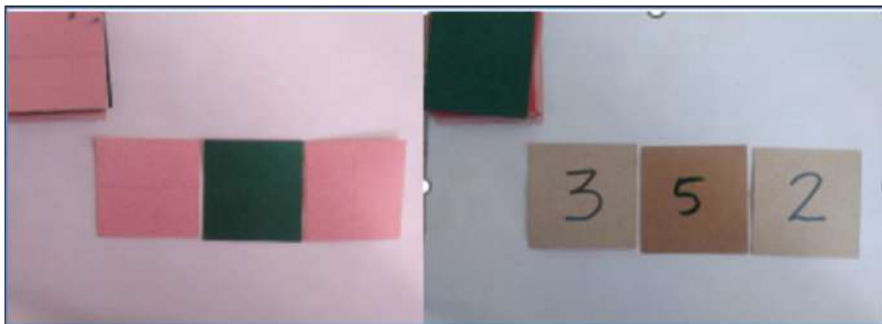
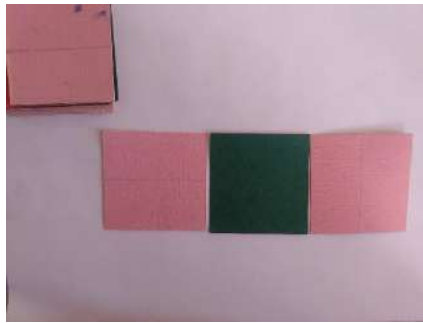
IFRAH, G. Os números: a história de uma grande investigação. Tradução Stella Maria de Freitas. rev. téc. Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira 11. ed. São Paulo: Globo, 2005. PAIS, Luiz C. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2008.

ROSAS, M. L. L.; SELVA, A. C. V. Ensino do sistema de numeração decimal: analisando a prática docente numa turma de 2º ano do ensino fundamental. Anais do X ENEM, Salvador, BA, julho, 2010.

Uol. Casos de dengue chegam a 1,5 milhão no país; zika atinge 18 Estados. São Paulo, 24/11/15. Disponível em <http://noticias.uol.com.br/saude/ultimasnoticias/redacao/2015/11/24/caso-s-de-dengue-chegam-a-15-milhao-no-pais-zika-atinge-18-estados.htm>. Acesso em 21/03/16

Fonte: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2022-04/covid-19-brasil-registra-84-mil-novos-casos-e-66-mortes> (acesso em 27/05/22)

ANEXO





MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG: DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS

CARMEN ROSA GIRALDO VERGARA

20 AO 24 DE JUNHO

SUMÁRIO

Prefácio

1 Quebra-cabeças Matemáticos

1.1 Quebra-cabeça Quadrado Duplo

1.2 Quebra-cabeça Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd

2 Caleidociclos

2.1 Caleidociclo Triângulo de Sierpinski

2.2 Caleidociclo Modelo em Branco

3 Cúpula de Leonardo da Vinci

3.1 Estruturas Autoportantes

3.2 Construindo Cúpulas

Apêndices

A Divertimentos Matemáticos

A.1 Caleidociclo de Sierpinski

A.2 Teorema de Pitágoras- Demonstração sem palavras

A.3 Jogando com Dominós

Referências

PREFÁCIO

A aprendizagem das Ciências, e da Matemática em particular, não é exclusividade do ensino formal. As “atividades informais” desenvolvidas em e por museus universitários, têm possibilitado aproximar a ciência de diversos públicos e contribuído para estimular a sua aprendizagem, assim como promover o interesse pela área científica. Nesse sentido, o Museu da Matemática UFMG desde sua criação, oferece uma gama de experiências lúdicas e interativas por meio de atividades e oficinas para o público em geral e, especialmente, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano Ensino Médio, em sua grande maioria da rede pública de ensino. Já para os professores, bem como alunos do ensino superior, o Museu procura se colocar como um centro de apoio por meio da realização de minicursos, oficinas e atividades de treinamento relacionadas ao seu acervo e às propostas pedagógicas.

A Matemática Recreativa é uma rica fonte de modelos matemáticos. Ela é um espaço de prática de pensamentos e raciocínios próprios da Aritmética, da Topologia, da Geometria, da Análise Combinatória e da Matemática em geral. Um exemplo disso é a Teoria de Grafos, muito aplicada atualmente no mundo tecnológico, que nasceu do Problema das Sete Pontes de Königsberg, que consiste em determinar se uma pessoa pode fazer um passeio atravessando sete pontes determinadas sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Este problema foi resolvido pelo matemático Leonhard Euler em 1763.

Nas últimas décadas, a Matemática Recreativa tem assumido um papel importante como instrumento para a divulgação e popularização da Matemática através da comunicação de aspectos históricos e culturais, da exploração de sua aplicação prática, da sua relação com outras áreas do conhecimento

como a Música e a Arte e de uma ampla variedade de problemas e atividades lúdicas que podem ser adaptadas em sala de aula, tornando-se assim uma ferramenta didática importante para mostrar aos alunos que a Matemática pode ser uma experiência divertida e prazerosa. Nesta oficina serão apresentados alguns itens do acervo do Museu. Além disso, exploramos outras atividades relacionadas a esses jogos e disponibilizamos os seus moldes com orientações sobre como confeccioná-los e utilizá-los. Esperamos que se divirtam com o Museu da Matemática UFMG!

BELO HORIZONTE, JUNHO 2022

Carmen Rosa Giraldo Vergara

QUEBRA-CABEÇAS MATEMÁTICOS

O uso de quebra-cabeças geométricos em sala de aula é justificado não somente pela curiosidade natural que eles despertam, como também pelo fato de proporcionarem o desenvolvimento de habilidades geométricas (plano-espaciais) tais como visualização e reconhecimento de figuras, percepção de posição, comparação de distância, áreas e volumes, organização de estratégias, capacidade de análise, enriquecimento do vocabulário geométrico, raciocínio lógico, entre outras habilidades.

Nesse contexto, o uso dos quebra-cabeças no ambiente escolar deve ir além da simples “montagem de peças”; esse recurso deve proporcionar o aprimoramento das técnicas de resolução de problemas, induzir o descobrimento de relações entre as peças que o compõem e explorar, naturalmente, conceitos matemáticos tais como: lado, vértice, ângulo, centro, meio, área, assim como nomes e características de figuras planas e espaciais.

Os quebra-cabeças do Museu podem ser explorados em diversos níveis do ensino. Porém, os apresentados nesta oficina estão orientados para alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio. Disponibilizamos os moldes dos quebra-cabeças na seção de Apendices. Assim eles podem ser reproduzidos por professores e/ou alunos em diversos materiais como cartolina, papelão ou EVA.

1.1. QUEBRA-CABEÇA QUADRADO DUPLO

O quebra-cabeça Quadrado Duplo é composto por 5 peças poligonais (um quadrado e quatro não quadrangulares) que podem ser unidas para formar

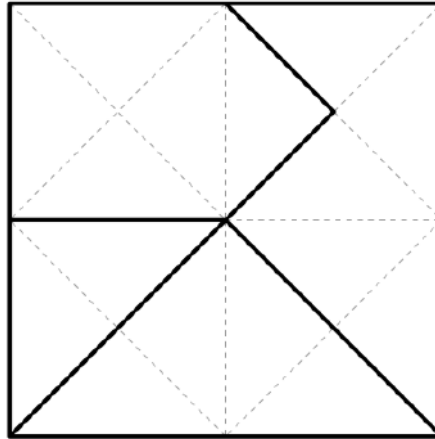


Figura 1.1: Molde Quadrao Duplo

quadrados. Este quebra-cabeça é um desafio interessante: com 4 peças (das 5), é possível formar um quadrado perfeito, e com todas as 5 peças pode-se formar um quadrado um pouco maior. Com frequência, a solução do quebra-cabeça com as 4 peças não quadrangulares é encontrada de maneira rápida, o que não acontece quando são usadas todas as peças. Geralmente a dificuldade com a montagem do quadrado usando as 5 peças está no fato de que as pessoas não percebem que a peça pentagonal convexa possui três vértices com ângulo reto e o vértice “menos óbvio” é justamente um vértice do quadrado a ser montado.

Este quebra-cabeça pode ser construído e explorado em sala de aula da seguinte forma:

- Inicialmente o professor deve pedir aos alunos que recortem um quadrado a partir de uma folha de papel de tamanho A4.
- Em seguida, eles devem ser orientados a traçar as diagonais e os segmentos que unem os pontos médios dos lados do quadrado, obtendo assim, um quadrado subdividido em 16 triângulos retângulos congruentes.

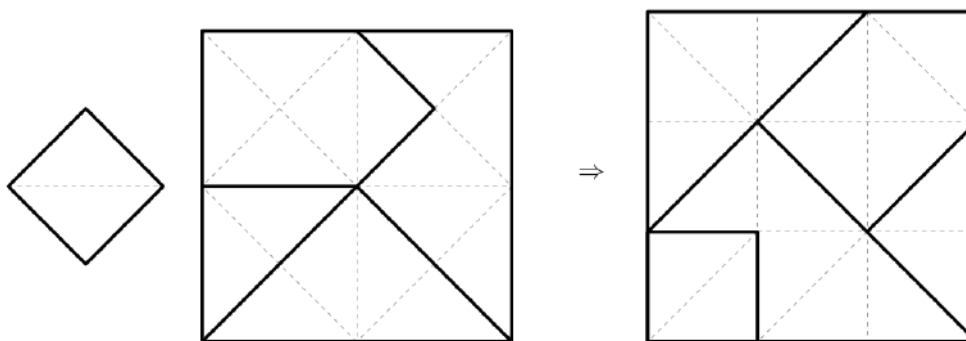


Figura 1.2: Quadrado Duplo

- A partir do quadrado obtido, os alunos precisam recortar as 4 peças não quadrangulares do quebra-cabeça, como mostra a figur 1.1.
- Para a quinta peça do quebra-cabeça, pede-se aos alunos que recortem, do pedaço de papel que sobrou da folha A4, outro quadrado de área equivalente a 2 dos triângulos retângulos da figura acima. Note que, com as 5 peças construídas desta forma, é possível mostrar que, se por exemplo, o quadrado formado pelas quatro peças não quadrangulares do quebra-cabeça tem área de $400cm^2$, assim a peça quadrada do quebra-cabeça terá área de $50cm^2$. Portanto, o quadrado formado com todas as peças, terá uma área de $450cm^2$.

1.2. QUEBRA-CABEÇA DO QUADRADO À CRUZ DE SAM LOYD

Sam Loyd foi um incansável inventor de quebra-cabeças de cunho matemático e um dos maiores criadores de enigmas da história. Para ele não tinha melhor treino mental que resolver quebra-cabeças, e este passatempo devia ser considerado mais seriamente do que uma mera moda passageira ou diversão.

Os melhores de seus enigmas matemáticos foram coletados no livro Loyd's Cyclopedia of Puzzles.

O quebra-cabeça Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd resultou da disseção de um quadrado em 5 peças. A história dele ainda é um mistério, mas acredita-se que Loyd inventou esse enigma como anúncio publicitário para um empresa. O quebra-cabeça consiste em formar um quadrado utilizando todas as 5 peças. Com ele pode-se formar outras figuras como uma cruz, um retângulo, um triângulo retângulo, um trapézio ou um losango (Ver [1]). Assim, este quebra-cabeça é uma material muito rico em quanto recurso didático, pois com ele, o professor pode explorar tópicos diversos como classificação de algumas figuras geométricas, medidas de comprimento, pontos médios de segmentos, ângulos, comparação de área, construções geométricas, entre outros. Além disso, é possível explorar o uso de régua para medição e o transferidor.

A seguir, algumas dicas para o professor aplicar a atividade com a construção do quebra-cabeça em sala de aula. Para isso:

- Peça aos alunos para construir um quadrado (é recomendado fazer o quadrado em cartolina ou papelão).
- Desenhado o quadrado, eles devem traçar segmentos de cada vértice ao ponto médio do primeiro lado oposto em sentido horário.
- Solicite aos alunos que recortem as peças, conforme o modelo da figura 1.3

O momento da confecção das peças pode ser aproveitado para explorar conceitos geométricos como, por exemplo, medida de segmentos e medição de ângulos. Sugerimos neste processo incentivá-los a procurar peças que tenham ângulos de 90° , ou peças que tenham 2 vértices cujos soma dos ângulos seja 90° .

Explique aos alunos que o processo de corte, realizado com o quadrado, é uma disseção e que é possível formar outras figuras com essas mesmas peças. Dito isto, o professor deve desafiá-los a montar, por exemplo, um retângulo, um trapézio, ou alguns dos polígonos como na figura 1.4 e explorar com eles as características desses polígonos.

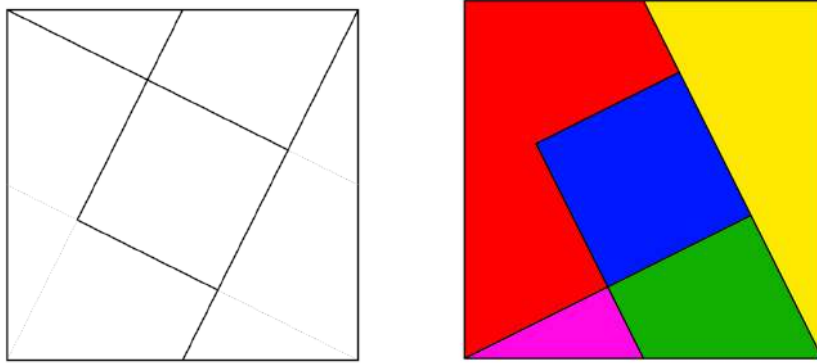


Figura 1.3: Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd



Figura 1.4: Quadrado Duplo

CALEIDOCICLOS

Os caleidociclos são anéis de tetraedros que podem ser rotacionados indefinidamente e revelam padrões com o estilo de caleidoscópio. O primeiro caleidociclo conhecido foi inventado, em 1926, pelo matemático e artista alemão Paul Schatz. Em 1958, Wallace Walker descobriu alguns caleidociclos, no decorrer de seu trabalho sobre formas estruturais de papel. Posteriormente, ele e a matemática Doris Schattschneider recobriram os caleidociclos com tesselações de Escher, resolvendo, de certa forma, o problema colocado pelo artista sobre como representar de forma finita uma pavimentação infinita do plano. A figura 2.1 mostra o Caleidociclo recoberto com a obra Lizard/Fish/Bat n°85 de Escher (1952).

Existem diferentes tipos de caleidociclos, o mais conhecido é o anel de seis tetraedros como o apresentado na figura 2.2. Nos festivais, realizados por nossa equipe, a oficina de construção de caleidociclos é sempre bem acolhida pelos



Figura 2.1: Caleidociclo de Sierpinski



Figura 2.2: Caleidociclo de 6 tetraedros

alunos. Desse modo, podemos afirmar que se trata de um ótimo exercício para desenvolver conceitos matemáticos de diferentes naturezas. Para aplicar essa atividade em sala de aula, o professor pode consultar a referência [3], onde é explicado o modo de montar um caleidociclo e, também, são apresentados alguns exemplos de atividades relacionadas com propriedades de poliedros e com a simetria de regiões planas.

Na sequência, apresentamos sugestões de assuntos que podem ser explorados durante a construção de caleidociclos. É aconselhável reproduzir os moldes em papel de gramatura 180gr.

2.1. CALEIDOCICLO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Neste modelo de caleidociclo representamos três iterações do processo de construção do chamado Triângulo de Sierpinski.

O Triângulo de Sierpinski é, possivelmente, um dos fractais mais conhecidos. Ele foi idealizado em 1916 pelo matemático polonês V. Sierpinski e foi obtido retirando partes do interior de um triângulo mediante os seguintes passos:

1. Tome como ponto de partida o primeiro triângulo equilátero verde da figura 2.3.
2. Para a primeira iteração do processo, conecte, usando um segmento, os



Figura 2.3: Exemplo de figura

pontos médios de cada lado do triângulo, obtendo assim 4 triângulos menores. Pinte o interior do triângulo central de branco.

3. Para a segunda iteração, repita o passo anterior em cada um dos triângulos verdes menores obtidos em 2.

O triângulo de Sierpinski é o conjunto formado pelos pontos verdes após repetir o processo anterior indefinidamente. Na figura 2.17, apresentamos as quatro primeiras iterações deste processo de construção.

Esta atividade pode ser desenvolvida em sala de aula, iniciando-a com a construção das primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski. Notemos que a estas iterações podem ser associadas várias sequências: a sequência do número de triângulos, a sequência da área de cada triângulo retirado, a sequência da área restante dos triângulos e a sequência do perímetro total dos triângulos. Após a construção das primeiras iterações, o professor pode pedir aos alunos para responder as seguintes perguntas:

- Quantos triângulos verdes há em cada uma das figuras obtidas no processo de construção do Triângulo de Sierpinski? Como continua a sequência?
- Supondo agora que a área do triângulo inicial é A , qual é a área de cada um dos triângulos verdes em cada iteração realizada?
- Qual é a área da região verde em cada iteração?
- Como continua a sequência do item anterior?

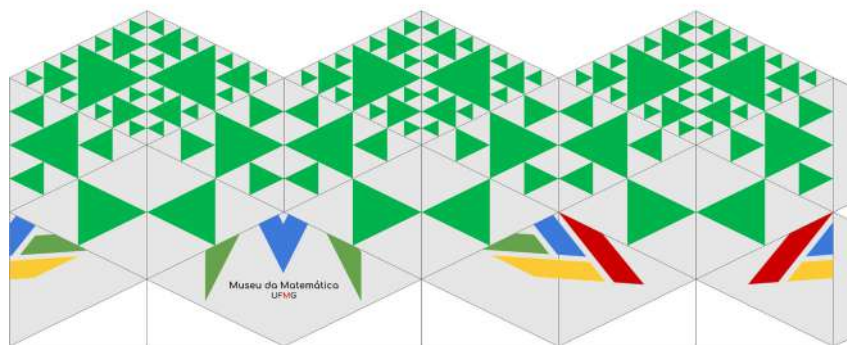


Figura 2.4: Molde Tetraedro de Sierpinski

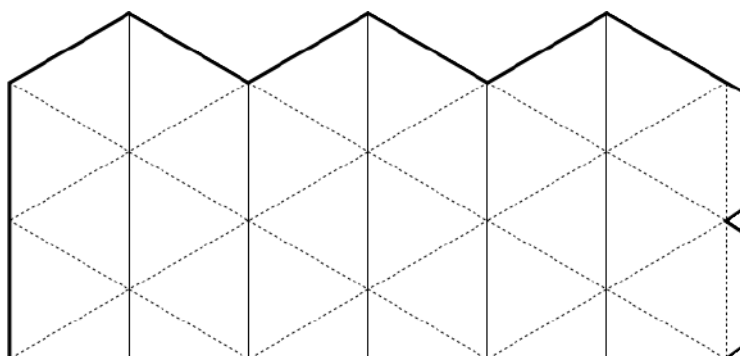


Figura 2.5: Molde básico de Caleidociclo

Após a construção do triângulo de Sierpinski segue a construção do Caleidociclo representado pela figura 2.4.

2.2. CALEIDOCICLO MODELO EM BRANCO

O modelo em branco é como o apresentado pela figura 2.5.
A partir deste modelo, vamos:

- Analisar a construção do modelo a partir de uma folha de papel.
- Analisar a simetria rotacional dos desenhos e discutir como se deve de-

senhar no modelo em branco para obter as figuras desejadas. Em [8], capítulo 4, existe uma proposta para o ensino de simetrias por meio dos caleidociclos.

- Desenhar as figuras que estarão no caleidociclo.

CÚPULA DE LEONARDO DA VINCI

3.1. ESTRUTURAS AUTOPORTANTES

Leonardo da Vinci foi um dos maiores artistas renascentistas, junto com Rafael Sanzio e Michelangelo Buonarrotti. Ele foi um autodidata e incansável observador dos fenômenos naturais, desenhando tudo o que despertou sua curiosidade. Muitas das ideias de Leonardo estão reunidas no Codex Atlanticus, coleção constituída por doze volumes que abrangem diversos assuntos como Astronomia, Química, Anatomia, Geografia, Mecânica, Matemática, estudos sobre o voo, entre outros.

De todos os projetos de pontes de Leonardo, a ponte autoportante é certamente o mais engenhoso pela simplicidade de sua estrutura e construção. Ela é uma estrutura composta por vigas cilíndricas, que são montadas sem o uso de fixações ou juntas de intertravamento. Uma vez montada, o peso da ponte deve ser suficiente para exercer a pressão necessária para que as vigas longitudinais bloqueiem as vigas transversais, evitando assim que a estrutura colapse. Assim, quanto maior a pressão na parte superior da ponte, maior será sua estabilidade.

O mesmo princípio usado nas pontes pode ser usado em duas dimensões para assim construir as cúpulas de Leonardo. Estas estruturas são construídas a partir de um único tipo de peça e sem nenhum amarre, apenas mediante o acoplamento tridimensional das peças, que se apoiam e sustentam entre si, seguindo determinados padrões geométricos. Na coleção de documentos de Leonardo da Vinci, nas folhas 899v e 899r do Codex Atlanticus, são apresentados alguns desses padrões.

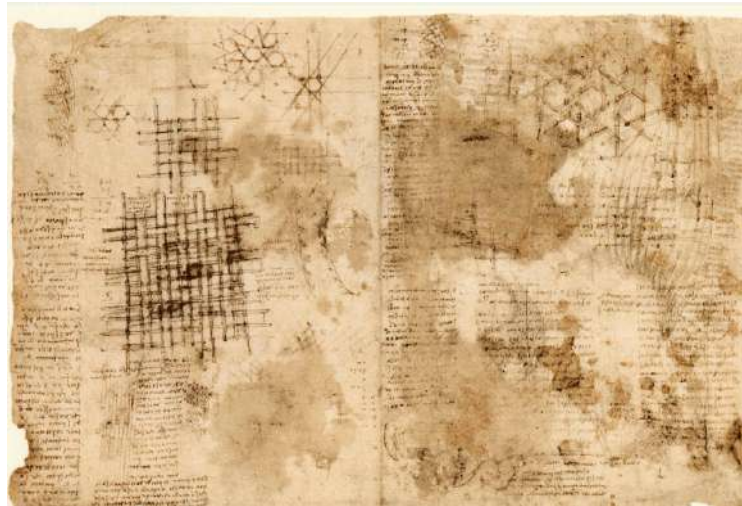


Figura 3.1: Padrões da Cúpula de Leonardo. Folha 71v do Codex Atlanticus

3.2. CONSTRUÍNDO CÚPULAS

A construção da ponte e das cúpulas de Leonardo tem um grande valor didático, pois envolvem raciocínio lógico, análise de padrões geométricos, noção espacial, capacidades manuais, trabalho em equipe, além dos componentes históricos e artísticos inerentes à atividade.

Uma das oficinas ofertadas pelo Museu é a construção de cúpulas a partir de padrões criados por Leonardo da Vinci. Esta atividade, nomeada de Leonardome, foi desenvolvida pelo Museu de Matemática de Catalunha.

Nesta atividade montaremos cúpulas usando diversos padrões. Para isso as peças serão posicionadas seguindo modelos da “Ficha de Padrões” mostrada na figura 3.4. Feito isso serão discutidos com os participantes a forma de abordar conceitos geométricos a partir desta atividade, analisando as formas geométricas que aparecem em cada uma das estruturas autoportantes escolhidas.

A montagem das cúpulas junto com a construção do caleidociclo de Sierpinski podem ser aproveitados para introduzir o conceito de ladrilhamento do plano. Um ladrilhamento, tesselação ou pavimentação do plano é uma coleção de figuras planas que preenchem o plano sem sobreposições ou lacunas. Existe



Figura 3.2: Cúpulas de Leonardo da Vinci - Padrão 5



Figura 3.3: Cúpulas de Leonardo da Vinci - Padrão 1

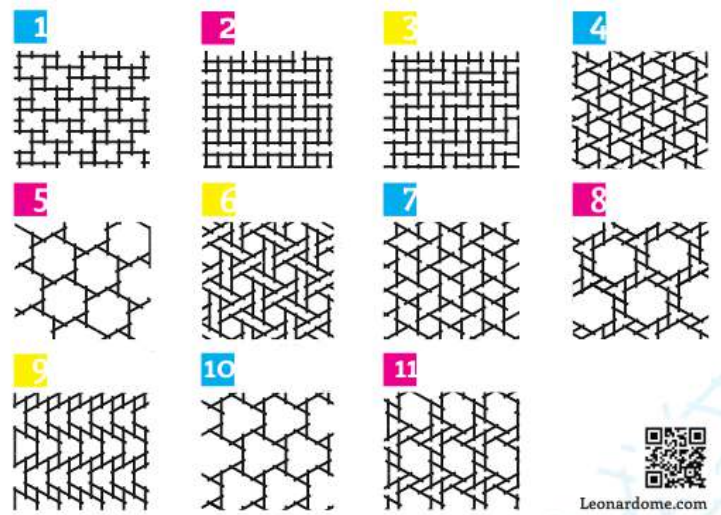


Figura 3.4: Padrões para Montagem de Cúpulas. Imagem do acervo do MMCA

uma enorme quantidade de pesquisas sobre pavimentações em todo o mundo e elas são uma fonte de muitos materiais de ensino em Matemática e arte.

Observemos que na “Ficha de Padrões” dos modelos das Cúpulas de Leonardo, as formas triangulares, quadradas e hexagonais predominam nas configurações. No entanto, têm uma mistura de polígonos em vários dos modelos, e nem sempre são regulares. Num ladrilhamento se os polígonos que aparecem são todos iguais e regulares, então eles só podem corresponder a um triângulo equilátero, um quadrado ou um hexágono regular, sendo assim um ladrilhamento regular.

Na oficina se abrirá um espaço para discutir com os participantes sobre a forma de abordar conceitos geométricos a partir desta atividade.

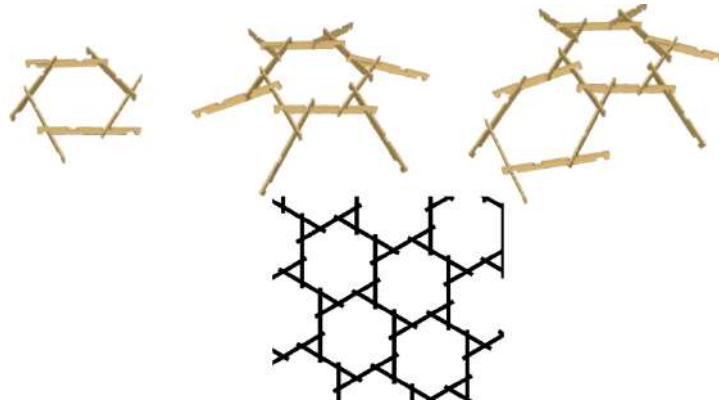


Figura 3.5: Modelo Padrão 5

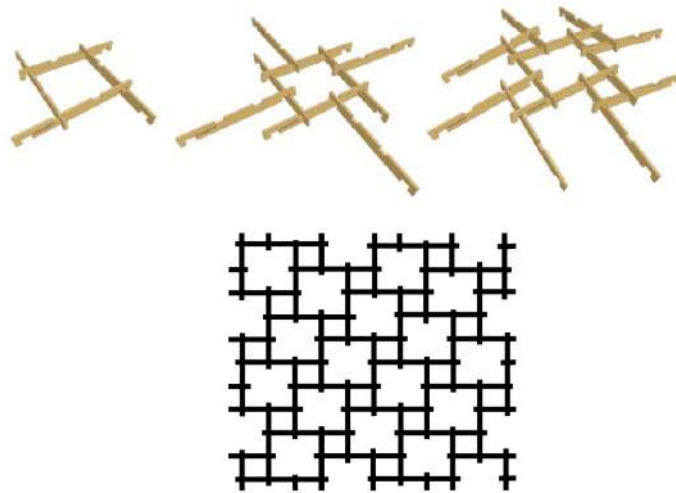


Figura 3.6: Modelo Padrão 1

APÊNDICES

A

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS

A.1. CALEIDOCICLO DE SIERPINSKI

A.2. TEOREMA DE PITÁGORAS - DEMOSTRAÇÃO SEM PALAVRAS

A.3. JOGANDO COM DOMINÓS

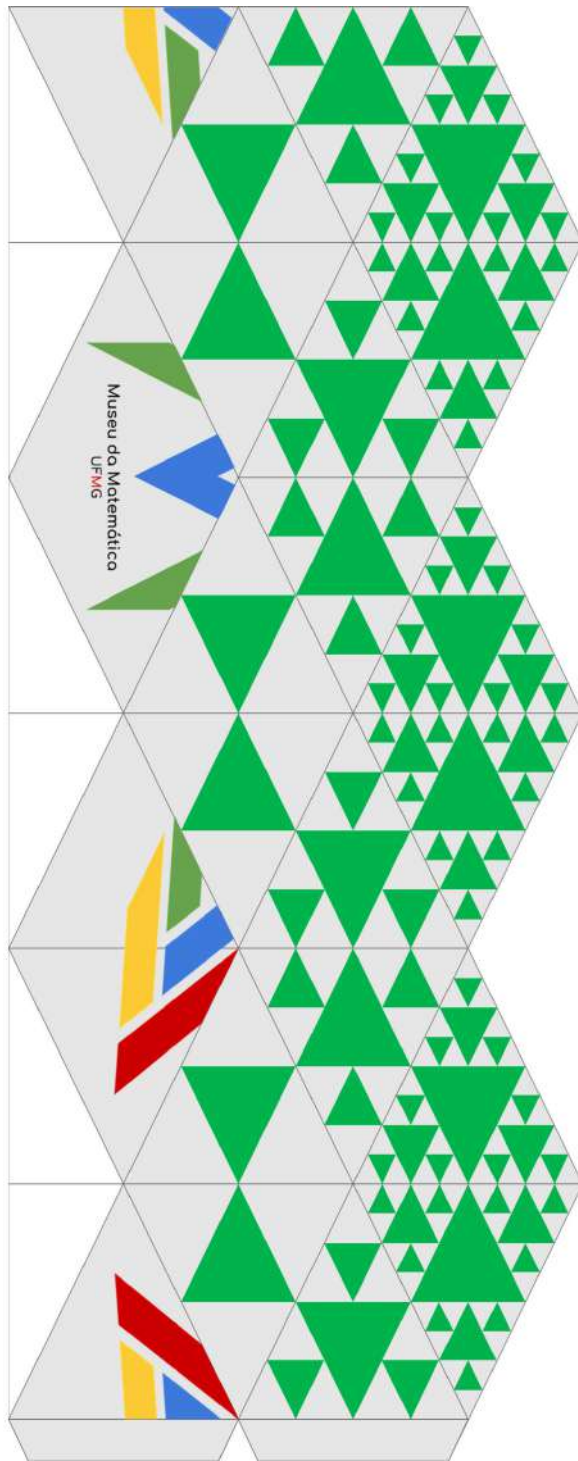


Figura A.1: Caleidociclo de Sierpinski

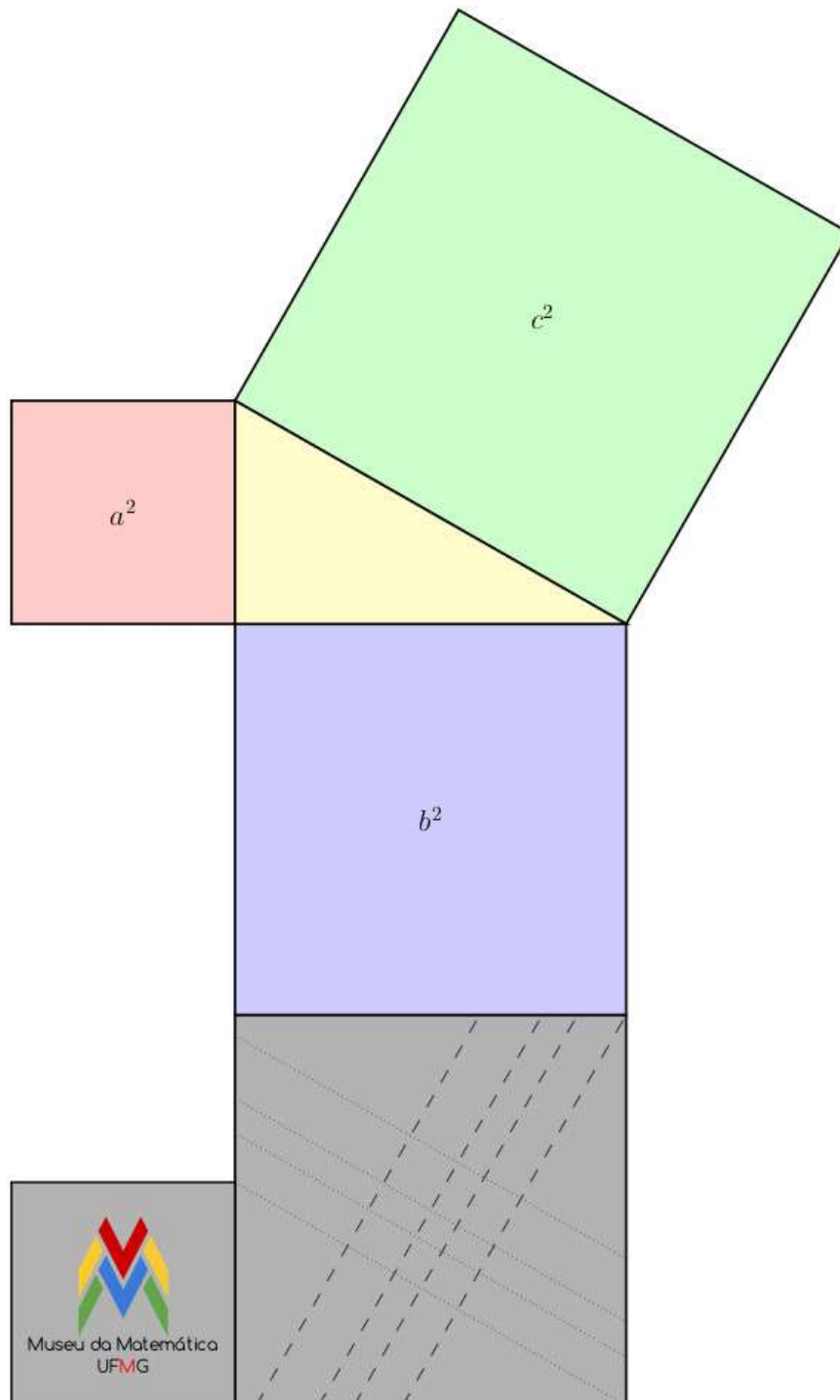


Figura A.2: Prova sem Palavras: Teorema de Pitágoras



Museu da Matemática UFMG

4	5	5	1	1	5	2
4	5	5	0	4	2	3
4	1	2	2	6	3	3
0	3	0	5	1	0	1
2	2	5	6	3	4	6
2	0	4	6	3	6	6
6	0	4	3	0	1	0
6	3	5	2	1	1	4

Posicione os 28 dominós no tabuleiro de tal forma que os números no tabuleiro coincidam com os números de pontos de cada dominó.

Figura A.3: Tabuleiro de Dominós

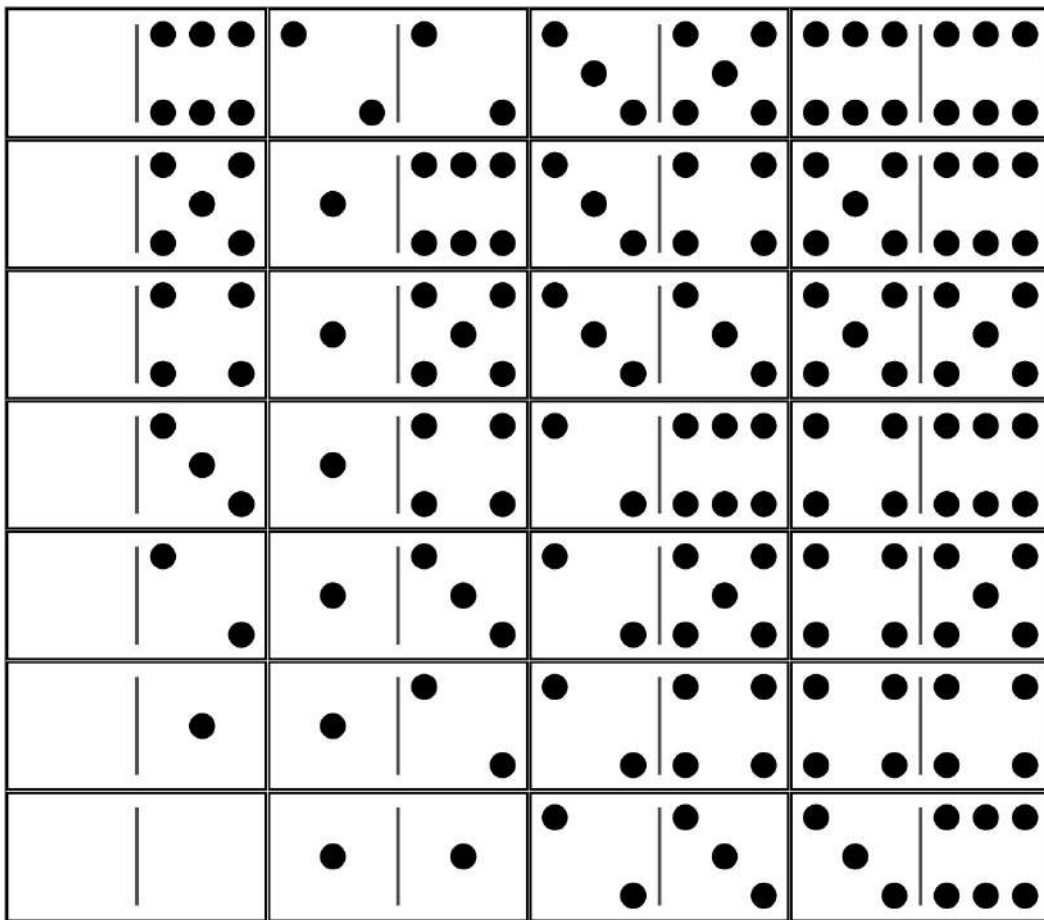


Figura A.4: Fichas de Dominós

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Dudeney, H. (1967). *Puzzles and Curious Problems*. Dover Publications.
- [2] GARDNER, M. (1998). *Divertimentos Matemáticos*. Ibrasa.
- [3] Silva, R. (2017). *Caleidociclos*. USP - São Carlos. 2017. Disponível em: <http://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-11042017-095821/pt-br.php>



PIPA TETRAÉDRICA DE GRAHAM BELL

CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA
FERREIRA E RAFAEL LEITE

JUNHO DE 2022

*Dedicamos este trabalho as professoras doutoras
Jeane do Socorro Costa da Silva e Acylena Coelho Costa,
pela paciência e também pela dedicação.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Breve História Da Pipa Nas Ciências

2 A Matemática da Pipa Tetraédrica

3 Considerações Finais e Comentários

Referências

PREFÁCIO

Esta oficina tem como objetivo a confecção e estudo, para fins didáticos, do modelo de pipa em formato de tetraedro criada por Alexander Graham Bell (1847 - 1922), como meio alternativo de ensinar matemática de maneira lúdica. A pipa como instrumento científico também será explorada nesta oficina, especificamente na área da matemática, escolhemos os conteúdos de: semelhança de triângulos, geometria fractal e progressão geométrica. Justificamos nossa oficina tendo como base a pesquisa de Júlia Borin, no livro *Jogos e Resolução de Problemas* – 6ª ed., 2007 –, que tem como tese a importância do jogo para a criança na educação, o uso de jogos nas aulas ajuda a diminuir bloqueios criados pelo temor e a sensação de incapacidade de aprender matemática, na situação de jogos os alunos falam de matemática e apresentam melhor desempenho e atitudes mais positivas na aprendizagem (Borin, 2007, p. 09). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos diz que recursos didáticos como os jogos têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas, porém, é preciso estar integrado a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BNCC, 2018, p. 276). Ou seja, para garantir a efetividade do jogo no ensino, é necessária uma metodologia atrelada a esse jogo. Segundo a BNCC, "os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)." (BNCC, 2018, p. 266). Por tal, nossa proposta de realizar uma oficina para ensinar a construir e manipular a pipa tetraédrica de Graham Bell possui os fundamentos necessários para lecionar matemática

vi CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA FERREIRA E RAFAEL LEITE

nos mais variados assuntos e níveis pedagógicos. Faremos isto utilizando materiais acessíveis, de baixo custo, possibilitando a extensão da atividade ao limite da imaginação do(a) docente. A oficina terá três momentos, o primeiro teórico, o segundo prático e o terceiro prático/teórico. Na primeira etapa, discutiremos a origem e história da pipa, sua influência e participação como ferramenta nas ciências. Falaremos de Graham Bell, quem foi e sobre seu hobby e objetivo com as pipas tetraédricas. Para elaboração de conteúdo, realizamos pesquisa do tipo bibliográfica, segundo Gil (2008, p. 50), "A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.", esta oficina tem embasamento na tese de mestrado de Nunes (2014) e no trabalho de Bortolossi (2009). Após esta primeira etapa, dividiremos os participantes da oficina em quatro grupos. No segundo momento iniciaremos a parte prática, os ministrantes da oficina irão se dividir entre os grupos e distribuir os materiais necessários para a construção dos tetraedros: canudos, linha de pipa, papel de seda, tesoura, cola e palitos de madeira (palitos de churrasco). Em seguida iremos disponibilizar a imagem de apoio para montagem da pipa, a partir disto os participantes irão iniciar as construções com auxílio dos ministrantes. Cada participante deverá fazer pelo menos dois poliedros de canudos, um para a oficina e outro para si próprio, cada grupo terá que construir pelo menos quatro tetraedros menores. Com os tetraedros de canudos construídos, partiremos para os cortes do papel de seda que cobrirá parcialmente os tetraedros, posteriormente uniremos os tetraedros menores formando um poliedro regular maior. Ao final deste momento, cada um dos quatro grupos terá um tetraedro maior constituído por quatro tetraedros menores, mostraremos como adicionar o peitoral da pipa, onde a linha será amarrada para subi-la ao céu, além disto, daremos dicas de como garantir a simetria do tetraedro a fim de que não tenda a voar para um único lado, ou rodopie sem planar no ar. A depender de alguns fatores podemos ir para um local de céu aberto e subir as pipas, cada grupo tenta elevar sua própria construção, dependerá da disponibilidade do evento, do local ter céu aberto, se o tempo está limpo e o vento forte. Antes de entrarmos na etapa prática/teórico, onde exploraremos a matemática da pipa, iremos unir os tetraedros maiores dos quatro grupos para formar uma pipa ainda maior que funciona da mesma

forma que a menor e ainda nos mostra na prática alguns conceitos matemáticos, tal como geometria fractal, progressão e a semelhança de triângulos. A terceira e última etapa é a exploração dos conteúdos matemáticos, apesar da riqueza de assuntos a serem abordados através da pipa tetraédrica, na oficina iremos estudar semelhança de triângulos, progressão geométrica e geometria fractal. Escolhemos esses assuntos pois é conveniente ao nosso trabalho, uma vez que iremos fazer a construção da pipa e observar na prática a aplicação desses conteúdos matemáticos.

Belém, Junho de 2022

Clícia Silva
Isabel de Sá
Jonatha Ferreira
Rafael Leite

BREVE HISTÓRIA DA PIPA NAS CIÊNCIAS

Segundo a coleção Gira Mundo n° 22 (2004), a pipa tem participação em descobertas como o telégrafo sem fio, para-raios e o avião. Não se tem certeza da origem da pipa, porém, os chineses as empinavam há 3 mil anos, porém, "Vários povos reivindicam a invenção: os gregos, os egípcios, os japoneses e os polinésios"(Gira Mundo, 2004, p. 01), além disto, os vigias do Quilombo dos Palmares usavam uma pipa como sinal de alarme, demonstrando que a pipa já era conhecida na África. Na tentativa de criar um aparato de voo, o ser humano tinha duas referências: aves e a pipa, em 1906, o brasileiro Alberto Santos Dumont fez a primeira máquina voadora mais pesada que o ar, movida por força própria, que nada mais era que um modelo de pipas-caixa com um motor embutido, o avião ganhou o nome de 14 BIS. Em 1250, Roger Bacon escreveu um estudo sobre as asas acionadas por pedais, baseado em experiências com pipas; 1496, Leonardo Da Vinci fez projetos teóricos com 150 máquinas voadoras, baseados na potencialidade das pipas; 1749, Alexander Wilson usou termômetros presos às pipas para medir a temperatura nas alturas; 1752, Benjamin Franklin, utilizando uma pipa com uma peça metálica, demonstrou, em um dia de chuva, que nas nuvens existe eletricidade estática; 1809, George Cayley realizou, por meio das pipas, experiência com fundamentos aeronáuticos que mais tarde seriam utilizados pela Nasa com as naves Apolo; 1883, Douglas Archibald prendeu um anemômetro à linha de uma pipa e mediu a velocidade do vento a 360m de altura; 1901, Guglielmo Marconi usou uma pipa para erguer uma antena e fez a primeira transmissão de rádio, que, mais tarde, inspirou Graham Bell em seu invento, o telefone. (Gira Mundo, 2004, p. 04).

2 CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA FERREIRA E RAFAEL LEITE

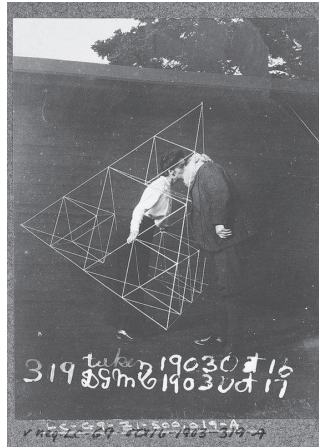


Figura 1.1: Pipa de Graham Bell (Fonte: AMEBE)

Segundo Bortolossi (2009), Alexander Graham Bell foi um cientista escocês, inventor do telefone. Bell também tinha interesse em aerodinâmica, como resultado suas pipas de células tetraédricas, "Alexander Graham Bell propôs um modelo de pipa aerodinamicamente estável e cujo tamanho pode ser aumentado mantendo-se constante a razão eficiência por peso"(Bortolossi, 2009).

A MATEMÁTICA DA PIPA TETRAÉDRICA

Quanto à progressão geométrica (PG)

"é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma."(Dante, 2016, p.221).

A PG que representa o número de canudos é dada pelo valor inicial do total de canudos, multiplicado pela razão, dado pelo total de tetraedros suficientes para formar um tetraedro maior, e pela posição em escala da pipa, dado por uma potência, temos que a PG que representa o número de canudos da pipa é: $6 \cdot 4^{n-1} = \text{total de canudos}$. Há diversos tópicos de matemática que podem ser abordados utilizando a pipa tetraédrica, como por exemplo, o conceito de semelhança entre duas figuras geométricas. Segundo Dante (2016, p. 240) "Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.", esses triângulos possuem proporção k obtida pela razão entre dois lados homólogos quaisquer, existem casos para se provar a semelhança, são eles: critério AA (ângulo, ângulo), dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro; critério LLL (Lado, Lado, Lado), dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados

4 CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA FERREIRA E RAFAEL LEITE

do outro; critério LAL (Lado, ngulo, Lado), dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais. (Dante, 2016, p. 241). Diz-se que duas figuras A e B planas são semelhantes se é possível estabelecer uma bijeção entre seus pontos, de modo que essa transformação preserve sua estrutura. Nos triângulos é possível observar que uma transformação de semelhança atua como uma mudança de escala, é por isso que neles podemos estudar semelhança por meio do caso AA, que ocorre quando dois triângulos possuem dois dos seus ângulos ordenadamente congruentes, e analisando a estrutura da pipa, pode-se perceber que ela é constituída por vários tetraedros regulares, que constituem um tetraedro maior, e como os ângulos internos das faces são todos iguais, pois são triângulos equiláteros, eles são semelhantes entre si, e mesmo se mais tetraedros forem adicionados para compor a pipa, os triângulos aumentarão e não deixarão de ser semelhantes.

Pode-se calcular a razão de semelhança entre os lados desses dois triângulos, uma vez que o canudo usado para fazer um lado do triângulo menor tem medida L , ou seja, $R = \frac{2L}{L} = 2$, e portanto a razão entre os lados é 2. Note que o mesmo não é válido para a área, pois dobrar o comprimento dos lados não indica que a área será dobrada, mas sim multiplicada por 4. Para comprovar este fato, lembremos que a área de um triângulo equilátero de lado L é dada por $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, e desta forma a razão entre as áreas é dada por $R = \frac{4L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{L^2\sqrt{3}} = 4$. É interessante perceber que esta propriedade é válida de modo geral na pipa, isto é, sempre que se dobrar sucessivamente a medida do lado do triângulo, sua área quadruplicará em relação ao lado original, e isto caracteriza uma progressão geométrica, pois se listarmos a área dos tetraedros (que ficam cobertas com seda), é possível provar que há uma certa razão constante entre elas. Se tem apenas 1 tetraedro compondo a pipa, então 2 de seus lados estão cobertos com seda, então a área de superfície é $A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}$. Com 4 tetraedros compondo a pipa, tem-se 8 de seus lados cobertos com seda, e sua área é dada por $A_4 = 2L^2\sqrt{3}$, e assim sucessivamente. Então à medida que se aumenta a pipa, a sua superfície de contato com o ar aumenta exponencialmente, sendo esta representada por $A_n = 2^{2n-3}L^2\sqrt{3}$, onde A_n é a área de superfície da

pipa construída com $2^{2(n-1)}$ tetraedros fundamentais. Podemos ir ainda mais além e pensar no volume destes tetraedros, pois cada tetraedro de aresta L , tem volume $V = \frac{L^3\sqrt{3}}{12}$, então formando uma pipa com 4 tetraedros destes teremos um volume $V_4 = \frac{L^3\sqrt{3}}{3}$, e uma pipa com 16 tetraedros terá volume $V_{16} = \frac{4L^3\sqrt{3}}{3}$, e assim sucessivamente, sempre quadruplicando o volume. É nesse ponto que devemos chamar atenção sobre o porquê a pipa ser composta por vários tetraedros menores, e não simplesmente por um tetraedro maior, o que seria bem mais simples de construir. Observe que o volume de um objeto está intrinsecamente ligado com o seu peso, e no caso da pipa, quanto mais pesada ela for, menor a sua eficiência durante o voo, e quando dobramos a aresta do tetraedro fundamental para formar um tetraedro maior, sua área de superfície aumenta em 4 vezes, mas seu volume aumenta em 8 vezes, e deste modo o peso da pipa cresce muito mais rápido do que a área de sua superfície para ficar em contato com o ar. Observe as áreas de superfície das pipas e dos seus volumes construídos sem se preocupar com a sua eficiência:

$$\text{Pipa com 1 tetraedro de aresta } L: A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}; V_1 = \frac{L^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Pipa com 1 tetraedro de aresta } 2L: A_4 = 2L^2\sqrt{3}; V_4 = \frac{L^3\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Pipa com 1 tetraedro de aresta } 4L: A_{16} = 8L^2\sqrt{3}; V_{16} = \frac{4}{3}L^3\sqrt{3}$$

$$\text{Pipa com 1 tetraedro de aresta } 2^n L: A_n = 2^{2n-3}L^2\sqrt{3}; V(n) = \frac{L^3\sqrt{3}}{12} \cdot 8^{n-1}.$$

A razão entre as áreas de superfície duas pipas consecutivas é dada por $R_1 = \frac{2^{2(n+1)-3}}{2^{2n-3}} = 4$, e a razão entre o volume de duas pipas consecutivas é $R_2 = \frac{8^n}{8^{n-1}} = 8$. Deste modo, a razão entre a área e o volume entre essas pipas está tendendo a 0, isto significa que em algum momento a pipa não aguentará o seu próprio peso e não voará. Por outro lado, vejamos as áreas de superfície e dos seus respectivos volumes quando a pipa é construída do modo de Bell:

$$\text{Pipa com 1 tetraedro: } A_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}; V_1 = \frac{L^3\sqrt{3}}{12}$$

Pipa com 4 tetraedros: $A_4 = 2L^2\sqrt{3}; V_4 = \frac{L^3\sqrt{3}}{3}$

Pipa com 16 tetraedros: $A_{16} = 8L^2\sqrt{3}; V_{16} = 4L^3\frac{\sqrt{3}}{3}$

Pipa com 2^{2n-1} tetraedros: $A_n = 2^{2n-3}L^2\sqrt{3}; V_n = \frac{L^3\sqrt{3}}{12} \cdot 4^{n-1}$

A razão entre as áreas de superfície de duas pipas consecutivas continua sendo $R_1 = 4$, mas desta vez o volume entre duas pipas consecutivas agora é $R_3 = \frac{4^n}{4^{n-1}} = 4$, ou seja, a razão entre a área superficial e o volume de uma pipa é sempre constante, mantendo também constante a razão entre a sua eficiência e o seu peso, possibilitando com que a pipa voe. Além disso, a estrutura piramidal da pipa é preservada quando aumentamos o seu tamanho, sendo o tetraedro fundamental que é usado no início muito similar ao todo, e quando isto ocorre, estamos lidando com um tipo muito especial de geometria, conhecido como geometria fractal, definida como um conjunto de elementos de um espaço que tem a propriedade de auto semelhança. A geometria dos fractais é valiosa por se tratar de uma geometria que a euclidiana não abrange, e por isso, era vista como inútil, e conseqüentemente era pouco valorizada, até a criação dos computadores modernos.



Figura 2.1: Triângulo de Sierpinski (Fonte: SBM)

Hoje se sabe que os fractais são ricos em aplicações, desde os estudos de fenômenos caóticos nos sistemas dinâmicos, como também as suas aparições na natureza e nas obras de arte. Como exemplo de fractal podemos destacar o triângulo de Sierpinski, cuja natureza tem aplicação direta na construção da pipa tetraédrica. A imagem (referenciar a imagem) mostra a aparência da pipa com canudos, para se ter referência.

Aplicamos esse projeto inicialmente como uma oficina de sólidos geométricos, em 2019, no Centro de Ciências e Planetário do Pará (CCPPA), para crianças que se inscreveram na colônia de férias ocorrida na segunda semana



Figura 2.2: Construção da Pipa (Fonte: Nunes 2014/ Os autores)

de julho, em 2020 a oficina de construção de pipas tetraédricas foi aplicada ao grupo de mulheres Tainá-kan, também do CCPA.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E COMENTÁRIOS

Concluimos deste trabalho que a utilização de materiais concretos se torna fundamental no ensino da matemática. Conforme Nunes (2014), a construção da pipa tetraédrica toma o cotidiano dos alunos como elemento motivador para o surgimento do conhecimento objetivo, isto é, o conhecimento formal do conteúdo matemático apresentado. Segundo Duarte (2006), todo conteúdo a ser trabalhado dentro da zona de desenvolvimento próximo do aluno, isto é, assuntos que abordam conhecimento que os alunos já tem contato em seu cotidiano, porém agora passa a ser visto mais profundamente, necessita da ajuda de uma pessoa externa, pois o aluno não aprende por si só. Nessas circunstâncias, ao acrescentar conteúdos matemáticos ao elemento recreativo de praxe dos alunos, como a pipa, é de fundamental importância a orientação do professor para que haja evolução de conhecimento. Ainda conforme o autor, a utilização de materiais concretos contribui para a formação do conhecimento significativo do aluno: quando ele deixa de ver a pipa apenas como um conjunto de canudos, papéis de seda e linha que pode voar e passa a atribuir conceitos matemáticos a ela (como progressão geométrica, semelhança de triângulos e fractais).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília (2018).
- [2] BORIN, Julia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. 6.ed. São Paulo: IME/USP, 2007.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática - Contexto e Aplicações 1 ano*. 3 edição. São Paulo: Átila, 2016.
- [4] BORTOLOSSI, Humberto José. A PIPA TETRAÉDRICA DE ALEXANDER GRAHAM BELL. UFF - Conteúdos Digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, 2009. Disponível em: <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/pgb/pgb-html/pgb-br.html>>. Acesso em: 09 de março de 2022.
- [5] Alexander Graham Bell Pipas Geométricas. AEMEBE. Disponível em: <<https://aemebe.weebly.com/pipas-geomeacutetricas-de-alexander-graham-bell.html>>. Acesso em: 09 de março de 2022.
- [6] NUNES, Everaldo Rodrigues. *A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem*. Tese de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, 2014.
- [7] DUARTE, Newton. *Vigotski e o "aprender a aprender": crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana*. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2006.



**SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS
ESTRUTURADA POR UARC: UM MODELO
PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO**

**EDNA MACHADO DA SILVA; NATANAEL FREITAS CABRAL
E MIGUEL CHAQUIAM**

21 DE JUNHO DE 2022

*Àqueles que buscam aprimorar
sua prática docente em Matemática.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Sequências Didáticas Estruturadas por UARC's

1.1 Concepções

1.2 As UARC's e o cenário da Educação Matemática no Brasil

2 Sequência Didática: O Conceito de função e suas linguagens

2.1 UARC 1: Definição de função

2.2 UARC 2: Função como relação de dependência entre variáveis

2.3 UARC 3: Função e suas Representações

2.4 Outras considerações

Apêndices

A UARC 1

B UARC 2

C UARC 3

Referências

PREFÁCIO

Apresentamos uma oficina baseada numa pesquisa realizada sobre o ensino do conceito de função e desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) em discussões do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ). O PPGEM forma mestres profissionais em Ensino de Matemática e o GHEMAZ desenvolve pesquisas que entrelaçam História, Educação e Matemática e colabora com o PPGEM no desenvolvimento de produtos educacionais para o ensino de matemática na linha metodológica desenvolvida por Cabral (2017), as sequências didáticas estruturadas como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC).

O propósito desta oficina é divulgar entre profissionais e estudantes da educação matemática um modelo estruturante para sequências didáticas condizente com as orientações curriculares atuais para o ensino de matemática no Brasil. O modelo apresentado promove por meio de intervenções dialógicas a formalização gradual de conceitos matemáticos desde a base teórica da UARC até a manipulação de um produto construído nessa estrutura didática.

Belém, junho de 2022

Edna Machado da Silva
Natanael Freitas Cabral
Miguel Chaquiam

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS ESTRUTURADAS POR UARC'S

As Sequências Didáticas são bastante utilizadas em aulas de Matemática como forma de organizar o sequenciamento da aprendizagem, facilitando assim a mediação do professor. Embora não seja uma novidade essa maneira de ensinar Matemática, os materiais escritos produzidos, podem, porventura lacunas a respeito da mediação oral do professor durante a aplicação do material a maneira de fazê-la. Assim, a seguir apresentamos uma possibilidade de estruturar sequências didáticas, prevendo as possíveis intervenções mediadoras para que a adoção dessa metodologia de ensino aconteça de forma eficaz.

1.1. CONCEPÇÕES

As Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC's) tratam-se de um modelo estruturante de aulas de Matemática sequenciadas que tem por objetivo a (re)construção gradual em nível de formalização de conceitos matemáticos, em que o professor desenvolve o papel de mediador de intenções educacionais e o educando desenvolve o papel de sujeito ativo, autônomo, reflexivo e argumentador de sua aprendizagem.

Para que a (re)construção de conceitos aconteça de forma completa, isto é, sem lacunas que possam prejudicar o desenvolvimento da aprendizagem são estabelecidas intervenções com diferentes intenções de aprendizagem, observar, organizar informações, construir, manipular, deduzir, refletir, conforme o nível de formalização alcançada pelo educando, como ilustramos na figura 1.1.

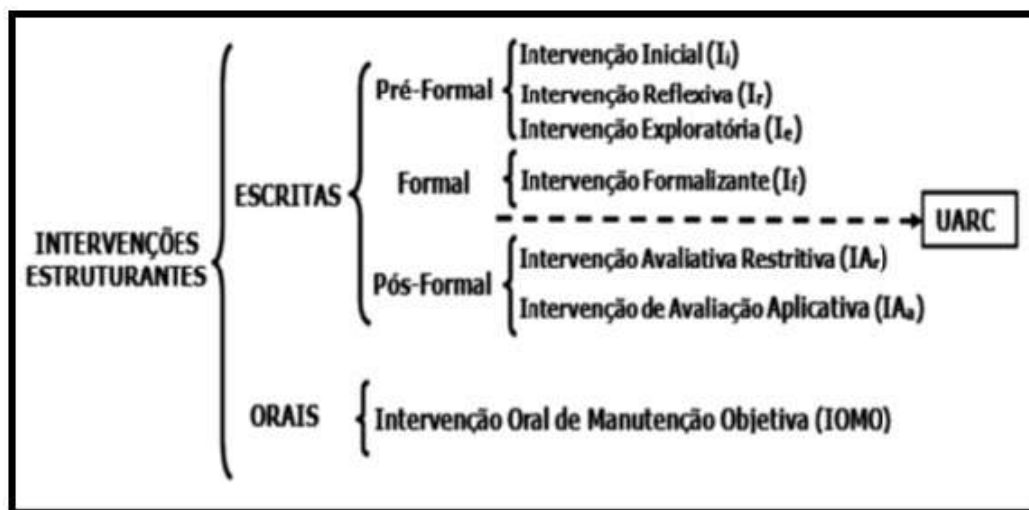


Figura 1.1: Níveis de formalização das Intervenções

A figura 1.1 ilustra a estrutura de cada atividade de uma sequência didática na perspectiva do modelo UARC. Nas intervenções escritas de nível pré-formal tem-se a Intervenção inicial a intenção de estimular uma ideia mais intuitiva do conceito. A intervenção exploratória, por sua vez, convida o educando a construir experimentos e realizar simulações. A intervenção reflexiva, faz questionamentos que levam a realização da análise do que foi observado e conjecturar conclusões a respeito.

A intervenção formalizante trata-se das definições e conclusões formais que devem ser apresentadas exclusivamente pelo professor, aludindo as conclusões pré-formais estabelecidas pelos educandos.

Para verificar se o objetivo de aprendizagem foi alcançado tem-se as intervenções avaliativas restritivas e aplicativas, que diferenciam-se apenas pelo fato de que a primeira é uma aplicação direta do que foi formalizado e a segunda necessita mais análise e contextualização pra que seja respondida.

As intervenções estruturantes orais, que são o diferencial desse modelo, apesar de não constarem no protocolo escrito, percorrem por toda UARC, "pois ajudam o professor a modular as aproximações e distanciamentos dos

alunos em relação aos objetivos de aprendizagem"[3]. Essas intervenções orais de manutenção objetiva são recorridas pelo professor sempre que necessário para garantir "que os conceitos sejam formalizados de maneira gradual, preenchendo lacunas de situações não previstas na elaboração da sequência"[9] e envolvendo o educando naquilo que chamamos de ping-pong dialógico. Não podemos entender essa intervenção como um simples diálogo sobre o assunto, o professor deve se reconhecer como sujeito epistêmico do processo, conduzindo o processo para o objetivo de aprendizagem da atividade, preservando o tempo de reflexão e de socialização de ideias dos educandos.

Bom, mas no que esse modelo se baseia para indicar que possa ser um constructo potente para o ensino de objetos matemáticos? As UARC's quando se propõem a (re)constituir conceitos fundamentam-se na Psicologia Histórico-Cultural (Vygotsky) sobre o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), bem com, as noções de Análise Microgenética na investigação da construção de conhecimentos.

Assim, as intervenções são compreendidas como ações interativas, que o professor planeja com intenção de provocar as chamadas Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP) que permitem ao aprendiz avançar de um Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) para um Nível de Desenvolvimento Efetivo (NDE), os quais chamamos respectivamente como Zonas de Tensão Discursivas ALFA, BETA e GAMA. Nelas o educando é estimulado a refletir, estabelecer hipóteses, verificar possibilidades sobre as consequências do que está construindo ou manipulando fazendo associações como conceitos matemáticos que vão sendo (re) descobertos e (Re)construídos. E assim, perceber regularidades e estabelecer generalizações empírico-intuitivas. Ilustramos na figura a construção das Zonas de tensão discursivas 1.2.



Figura 1.2: Zonas de Tensão Discursivas ALFA, BETA E GAMA

Na figura 1.2, linha mais escura são as intensões didáticas do professor, e neste ponto destaca-se a importância da segurança epistêmica do professor sobre o objeto matemática e, para os educandos, a base cognitiva sobre os conceitos circunscritos ao objeto matemático em questão.

A linha de tom mais claro, representa as reações ou respostas do educando frente as intervenções do professor, sejam elas escritas ou orais. As setas vazadas ilustram as intervenções orais do professor quando percebe a aproximação e/ou distanciamentos do aluno em relação aos objetivos de aprendizagem. "Concebo o conjunto das Intervenções Oraís de Manutenção Objetiva (I- OMO) como sendo uma espécie de SD paralela, oculta de natureza complementar"[3].

Nesse modelo estruturante que apresentamos percebemos as UARCs e os conhecimentos dos educandos se encaixando como na figura 1.3.

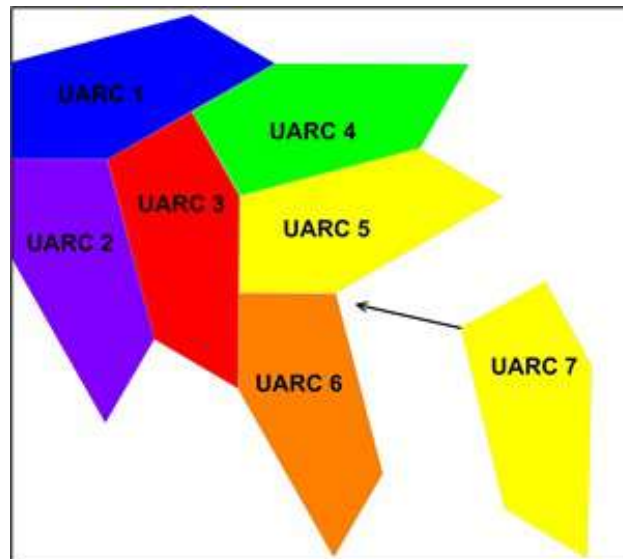


Figura 1.3: (Re)construção conceitual nas UARC's

Temos pela figura 1.3 a ilustração de como os conhecimentos vão se encaixando, e como deixam possibilidades para que novos conhecimentos possam ser agregados ampliando essa (re) construção de conceitos. Enfatizamos a relevância de se planejar a primeira UARC de modo a não prejudicar o encaixe das demais UARC's, nela o atrativo para envolvimento dos educando deve ser pensado considerando sua realidade e experiências. Neste sentido, temos um alinhamento de nosso modelo com as atuais diretrizes educacionais e com o cenário educacional em Matemática no Brasil, que apresentamos a seguir.

1.2. AS UARC'S E O CENÁRIO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

O modelo estruturante da UARC surgiu concomitantemente com as novas normativas curriculares para Educação Básica brasileira, e possui estreita similaridade com o que se propõe atualmente para o currículo de Matemática no Brasil como ilustramos na figura 1.4.

Os estudantes [...] devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519)

As articulações estruturais dessas SD pretendem favorecer a criação de um ambiente no qual “(...) os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar”. (CABRAL, 2017, p.10)

Figura 1.4: UARC x BNCC

A figura 1.4, extraída de [9] demonstra o caráter atual que o modelo estruturante da UARC pode agregar à prática docente, tendo relevância científica e formativa a sua divulgação para professores de matemática em formação inicial ou continuada. Percebe-se na figura 1.4 que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), [2], apela para uma didática reflexiva e dialógica, entretanto, [6] afirma que essa é uma fragilidade na prática do professor de matemática que pode ser superada mediante formação continuada.

Segundo [5], essa prática reflexiva é elemento necessário no processo de formação de professores de matemática, pois trata-se de uma construção de raciocínio pedagógico, um pensar pedagogicamente sobre o conteúdo.

Sob essa perspectiva, no GHEMAZ foram desenvolvidos diversos produtos educacionais para o ensino de matemática com a estrutura UARC que após experimentação foram validados como potentes para o desenvolvimento da aprendizagem dos objetos matemáticos para os quais foram construídos. Exemplo disso é o trabalho de [9], cujo produto adotou o modelo estruturante de [3] para o ensino do conceito de função.

Esta oficina tem o objetivo de apresentar o modelo da UARC aos participantes da X Bienal de matemática por meio da manipulação da sequência

didática “O conceito de função e suas linguagens”. A sequência didática usa como recurso didático material manipulável, interdisciplinaridade e problemas do cotidiano, deste modo será possível que os participantes da versatilidade que o modelo estruturante UARC em ser adaptável a diferentes tendências do ensino de matemática e recursos didáticos com uso ou não de tecnologias da informação e comunicação.

A modelo a ser manipulado na oficina visa o desenvolvimento articulado entre diferentes linguagens matemáticas (diagrama, tabular, algébrica, par-ordenado e gráfica) e a língua materna, haja vista que “Essa percepção da unidade da Matemática [...] fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento” [9].

A sequência a ser manipulada na oficina corrobora com [4] quando afirmam que cada representação matemática apresenta dificuldades próprias e que as imbricações de uma pode ocasionar o não entendimento de outra. Observar isso por meio da interação promovida pela UARC evita a impregnação de equívocos conceituais que muitas vezes acompanham a vida escolar dos estudantes de matemática.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS LINGUAGENS

Neste capítulo apresentamos a sequência didática para o ensino do conceito de função no Ensino Médio, a qual intitulamos “Conceito de função e suas linguagens”. Esse constructo foi criado e validado no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará e aprimorado durante as reuniões do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ).

A pesquisa pode ser apreciada na íntegra em [9] que teve como aporte teórico e metodológico para elaboração de seu produto educacional a Teoria das Situações Didáticas, segundo Brousseau (1996;2008) e as Sequências Didáticas (SD) estruturadas como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), conforme Cabral (2017). Tais aportes foram escolhidos por serem metodologias que se articulam na pesquisa de modo a promover um processo de ensino interativo dialógico intencional como forma de potencializar a aprendizagem, isto é, o jogo discursivo entre professor- aluno e aluno-aluno é conduzido pelo material aqui apresentado impregnado de intenções de aprendizagem.

Tendo em conta o universo plural da escola, consideramos que a proposta ora apresentada não possui rigidez na maneira de aplicá-la, sendo, portanto, passível de adequações, pois:

A escola não é um fast-food em que todo prato deve estar pré-cozido e ser produzido com rapidez gerando aprendizagens. A

escola é uma cozinha gourmet em que os pratos devem ser elaborados a partir dos ingredientes disponíveis e dos desejos dos clientes em seus múltiplos paladares. E as receitas (metodologias didáticas) não devem ser simplesmente reproduzidas, mas (re)criadas, (re)pensadas, compartilhadas, estudadas em profundidade para atender ao contexto em que serão apresentadas como uma obra de arte [1] p. 76.

Por esse motivo, esta SD é um produto de profundo e sistemático estudo sobre o objeto publicado em [8], sobre o ensino e aprendizagem do objeto e sobre as necessidades dos sujeitos para quem ela se destina apresentado em [7]. Logo, as três atividades da sequência didática Conceito de Função e suas Linguagens trazem “armadilhas epistemológicas e cognitivas” para promoção das habilidades e objetivos de aprendizagem (OA) em que se tem a intenção de ensinar com este produto conforme o quadro a seguir.

A SD Conceito de Função e suas Linguagens foi planejada para ser aplicada com estudantes divididos em grupos para que realizem as tarefas propostas de maneira coletiva e colaborativa de modo que o professor promova momentos de socialização das conclusões dos grupos, com discussões, a fim de chegar a um consenso que permita introduzir a formalização dos conceitos pretendidos. Essa discussão pode ser imediata ou precisar de intervenções orais do professor, haja vista que o modelo de SD que adotamos promove uma formalização gradual do domínio conceitual Matemático, um processo que exige tempo para o desenvolvimento de habilidades.

Para que se potencialize o êxito da adoção destas atividades, é necessário que o professor tenha consciência se os estudantes possuem a base cognitiva preparada para receber os conhecimentos a serem estudados. Os conteúdos base para a atividade são: interpretar uma situação que envolva ideia aditiva e multiplicativa, representar e converter essa situação para a linguagem algébrica, quadro, diagrama, par ordenado e ponto no plano cartesiano, bem como fazer as manipulações aritméticas para obter valor arbitrário a partir de outro e segundo uma regra observada. Tais conhecimentos são habilidades previstas de serem adquiridas no ensino fundamental, e são base cognitiva para a apren-

dizagem do estudo de funções no primeiro ano do ensino médio, série a que se destina a sequência didática. Caso o professor constate, por meio de diagnósticos ou experiências, que os estudantes não possuem tais conhecimentos base é possível utilizar de forma opcional a oficina de conhecimentos básicos disponível neste livro.

Ao longo da aplicação das atividades, o professor poderá intervir como o que chamamos Intervenção Oral de manutenção Objetiva (I-OMO), é um recurso de improviso discursivo fundamental para que os conceitos sejam formalizados de maneira gradual, preenchendo lacunas de situações não previstas na elaboração da sequência. Embora muito importante, essa intervenção deve acontecer apenas quando necessário para resolver impasses que os alunos não consigam resolver entre si, preservando a autonomia do estudante e possibilitando “futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem” [3], p. 46. Ao final do protocolo escrito de cada atividade da SD são propostas intervenções avaliativas que nada mais são do que uma verificação de aprendizagem imediata com intenção de avaliar a apreensão do aluno sobre o conhecimento adquirido e assim poder corrigir algum erro conceitual. Nas seções que seguem apresentamos uma a uma as instruções para o professor que deseje aplicar as UARC’s deste constructo, que está na íntegra nos apêndices.

2.1. UARC 1: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Esta atividade tem como objetivo definir função, domínio, contradomínio e imagem. Trata-se de um esquema de realização de doze correspondências, dadas as regras, os conjuntos de partida e os conjuntos de chegada. Após a realização das correspondências os alunos realizam a sobreposição de doze cartas uma a uma conforme a semelhança da configuração das correspondências realizadas por eles. O material didático utilizado está caracterizado como material manipulável estático, aquele que durante a manipulação não sofre alteração física. O material manipulável desta UARC pode ser impresso em tamanho A4 e, de maneira opcional ser colado em material mais consistente, para que as situações de correspondências fiquem como em um tabuleiro. As cartas também podem ser impressas em tamanho A4 e devem ser posteriormente

recortadas. A forma como as cartas estão dispostas neste material sevem de “gabarito” para a disposição final dos pareamentos das cartas que os estudantes farão com as situações no tabuleiro. Durante a execução da intervenção inicial é importante que os estudantes falem sobre o raciocínio adotado para realizar as correspondências. Após a primeira intervenção exploratória, deve-se verificar se os estudantes conseguiram fazer corretamente as sobreposições das cartas às correspondências por eles realizadas e a lógica que utilizaram para fazer o pareamento entre as cartas e as situações de correspondência. As intervenções reflexivas e exploratórias desempenham papel de construção dos conceitos pretendidos promovendo a observação de padrões e conclusão de uma generalização do conceito que caracterize o comportamento funcional. Após a terceira intervenção exploratória deve-se confirmar se em todos os grupos sobraram apenas as cartas das situações 1, 2, 4 e 5, isto é, as situações que apresentam comportamento funcional segundo a definição de função, por ora de conhecimento apenas do professor. Após a socialização das conclusões dos grupos o professor deve fazer intervenções orais para estimular cognitivamente os estudantes para que cheguem a um consenso sobre as características das cartas remanescentes. O professor fará a formalização quando os estudantes alcançarem um nível pré-formal da definição de função com frases espontâneas como: “não sobra elementos na partida”, “não repete elementos no primeiro conjunto”, “todos os elementos de A se correspondem uma única vez com o de B”. A formalização é descrita apenas no material do professor, que deve fazer os alunos copiarem no espaço destinado no material do aluno. Por fim, para garantir que os conceitos foram devidamente compreendidos e que os alunos se apropriem da linguagem Matemática, propomos duas atividades de verificação de aprendizagem, uma restritiva e outra aplicativa.

2.2. UARC 2: FUNÇÃO COMO RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA ENTRE VARIÁVEIS

Esta atividade tem o objetivo de identificar as variáveis de uma função e a relação de dependência entre elas. Parte de uma fotografia extraída de uma

reportagem publicada em um jornal de circulação estadual sobre a venda de farinha de mandioca na feira do Ver-O-Peso em Belém do Pará. As intervenções ocorrem com o intuito de fazer com que o aluno perceba as variáveis preço, tipo de farinha, quantidade de litros e reconheça a relação existente entre elas. O estudante também poderá desenvolver a capacidade de reconhecer variáveis quantitativas e qualitativas e criar notações para elas sem utilizar os convencionais “x” e “y”. Recomenda-se incentivá-los a usar símbolos que remetam à natureza da variável. Os estudantes deverão estabelecer generalizações algébricas entre as variáveis e o cálculo de uma a partir da outra, identificando qual a variável dependente e qual a independente. Nessa atividade deve ser enfatizada importância das variáveis no comportamento funcional, como discutida. A formalização da atividade 2 necessita de articulação com a primeira atividade, uma vez que retoma conceito de domínio e contradomínio de função. Ao final também existem intervenções avaliativas onde o professor deve verificar como os estudantes estão fazendo suas notações e se as formas de representar revelam a compreensão de variáveis e relações entre elas.

2.3. UARC 3: FUNÇÃO E SUAS REPRESENTAÇÕES

A terceira e última atividade desta sequência didática tem o objetivo de fazer os estudantes reconhecerem e representarem função em diferentes linguagens Matemáticas dando ênfase a representação gráfica segundo a definição de função. A atividade parte da conversão de diagramas e tabelas para gráfico de pontos com o intuito de ilustrar como a não-ambiguidade e não-exceção podem ser observadas e representadas em um gráfico. As intervenções reflexivas permitem diferenciar quando uma correspondência representada em diagrama, tabela ou gráfico é ou não função e como converter e visualizar essa informação num gráfico. Consideramos que esta atividade estimula um exercício matemático saudável de recorrer a definição como estratégia de construção de uma linha de raciocínio. Isto é, as argumentações mobilizadas pelos alunos terão fundamentações coerentes e com linguagem Matemática apropriada. Embora as situações propostas na atividade sejam apenas em gráfico de pontos discretos, a formalização apresenta uma proposição de como um gráfico representa

uma função segundo a definição, e, a ilustração mostra como ocorre em gráficos de funções contínuas, isto é, uma generalização do que foi construído pelos estudantes por meio das intervenções reflexivas e exploratórias. Note que as ilustrações da formalização marcam no eixo das abscissas o domínio ao qual o gráfico pertence, a intenção disso é enfatizar a importância de se olhar como o domínio está definido, como ponto crucial de reconhecimento do comportamento funcional. Nas intervenções avaliativas o professor deve proporcionar retomadas das atividades anteriores e promover uma consciência epistêmica de que o aprendizado ali construído foi fruto de cooperação e que tem serventia na sua vida prática. Enfatizamos que em todas as atividades da sequência didática para o ensino do conceito de função o diálogo deve ser estimulado, colocando o professor no papel de um detetive que investiga um crime (aprendizado) que possui suspeitos, mas não pode fazer acusações sem provas (dar de imediato as definições), então faz interrogatórios e reconstituições a fim de que o próprio suspeito se delate seja por expressão corporal ou por inconsistência de informações. Então, as intervenções reflexivas e exploratórias (interrogatórios e reconstituições) possuem a intenção de fazer o estudante externalizar, discutir, defender opiniões e se convencer da opinião do outro. Assim, o seu percurso de raciocínio e nível de apreensão dos objetivos de aprendizagem pretendidos são claramente observados pelo professor que poderá intervir quando necessário.

O ensino de matemática necessita de práticas coerentes com as tendências curriculares para a educação matemática. Não se admite que a sala de aula seja um espaço onde apenas o professor fale, o diálogo entre professor e seus educandos envolve um amadurecimento cognitivo do educando e um acompanhamento da aprendizagem para o professor. É fértil um espaço onde se promova a interação, a criatividade, a liberdade para se expressar e negociar ideias.

2.4. OUTRAS CONSIDERAÇÕES

O ensino de matemática necessita de práticas coerentes com as tendências curriculares para a educação matemática. Não se admite que a sala de aula

seja um espaço onde apenas o professor fale, o diálogo entre professor e seus educandos envolve um amadurecimento cognitivo do educando e um acompanhamento da aprendizagem para o professor. É fértil um espaço onde se promova a interação, a criatividade, a liberdade para se expressar e negociar ideias.

A oficina ora apresentada visa enriquecer a prática docente de matemática de um repertório didático e metodológico que possa ajudar na superação de desafios recorrentes nas escolas brasileiras, que, não raro, são atribuídos ao ensino de matemática. Entendemos que instrumentos formativos que elevem a conexão entre os sujeitos e fomentem o raciocínio e a argumentação por meio da linguagem matemática possam educar pessoas estrategicamente ativas e autônomas na sociedade.

APÊNDICES

A

UARC 1

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Atividade 1- O que é função?

OBJETIVOS: Definir Função, Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função.
RECURSO: Folha de atividade e cartas de correspondência.

- 1) Estabeleça uma correspondência entre os elementos do conjunto A (partida) e os elementos do conjunto B (chegada) em cada uma das 12 situações propostas.
- 2) Utilize as cartas que recebeu para sobrepor uma a uma às respectivas situações de correspondência.
- 3) Retire as cartas das situações nas quais existem elementos do conjunto de PARTIDA sem correspondência.
- 4) Retire das situações que sobraram as cartas nas quais no conjunto de PARTIDA existe elemento com mais de uma correspondência.
- 5) Analise as situações que sobraram após as retiradas das cartas e registre no quadro, **SIM** ou **NÃO**, conforme as condições a seguir para o conjunto de PARTIDA.
Condição 1- **Todo** elemento do conjunto de PARTIDA possui correspondente;
Condição 2- Cada elemento do conjunto de PARTIDA se corresponde uma **única** vez.

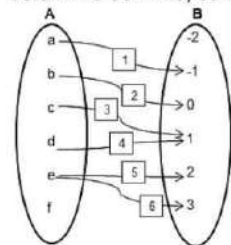
QUADRO 1

	Condição 1	Condição 2
Situação _____		
Situação _____		
Situação _____		
Situação _____		

- 6) O que podemos afirmar sobre o conjunto de PARTIDA em relação às correspondências estabelecidas nas situações analisadas no quadro?
- 7) O que podemos afirmar sobre o conjunto de CHEGADA em relação às correspondências estabelecidas nas situações que restaram?
- 8) Nas situações analisadas no quadro 1, observe o conjunto de CHEGADA e determine um novo conjunto formado pelos elementos que possuem correspondência.

9) Determine uma maneira para expressar o padrão de comportamento de todas as situações analisadas no quadro 1.

Copie aqui a **FORMALIZAÇÃO** do professor



(Intervenção Avaliativa Restritiva) No diagrama a baixo está representada a correspondência entre alguns elementos de **A** e de **B**. Determine qual elemento e qual seta devem ser retirados para que esse diagrama de flechas represente uma função de **A** em **B** e justifique sua resposta e determine domínio, contradomínio e imagem da função obtida.

(Intervenção Avaliativa Aplicativa) A produção por hora de uma fábrica pode ser expressa pela função:

$$p: T \rightarrow N \\ t \mapsto n = 80 \cdot t$$

em que $t \in T$ é o tempo em horas e $n \in N$ é o total de peças produzidas, sendo $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $N = \{0, 40, 80, 120, 160, 200, 240, 320, 400\}$. Represente essa situação em diagrama de flechas; determine se é função e em caso positivo determine seu domínio, contradomínio e imagem.

Situação 1
 A = {Triângulo, Quadrado, Pentágono}
 B = {3, 4, 5}
 Regra: Polígono ao número de lados

Situação 2
 Converta os pontos do gráfico em correspondências nos diagramas.

Situação 3
 Converta as associações do quadro para o diagrama.

A	1	1	2
B	1	2	3

Situação 4
 $x \in A, y \in B$
 $y = 2x$

Situação 5
 $A = B = \{-1, 0, 1\}$
 Regra: Associar um número ao seu quadrado.

Situação 6
 A = Letras do alfabeto
 B = Dias da semana
 Regra: Associar a letra inicial ao dia.

Situação 7
 Estabeleça uma regra para as correspondências dos diagramas abaixo.
 Regra: _____

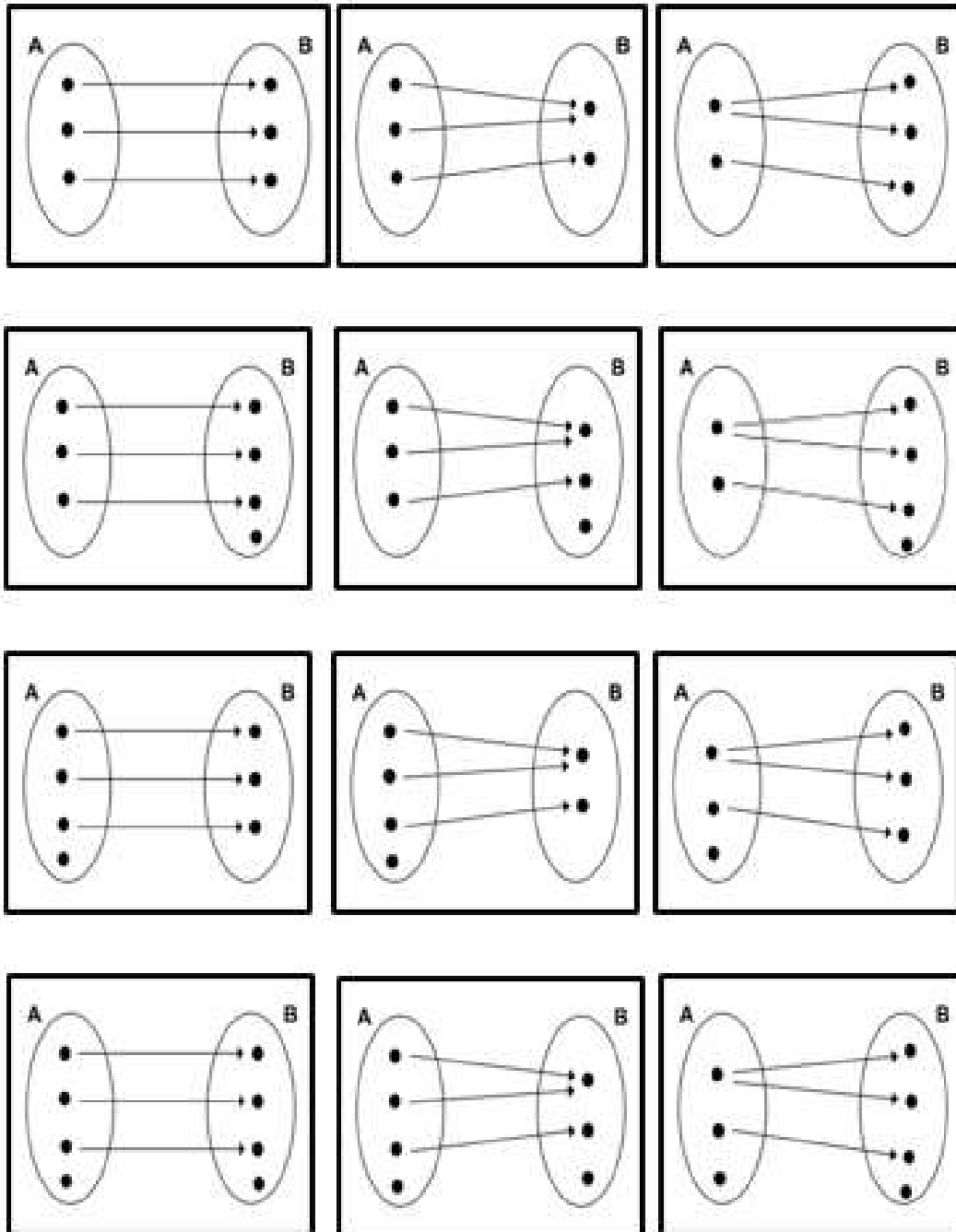
Situação 8
 A = Conjunto de retângulos.
 B = {10 cm, 12 cm}
 Regra: Associar o retângulo a seu perímetro.

Situação 9
 A = {12 cm², 6 cm², 4 cm²}
 B = Conjunto de retângulos
 Regra: Associar a medida de área ao(s) retângulo(s) correspondente(s).

Situação 10
 A = {1, 2, 3, 4}
 B = {2, 3, 4, 7}
 Regra: Corresponder os números ao seu sucessor.

Situação 11
 A = {cidade, estado, continente, país}
 B = {Rio de Janeiro, Europa, Região Norte}
 Regra: Associar os tipos de divisões territoriais aos nomes dos lugares.

Situação 12
 A = {d, m, r}
 B = {a, i, e, o}
 Regra: Associar as letras que formam sílabas da palavra "medida".



B

UARC 2

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Atividade 2- Função como relação de dependência entre variáveis

OBJETIVOS – Identificar variáveis de uma função e a relação de dependência entre variáveis.
 RECURSO – Folha de atividade



Ney Marcondes-Diário do Pará - Belém, 07/04/2019.

<http://m.diarioonline.com.br/noticias/para/noticia-587591-quem-nao-gosta-de-uma-boafarinha.html?v=566>

- 1) A fotografia retrata a venda da tradicional farinha de mandioca na feira do Ver-O-Peso em Belém do Pará. Observe as informações sobre essa iguaria paraense na fotografia, considerando as variações de tipos e preços do produto.
- 2) Complete o quadro a partir das informações da fotografia preenchendo o valor a ser pago em reais para cada quantidade em litros de cada tipo de farinha.

Quadro 1: VALOR A PAGAR (R\$) POR TIPO DE FARINHA E QUANTIDADE (ℓ).

QUANTIDADE (ℓ)	D'ÁGUA PURA	BRANCA BISCOITO	D'ÁGUA PURA DE BRAGANÇA
1			
2			
3			
4			
5			

- 3) Observando a variação em linha e em coluna do quadro, em qual a variação é quantitativa e em qual é qualitativa.

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS ESTRUTURADA POR UARC: UM MODELO PARA O ENSINO DO CONC

- 4) É possível estabelecer algum critério de variação em cada uma dessas colunas? Qual?
- 5) Qual a expressão que estabelece a correspondência entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida em cada um dos casos?
- 6) Justifique se a relação estabelecida entre o valor a pagar e a quantidade de farinha a ser adquirida, em cada um dos casos, pode representar uma função.
- 7) Considerando cada uma das expressões estabelecidas anteriormente, quanto uma pessoa deve pagar se comprar 10 litros de farinha?
- 8) Considerando cada uma das expressões estabelecidas anteriormente, quantos litros de cada tipo de farinha uma pessoa poderá comprar com R\$ 60,00?
- 9) Note que a variável "quantidade de farinha" comprada determina a variável "valor a pagar", considerando a definição de função, qual variável pertence ao domínio e qual pertence ao contradomínio da função?

Copie aqui a FORMALIZAÇÃO do professor

10) O quadro abaixo descreve situações definidas como função, complete-o indicando corretamente a variável independente (**V I**) e a variável dependente (**V D**) de cada situação.

Situação-problema	V I	V D
O volume (V) de etanol produzido em litros varia com a massa (M) de cana de açúcar utilizada em quilogramas.		
O espaço (E) percorrido por um automóvel corresponde ao tempo (T) gasto no percurso a uma velocidade constante.		
A quantidade (N) de objetos idênticos determina o valor (V) a ser pago na compra desses objetos.		
A altura (H) da coluna de mercúrio em um termômetro está associado a temperatura (T) do ambiente em que se encontra.		
O número de dias (D) trabalhados determina o salário (S) de um trabalhador.		
Quanto maior for a área (A) a ser pintada, maior será o preço (P) do serviço.		

11)

"No município de Bragança, o produtor de farinha Zeca Camutá trabalha no ramo há mais de duas décadas produzindo 500 litros por mês."
(Adaptado de Alexandra Cavalcanti/Diário do Pará-07/04/2019)

Tomando por base as informações contidas no texto acima, responda:

- Quais as variáveis envolvidas na situação descrita e identifique qual é independente e qual é dependente?
- Considerando a quantidade total de farinha produzida mês a mês, durante 6 meses, estabeleça em linguagem funcional o domínio, o contradomínio e a expressão que relaciona as variáveis.
- Utilizando a expressão algébrica estabelecida acima, calcule a produção total ao final de 8 meses.
- Determine o tempo necessário para que a produção atinja a quantidade de 5.000 litros de farinha.

C

UARC 3

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Atividade 3- Função e suas representações.

OBJETIVOS: Reconhecer e representar função em diferentes linguagens matemáticas.
 RECURSO: Folha de atividade e cartas de correspondência.

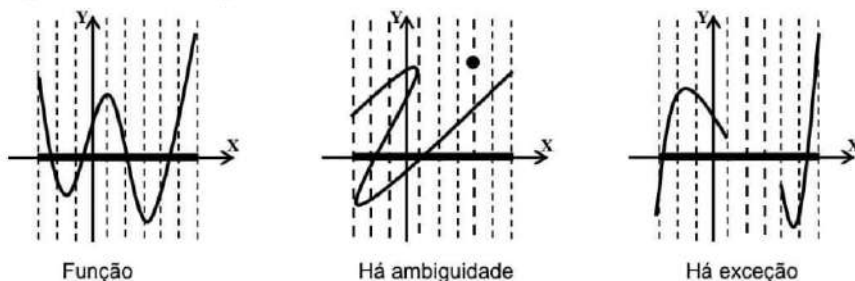
- 1) Identifique nas situações apresentadas na Atividade 1 as diferentes representações de função e os padrões nos casos em que as correspondências não representam uma função.
- 2) Considerando que $x \in A$ e $y \in B$, represente no sistema de eixos (XOY) as situações expostas, classifique-as como função, ou não, e justifique sua resposta.

<p>Situação 1</p>	<p>Situação 2</p>																						
<p>Situação 3</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <thead> <tr><th>A</th><th>B</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	A	B	-1	-1	0	1	1	2	2	3	2	4	<p>Situação 4</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <thead> <tr><th>A</th><th>B</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	A	B	-1	1	0	0	1	1	2	4
A	B																						
-1	-1																						
0	1																						
1	2																						
2	3																						
2	4																						
A	B																						
-1	1																						
0	0																						
1	1																						
2	4																						

- 3) Após conduzir retas verticais por todos os valores $x \in A$, responda:
 - a) Em qual das situações as retas intersectam valores de $x \in A$ que não possuem um correspondente $y \in B$?
 - b) Em qual das situações as retas intersectam valores $x \in A$ que possuem mais de um correspondente $y \in B$?
 - c) Em qual das situações as retas intersectam todos os valores $x \in A$ que possuem um único correspondente $y \in B$?
 - d) Qual o padrão que relaciona as retas traçadas e as situações que representam funções?

FORMALIZAÇÃO

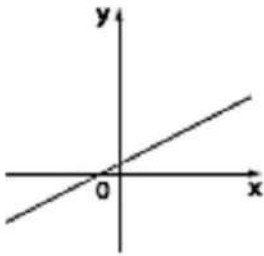
Diz-se que um gráfico no sistema cartesiano representa uma função quando **toda** reta vertical paralela ao eixo das ordenadas intersecta sempre o domínio e o gráfico em um **único** ponto, não havendo **ambigüidades** e nem **exceções**.



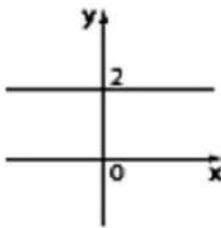
OFICINAS

4) Justifique em quais dos casos abaixo o gráfico não representa uma função f definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} , denotada por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

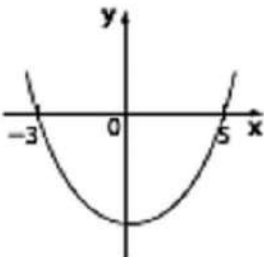
a)



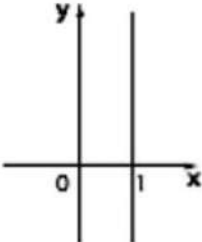
b)



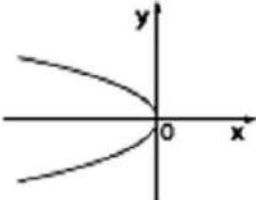
c)



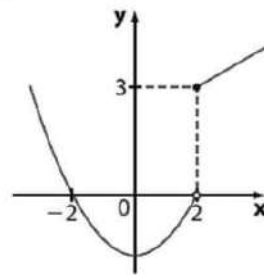
d)



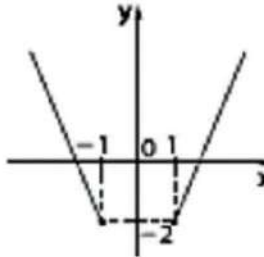
e)



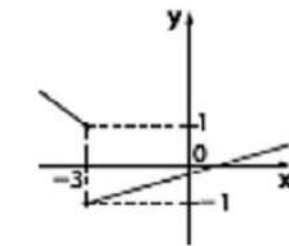
f)



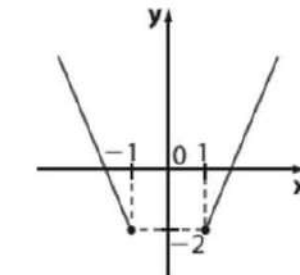
g)



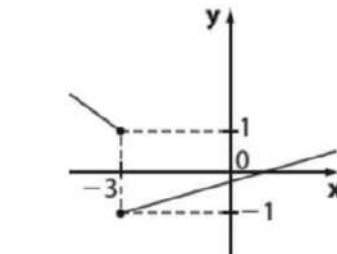
h)



i)



j)



5) Tomando por base a fotografia da atividade 2 e sabendo que um comerciante possui 60 l remanescentes de farinha do tipo "d'água pura de Bragança, suponha que esse comerciante decidiu renovar o estoque dessa farinha fazendo uma promoção conforme os dados constantes no quadro abaixo:

FARINHA D'ÁGUA PURA DE BRAGANÇA	
Até 10 <i>litros</i>	R\$ 5,50 – <i>litro</i>
De 11 a 30 <i>litros</i>	R\$ 4,50 – <i>litro</i>
A partir de 31 <i>litros</i>	R\$ 4,00 – <i>litro</i>

- Não vendemos quantidades fracionadas.

Identifique qual dos gráficos abaixo melhor representa a situação acima, de modo a ilustrar um comportamento funcional e justifique. Explique para quais quantidades é mais barato comprar um litro a mais dessa farinha.

a) Represente algebricamente cada uma das situações descritas acima.

b) Represente graficamente cada uma das situações descritas acima.

c) Represente num único gráfico todas as situações descritas acima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BATISTA, N. L.; FELTRIN, T.; BECKER, E. L. S. (2019). *Autoformação docente e reflexões sobre vivências escolares. Inquietações e Proposituras na Formação Docente*. Capítulo 7. Ponta Grossa, PR: Atena Editora.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica (2017). *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF.
- [3] CABRAL, N. F. (2017). *Sequências didáticas: estrutura e elaboração*. Belém: SBEM / SBEM-PA.
- [4] CHAQUIAM, M. e CABRAL, N. F. (2019). *Funções: uso, desuso e reflexos no ensino*. Belém: SINEPEM-IFPA.
- [5] SEABRA, S. F. F. e GONÇALVES, T. V. O. (2017). *Experiência Formativa e saberes amazônicos e pedagógicos de conteúdo na formação inicial de professores para os anos escolares iniciais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- [6] SILVA, L. E. (2019). *Educação Matemática e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC): um desafio para a educação básica*. Revista Humanidades e Inovação, Palmas.
- [7] SILVA, E. M; FELIX, A. P. N. e CHAQUIAM, M. (2018) *Aprendizagem do conceito de função no ensino médio* Congresso Pan-Amazônico de Matemática. Belém.

- [8] SILVA, E. M.; MIRANDA, D. S. P. e CABRAL, N. F.(2019) *FUNÇÃO: Uma reconstrução histórica do conceito* Anais. XIII Seminário Nacional de História da Matemática. – Fortaleza: SBHMat.
- [9] SILVA, E M. (2020). *O Conceito de Função e suas Linguagens*. 179 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém-PA.



CADERNOS AUTOCORRETIVOS DE FRAÇÕES E SITUAÇÕES PROBLEMA

ALBUQUERQUE, GEOVANA. CARVALHO, RAPHAEL.
FIRER, MARCELO. MARTINOTTI, VITOR. SILVA,
DOUGLAS. SILVA, KAROLINE. VIEIRA, JOÃO.

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

Este texto é a oficina apresentada na X Bienal da SBM é fruto do trabalho de toda a equipe da Residência Pedagógica do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Unicamp: Amanda Soares, Douglas Silva, Fernando Oliveira, Geovana Albuquerque, Igor Santos, Jessica Didole, João Marcelo Santa Maria, Karoline Silva, Marcelo Firer (coordenação), Miriam Tomazetto (preceptora, EMEF Pavanatti), Maria da Graça de Paula, Matheus Ferreira, Raphael Carvalho e Vitor Martinotti.

Agradecemos o apoio da CAPES, por meio do Programa de Residência Pedagógica e a acolhida pela equipe e alunos da EMEF Maria Pavanatti Fávares.

CONTEÚDO

Prefácio

1 Os Cadernos Autocorretivos: Frações

1.1 Características e estrutura dos CAFs

2 Situações Problema

2.1 Divisão de fração por inteiro e inteiros por frações: $c \div \frac{1}{d} \neq$

$$\frac{1}{d} \div c$$

2.2 Produto de fração por inteiro $a \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times a?$

3 O que não esperar dos CAFs?

3.1 O que mais vem por aí?

Referências

PREFÁCIO

Os *Cadernos Autocorretivos: Frações (CAFs)* foram desenvolvidos pela equipe da Residência Pedagógica de Matemática da Unicamp para os anos finais do Ensino Fundamental. Os CAFs foram utilizados originalmente durante a pandemia de COVID-19 e estão disponíveis gratuitamente.

São mais de 600 atividades curtas, mas minuciosas sobre conteúdo de frações, com forte apelo visual. As atividades enfatizam os aspectos conceituais de frações e apresentam uma gradatividade muito suave de dificuldade. Estes cadernos foram inspirados nos *Caheir de Calcul* da pedagogia Freinet.

Na oficina oferecida na X Bienal da SBM, os participantes poderão conhecer a estrutura e lógica interna dos CAFs e serão convidados a propor situações-problema contextualizadas e, através destas, explorar as múltiplas nuances de conceitos desenvolvidos nos CAFs.

Belém, Junho de 2022

Albuquerque, Geovana; Carvalho, Raphael;
Firer, Marcelo; Martinotti, Vitor;
Silva, Douglas; Silva, Karoline.
Vieira, João Marcelo.

AUTOCORRETIVOS: OS CADERNOS FRAÇÕES

Em outubro de 2020, teve início o programa de Residência Pedagógica do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp na EMEF Maria Pavanatti Fávaro, em Campinas. Financiado pela Capes, a equipe era formada formada por 10 estudantes, uma professora supervisora (preceptora, na terminologia da Capes) na escola da um coordenador local, docente do Imecc - Unicamp.

O contexto deste projeto, que se desenrolou no auge da pandemia de Covid-19, impôs uma enormidade de desafios, o principal era envolver de fato os alunos da escola em atividades que permitissem manter algum contato com o universo escolar, com a matemática e, na medida do possível, com alguma aprendizagem significativa.

Em 2020, a estratégia adotada foi desenvolver pequenas sequências de atividades curtas, para serem trabalhadas ao longo de duas semanas. As atividades foram desenvolvidas para os alunos dos 5^{os} e 6^{os} anos do ensino fundamental da escola. O ponto de partida para o desenvolvimento destas atividades era a construção de algum artefato simples, que pudesse ser feito com materiais encontrados em toda casa (bolinhas coloridas de papel amassado, dados com rolos de papel higiênico, pequenos jogos de cartas de papelão, etc.). Tendo estes artefatos como fio condutor, eram propostas mais 8 atividades envolvendo alguma abordagem ou habilidade matemática básica. Os ciclos eram encerrados com um encontro virtual através da plataforma Google Meet. Os ciclos de atividades

produzidos podem ser acessados em <https://tinyurl.com/mr34p6px>.

Para o ano de 2021, considerando a dificuldade de acesso à internet de parte significativa dos alunos, pensamos em desenvolver material que pudesse ser impresso e levado para casa. A intenção continuava sendo a de manter algum nível de contato e rotina escolar com os alunos, ou seja, o requisito básico seria desenvolver material que permitisse realizar pequenas atividades diárias. No que se refere aos objetos de conhecimento, em conversa com os professores de matemática da escola, dois conteúdos foram considerados cruciais, no sentido de parte significativa dos alunos dos anos finais do ensino fundamental não terem domínio considerado adequado: frações e equações. É conhecida na literatura as dificuldades e defasagem de aprendizagem com frações (que no Brasil, a partir do PISA chegou às manchetes dos jornais diários, vide <https://tinyurl.com/tjhsxa7c>) e também o seu papel crucial para aprendizagem de outros conteúdos em matemática, notoriamente álgebra (veja, por exemplo, [12]). Em comum acordo com os docentes da escola, foi decidido que trabalharíamos os conteúdos de *fração* com alunos de 6^{os} e 7^{os} anos.

O formato adotado, de cadernos autocorretivos, foi motivado por uma experiência pregressa muito positiva que o coordenador do projeto teve, no início dos anos 2000, em uma escola no município de Santa Bárbara D'oeste (EE Alcheste de Godoy Andia), no âmbito de um projeto financiado pela Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo, onde foram utilizados os *Cadernos Autocorretivos de Matemática*, versão brasileira dos *Cahiers de Calcul* da pedagogia Freinet [7]. Trata-se, na edição original, de um conjunto 16 cadernos, organizados em quatro conjuntos. Cada caderno tem oito sequências de atividades. Cada sequência de atividade inicia-se com um exemplo, que deve ser seguido pelos alunos. Ao final da sequência (após três páginas com 12 atividades), os alunos podem corrigir suas atividades e fazer um pequeno teste, para que o professor acompanhe o desenvolvimento.

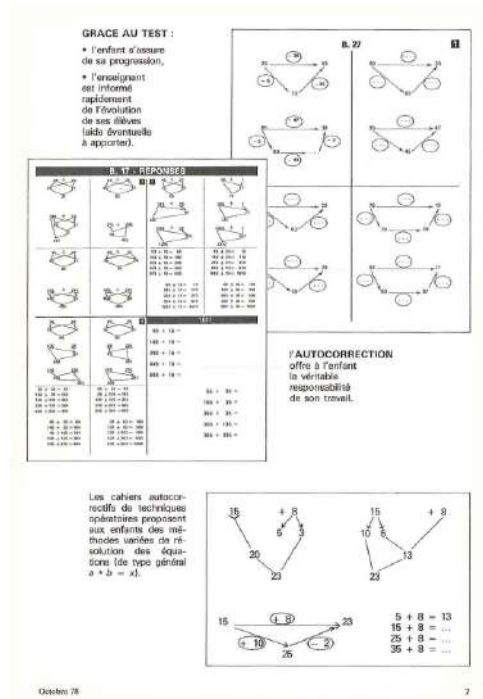


Figura 1.1: Imagem dos *cahiers* em texto de seu autor, B. Monthubert, em [8].

Discorrendo sobre os objetivos dos *cahiers*, Monthubert afirma:

"O nosso objetivo, através destes cadernos, não é levar as crianças a mecanizar um algoritmo que lhe foi imposto de antemão. É fazê-las sentir que existem relações entre números, que as diferentes composições numéricas obedecem a certas leis que são independentes das formas de representação (...). É por isso que sugerimos que as crianças façam sempre cálculos com os números, substituindo a mecânica pelo raciocínio."

Tradução dos autores, a partir de <https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/2990>

Os Cadernos Autocorretivos: Frações (CAFs), desenvolvidos pela equipe da Residência Pedagógica da Matemática da Unicamp, partilha destes objetivos. O ponto de partida para o desenvolvimento destes cadernos foi uma decomposição genético do conteúdo, frações, baseado principalmente em três textos. Os dois primeiros, Aharoni [1] e Kupferman [9] são textos escritos por pesquisadores em matemática que se debruçaram de modo sistemático na matemática do ensino fundamental. O terceiro foi escrito pelo conhecido educador matemático John A. Van de Walle [13], um texto de muito fôlego que abrange todo o conteúdo matemático do ensino fundamental e organiza o conhecimento acumulado em centenas de trabalhos de pesquisa.

Assim como os Cadernos Autocorretivos originais, cada sequência de atividades tem 4 páginas, cada página dividida em quatro quadrantes (Figura 1.2). No primeiro quadrante da primeira página temos um exemplo para as atividades que se desenvolvem nas três primeiras páginas. Na quarta página, cada um dos três primeiros quadrantes traz a correção das atividades das páginas pregressas e o último é reservado para um teste, a ser acompanhado pelo professor.

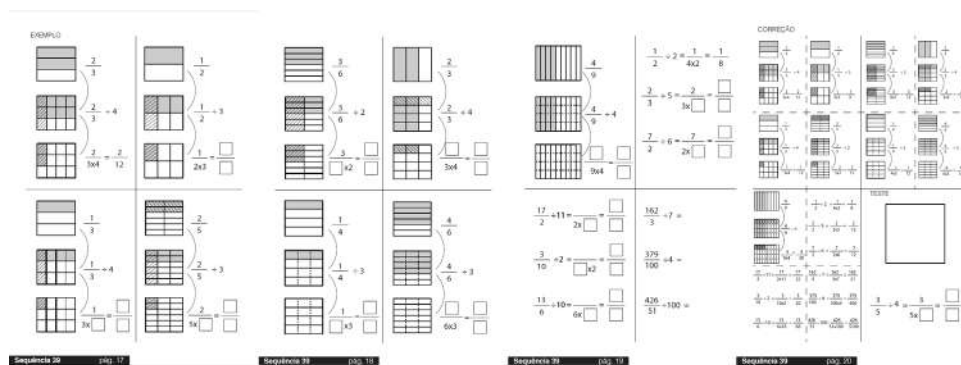


Figura 1.2: As quatro páginas da sequência 39, no quinto caderno.

1.1. CARACTERÍSTICAS E ESTRUTURA DOS CAFs

Apresentamo a seguir os principais características, os princípios norteadores dos CAFs, ilustrando cada um deles com alguma figura dos cadernos já produzidos.

1. Multiplicidade de representações: Seguindo as recomendações existentes na literatura [13], são exploradas diversas representações de fração: geométrica (pizza e retangular, principalmente), reta real, conjuntos e naturalmente a representação simbólica $\frac{a}{b}$. Mais ainda, estas representações são apresentadas de modo intercalado, o que, segundo [11], favorece o desenvolvimento de proficiência.

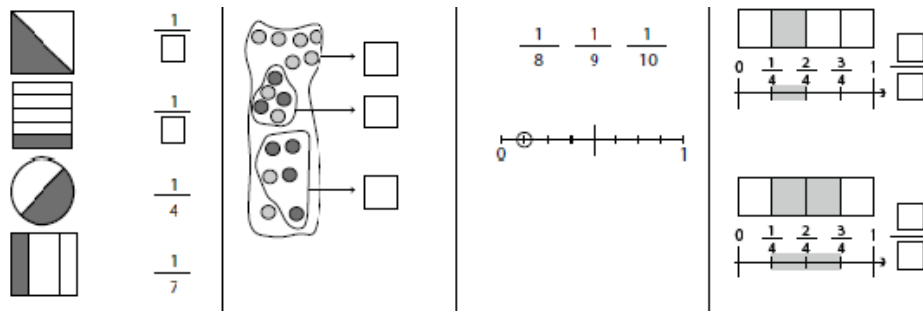


Figura 1.3: Representações diversas: geométrica, subconjunto, pontos da reta, transição de geométrica para intervalo de reta.

2. Apelo visual: Os Cadernos Autocorretivos: Frações exploram fortemente as representações visuais de frações, o que os torna particularmente interessantes para alunos de baixo rendimento (ver, por exemplo, [3]).
3. Gradatividade: Concebidos para ser feitos a partir de exemplos, as atividades procuram manter um ritmo suave de evolução, uma gra-

datividade que permite aos alunos avançar e ter uma experiência de sucesso.

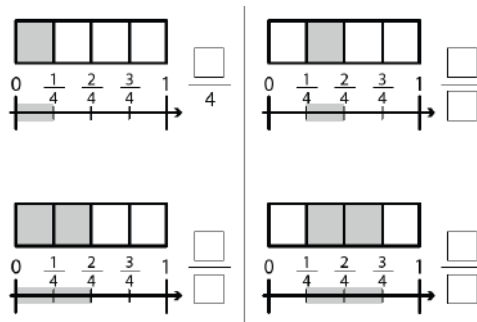


Figura 1.4: Do lado esquerdo vemos as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$ representadas pelos pontos da reta, que coincidem com o intervalo que tem o ponto 0 como extremo. Do lado direito damos um pequeno passo: as mesmas frações associadas aos intervalos $[1/4, 2/4]$ e $[2/4, 3/4]$, respectivamente.

4. Apresentar as estruturas: O foco dos CAFs é apresentar de modo esquemático as estruturas de pensamento (estruturas racionais) e não os atos mecânicos/operacionais condensados nos algoritmos.

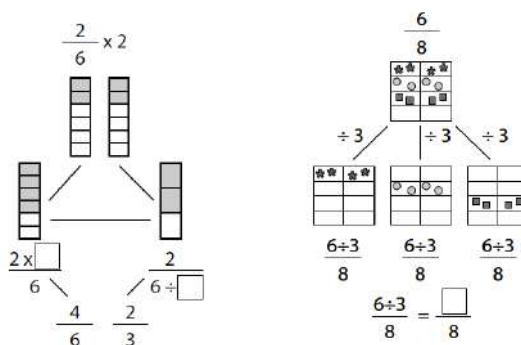


Figura 1.5: Do lado esquerdo vemos uma representação que significa o produto $\frac{2}{6} \times 2$ e a esquerda o quociente $\frac{6}{8} \div 3$.

5. Auto correção: Ao final de cada sequência, os alunos podem consultar as respostas das atividades (Figura 1.6), seja para compreender o que é esperado quando tenham dúvidas, seja para verificar se suas próprias respostas estão corretas.

CORREÇÃO

TESTE

Figura 1.6: Página de correção, respeitando a diagramação das páginas de atividades e com espaço para um teste, a ser acompanhado pelo professor.

6. Abordar *misconceptions* mais comuns: Em [13] são apresentadas as principais *misconceptions* que alunos tem sobre frações. Procuramos explorar as recomendações constantes em [13] para lidar com estes equívocos conceituais, conforme podemos ver na Figura 1.7.

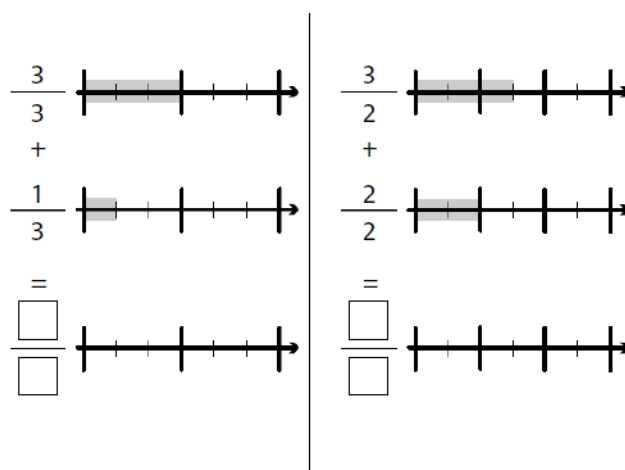


Figura 1.7: O equívoco conceitual mais comum ao se somar frações é somar numeradores e denominadores. A sugestão encontrada em [13][página 406] é confrontar a representação geométrica ou de intervalo da reta com a representação simbólica, conforme podemos ver na sequência 33 dos CAFs.

Temos seis cadernos completos, já editados e dois em fase final de elaboração. Cada caderno tem em média 8 sequências de atividades, cada sequência com quatro páginas, ou seja, no total temos cerca de 500 páginas de atividades. Apresentamos brevemente os conteúdos de cada um dos oito cadernos.

Caderno 1: Introdução do conceito de fração, uma parte do todo (fração com numerador igual a 1) e representação geométrica e de con-

junto.

Caderno 2: Representação na reta, frações com numerador diferente de 1, nomenclatura em português.

Caderno 3: Soma e diferença de frações com mesmo denominador ou com denominadores que são múltiplos simples.

Caderno 4: Frações mistas. Comparações de frações com mesmo denominador ou mesmo numerador. Estimativas de grandeza.

Caderno 5: Produto e divisão de frações por números inteiros; produto e divisão de inteiros por frações.

Caderno 6: Frações equivalentes, redução e expansão de frações, denominador comum.

Caderno 7: Soma e subtração de frações (caso genérico).

Caderno 8: Produto e divisão de frações (caso genérico).

SITUAÇÕES PROBLEMA

Os CAFs apresentam diversas representações distintas de frações e de operações com as frações. A título de exemplo, ao multiplicarmos $\frac{1}{4} \times 2$ distinguimos entre as instâncias $\frac{1 \times 2}{4}$ e $\frac{1}{4 \div 2}$.

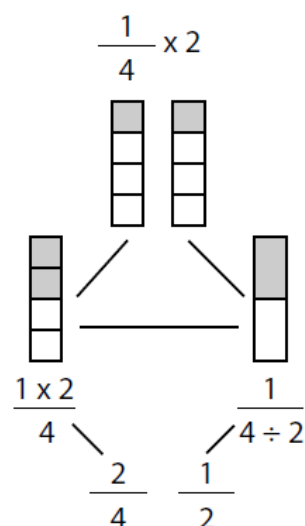


Figura 2.1: Exemplo de atividade da Sequência 37, Caderno 5.

Estas sutilezas permeiam todo o conteúdo dos CAFs e o estudo de frações em geral. Na oficina oferecida na X Bienal da SBM, focaremos em explorar este tipo de conhecimento, que é essencial para o ensino de

frações e que muitas vezes é mascarada pelas grandes estruturas matemáticas (estrutura de corpo dos racionais). Exploraremos um pouco este tipo de nuance na próxima seção.

2.1. DIVISÃO DE FRAÇÃO POR INTEIRO E INTEIROS POR FRAÇÕES: $c \div \frac{1}{d} \neq \frac{1}{d} \div c$

As situações que caracterizam estas duas operações também são bem distintas:

$(\frac{2}{3} \div 4)$: Quatro jardineiros estão dividindo igualmente dois terços de um terreno para que possam plantar suas mudas. Queremos saber que pedaço do terreno cada um pode utilizar?

Queremos dividir $\frac{2}{3}$ por 4, ou seja, buscamos calcular $\frac{2}{3} \div 4$. Representaremos da seguinte forma:

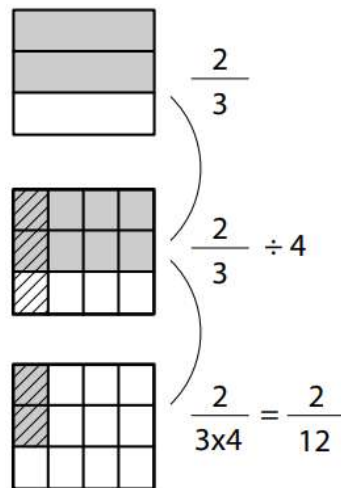


Figura 2.2: $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$. Imagens do Caderno 5.

Logo, podemos afirmar que cada jardineiro vai ficar $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12}$ do terreno.

$(4 \div \frac{2}{3})$: Um desses jardineiros tinha quatro sacos de sementes e gostaria de distribuir em dois terços da sua terra. Quanto do saco de sementes ele distribuiu em cada unidade do seu pedaço de terra?

A operação que precisamos fazer desta vez é $4 \div \frac{2}{3}$. Uma forma de interpretar a divisão é observar quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em 4. E podemos representar essa divisão da seguinte forma:

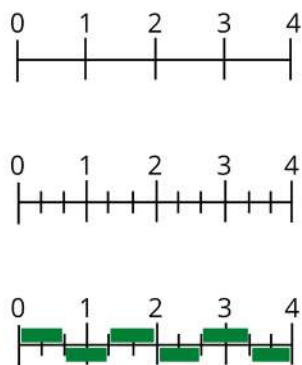


Figura 2.3: $4 \div \frac{2}{3} = 6$.

Portanto, podemos afirmar que o resultado é igual a 6.

Ou, de forma algébrica podemos calcular $4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

2.2. PRODUTO DE FRAÇÃO POR INTEIRO $a \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times a$?

Se pensarmos no resultado do produto, a resposta a esta pergunta-título é evidentemente sim, $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a$, pois o produto (de números reais ou racionais) é comutativo e a ordem dos fatores não altera o produto. No entanto, temos que, se a resposta é a mesma, as situações que levam a tentar calcular são diferentes. Para representar essa equação, podemos exemplificar da seguinte forma: suponha que tenhamos 3 pizzas, cada pizza tendo uma metade vegetariana e outra com produtos de carne. Você, vegetariano faminto, comeu as metades vegetarianas, ou seja, $3 \times \frac{1}{2}$, três metades de pizza. Em outra data, vocês novamente encomendaram 3 pizzas e seu amigo Rafael, que é esfomeado como você mas come de tudo, comeu direto metade do que chegou. Rafael comeu $\frac{1}{2} \times 3$, metade de três pizzas.

Por outro lado, se foram entregues três pizzas e você comeu metade, esta situação é representada por $\frac{1}{2} \times 3$, metade de três. Naturalmente $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 3$.

Naturalmente, os resultados são o mesmo, ou seja,

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 3$$

apesar de as situações serem distintas. Podemos pensar também na representação geométrica de ambas as situações, que são exploradas no Caderno 5, conforme vemos na Figura 2.4.

Por fim, este tipo de diferença de representações corresponde de fato a situações que são essencialmente distintas. Para reforçar esta diferença, damos a seguir algumas situações problemas envolvendo o produto de uma fração por um inteiro e o produto de um inteiro por uma fração.

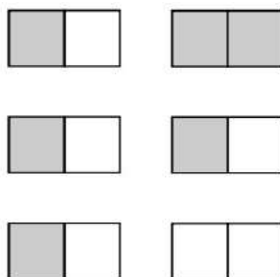


Figura 2.4: A esquerda temos a representação de $3 \times \frac{1}{2}$ e a direita de $\frac{1}{2} \times 3$. Imagens do caderno 5.

Conforme podemos ver nas colunas a seguir, o produto de uma fração por um inteiro corresponde essencialmente a soma sucessiva da fração, enquanto o produto de um inteiro por uma fração busca uma parte do todo.

Produto de uma fração por um inteiro: $a \times \frac{b}{c}$

- A cada dia ganho meio real. Quantos reais ganho em um ano?
- Vou emagrecer um décimo de quilo por semana. Quanto peso terei perdido em 25 anos?
- Patrícia come um quarto de mamão por dia. Quantos mamões Patrícia come em uma semana? E em um mês?

Produto de um inteiro por uma fração: $\frac{b}{c} \times a$

- Campinas dista 98 quilômetros de São Paulo. A filha do Marcelo acordou no meio da viagem e perguntou: falta muito? O pai respondeu que estão no meio do caminho. Quão longe eles estão de São Paulo?
- Giovana tem doze carrinhos, um terço dos quais é verde. Quantos carrinhos verde Giovana tem?

O QUE NÃO ESPERAR DOS CAFs?

É importante destacar que os CAFs não tem a pretensão de ser um material que possa, por si, "ensinar frações", mas apenas um material de apoio ao trabalho do professor. A própria proposta de uso no contexto da Residência Pedagógica já previa a realização de encontros semanais, um encontro bissemanal para orientações sobre as atividades a serem feitas e outro, em semanas intercaladas para que as atividades trabalhadas nos CAFs pudessem ser sintetizadas, conceituadas e trabalhadas de modo contextualizado, em situações problema (totalmente ausentes dos CAFs).

A conceituação explícita é necessária para a formação e consolidação do conhecimento. Por exemplo, na Figura 3.1 temos uma atividade que incentiva os alunos a estimarem ordem de grandeza de frações. Para se responder a este tipo de atividade, são feitos raciocínios intuitivos que precisam ser explicitados. Dizer por exemplo que “ $15/27$ e $15/36$ são próximos de meio pois o numerador é próximo da metade do denominador”. Também é possível explicitar que “ $15/27 > 1/2$ pois $2 \times 15 = 30 > 27$ ” e “ $15/36 < 1/2$ pois $2 \times 15 = 30 < 36$ ”. Uma outra estratégia relevante seria dizer que “ $15/36 < 15/27$ porque o denominador 36 é maior que 27”, ou seja, tomamos a mesma quantidade de partes, mas estas são menores. Neste ponto, é importante destacar que dar voz aos alunos, levá-los a pensar matematicamente, argumentar e expor os seus raciocínios é parte integral do ensino de matemática e isto pode ser feito

desde o início de sua alfabetização matemática. Os interessados podem ver, por exemplo, as conversas numéricas com crianças dos anos iniciais em [6].

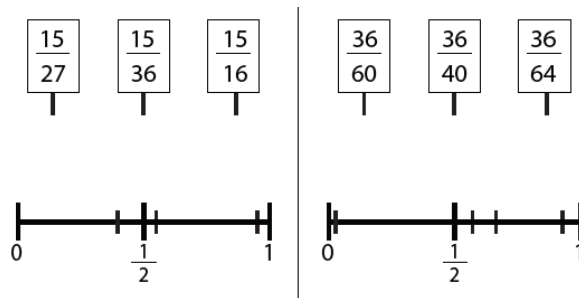


Figura 3.1: Atividade da Sequência 31, Caderno 4.

Por fim, é importante destacar que dois aspectos importantes não são abordados pelos CAFs e que são importantes de serem abordados de maneira sistemática:

1. Algoritmos: Os CAFs colocam grande ênfase no desenvolvimento dos passos que estão por trás dos algoritmos comumente utilizados, mas não explora os algoritmos em si e tampouco oferece os exercícios de prática, essenciais para se ganhar *fluência* na operação com frações.
2. Situações problemas, ou problemas contextualizados: Situações problemas contextualizadas que podem ser modeladas por frações e operações com frações não foram exploradas nos cadernos autocorretivos e são essenciais. Existe um plano de se elaborar cadernos anexos com situações problemas, mas este projeto, neste momento, não passa de uma vontade. As situações problemas relacionadas às diversas instâncias foram abordadas no Capítulo 2 e exploradas na oficina oferecida na X Bienal da SBM.

3.1. O QUE MAIS VEM POR AI?

O uso dos CAFs feito pelos alunos da EMEF Maria Pavanatti Fávaro foi incipiente e, devido ao distanciamento social, temos poucos elementos para avaliar seus méritos e seus problemas. Um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp está envolvido em um conjunto de projetos de iniciação científica que visa estudar e aprimorar estes cadernos.

Está sendo desenvolvida uma versão digital dos CAFs, o que permitirá tanto um uso mais amplo desse material como a coleta de dados de uso, para avaliar e aprimorar os cadernos, dirimir dilemas que foram enfrentados em seu desenvolvimento e tentar entender em que medida estes permitem lidar com as misconceptions mais prevalentes na aprendizagem de frações.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AHARONI, R. **Arithmetic for parents: a book for grown-ups about children's mathematics**. 2015 edition. New Jersey: World Scientific, 2015.
- [2] BOOTH, J. L., KRISTIE J. N. , and Laura K. Twiss-Garrity. "**The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning**". *Journal of experimental child psychology* 118 (2014): 110-118.
- [3] BARICHELLO, L. (2018). **An investigation into how low achieving secondary students learn fractions through visual representations**. PhD thesis, University of Nottingham, United Kingdom.
- [4] CARVALHO, Raphael *et al.* **Residência Pedagógica: Cadernos Autocorretivos como ferramenta de aprendizagem no ensino remoto** In: XXIX Congresso de Iniciação Científica da Unicamp, 2021, Campinas. Anais eletrônicos. Campinas, Galoá, 2021. Disponível em: <https://tinyurl.com/bdctnhaj> Acesso em: 24 Maio. 2022.
- [5] **Espaço Tutorial**. Disponível em: < <https://sites.google.com/view/espacotutorial>>. Acesso em: 24 mai. 2022.

- [6] HUMPHREYS, Cathy; PARKER, Ruth. **Conversas numéricas: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática**. Penso, 2019.
- [7] MONTHUBERT, B., **Cahier de calcul**. França: PERMF, 2013.
- [8] MONTHUBERT, B., **Un nouvel outil pour les math! Un de plus?**, L'educatuer N^o 2, Coop-ICEM, 1963-1964.
- [9] KUPFERMAN, Raz. **Elementary School Mathematics For Parents And Teachers-Volume 1**. World Scientific Publishing Company, 2015.
- [10] POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [11] RAU, M. A., ALEVEN, V., and RUMMEL, N. (2010). **Blocked versus interleaved practice with multiple representations in an intelligent tutoring system for fractions**. In *Intelligent Tutoring Systems*. Springer Berlin Heidelberg.
- [12] SIEGLER, Robert S., et al. "**Early predictors of high school mathematics achievement**". *Psychological science* 23.7 (2012): 691-697.
- [13] VAN DE WALLE, J. A.; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. **Elementary and middle school mathematics, teaching developmentally**. 7. ed., Pearson internat. ed. Boston: Allyn & Bacon, 2010



UMA APLICAÇÃO LÓGICA ENTRE JOGOS DE MESA, DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA MODULAR

OSÉAS FERREIRA NETO, MARLY NUNES E EMILLY BARBOSA

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1. Introdução

2. Divisão dos inteiros

2.1. Teorema Fundamental da Aritmética

2.2. Divisão euclidiana

2.3. Critérios de divisibilidade

2.3.1. Principais critérios

3. Congruência módulo m

3.1. Pequeno teorema de Fermat

4. Recursos da divisibilidade e congruência

4.1. Objetivos

4.2. Procedimentos metodológicos

4.3. Atividades propostas

5. Conclusões

Referências bibliográficas

PREFÁCIO

Esse trabalho pretende fornecer aos professores do ensino básico e do ensino superior, alternativas didático metodológicas, através do uso de jogos matemáticos, como estratégia para a melhoria da qualidade de ensino dos conteúdos do eixo Números, baseados na BNCC, para o ciclo fundamental II e médio, bem como, na disciplina Teoria dos Números na graduação, com o objetivo de promover o desenvolvimento junto aos alunos de habilidades no reconhecimento e uso dos critérios de divisibilidade, da mesma forma, relacionar a divisibilidade com a teoria da congruência modular, oportunizando uma conexão entre os conteúdos da Educação Básica e o Ensino Superior. Dessa forma, apresentamos essa alternativa lúdica, que já foi aplicada no laboratório de ensino, como instrumento de aprendizagem acessível e prazerosa nos três ciclos de ensino.

INTRODUÇÃO

Esse trabalho surge da necessidade de oferecer alternativas metodológicas práticas ao ensino de matemática, em especial a unidade temática Números, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018, uma vez que praticamente todos os conteúdos de Aritmética se concentram nessa unidade. Com essa estrutura curricular, os conteúdos são abordados dentro de uma visão de progressão vertical em torno dos objetos de conhecimento e habilidades apresentadas ao longo dos eixos, de forma que as construções e procedimentos acerca dos conceitos sejam conectados e ampliados ao longo de todo o processo. Nesse sentido:

“A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.” (BRASIL, BNCC, 2017. p.270)

No entanto, dentro do contexto escolar o que se percebe é uma abordagem do eixo de Números voltada principalmente para a resolução de algoritmos, com escassa ênfase ao olhar qualitativo, investigativo e associativo em torno das propriedades que os envolvem. É no ensino fundamental II, que assuntos importantes da Aritmética, tais como: múltiplos, divisores, divisão euclidiana e critérios de divisibilidade são apresentados, porém o que se verifica na prática é que essa apresentação está voltada apenas a exposição simples de um conjunto de regras e cálculos desconectados de situações cotidianas, concretas, não proporcionando ao aluno percepções de implicações gerais que seus conceitos e ideias podem proporcionar.

Essas implicações convergem para uma preocupação concreta sobre o ensino da matemática, no que se configura uma abordagem fragmentado e independente dos tópicos presentes no eixo Números do currículo. Nessa perspectiva, verifica-se a causa de uma série de paradigmas e insucessos relacionados ao interesse e aprendizagem matemática. Assim, observamos no uso do jogo a possibilidade de explorar conceitos e resultados matemáticos de grande importância, pois usamos a ludicidade para conectar conteúdos e promover um uso prático dos tópicos abordados, conforme verificado nos documentos oficiais.

pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (BNCC, 2018, p. 276).

Mas devemos tomar muito cuidado para que o jogo tenha um propósito matemático de ajudar, enquanto ferramenta de obtenção de habilidades dessa área de conhecimento, fazendo com que ele favoreça a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de competências e habilidades, como afirma Smole:

O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE, 2007, p. 9)

Dessa forma, as ações a serem aplicadas com a finalidade de facilitar e auxiliar o professor durante a execução dessas ações, fazendo com que ele tenha um apoio nas tarefas de planejamento de mediação do jogo como recurso didático, bem como no desenvolvimento da ludicidade inerente ao jogo, além de todo o seu potencial educativo. Para isso, será preciso o planejamento de uma sequência didática efetiva para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Sob esse ponto de vista.

Queremos salientar que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. (BORIN, 2002, p. 8)

Outra importante contribuição do uso do jogo está na conexão dos conteúdos abordados até o ensino superior, uma vez que ele também pode ser usado nesse nível de ensino com a devida adequação para a notação

de congruências, reforçando assim a sua importância enquanto prática metodológica.

DIVISÃO DOS INTEIROS

A operação de divisão apresenta, no contexto matemático, aspectos mais complicados do que a adição, a subtração e a multiplicação, tanto do ponto de vista operacional quanto conceitual. É como a divisão entre dois inteiros nem sempre é possível, faz-se necessário expressar essa possibilidade através da relação de divisibilidade.

Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois inteiros, notamos que, ainda é possível efetuar uma “divisão com resto pequeno”, chamada de divisão euclidiana. O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por várias propriedades dos inteiros.

2.1. TOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Definição 1. Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de *número primo*.

Um número maior do que 1 e que não é primo será dito *composto*.

Portanto, se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que

$$n = n_1 n_2, \text{ com } 1 < n_1 < n \text{ e } 1 < n_2 < n.$$

Assim, os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são números primos, enquanto 4, 6, 8, 9, 10 e 12 são números compostos.

Teorema 1. (Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração.

Usaremos o Princípio da Indução. Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n .

Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que

$n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos p_1, \dots, p_r e q_1, \dots, q_s , tais que,

$$n_1 = p_1 \cdots p_r \text{ e } n_2 = q_1 \cdots q_s.$$

Portanto, $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$.

Agora, vamos provar a unicidade da escrita.

Suponha que tenhamos $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$, temos que $p_1 = q_j$ para algum j , que, após reordenamento de $q_1 \cdots q_s$, podemos supor que seja q_1 . Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares. ■

2.2. DIVISÃO EUCLIDIANA

Mesmo quando um número inteiro $b \neq 0$ não divide o número inteiro a , Euclides, nos seus *Elementos*, utiliza, sem enuncia-lo explicitamente, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de a por b , com resto. Esse resultado, cuja demonstração faremos abaixo, não só é um importante instrumento na obra de Euclides, como também é um resultado central da teoria.

Teorema 2. (Divisão Euclidiana) Sejam a e b dois números inteiros, com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b| \tag{2.3}$$

Demonstração.

Considere o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

Existência: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo $a - nb > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0 , logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S possui um menor elemento r . Suponhamos então que $r = a - bq$. Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |b|$.

Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S , pois $s = a - (q \pm 1)b \in S$, com $s < r$.

Unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim, temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o que implica que

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se $q = q'$ e conseqüentemente, $r = r'$. ■

Os números que q e r que aparecem no teorema acima são chamados respectivamente de *quociente* e de *resto* da divisão de a por b . Assim, da divisão euclidiana, temos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, b divide a . Quando o resto da divisão for zero ($r = 0$), dizemos que a divisão é exata.

2.3. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

O currículo escolar do ensino fundamental já contempla os critérios de divisibilidade, uma vez que eles serão utilizados em outras áreas da matemática, como Geometria e Álgebra. Na prática esse conjunto de regras a serem memorizadas e aplicadas de maneira direta, só é útil quando for mais simples que a própria divisão. Esse é um dos motivos que fazem os alunos sempre lembrarem dos critérios de divisibilidade do 2, 3, 5 e 10 por exemplo e quase nunca dos critérios do 7, 11 e 13. No entanto, o aluno que desenvolve a habilidade de usar com frequência as regras de divisibilidade, em especial na resolução de problemas, tem como consequência imediata (a) memorização dos critérios e (b) velocidade de resolução. Esse segundo ponto se mostrará muito necessário quando o aluno for prestar algum exame, como as provas Olímpicas ou o Enem por exemplo, pois neles o tempo será um fator a ser considerado no desempenho do exame. Ainda nesse sentido, usamos muito os critérios de divisibilidade para simplificar resultados, pois é comum nos exames seletivos as repostas serem dadas na forma de frações irredutíveis, ou seja, frações que não podem ser simplificadas.

De modo geral, podemos definir de forma direta que os critérios de divisibilidade são as regras que nos permitem, sem efetuar a divisão, saber se um dado número é, ou não, divisível por outro. Veremos também que, a partir da determinação dos restos, poderemos verificar tais critérios.

2.3.1. PRINCIPAIS CRITÉRIOS

Na apresentação dos critérios de divisibilidade iremos agrupar os divisores em quatro grupos, sendo os dois primeiros grupos, formados por divisores que têm características em comum, o terceiro grupo apenas por números primos e o último grupo é formado por divisores de números compostos formados pelo produto dos números presentes nos grupos anteriores.

- ❖ Grupo A (2^n , 5^n e 10^n), para todo $n \geq 1$.
- ❖ Grupo B (3 e 9)
- ❖ Grupo C (7, 11 e 13)
- ❖ Grupo D (6, 15, 21, 33, 35, 55, 65, 77 e ...)

A) Divisibilidade por 2^n , 5^n ou 10^n .

Teorema 3. Um número é divisível por 2^n , 5^n ou 10^n , quando os n últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 2^n , 5^n ou 10^n .

Demonstração.

Considere

$$N = abc \cdots stu \tag{2.7}$$

um número composto por m algarismos.

Vamos então analisar agora (2.7) com $1, 2, 3, \dots, n$ algarismos, em uma adição da forma:

$$N = 10^{n-1} \times a + (bc \cdots stu)$$

Para $n = 1$, isto é, N com um algarismo, temos:

$$N = a \Rightarrow N = 10^{1-1} \times a$$

Para $n = 2$, isto é, N com um algarismo, temos

$$N = ab \Rightarrow N = 10^{2-1} \times a + b \text{ ou ainda } N = 10 \times a + b$$

Para $n = 3$, isto é, N com um algarismo, temos

$$N = abc \Rightarrow N = 10^{3-1} \times a + bc \text{ ou ainda } N = 10 \times a + bc$$

⋮

$$\text{Para } N = \underbrace{abc \cdots stu}_{n \text{ alg.}} \Rightarrow N = [10]^{n-1} \times a + \underbrace{bc \cdots stu}_{n-1 \text{ alg.}} \cdots \tag{1}$$

Como $10 = 2 \times 5 \Rightarrow 10 = \dot{2}$ e $10 = \dot{5}$, deduz-se que:

$$[10]^{n-1} = [\dot{2}]^{n-1} \text{ e } [10]^{n-1} = [\dot{5}]^{n-1}, \text{ então, podemos escrever:}$$

$$N = [\dot{2}]^{n-1} \times a + \underbrace{bc \cdots stu}_{n-1 \text{ alg.}} \cdots \tag{2} \text{ ou } N = [\dot{5}]^{n-1} \times a + \underbrace{bc \cdots stu}_{n-1 \text{ alg.}} \cdots \tag{3}$$

Aplicando o Teorema Fundamental da Divisibilidade (teorema 9) em (1), (2) e (3), temos que

- Um número é divisível por 2^1 ou por 5^1 , isto é, por 2 ou por 5, quando o último algarismo da direita for um número divisível por 2 ou por 5;
- Um número é divisível por 2^2 ou por 5^2 , isto é, por 4 ou por 25, quando os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 4 ou por 25;
- Um número é divisível por 2^3 ou por 5^3 , isto é, por 8 ou por 125, quando os três últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 8 ou por 125, ... e assim por diante;
- Um número é divisível por $10^1, 10^2, 10^3, \dots$, quando terminar em um zero, dois zeros, três zeros, ... e assim por diante.

■

Exemplo 1. Verificar se o número 7.692.315.148 é divisível por 2, por 4 e por 8, caso não seja, determinar o seu resto.

$$1^{\circ}) \text{ Por } 2. \quad \begin{array}{r} 8 \overline{)2} \\ 0 \end{array} \quad 4$$

$$2^{\circ}) \text{ Por } 4. \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)4} \\ 0 \end{array} \quad 12$$

$$3^{\circ}) \text{ Por } 8. \quad \begin{array}{r} 148 \overline{)8} \\ 4 \end{array} \quad 18$$

Após efetuarmos as divisões usando os critérios do teorema 13, podemos afirmar que o número dado é divisível por 2, é divisível por 4, mas não é divisível por 8 e, nessa divisão, o resto é igual a 4.

Exemplo 2. Verificar se o número 7.692.315.850 é divisível por 5, por 25 e por 125, caso não seja, determinar o seu resto.

$$1^{\circ}) \text{ Por } 5. \quad \begin{array}{r} 0 \overline{)5} \\ 0 \end{array} \quad 0$$

$$2^{\circ}) \text{ Por } 25. \quad \begin{array}{r} 50 \overline{)25} \\ 0 \end{array} \quad 2$$

$$3^{\circ}) \text{ Por } 125. \quad \begin{array}{r} 850 \overline{)125} \\ 100 \end{array} \quad 6$$

Após efetuarmos as divisões usando os critérios do teorema 13, podemos afirmar que o número dado é divisível por 5, é divisível por 25, mas não é divisível por 125 e, nessa divisão, o resto é igual a 100.

Exemplo 3. Verificar se o número 92.315.600 é divisível por 10, por 100 e por 1.000, caso não seja, determinar o seu resto.

O número dado é divisível por 10, pois o último algarismo da direita é o zero;

O número dado é divisível por 100, pois os últimos algarismos da direita são iguais a zero;

O número dado não é divisível por 1.000, pois os três últimos algarismos da direita não são iguais a zero, e o resto é igual a 600.

B) Divisibilidade por 9 ou 3.

Teorema 4. Um número é divisível por 9 ou por 3, quando a soma de seus algarismos for um número divisível por 9 ou por 3.

Demonstração.

$$\text{Sabemos que: } 10^1 = 10 = 9 + 1 \Rightarrow 10^1 = \dot{9} + 1$$

$$10^2 = 100 = 99 + 1 \Rightarrow 10^2 = \dot{9} + 1$$

$$10^3 = 1000 = 999 + 1 \Rightarrow 10^3 = \dot{9} + 1$$

⋮

$$10^n = \underbrace{1\,000 \dots 0}_{n \text{ zero(s)}} = 99 \dots 9 + 1 \Rightarrow 10^n = \dot{9} + 1$$

Isto é, qualquer potência de 10 é igual a um múltiplo de 9 mais 1.

Seja (2.7) um número com n algarismos. Explicitando esse número na forma polinômica, teremos

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0$$

$$N = a \times (\acute{9} + 1) + b \times (\acute{9} + 1) + c \times (\acute{9} + 1) + \dots + s \times (\acute{9} + 1) + t \times (\acute{9} + 1) + u$$

Desenvolvendo e ordenando convenientemente, teremos

$$N = \underbrace{a \times \acute{9} + b \times \acute{9} + c \times \acute{9} + \dots + s \times \acute{9} + t \times \acute{9}}_{\text{m\acute{u}ltiplo de 9}} + \underbrace{a + b + c + \dots + s + t + u}_{\text{Soma dos algarismos}}$$

$$N = \acute{9} + (a + b + c + \dots + s + t + u) \quad (4)$$

Dividindo os dois membros de (4) por 9 e aplicando o Teorema Fundamental da Divisibilidade (teorema 9), teremos que, N só será divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 9. Como todo múltiplo de 9 também  múltiplo de 3, então podemos escrever que, N só será divisível por 3 se a soma dos seus algarismos também for um múltiplo de 3. ■

Exemplo 4. Verificar se o número $N = 72.843.621.312$  divisível por 3 e, em seguida, por 9.

$$S_{alg.} = 7 + 2 + 8 + 4 + 3 + 6 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 = 39$$

$$\begin{array}{r} 1^\circ \text{ Por } 3. \quad 39 \overline{) 3} \\ \quad \quad \quad 0 \quad 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2^\circ \text{ Por } 9. \quad 39 \overline{) 9} \\ \quad \quad \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

O número N dado  divisível por 3, mas não  divisível por 9.

C_i) Divisibilidade por 7.

Apesar do número 7 ter vários critérios de divisibilidade, vamos usar o mais recente deles. Em 2019, um garoto nigeriano de 12 anos, radicado na Inglaterra, chamado de Chika Ofili, foi agraciado com o prmio TruLittle Hero Awards, que reconhece as notáveis realizaes de crianças e jovens de até 17 anos no Reino Unido. Apesar do método em si já constar na literatura especializada, conforme [2], isso em nada diminui o mérito de Chika, pois o mesmo deu visibilidade a uma maneira mais simples de verificar se um número é ou não divisível por 7.

Teorema 5. Um número  divisível por 7, se o quíntuplo do seu algarismo da unidade somado com o número formado pelos outros algarismos for divisível por 7.

Demonstrao.

Seja (2.7) um número com n algarismos e que seja divisível por 7, isto é, $N = abc \dots stu = 7k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Explicitando esse número na forma polinômica, teremos:

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0 = 7k$$

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u = 7k$$

Somando $49u$ nos dois membros da expressão acima, teremos:

$$\begin{aligned} N &= a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + 50u \\ &= 7k + 49u \end{aligned}$$

Percebemos que N é formado pela soma de vários múltiplos de 10, logo podemos tirar o 10 em evidência.

$$\begin{aligned} N &= 10 \times [a \times 10^{n-2} + b \times 10^{n-3} + c \times 10^{n-4} + \dots + s \times 10^1 + t + 5u] \\ &= 7(k + 7u) \end{aligned}$$

Como $7 \nmid 10$, então

$$7 \mid [a \times 10^{n-2} + b \times 10^{n-3} + c \times 10^{n-4} + \dots + s \times 10^1 + t + 5u].$$

■

Se aplicarmos o critério acima em um número de muitos dígitos e ainda sim, for difícil de visualizar, podemos repetir o processo até chegarmos num número menor em que se possa afirmar que ele é ou não divisível por 7.

Exemplo 5. Verifique se os números abaixo são divisíveis por 7, usando o critério acima.

(a) 24.836

Usando o primeiro critério temos, $2483 + 5.6 = 2513$, ainda está difícil de saber, aplicaremos de novo o critério e teremos $251 + 5.3 = 266$, aplicando novamente $26 + 5.6 = 56$ e $7 \mid 56$, portanto 24836 é divisível por 7.

(b) 28.632

Usando o primeiro critério temos, $2863 + 5.2 = 2873$, ainda está difícil de saber, aplicaremos de novo o critério e teremos $287 + 5.3 = 302$, aplicando novamente $30 + 5.2 = 40$ e $7 \nmid 40$, portanto 28.632 não é divisível por 7.

C₂) Divisibilidade por 11.

Teorema 6. Um número N é divisível por 11, se o resultado da diferença entre o número formado pelos algarismos excluindo o dígito da unidade e o algarismo das unidades, for divisível por 11.

Demonstração.

Seja (2.7) um número com n algarismos e que seja divisível por 11, isto é,

$$N = abc \cdots stu = 11k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Explicitando esse número na forma polinômica, teremos

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \cdots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0 = 11k$$

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \cdots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u = 11k$$

Somando $-11u$ nos dois membros da expressão acima, tem-se

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \cdots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u - 11u$$

$$N = 11k - 11u$$

$$N = 11(k - u)$$

Percebemos que N é formado pela soma de vários múltiplos de 10, logo podemos tirar o 10 em evidência.

$$\begin{aligned} N &= 10 \times [a \times 10^{n-2} + b \times 10^{n-3} + c \times 10^{n-4} + \cdots + s \times 10^1 + t - u] \\ &= 11(k - u) \end{aligned}$$

Como $11 \nmid 10$, então

$$11 \mid [a \times 10^{n-2} + b \times 10^{n-3} + c \times 10^{n-4} + \cdots + s \times 10^1 + t - u]$$

■

Se aplicarmos o critério acima em um número de muitos dígitos e ainda sim, for difícil de visualizar, podemos repetir o processo até chegarmos num número menor em que se possa afirmar que ele é ou não divisível por 11.

Exemplo 6. Verifique se os números abaixo são divisíveis por 11, usando o critério acima.

(a) 81.631

Aplicando o critério, temos então $8163 - 1 = 8162$, só olhando para o número não conseguimos, ainda, saber se ele é ou não divisível por 11. Então aplicaremos o critério até o número resultante ser suficiente para sabermos se é ou não divisível por 11. Logo, $816 - 2 = 814$; $81 - 4 = 77$ e $11 \mid 77$. Portanto, 81.631 é divisível por 11.

(b) 43.896

Aplicando o critério, temos então $4389 - 6 = 4383$, só olhando para o número não conseguimos, ainda, saber se ele é ou não divisível por 11. Então aplicaremos o critério até o número resultante ser suficiente para sabermos se é ou não divisível por 11. Logo, $438 - 3 = 435$; $43 - 5 = 38$ e $11 \nmid 38$. Portanto, 43.896 não é divisível por 11.

C₃) Divisibilidade por 13.

Teorema 7. Um número N é divisível por 13 se o resultado da soma do quádruplo do algarismo da unidade do número N somado com o número formado pelos outros algarismos, for divisível por 13.

Demonstração.

Seja (2.7) um número com n algarismos e que seja divisível por 13, isto é,

$N = abc \dots stu = 13k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Explicitando esse número na forma polinômica, teremos

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0 = 13k$$

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u = 13k$$

Somando $39u$ nos dois membros da expressão acima, teremos

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \dots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u + 39u$$

$$N = 13k + 39u$$

$$N = 13(k + 3u)$$

Percebemos que N é formado pela soma de vários múltiplos de 10, logo podemos tirar o 10 em evidência.

$$\begin{aligned} N &= 10 \times [a \times 10^{n-2} + b \times 10^{n-3} + c \times 10^{n-4} + \dots + s \times 10^1 + t + 4u] \\ &= 13(k + 3u) \end{aligned}$$

Como $13 \nmid 10$, então

$$13 \mid [a \times 10^{n-2} + b \times 10^{n-3} + c \times 10^{n-4} + \dots + s \times 10^1 + t + 4u]$$

■

Se aplicarmos o critério em um número de muitos dígitos e ainda sim, for difícil de visualizar, podemos repetir o processo até chegarmos num número menor em que se possa afirmar que ele é ou não divisível por 13.

Exemplo 7. Verifique se os seguintes números são divisíveis por 13, usando o critério de divisibilidade por 13.

(a) 34.814

Aplicando o critério, temos então $3481 + 4 \cdot 4 = 3497$, só olhando para o número não conseguimos, ainda, saber se ele é ou não divisível por 13. Então aplicaremos o critério até o número resultante ser suficiente para sabermos se é ou não divisível por 13. Logo, $349 + 4 \cdot 7 = 377$; $37 + 4 \cdot 7 = 65$ e $13 \mid 65$. Portanto, 34.814 é divisível por 13.

(b) 68.530

Aplicando o critério, temos então $6853 + 4.0 = 6853$, só olhando para o número não conseguimos, ainda, saber se ele é ou não divisível por 13. Então aplicaremos o critério até o número resultante ser suficiente para sabermos se é ou não divisível por 13. Logo, $685 + 4.3 = 697$; $69 + 4.7 = 97$ e $13 \nmid 97$. Portanto, 68.530 não é divisível por 13.

D) Divisibilidade por 6, 15, 21, 33, 35, 55, 65, 77, ...

Esse grupo de divisores é formado apenas por números compostos, isto é, números formados a partir do produto entre números primos, o que além de reforçar a importância dos critérios já apresentados, funciona também como uma aplicação de combinações dos critérios estudados nos grupos A, B e C. Nele utilizaremos apenas um teorema como base de sustentação, uma vez que os demais se fazem presentes nele, assim como a condição geral de multiplicidade, permite-nos justificar certos critérios de divisibilidade já estudados, mas também permite enunciar outros.

Teorema 8. Se um número for divisível por vários outros primos entre si, dois a dois, então será divisível pelo produto deles.

Demonstração.

Seja N um número dado e a, b, c, \dots vários números primos entre si, dois a dois.

$$\text{Se } \frac{N}{a} = q_1 \Rightarrow N = a \times q_1$$

$$\text{Se } \frac{N}{b} = q_2 \Rightarrow N = b \times q_2$$

$$\text{Se } \frac{N}{c} = q_3 \Rightarrow N = c \times q_3$$

$$\vdots$$

Queremos mostrar que $N = (a \times b \times c \times \dots) \times q$.

Como $N = a \times q_1$, implica que $a \times q_1$ será divisível por b e, sendo b primo com a , então b dividirá q_1 , logo, $q_1 = b \times q'$, ou ainda, $N = a \times b \times q'$.

Como $a \times b \times q'$ é divisível por c , e c é primo com a e b , então, N será primo com $a \times b$, portanto, c irá dividir q' , logo, $q' = c \times q''$, portanto, $N = a \times b \times c \times q''$ ou ainda

$$N = (a \times b \times c) \times q''.$$

Seguindo o mesmo raciocínio adotado, teremos que $N = (a \times b \times c \times \dots) \times q$.

■

d₁) Divisibilidade de um número N por 6.

$$\frac{N}{6} = \frac{N}{2 \times 3}$$

Ou seja, um número N só será divisível por 6 quando for divisível por 2 e 3, simultaneamente. Assim, N só será divisível por 6 se for par e a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 3.

Exemplo 8. Verifique se o número 34.746 é divisível por 6.

Como o algarismo das unidades é seis, então o número 34.746 é par, logo é divisível por 2.

A soma dos algarismos $3 + 4 + 7 + 4 + 6 = 24$, e como 24 é múltiplo de 3, então 34.746 é divisível por 3.

Assim, 34.746 é divisível por 6, pois é divisível por 2 e 3 simultaneamente.

d₂) Divisibilidade de um número N por 15.

$$\frac{N}{15} = \frac{N}{3 \times 5}$$

Ou seja, um número N só será divisível por 15 quando for divisível por 3 e 5, simultaneamente. Assim, N só será divisível por 15 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 3 e o algarismo das unidades desse número for zero ou cinco.

Exemplo 9. Verifique se o número 83.475 é divisível por 15.

A soma dos algarismos $8 + 3 + 4 + 7 + 5 = 27$, e como 27 é múltiplo de 3, então 83.475 é divisível por 3;

Como o algarismo da unidade do número é 5, então 83.475 é divisível por 5;

Assim, 83.475 é divisível por 15, pois é divisível por 3 e 5 simultaneamente.

d₃) Divisibilidade de um número N por 21.

$$\frac{N}{21} = \frac{N}{3 \times 7}$$

Ou seja, um número N só será divisível por 21 quando for divisível por 3 e 7, simultaneamente. Assim, N só será divisível por 21 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 3 e o quádruplo do seu algarismo da unidade somado com o número formado pelos outros algarismos for divisível por 7

Exemplo 10. Verifique se o número 73.437 é divisível por 21.

A soma dos algarismos $7 + 3 + 4 + 3 + 7 = 24$, e como 24 é múltiplo de 3, então 73.437 é divisível por 3;

Como $7343 + 5 \cdot 7 = 7378$ e $737 + 5 \cdot 8 = 777$ e 777 é múltiplo de 7, então 73.437 é divisível por 7.

Assim, 73.437 é divisível por 21, pois é divisível por 3 e 7 simultaneamente.

d₄) Divisibilidade de um número N por n .

Seja $n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots$, onde p_1, p_2, p_3, \dots são números primos.

$$\frac{N}{n} = \frac{N}{p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s} \quad (2.8)$$

Ou seja, um número N só será divisível por n quando for divisível por p_1, p_2, \dots, p_s simultaneamente. Assim, N só será divisível por n se for divisível por p_1 , se for divisível por p_2 , se for divisível por p_s e assim por diante, de forma simultânea.

Portanto, $33 = 3 \times 11$, $35 = 5 \times 7$, $55 = 5 \times 11$, $65 = 5 \times 13$, $105 = 3 \times 5 \times 7$ e assim por diante obedecem a esse critério.

CONGRUÊNCIA MÓDULO m

Definição 2. Sejam a, b e m inteiros dados, sendo $m > 1$. Dizemos que a é congruente a b , módulo m , denotamos $a \equiv b \pmod{m}$, se $m \mid (a - b)$. Se a não for congruente a b módulo m , denotamos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Exemplos 11. De acordo com a definição acima, podemos escrever:

(a) $3 \equiv 5 \pmod{2}$, pois $2 \mid (3 - 5)$

(b) $-1 \equiv 11 \pmod{12}$, pois $12 \mid (-1 - 11)$

(c) $x \equiv -x \pmod{2}$, pois $2 \mid (x - (-x))$

Após a análise dos exemplos, provavelmente surja o seguinte questionamento: o que estamos realmente investigando em um número quando consideramos a congruência módulo m ? Para responder a este questionamento, observemos o que ocorre com os números inteiros módulo 4, por exemplo:

$$4k \equiv 0 \pmod{4}, \quad 4k + 1 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 4k + 2 \equiv 2 \pmod{4} \text{ e}$$

$$4k + 3 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Assim, a sequência $\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ dos números inteiros é igual, módulo 4, à sequência $\dots, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, \dots$, e vemos que todo inteiro é congruente, módulo 4, ao resto de sua divisão por 4. Esse resultado será generalizado com o uso da próxima proposição.

Proposição 1. Sejam a e m inteiros dados, com $m > 1$.

(i) Se a deixa resto r na divisão por m , então $a \equiv r \pmod{m}$. Em particular, todo inteiro é congruente módulo m , a exatamente um dos números $0, 1, 2, \dots, m - 2, m - 1$.

(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ se e somente se a e b deixam um mesmo resto na divisão por m .

Demonstração.

(i) Suponha que a deixa resto r quando dividido por m . Pelo algoritmo da divisão, temos $a = qm + r$ para algum inteiro q . Assim, $a - r = qm$, ou seja, $m \mid (a - r)$.

Na notação, que escrevermos $a \equiv r \pmod{m}$. O resto é imediato.

(ii) (\Rightarrow) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$. Considere $a = m \cdot q + r$ e que $a - b = m \cdot q_1$, substituindo $m \cdot q + r - b = m \cdot q_1 \Rightarrow -b = mq_1 - mq - r \Rightarrow b = m(q - q_1) + r$, onde q_2 é a diferença entre $(q - q_1) = q_2$, logo $b = m \cdot q_2 + r$. Segue que a e b deixam um mesmo resto na divisão por m . (\Leftarrow) Reciprocamente, se a, b deixam um mesmo resto r na divisão por m , podemos escrever que $a = mq_1 + r$ e $b = mq_2 + r$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - b = m(q_1 - q_2)$, ou seja, $m \mid (a - b)$. Portanto, $a \equiv b \pmod{m}$. ■

Na definição da relação de congruência, a razão pela qual não consideramos o módulo $m = 1$ é a seguinte: se usássemos a congruência módulo 1, obteríamos $a \equiv b \pmod{1}$ como sinônimo de que $1 \mid (a - b)$, o que é sempre verdade. Portanto, dois inteiros quaisquer seriam indistinguíveis módulo 1.

Uma vez que a notação de congruência módulo m enfatiza apenas o resto da divisão de um número por m , notamos que o primeiro ganho ao se usar congruência é operacional: nas duas proposições a seguir 31 e 32, provaremos algumas propriedades elementares de congruência, as quais irão nos permitir, por exemplo, calcular rapidamente o resto da divisão de 17^{2002} por 13, tarefa que não é fácil de cumprir com os métodos de que dispomos até o presente momento.

Proposição 2. Dados inteiros a, b, c e m , sendo $m > 1$, temos:

(a) $a \equiv a \pmod{m}$

(b) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

(c) $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Demonstração.

O item (a) é imediato, pois $m \mid (a - a)$, isto é, $m \mid 0$, já o item (b) como a e b tem o mesmo resto módulo m , então $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - a)$.

Quanto ao último item (c), se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então podemos escrever que $m \mid (a - b)$, $m \mid (b - c)$ e $m \mid (a - c)$, assim $a - c = (a - b) + (b - c)$. Mas isso é o mesmo que $a \equiv c \pmod{m}$. ■

Proposição 3. Sejam a, b, c, d, m e n inteiros dados, com $m, n > 1$.

(a) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ e $ac \equiv bd \pmod{m}$. Em particular, $ac \equiv bc \pmod{m}$.

(b) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Se $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ e $f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$, então

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{m}.$$

(d) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $\text{mdc}(a, m) = \text{mdc}(b, m)$.

(e) Se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $a \equiv b \pmod{m}$.

(f) Se $ac \equiv bc \pmod{m}$ e $\text{mdc}(c, m) = d$, então $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$. Em particular, se $\text{mdc}(c, m) = 1$, então $a \equiv b \pmod{m}$.

(g) Se $a \equiv b \pmod{mn}$, então $a \equiv b \pmod{m}$ e $a \equiv b \pmod{n}$.

(h) Se $a \equiv b \pmod{m_i}, \forall i = 1, \dots, r \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m_1, \dots, m_r]}$ onde

$$[m_1, \dots, m_r] = \text{mmc}(m_1, \dots, m_r)$$

Demonstração.

(a) Como $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, $ac - bd = a(c - d) + (a - b)d$ e ainda $m \mid (a - b)$, $m \mid (c - d)$, segue da proposição 11 que $m \mid [(a + c) - (b + d)]$ e $m \mid (ac - bd)$. Por outro lado, isso é o mesmo que $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ e $ac \equiv bd \pmod{m}$. Por fim, o caso particular segue de $c \equiv c \pmod{m}$.

(b) Fazendo $c = a$ e $d = b$ na segunda parte do item (a), obtemos $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$. Se já mostramos que $a^\ell \equiv b^\ell \pmod{m}$, para um certo $\ell \in \mathbb{N}$, então novamente da segunda parte de (a) (dessa vez com $c = a^\ell$ e $d = b^\ell$), obtemos $a^{\ell+1} = a \cdot a^\ell \equiv b \cdot b^\ell = b^{\ell+1} \pmod{m}$. O restante, segue por indução em k .

(c) Se $a \equiv b \pmod{m}$, temos, a partir dos itens (a) e (b), que $c_k a^k \equiv c_k b^k \pmod{m}$, para

$0 \leq k \leq m$. Portanto,

$$f(a) = \sum_{k=0}^m c_k a^k \equiv \sum_{k=0}^m c_k b^k = f(b) \pmod{m}$$

(d) Como $a \equiv b \pmod{m}$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + mq$. Queremos, pois, mostrar que

$$\text{mdc}(b + mq, m) = \text{mdc}(b, m).$$

Sejam $d = \text{mdc}(a + bc, b)$ e $d' = \text{mdc}(a, b)$. Como $d' \mid a, b$, temos que $d' \mid a, a + bc$. Portanto, temos que $d' \mid d$.

Reciprocamente, como $d \mid (a + bc)$ e $d \mid b$, temos que $d \mid [(a + bc) - bc]$, isto é, $d \mid a$ e $d \mid b$, logo, $d \mid d'$, assim $d = d'$.

Dessa maneira, o $\text{mdc}(a + bc, b) = \text{mdc}(a, b)$, ou seja, $\text{mdc}(b + mq, m) = \text{mdc}(b, m)$.

(e) Se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $m \mid [(a + c) - (b + c) = a - b]$, o que é o mesmo que $a \equiv b \pmod{m}$

(f) Sejam $m = dm'$ e $c = dc'$, com c' e m' inteiros primos entre si. De $ac \equiv bc \pmod{m}$, segue que $(dm') \mid [dc'(a - b)]$ ou, ainda, que $m' \mid c'(a - b)$.

Mas, como $\text{mdc}(m', c') = 1$, então $m' \mid (a - b)$, o que é o mesmo que $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$. O restante é imediato.

(g) Se $a \equiv b \pmod{mn}$, então $mn \mid (a - b)$, o que possibilita que $m \mid (a - b)$. Porém, isso é equivalente a $a \equiv b \pmod{m}$; analogamente, $a \equiv b \pmod{n}$.

(h) Se $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, \dots, r$, então $m_i \mid (a - b)$, para todo i . Sendo $a - b$ um múltiplo de cada m_i , segue que $[m_1, \dots, m_r] \mid (a - b)$, o que prova que $a \equiv b \pmod{[m_1, \dots, m_r]}$. A recíproca segue do item (g).

■

De posse dessa proposição, agora podemos encontrar o resto da divisão de um número muito grande, escrito na forma de potência a^k por outro valor m .

Exemplos 12. Calcule o resto da divisão do número 17^{2002} por 13.

Solução. Como $17 \equiv 4 \pmod{13}$ e $16 \equiv 3 \pmod{13}$, segue do item (b) da proposição 32, módulo 13,

$$17^{2002} \equiv 4^{2002} = 16^{1001} \equiv 3^{1001}$$

Notando, agora, que $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ e aplicando os itens (a) e (b) da proposição 32, obtemos

$$3^{1001} = 3^2 \cdot 3^{999} = 9 \cdot (3^3)^{333} \equiv 9 \cdot 1^{333} = 9, \quad 3^{1001} \equiv 9 \pmod{13}$$

Então, segue da proposição 31 que 17^{2002} deixa resto 9 na divisão por 13.

O uso das congruências também pode ser associado as equações diofantinas, como pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplos 13. Encontre o menor múltiplo inteiro positivo de 7 que deixa resto 1 quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6.

Solução. Queremos achar a menor solução positiva x do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{aligned}7X &\equiv 1 \pmod{2} \\7X &\equiv 1 \pmod{3} \\7X &\equiv 1 \pmod{4} \\7X &\equiv 1 \pmod{5} \\7X &\equiv 1 \pmod{6}\end{aligned}$$

Pela proposição 32, item (h), temos que toda solução simultânea das congruências acima é solução da congruência $7X \equiv 1 \pmod{[2, 3, 4, 5, 6]}$, e reciprocamente. Portanto, devemos achar a solução positiva mínima u da congruência $7X \equiv 1 \pmod{60}$, que é equivalente a resolver a equação diofantina $7X - 60Y = 1$. Pelo algoritmo de euclidiano encontramos que a solução geral é dada por $x = -17 + 60t$ e $y = -2 - 7t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Portanto, o menor valor positivo de x de modo que exista y para os quais x, y é uma solução da equação diofantina $7X - 60Y = 1$ é $x = -17 + 60 \cdot 1 = 43$. Segue-se, então que o número procurado é $7 \cdot 43 = 301$.

3.1. PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

O uso efetivo de congruências para calcular restos é consideravelmente simplificado se encontrarmos expoentes que tornem uma certa potência congruente a 1. Por exemplo, sabendo que $7^3 \equiv 1 \pmod{9}$ fica muito mais simples calcular o resto da divisão de 25^{1001} por 9, já que 25 deixa resto 7 quando dividido por 9 ou ainda que $25 \equiv 7 \pmod{9}$, temos

$$25^{1001} \equiv 7^{1001} = (7^3)^{333} \cdot 7^2 \equiv 1^{333} \cdot 49 \equiv 4 \pmod{9}.$$

Nessa direção, o propósito agora é, uma vez fixados os inteiros a e m primos entre si, com $m > 1$, encontrar um expoente $k \in \mathbb{N}$ para o qual

$$a^k \equiv 1 \pmod{m}. \tag{3.1}$$

Para isso, analisaremos inicialmente o caso em que m é primo, provando assim um dos mais importantes resultados da teoria elementar de congruências, conhecido na literatura como o pequeno teorema de Fermat.

Desde, pelo menos, 500 anos antes de Cristo, os chineses sabiam que, se m é um número primo (a partir desse momento usaremos p para representar esse número primo), então $p \mid 2^p - 2$. Coube a Pierre de Fermat, no século XVII, generalizar esse resultado, enunciando um pequeno, porém notável teorema.

Para demonstrar o Teorema de Fermat, necessitamos do lema a seguir.

Lema 1. Seja p um número primo. Os números $\binom{p}{i}$, onde $0 < i < p$, são todos divisíveis por p .

Demonstração.

O resultado vale trivialmente para $i = 1$. Podemos, então, supor $1 < i < p$.

Nesse caso, $i! \mid p(p-1) \cdots (p-i+1)$, e o $\text{mdc}(i!, p) = 1$, decorre assim que

$$i! \mid (p-1) \cdots (p-i+1)$$

e o resultado se segue, pois

$$\binom{p}{i} = p \frac{(p-1) \cdots (p-i+1)}{i!}$$

■

Teorema 10. (Fermat) Dado um número primo p , tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Demonstração.

Se $p = 2$, o resultado é óbvio já que $a^2 - a = a(a-1)$ é par. Suponhamos p ímpar. Nesse caso, claramente basta mostrar o resultado para $a \geq 0$. Vamos provar o resultado por indução em a .

O resultado vale claramente para $a = 0$, pois $p \mid 0$.

Supondo o resultado válido para a , iremos prova-lo para $a + 1$. Pela fórmula do Binômio de Newton,

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p - a + \binom{p}{1} a^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} a$$

Como, pelo Lema 1 e pela hipótese de indução, o segundo membro da igualdade acima é divisível por p , o resultado segue.

■

Exemplos 13. Dado um número qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se que n^9 e n , quando escritos na base 10, têm o mesmo algarismo das unidades.

Solução. A afirmação acima é equivalente a $10 \mid n^9 - n$. Como n^9 e n têm a mesma paridade, segue-se que $n^9 - n$ é par, isto é, $2 \mid n^9 - n$.

Por outro lado,

$$n^9 - n = n(n^4 - 1)(n^4 + 1) = (n^5 - n)(n^4 + 1)$$

Logo, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $5 \mid n^5 - n$ e, portanto, $5 \mid n^9 - n$. Tem-se, então que $10 \mid n^9 - n$.

Corolário 1. Se p é um número primo e se a é um número natural não divisível por p , então p divide $a^{p-1} - 1$.

Demonstração.

Como, pelo Pequeno Teorema de Fermat, $p \mid a(a^{p-1} - 1)$ e como o $\text{mdc}(a, p) = 1$, segue-se, imediatamente, que p divide $a^{p-1} - 1$.

■

O corolário 6 também é chamado de *Pequeno Teorema de Fermat ou reformulação do Pequeno Teorema de Fermat*. Vale ressaltar também que o Pequeno Teorema de Fermat fornece-nos um teste de não primalidade. De fato, dado um número $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$, se existir algum $a \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(a, m) = 1$, tal que $m \nmid a^{m-1} - 1$, então m não é primo.

RECURSOS DA DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA

Elaboramos dois jogos de mesa (Dominó dos Restos e Carteadado da Divisibilidade e Congruência) para serem aplicados nesta oficina. Os jogos foram construídos tendo como base a disciplina de Teoria dos Números, com enfoque nos critérios de divisibilidade de números primos e compostos e na teoria das congruências, com destaque as propriedades operatórias. Essas atividades são alternativas metodológicas práticas para o ensino da Matemática, nos mais variados níveis de aprendizagem, além de possibilitar e fortalecer **habilidades diversas, como atenção, interação, memória, raciocínio lógico, planejamento, tomadas** de decisão, de modo a minimizar as dificuldades identificadas nos conteúdos apresentados acima.

Os jogos são de fácil compreensão, uma vez que utilizamos a mesma estrutura lógica do “dominó” e do “carteado uno”, isto é, atividades que já fazem parte da rotina da grande maioria dos estudantes, o que favorece a receptividade dos alunos e promove maior engajamento nas atividades. Outro aspecto que cabe destacar é que no jogo de cartas podemos promover variações que dependem do número de participantes, dos critérios de divisibilidades envolvidos, das propriedades operatórias de congruência e da quantidade de cartas envolvidas, ampliando assim as possibilidades lúdicas metodológicas do jogo.

4.1. OBJETIVOS

Geral

Fornecer ao professor, seja da educação básica ou mesmo do ensino superior, produtos educacionais (jogos) de baixo custo, com a finalidade de promover uma alternativa didática que possibilite uma melhoria da qualidade do ensino dos conteúdos relacionados.

Específicos

- Desenvolver junto aos alunos a habilidade de uso dos critérios de divisibilidade de forma rápida para números com muitos dígitos;

- Reconhecer os critérios de divisibilidade como um importante instrumento para a realização de cálculos mentais;
- Relacionar os critérios de divisibilidade com a teoria das congruências.

4.2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A oficina terá dois momentos, sendo que em cada um deles, haverá uma parte teórica e outra prática.

- No primeiro momento, trabalharemos a teoria dos critérios de divisibilidade por números primos e compostos, em seguida, iremos aplicar essa teoria com o uso prático do carteadado da divisibilidade e congruência.
- No segundo momento, abordaremos a teoria das congruências com ênfase nas propriedades operatórias, em seguida, iremos aplicar essa teoria com o uso prático do dominó dos restos e do carteadado na notação de congruências (nível 4).

O jogo (carteadado da divisibilidade e congruência) que será abordado no primeiro momento pode ser graduado em três níveis, a depender da série em que o aluno esteja: Nível 1 (6º e 7º Anos do Ensino Fundamental II), Nível 2 (8º e 9º Anos do Ensino Fundamental II) e o Nível 3 (Ensino Médio). Já os jogos que serão expostos no segundo momento (dominó dos restos e carteadado da divisibilidade e congruência) configuram-se por apresentarem uma notação de ensino superior, o que qualifica o carteadado como sendo um Nível 4, nessa estrutura lógica.

4.3. ATIVIDADES PROPOSTAS

1ª) Carteadado da Divisibilidade e Congruência

Composição: 200 cartas.

Instruções:

- ❖ A partida pode ser disputada por até seis participantes ou grupos;
- ❖ Os jogadores recebem as mesmas cartas, inclusive em quantidade, de acordo com o nível: Nível 1 (20 cartas), Nível 2 (30 cartas), Nível 3 (40 cartas) e Nível 4 (50 cartas);
- ❖ Escolhe-se a sequência dos jogadores e se inicia a partida;
- ❖ O primeiro jogador retira uma carta dividendo e em seguida descarta os divisores que possui;
- ❖ Caso o jogador descarte uma carta que não seja divisor da carta dividendo, a referida carta retorna para as mãos do jogador e o mesmo deve comprar uma nova carta;
- ❖

- ❖ Não é permitido descartar mais de uma carta por divisor numa mesma jogada;
- ❖ A partida se desenvolve com os demais participantes se alternando nas jogadas;
- ❖ Os participantes devem fiscalizar e conferir os descartes de cada jogador;
- ❖ O jogador que descartar todas as suas cartas primeiro, será o vencedor;
- ❖ Caso termine as cartas dividendo sem que nenhum jogador tenha descartado todas as suas cartas, deve-se embaralhar todas as cartas dividendo já usadas e retomar o jogo de onde ele parou, até que se obtenha um vencedor.



Figura 1

2ª) Dominó das Congruências

Composição: 36 peças.

Instruções:

1. Para iniciar o jogo, deverá ter 6 participantes;
2. As peças são embaralhadas por um jogador, com a face voltada para baixo;
3. Cada participante receberá 6 peças;
4. Determina-se qual é a peça de saída, no caso, o participante que tiver a peça 7x7;
5. O próximo a jogar será o participante a direita daquele que inicia a partida, caso ele não tenha a peça, o próximo participante poderá jogar, e assim, por diante;
6. Ao baixar a peça do dominó, o aluno precisará dizer o porquê de estar colocando aquela peça naquele lugar. Além disso, dizer o resto da congruência oposta do lado que encaixou;
7. O jogador que ficar sem peças na mão, vence o jogo;

8. Caso haja o fechamento do jogo, ou seja, quando os jogadores não possuem a peça para o prosseguimento do jogo, vence quem tiver a menor quantidade de peças;
9. Quem deverá fazer a confirmação do vencedor são os próprios jogadores, no caso os adversários.

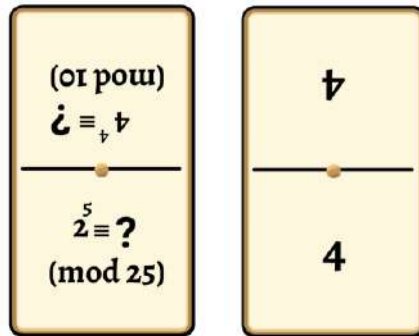


Figura 2

CONCLUSÕES

As atividades propostas nessa oficina ainda não foram aplicadas em sala de aula, apenas no laboratório de ensino, porém acreditamos que esses jogos, uma vez cuidadosamente planejados, podem oferecer aos docentes do ciclo básico e do ensino superior, uma alternativa didática prática e lúdica ao ensino do eixo Números baseado na BNCC, bem como ao ensino de congruência modular para os alunos da graduação. Com o uso dos jogos esperamos confirmar o importante papel que tais práticas têm de proporcionar o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, organização, atenção e concentração, aspectos tão necessários para o aprendizado da Matemática, conforme defendido por (BORIN). É oportuno mencionar também que os jogos promovem uma ligação importante entre os ciclos de ensino fundamental, médio e superior, ratificando portanto a sua necessidade de aplicação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo, SP: IME-USP, 2004. 100 p.
- [2] BRASIL, *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf/ . Acesso em 01 de março de 2022.
- [3] GUIMARÃES, O. Aplicações de Divisibilidade e Congruência Modular: do Ensino Básico ao Superior. Dissertação (Mestrado/ PROFMAT) - Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Pará – Faculdade de Matemática. Bragança. 2021.
- [4] HEFEZ, A. Elementos de Aritmética. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2011. 169 p.
- [5] LACERDA, J. C. A. Praticando a Aritmética. Rio de Janeiro, 8º Edição. Editora XYZ, 2014.
- [6] SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I. S. V. MILANI, E. Jogos de matemática de 6º a 9º ano. Porto Alegre, RS: Artmed, 2007. 104 p.



O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E SUA DISSEMINAÇÃO NA EUROPA OCIDENTAL

Araújo, José Acácio de, j.acacio@hotmail.com¹
Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira, gabriela.lucheze@ufpn.br²

¹Secretaria da Educação e da Cultura do Rio Grande do Norte

²Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Resumo: A oficina proposta é resultado do produto educacional de nossa dissertação de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), cujo objetivo foi elaborar um material didático que possa ser usado na formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Estes professores, em sua grande maioria, licenciados em Pedagogia, recebem uma formação insuficiente em Matemática, visto que, em geral, os cursos de Pedagogia dão prioridades às questões metodológicas, em detrimento dos conteúdos específicos das disciplinas, isso foi apontado principalmente, nos estudos realizados por Curi (2004) e em um levantamento atual que fizemos nas estruturas curriculares de cursos de Pedagogia em algumas universidades públicas brasileiras. O produto educacional resultou na elaboração de um livreto para ser utilizado em cursos de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, explorando o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com os Números Naturais. Para isso, utilizamos as Unidades Básicas Problemadoras (UBPs), atividade proposta por Miguel e Mendes (2010), que resgata práticas histórico-sociais, e a partir delas são elaborados questionamentos de cunho investigativo e reflexivo.

Palavras-chave: Formação continuada de professores. Sistema de Numeração Decimal. UBP. Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. História da Matemática.

INTRODUÇÃO

Os cursos de Pedagogia no Brasil, responsáveis pela formação inicial dos professores que irão lecionar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, não oferecem uma formação suficiente em Matemática para um futuro professor, causando uma falsa sensação de que para ensinar nas séries iniciais não precisa saber nem gostar de Matemática, o que provoca na prática um entrave no processo de ensino-aprendizagem, visto que a maioria dos professores não domina o elementar, refletindo nos níveis de ensino posteriores.

Diante da necessidade de contribuir com a formação em Matemática, propomos neste trabalho um material didático que possa ser usado em uma formação continuada, tendo como público alvo professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que desejem um aprofundamento nos conhecimentos matemáticos necessários para desenvolver metodologias que realmente proporcionem uma aprendizagem significativa. Para isso, escolhemos o conteúdo de Números, exploraremos uma das temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mais especificamente o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com Números Naturais, por meio de uma linguagem acessível para não-matemáticos.

Tal escolha se deu pelo fato de considerarmos primordial que o aluno aprenda logo nas séries iniciais não só a operar os algoritmos usuais, como também o significado de cada passo realizado. E isso só será possível com um professor que domine bem o assunto. Na nossa proposta tivemos a preocupação em considerar que esses professores não são matemáticos, portanto, não dispõem de conhecimentos teóricos específicos desta área. Nossa intenção é

oferecer um material com um certo rigor matemático usando uma linguagem apropriada para o público mencionado. O que estamos propondo é oferecer-lhe um conhecimento que vai além de sua formação pedagógica inicial, compreendendo os fundamentos matemáticos das operações fundamentais com Números Naturais. A abordagem e metodologia utilizada centram-se nas Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), que possibilitam estudar tópicos da Matemática por meio de seu desenvolvimento ao longo da história. Dessa forma, exploramos a evolução do pensamento matemático relacionado às operações fundamentais com Números Naturais na Europa Medieval.

1. Metodologia

As atividades propostas foram elaboradas de acordo com as ideias de Miguel e Mendes (2010) e Tavares e Pereira (2016), por meio de textos com informações históricas retiradas principalmente de Boyer (1974), Ifrah (1994), Eves (2004) e Wall (2014). A partir dos mesmos, elaboramos um livreto contendo questionamentos de cunho investigativo e reflexivo, onde os professores poderão ampliar os seus conhecimentos acerca dos temas propostos. O livreto, intitulado “SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL: História e Operações Fundamentais”, será gratuitamente distribuído aos participantes pelos proponentes da oficina. Os participantes da oficina devem portar um dispositivo eletrônico do tipo *smartphone* com acesso à internet para eventuais consultas.

Esse material foi elaborado para ser utilizado em uma oficina com duração de 4 horas, dividido em dois momentos de 2 horas cada. O público alvo é, preferencialmente, professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No primeiro momento os livretos serão repassados aos participantes em formato digital e, se houver disponibilidade, na forma impressa. Inicialmente é oportuno fazer uma explanação sobre as UBPs e a necessidade da formação continuada de professores. Em seguida, discutiremos a problematização da **UBP - O Sistema de Numeração Indo-Arábico e sua disseminação na Europa Ocidental**, e os professores serão orientados a formarem pequenos grupos para discutirem entre si e realizarem as investigações sugeridas por meio de questionamentos. A cada questionamento é sugerido que haja investigação, discussão, reflexão e posterior registro. Após essa etapa será convidado um representante por grupo para socialização e discussão das respostas encontradas. Ao final faremos as considerações finais e apresentaremos algumas sugestões de materiais que poderão ser usados na elaboração de outras UBPs, que possam ser utilizadas em aulas dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

2. A Formação Inicial dos Pedagogos e a Matemática

De acordo com as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Pedagogia, instituída pela Resolução CNE/CP N° 1, de 15 de maio de 2006, o egresso do curso de Pedagogia está apto a ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes e Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano. Esses futuros professores são denominados no meio educacional de polivalentes, os quais, de acordo com Lima (2007), podem ser compreendidos como sujeitos capazes de apropriar-se de conhecimentos básicos das diferentes áreas que compõem a base comum do currículo do Ensino Fundamental e de articulá-los, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar. No entanto, os cursos de formação de professores polivalentes, em sua maioria, dão prioridade às discussões metodológicas, em detrimento dos conteúdos. Para tal conclusão, nos baseamos nos estudos de Curi (2004) que indica que “Nos cursos atuais de formação de professores polivalentes geralmente, salvo raras exceções, dá-se mais ênfase ao “saber ensinar” os conteúdos, sem preocupação com a sua ampliação e aprofundamento”.

Com relação à Matemática, verificamos que a formação do estudante de Pedagogia é insuficiente para atender à demanda de um futuro professor, segundo Correia (2008), a formação do professor polivalente contempla uma ampla abordagem metodológica para o ensino de Matemática em detrimento da abordagem dos conteúdos a serem ensinados. Em Araújo (2020), analisamos as grades curriculares de cursos de Pedagogia de 18 universidades públicas de todas as regiões do Brasil, e podemos observar que a importância dada aos conteúdos matemáticos é mínima. Na maioria delas figura uma ou duas disciplinas associadas à metodologias ou ao ensino da Matemática, priorizando o como ensinar, deixando entender que o professor dos anos iniciais não precisa dominar o conteúdo para lecionar, ratificando o que Curi (2004) já indicava, que a formação inicial do pedagogo é “baseada nos Fundamentos da Educação, que não considera a necessidade de construir conhecimentos sobre a disciplina para ensiná-los, deixando transparecer uma concepção que o professor polivalente não precisa “saber Matemática”, basta saber como ensiná-la”.

Não estamos menosprezando as disciplinas generalistas que são ensinadas nos cursos de Pedagogia, todas têm sua importância na formação do professor. O que estamos indagando é a pouca atenção que os currículos desses cursos dão quanto aos conteúdos que o futuro professor precisa dominar nas diferentes áreas que irão ensinar, e aqui tratamos mais especificamente da Matemática, que já é uma disciplina considerada por muitos como um empecilho

nos estudos, e historicamente vem sendo deixada em segundo plano na formação dos docentes que irão trabalhar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma fase muito importante na formação do cidadão.

Ainda segundo Curi (2004), há uma desarticulação, quase total, entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos, priorizando as práticas metodológicas em detrimento dos conteúdos, deixando transparecer que o “saber ensinar” é mais importante do que o “o que ensinar.” Dominar o conteúdo em um nível maior do que vai ensinar é extremamente necessário para o docente desenvolver estratégias e metodologias para que a aprendizagem realmente aconteça.

Pena (2019) analisou resultados de provas de uma avaliação nacional realizada em 2017 com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, e constatou que as operações fundamentais com Números Naturais, juntamente com situações contextualizadas que exigem interpretação e aplicação de conceitos fundamentais das operações, mostram resultados preocupantes. Fato favorecido pela deficiência na formação do docente que leciona Matemática nas séries iniciais, conforme já discutimos anteriormente.

3. Unidades Básicas Problemadoras no Ensino das Operações Fundamentais com Números Naturais

Diante de todos os fatos já mencionados e da necessidade de suprir, pelo menos em parte, as deficiências em Matemática na formação inicial do professor polivalente elaboramos um material didático para fins de utilização em cursos de formação continuada. Trata-se de uma abordagem das operações fundamentais com Números Naturais por meio da utilização de UBPs (Unidades Básicas Problemadoras), onde a partir de contextos históricos e sociais abordaremos os significados conceituais da adição, subtração, multiplicação e divisão, indo além da simples aplicação dos algoritmos, proporcionando também aos docentes, subsídios que permitam desenvolver estratégias de ensino mais significativas. A História da Matemática é repleta de tópicos interessantes da Matemática que devem ser abordadas pelo aspecto cognitivo, favorecendo a aprendizagem. A abordagem proposta pelas UBPs, além de, mostrar o desenvolvimento de um conceito Matemático ao longo do tempo, contribui para a percepção da evolução do pensamento matemático, desta forma, não são apenas mostrados fatos históricos.

O aluno que chega ao final do 5º ano do Ensino Fundamental dominando as operações fundamentais com os Números Naturais certamente terá grande facilidade em toda a sua vida escolar. Mas para isso é necessário que o professor também as domine e, além disso, disponha de conhecimentos além do que ele vai ensinar, facilitando assim o desenvolvimento de metodologias que possibilitem uma aprendizagem significativa. Nessa perspectiva, vimos nas Unidades Básicas Problemadoras, ou simplesmente UBPs, a oportunidade de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem em Matemática para os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Miguel e Mendes (2010) “A UBP é um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade posta a uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história”. Ao longo do tempo a Matemática evoluiu de acordo com a necessidade da humanidade em tornar a vida mais fácil e resolver problemas relacionados ao cotidiano. Sendo assim, a UBP é explorada a partir de um fato histórico sociocultural de natureza indisciplinar, ou seja, que não é específico de uma determinada disciplina, a partir dele elaboramos problematizações, que no nosso caso abordarão principalmente os Números Naturais e suas operações fundamentais.

O uso de UBPs na formação de professores pode ser um rico recurso metodológico, pois possibilita a construção do conhecimento matemático por meio de práticas históricas e sociais, favorecendo o pensamento crítico do sujeito. As atividades a serem desenvolvidas têm cunho investigativo, no sentido de que os professores podem trabalhar coletivamente na elaboração de respostas para os questionamentos, discutir e socializar para uma posterior reflexão sobre o conteúdo trabalhado, seu conhecimento sobre ele e sua prática docente.

Durante muito tempo as operações fundamentais com Números Naturais, denominadas de adição, subtração, multiplicação e divisão foram ensinadas de forma mecânica, onde o professor resolvia um exemplo na lousa, em seguida colocava diversas “continhas” e os alunos eram submetidos a repetições até aprender. Na verdade, poderia ocorrer uma aprendizagem das técnicas de resolução, mas sem justificativas para o uso de tais técnicas. O vai e vem e o tomar emprestado, terminologias corriqueiras utilizadas nas operações de adição e subtração, eram apenas usados porque dava certo. Na maioria das vezes o professor também não disponha de conhecimentos suficientes para ensinar de forma diferente ou até mesmo compreender esse dispositivo. O ensino por repetição e memorização foi bastante contestado nas últimas décadas, os cursos de formação de professores passaram por reformulações e as práticas metodológicas foram mudando, o que não significa dizer que houve avanço na aprendizagem.

Com relação ao ensino de Matemática nos anos iniciais, embora as técnicas de repetição tenham perdido espaço, ainda é constatado grandes falhas no processo de ensino-aprendizagem. Segundo Gualberto e Almeida (2009), nesta fase escolar o grande entrave parece ser a alfabetização das crianças, a matemática acaba sendo colocada em

segundo plano, o que prejudica a formação do aluno nos demais anos escolares. Faz-se necessário darmos a devida importância ao ensino da Matemática nesta fase, já que a mesma favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico nas crianças, bem como subsidia o estudo das demais ciências naturais e até mesmo das ciências sociais.

4. UBP - O Sistema de Numeração Indo-arábico e sua Disseminação pela Europa Ocidental

A representação dos números e a maneira de operá-los nem sempre foi a que conhecemos hoje. Ao longo do tempo a humanidade desenvolveu diversos símbolos até chegar aos algarismos que usamos na atualidade quase que universalmente. Quanto ao sistema de numeração mais usado na atualidade é o decimal posicional, cuja invenção se deu na Índia por volta do século V d. C., sendo adotado pelos árabes, com quem mantinham fortes relações comerciais, a por volta do século VIII.

Até então o sistema numérico mais usado no mundo ocidental para representar os números era o Romano. As operações eram feitas por pessoas com um grau de conhecimento avançado, chamados calculadores, que usavam o ábaco como instrumento para realizar os cálculos. A disseminação do sistema de numeração indo-arábico foi fruto de um longo processo. Havia bastante rejeição, principalmente por questões religiosas. Acredita-se que o comércio e suas necessidades de cálculos cada vez maiores foi decisivo na aceitação do novo sistema.

Todavia os métodos de cálculo desenvolvidos pelos hindus só vulgarizou amplamente com o trabalho do matemático persa Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (783-850), que escreveu uma obra expondo pela primeira vez o sistema numérico decimal, onde usa dez símbolos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 para representar qualquer número natural, sendo que a partir do 10 o valor do símbolo depende da ordem em que ele se encontra. Na obra, chamada de Tratado Aritmético de al-Khwarizmi, ele também expõe o modo de calcular dos indianos, que facilitaria bastante as operações com números naturais.

A partir dessa problematização, os participantes serão motivados a investigar, discutir, refletir sobre o tema. Questionamentos de cunho histórico e matemático sobre o sistema de numeração posicional e operações fundamentais com números naturais serão introduzidos e resolvidos durante a oficina.

CONCLUSÕES

Por meio de estudos como o de Curi (2004) e de pesquisas que realizamos em 2020 nas matrizes curriculares de algumas Universidades Públicas de vários estados brasileiros constatamos que a formação matemática desses professores licenciados em Pedagogia, que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, conta com pouca presença de conteúdos matemáticos e baixa carga horária destinada às disciplinas relacionadas à Matemática. Propomos, nesta oficina, um meio de abordar conteúdos matemáticos essenciais à uma melhor formação do professor que ensinará os números naturais e suas operações fundamentais.

No material pedagógico elaborado por nós, procuramos utilizar uma metodologia que despertasse nos professores um interesse no aprofundamento dos conteúdos matemáticos trabalhados. Decidimos, então, utilizar Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), proposta criada por Miguel e Mendes (2010), na qual exploramos problematizações a partir de fatos históricos sociais. Além disso, o uso das UBPs propicia um meio instigante e agradável de abordar conteúdos matemáticos e levam os participantes a adotarem uma postura investigativa no estudo da Matemática. Nossa UBP aborda disseminação do sistema de numeração indo-arábico pelo Ocidente e seu caráter decimal e posicional, além das operações fundamentais com números naturais.

Por meio da utilização do nosso material pedagógico, para os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, esperamos que estes se sintam incentivados a investigar, refletir e buscar novos conhecimentos para, a partir deles, melhorar sua prática pedagógica, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo. Salientamos, ainda, que o nosso material pedagógico poderá ser utilizado por outros Matemáticos que se interessarem em ampliar o conhecimento dos professores que ensinam matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. A. Sistema de numeração decimal e operações fundamentais: do rigor matemático a uma abordagem para professores polivalentes. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP n. 1/2006 Diretrizes curriculares nacionais para o curso de graduação em pedagogia, licenciatura. Brasília, 2006.

CORREIA, Carlos Eduardo Felix. A formação (matemática) dos professores polivalentes, *Revista de Educação Matemática*. São Paulo, vol. 11, n. 13, 2008. Disponível em: <http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMatSP/article/view/48/pdf> Acesso em: 28 mar. 2020.

CURI, Edda. Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos, 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC/SP, São Paulo, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

GUALBERTO, P. M. A.; ALMEIDA, R. Formação de professores nas séries iniciais: algumas considerações sobre a formação matemática e a formação dos professores das licenciaturas em Pedagogia. *Olhar de Professor, Ponta Grossa*, v. 12, n.2, p. 287-308, 2009. Disponível em: <https://www.revistas.uepg.br/index.php/olhardeprofessor/article/view/531213/863>. Acesso em: 01 abr. 2020.

IFRAH, Georges. **Os Números: a História de uma grande invenção**. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 6. ed. São Paulo: Globo, 1994.

MIGUEL, Antônio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. *ZDM mathematics Educacion* v. 42, p. 381-392, 2010.

LIMA, Vanda Moreira Machado. Formação do professor polivalente e saberes docentes: um estudo a partir de escolas públicas. 2007. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12032009-111920/pt-br.php> Acesso em: 07 jul. 2020.

PENA, H. M. A formação dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Para, Belém.

TAVARES, Mariana Oliveira; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um estudo sobre a inserção das práticas matemáticas históricas por meio de UBP no ensino de Matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática* - V. 3, n. 8, p. 59 - 70, 2016. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/77/30>. Acesso em: 26 ago. 2020.

Wall, Edward S. **Teoria dos Números para professores do ensino fundamental**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: AMGH, 2014.



O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Gonçalves de Araújo, Demetrius, email1 demetrius.araujo@hotmail.com

Resumo: Este minicurso visa apresentar aos profissionais da educação e comunidade discente uma estratégia metodológica baseada no pensamento computacional, desenvolvimento de aplicações para dispositivos móveis que possuem sistema operacional Android, como meio de fixação de conceitos e definições de conteúdos de matemática. A ferramenta usada é a plataforma *MIT App Inventor*, gratuita e online, mantida pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), destinada à usuários com pouca ou nenhuma experiência em programação poderem construir projetos simples e funcionais, através de um método simples de encaixe de blocos.

Palavras Chaves: Pensamento computacional. Matemática. MIT App Inventor.

INTRODUÇÃO

Na década de 2010 houve um crescimento de vendas de dispositivos móveis ampliando o acesso da população à smartphones e tablets. Segundo pesquisas publicadas pela IDC Brasil, em 2014 foram comercializados 54,5 milhões de smartphones, em 2015, 47 milhões, chegando a 43,4 em 2016. Para a empresa de consultoria, o Brasil chegou em abril de 2016 com 168 milhões de smartphones em uso. Somando a este volume, foram adquiridos cerca de 9,5 em 2014, 5,8 em 2015 e 4 milhões de tablets em 2016.

Estes aparelhos permitem o acesso ao mundo virtual e são capazes de armazenar diferentes tipos de mídias com múltiplas funções. Isto viabiliza executar atividades em qualquer hora e lugar, com acesso à Internet, registros de imagens e vídeos, utilizando aplicativos de pesquisa e estudos, através de centrais de processamento muitas vezes superiores aos dos computadores instalados nos laboratórios escolares. (BARBOSA, 2016, p. 16)

Além disso, estes dispositivos chegam às escolas sem a necessidade de investimento público direto, são de uso individual e estão constantemente atualizados por seus proprietários. Estes dispositivos são, atualmente, as melhores ferramentas de tecnologias de informação e comunicação (TICs) disponíveis na maioria das escolas. Aliás, possibilita desenvolver atividades escolares alinhadas com as propostas estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais no que se refere ao uso dos recursos tecnológicos para a aprendizagem.

É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46)

JUSTIFICATIVA

O uso da programação na educação já vem de longa data e tem fundamentos bem definidos. Valente nos ensina que o processo de “aprendizagem pode ocorrer basicamente de duas maneiras: a informação é memorizada ou é processada pelos esquemas mentais e esse processamento acaba enriquecendo esses esquemas” (VALENTE, 1999, p. 71). Além disso, “a ferramenta computacional pode ser o instrumento que permita romper com a abordagem instrucionista que caracteriza a educação tradicional em prol de uma educação progressista” (PAPERT, 1994, p. 20 apud ALMEIDA, 1999, p. 30), chamando a atenção do aluno para o novo, possibilitando aflorar habilidades ocultas que não são reveladas no método clássico.

Isto se deve ao fato no “qual alunos e educadores se engajem num trabalho de investigação científica, em que ocorre: o processo cíclico ação-testagemdepuraçãogeneralização” (ALMEIDA, 1999, p. 28). Assim sendo, a atividade de programação permite observar e descrever as ações do aluno enquanto ele resolve problemas que envolvem abstrações, aplicações de estratégias, estruturas e conceitos já construídos, ou a criação de novas estratégias, estruturas e conceitos. (PAPERT apud ALMEIDA, 1999, p. 33). É o que diz também Valente:

Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas ideias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias. (VALENTE, 1999, p. 12)

Das várias ferramentas de programação, foi escolhida o *MIT App Inventor* (MAI). “Uma plataforma de desenvolvimento, que permite pessoas com qualquer nível de experiência em programação criar programas (aplicações) para o sistema operacional Android” (BARBOSA, 2016, p. 26). Ele usa uma interface gráfica onde a “funcionalidade dos componentes é exposta aos desenvolvedores via blocos de código permitindo construir o aplicativo sem ter que escrever código tradicional, tal como montar um quebra-cabeça” (BARBOSA, 2016, p. 26). Um dos objetivos do MAI é tornar a programação e a criação de aplicativos acessíveis a uma grande variedade de públicos, incluindo educadores que desenvolvem aplicativos para apoiar seus próprios objetivos instrucionais.

Figura 1 – Exemplo de um bloco de programação na plataforma MIT App Inventor.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

OBJETIVO GERAL DO MINICURSO

Apresentar aos profissionais da educação e comunidade discente uma estratégia metodológica baseada na construção de aplicativos para dispositivos móveis como ferramenta de fixação de conceitos e definições de conteúdos matemáticos através da plataforma *MIT App Inventor*, recurso virtual disponibilizado gratuitamente pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT).

OBJETIVOS

- Apresentar a plataforma do *MIT App Inventor 2* e ensinar como acessar e usufruir esta ferramenta;
- Ensinar uma sequência didática de construção de um aplicativo que encontra raízes de equações polinomiais do segundo grau;
- Modelar um aplicativo que soluciona uma situação-problema a ser apresentado pelo facilitador que deverá utilizar como critérios a criatividade, o uso de um conteúdo matemático e a aplicação real do projeto.

RECURSOS MATERIAIS

Apesar de envolver tecnologia, a metodologia exige apenas os recursos já disponíveis na maioria dos estabelecimentos de ensino. São eles:

- Instituição: Laboratório de informática com acesso à internet e estações de trabalho rodando os sistemas operacionais mais utilizados no mercado (Windows, ou Mac OS X ou GNU/Linux);
- Navegadores de internet Mozilla Firefox, Apple Safari ou Google Chrome (Internet Explore da Microsoft não é suportado);
- Cursistas: Dispositivos móveis (smartphones ou tablets) com sistema operacional Android 2.3 ("Gingerbread") ou superior.

CRONOGRAMA

O minicurso terá duração de 3 horas com atividades distribuídas da seguinte forma:

Tabela 1: Cronograma do minicurso.

	DESCRIÇÃO	TEMPO
01	Apresentação do facilitador; - Justificação do minicurso.	05 min
02	Apresentação da plataforma; Demonstração dos principais detalhes e requisitos; Ajustes dos dispositivos móveis dos participantes.	10 min
03	Tutorial 01: Fazendo o primeiro aplicativo.	25 min
04	Tutorial 02: Achando as raízes reais de equações do 2º grau.	50 min
05	Tutorial 03: Matemática Financeira / Juros compostos.	70 min
06	Avaliação.	20 min

Avaliação

Para avaliar os resultados obtidos, o facilitador solicitará aos participantes responderem um questionário cujas respostas deverão entre outros, investigar:

- Nível de complexidade da proposta;
- Grau da absorção do conteúdo apresentado;
- Condições de aplicabilidade no contexto do participante do minicurso; - aspectos interpessoais da apresentação realizada pelo facilitador.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Maria Elizabeth B. **Informática e formação de professores**. Coleção Informática Aplicada na Educação. São Paulo: MEC/SEED/PROInfo, 1999. Disponível em: < <https://goo.gl/jI91DV> >. Acesso em: 11 de Junho de 2017.

BARBOSA, Marcos A. **Desenvolvendo aplicativos para dispositivos móveis através do Mit App Inventor 2 nas aulas de Matemática**. 2016. 141 p. Dissertação - Universidade Estadual de Santa Cruz Instituição. Ilhéus-BA. Disponível em: < <https://goo.gl/Zaoeit> >. Acesso em: 11 de Junho de 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em: < <https://goo.gl/jj85IB> >. Acesso em: 11 de Junho de 2017.

International Data Corporation Pesquisa de Mercado e Consultoria Ltda. **Mercado brasileiro de smartphones registra queda nas vendas pelo segundo trimestre consecutivo**. São Paulo. Disponível em: < <http://br.idclatin.com/releases/news.aspx?id=1969> >. Acesso em: 07 de dezembro de 2015.

MIT App Inventor. Disponível em: < <http://appinventor.mit.edu/explore/index-2.html> >. Acessado em 03 de Janeiro de 2016.

VALENTE, José. A. **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. In: Valente (org). USP. São Paulo: Estação Palavra. 1999. 171 p. Livro digital. Disponível em: < <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003150.pdf> >. Acesso em 07 de dezembro de 2016.



EDUCAÇÃO FINANCEIRA E O ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Lopes, Shirlane, shirlanebessa@gmail.com¹
Damasceno, Alexandre, alexdamasco@gmail.com²
Arruda, Suellen, scqarruda@ufpa.br³

¹ FACET/CUBT/UFPA

² ICSA/UFPA

³ FACET/CUBT/UFPA

Resumo: A educação financeira e a matemática financeira possuem uma intrínseca relação, isso por que os conteúdos matemáticos são essenciais para o processo de educar financeiramente, tais como, cálculo de juros simples e compostos, descontos, sistemas de amortização. É possível que essa conexão seja uma das causas de um comum equívoco ao tomá-las como sinônimos. Entretanto, apesar desses conteúdos matemáticos serem importantes para a educação financeira, eles não são suficientes para sustentá-la, pois ela é bem mais ampla que os conhecimentos a respeito de cálculos. A educação financeira contempla além de habilidades matemáticas, questões atitudinais envolvendo ética, meio ambiente, entre outros. Por este motivo, o presente trabalho pretende contribuir para a disseminação da educação financeira no âmbito escolar por meio da capacitação de professores e futuros professores de matemática. Para tanto, abordaremos algumas possibilidades de aplicações da educação financeira em aulas de matemática para os anos finais do ensino fundamental, utilizando materiais disponibilizados gratuitamente pelo Ministério da Educação (MEC), com o objetivo de desenvolver habilidades específicas da matemática presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: educação financeira, matemática financeira, BNCC, aplicações, capacitação.

INTRODUÇÃO

Pesquisas realizadas pelo BCB (Banco Central do Brasil) mostram que a educação financeira apesar de muito comentada ainda é pouco desempenhada pelos brasileiros, principalmente na Região Norte do país. Embora o último relatório de cidadania financeira, em 2021, tenha apresentado melhores resultados, os dados ainda são preocupantes, uma vez que para o BCB a educação financeira é alcançada quando “o cidadão tem a oportunidade de desenvolver a capacidade e autoconfiança para gerenciar bem seus recursos financeiros” (BCB, 2021). Diante deste cenário, o GEFAM (Grupo de Educação Financeira da Amazônia) o mesmo funciona desde 2014 com objetivo essencial divulgar e contribuir com ações efetivas de Educação Financeira com palestras, cursos, oficinas e atendimentos de pessoas risco e endividadas (<https://www.instagram.com/gefamufpa/>).

No Brasil, a educação financeira ganhou notoriedade com a criação da ENEF (Estratégia Nacional de Educação Financeira) pelo Governo Federal, cujas ações em parceria com instituições públicas e privadas vêm promovendo boas práticas de educação financeira e contribuindo com o fortalecimento da cidadania, tendo como público alvo crianças, jovens e adultos. Ao considerar a escola um dos principais meios de disseminar os conhecimentos de educação financeira, uma importante ação da ENEF foi elaborar uma coleção de doze livros didáticos, que estão disponíveis gratuitamente em formato digital na plataforma Vida e Dinheiro, voltados para alunos e professores do ensino fundamental e do ensino médio.

Apesar de o tema ter sido bastante difundido, ainda há muitos questionamentos a respeito do que é de fato educação financeira e como podem ser feitas as aplicações em sala de aula. Ademais, o pouco que se conhece de educação financeira acaba sendo confundido com a matemática financeira, que é um dos componentes curriculares da disciplina de matemática, o que acarreta em uma errônea incumbência somente dessa disciplina em educar financeiramente. Outro fator que pode contribuir para esse equívoco é o fato de que na BNCC somente em algumas habilidades da área de matemática está explícito que pode envolver contextos de educação financeira, entretanto nas outras áreas de conhecimento é possível encontrar recomendações para envolver questões econômicas e ambientais sustentáveis, entre outras.

Com o objetivo de contribuir para a inserção do tema em sala de aula, atentaremos em diferenciar a matemática financeira e a educação financeira para então propormos algumas aplicações conectando matemática e educação financeira para os anos finais do ensino fundamental, tais propostas serão feitas com base na educação financeira segundo a ENEF vinculando-a às competências e habilidades da BNCC de matemática interligando as demais áreas de conhecimentos, utilizando os livros didáticos elaborados pela ENEF voltados para esse nível escolar.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA E MATEMÁTICA

Comumente a educação financeira é tomada como sinônimo de matemática financeira, isso porque os conteúdos da matemática financeira fazem parte da educação financeira no que diz respeito a conhecimento, entretanto para que ocorra de fato uma educação financeira esses conhecimentos devem ser atrelados a habilidades e gerar atitudes adequadas.

É importante esclarecer as diferenças existentes entre matemática financeira e educação financeira por meio do conceito de cada uma. A educação financeira conforme a OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) é entendida como

O processo mediante o qual os indivíduos melhoram sua compreensão sobre os produtos, conceitos e riscos financeiros, por meio de informação, formação e orientação claras, adquiram os valores e as competências necessárias para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos neles envolvidos, e então façam escolhas bem informadas, e saibam onde procurar ajuda, adotem outras ações que melhorem o seu bem estar, contribuindo assim de modo consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro. (OCDE, 2005).

A matemática financeira é um dos componentes da disciplina de matemática, sendo definida por Neto (2012) como “o estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo”. Porém, não basta saber apenas manipular cálculos referentes às finanças, pois o maior desafio é fazer com que esses conhecimentos sejam utilizados de forma adequada e não apenas de forma mecanizada sem objetivo algum. Neste sentido, A BNCC considera a educação financeira como tema transversal e interdisciplinar, que deve ser trabalhado de modo contextualizado, e para isso propõe algumas habilidades e competências envolvendo explicitamente a educação financeira com os conteúdos da disciplina de matemática (BNCC, 2018).

Uma maneira de abordar a educação financeira em sala de aula é considerar as situações do dia a dia, que ocorrem de modo que as ações do presente acarretam em consequências no futuro, assim como o presente é consequência do passado. Por exemplo, uma pessoa que tem o hábito de poupar há 10 anos, hoje dispõe de uma poupança que pode ser utilizada para a realização de um sonho, da mesma forma que se continuar a manter esse hábito daqui a 10 anos terá um saldo maior ainda. Por outro lado, um indivíduo que é consumista, e não tem o hábito de poupar, no futuro poderá estar com problemas financeiros de não mudar de atitude. Essas e outras situações pertencem à dimensão temporal, que é referente às ações e suas consequências no decorrer do tempo.

Uma outra forma de abordar a temática em sala de aula é refletir que, as ações individuais impactam o coletivo social desde o âmbito local, regional até mundialmente. Por exemplo, quando uma pessoa não se planeja financeiramente adquirindo dívidas além do seu salário, alguém que espera o pagamento dessa pessoa deixará de recebê-lo, e conseqüentemente poderá ter problemas em cumprir seus compromissos financeiros, gerando um problema conjunto de não pagamento de dívidas. Essa é uma situação na dimensão espacial, na qual as ações do espaço individuais interferem no espaço social.

Em vista disto, foram definidos seis (6) objetivos a serem alcançados com a educação financeira voltados para a sala de aula, sendo quatro (4) referentes à dimensão espacial e dois (2) referentes a dimensão temporal, e cada objetivo tem suas competências correspondentes (ao todo são dez competências), descritos na Tabela 1.

Tabela 1: Objetivos e competências da educação financeira

Dimensão espacial	
Objetivos	Competências
Obj.01. Formar Para a cidadania	C01. Debater direitos e deveres
Obj.02. Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.	C02. Participar das decisões financeiras social e ambientalmente responsáveis.
Obj.03. Oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude.	C03. Distinguir desejos e necessidades de consumo e poupança no contexto do projeto de vida familiar C04. Ler e interpretar textos simples do universo de Educação financeira; C05. Ler criticamente textos publicitários; C06. Participar das decisões financeiras considerando necessidades reais.
Obj. 04 formar multiplicadores	C07. Atuar como multiplicador
Dimensão temporal	
Objetivos	Competencias
Obj.05: Ensinar a planejar a curto, médio e longo prazo.	C08. elaborar planejamento financeiro com ajuda.
Obj.06: Desenvolver a cultura da prevenção.	C09. Cuidar de si próprio, da natureza e dos bens comuns considerando as repercussões imediatas de ações realizadas no presente. C10. Cuidar de si próprio, da natureza e dos bens comuns considerando as repercussões futuras de ações realizadas no presente.

Fonte: Livro de Educação Financeira nas escolas 9 – livro do professor, p.10. adaptada pela autora do trabalho

A partir da análise das competências e habilidades da disciplina de matemática da BNCC dos anos finais do ensino fundamental, é possível fazer conexões com os objetivos e competências relacionadas à educação financeira. Na tabela 2, observa-se uma competência específica de matemática conectada com a educação financeira, para mostrar que há relação entre matemática e educação financeira, mas podem haver outras.

Tabela 2: Conexão entre matemática e educação financeira

Competência matemática	Objetivo de Educação financeira	Competência de Educação Financeira
7- Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.	Obj.02 Obj. 05	C02 C03 C08

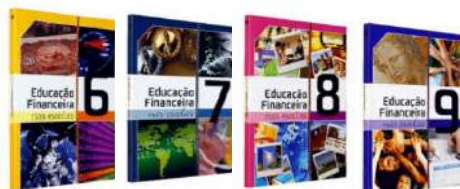
Fonte: Elaborado pela autora do trabalho

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Para fazer aplicações de educação financeira em matemática para os anos finais do ensino fundamental, propomos a utilização dos livros didáticos produzidos pela ENEF, mostrados na Figura 2, os quais compõem orientações ao professores de como podem utilizar os materiais, além de histórias e atividades que ao serem

desenvolvidas com os alunos trabalham a autonomia de forma dinâmica, abordando conceitos de educação financeira juntamente com as disciplinas escolares, especificamente conteúdos matemáticos.

Figura 2: Livros da ENEF – 6 ao 9



Fonte: site ENEF (<https://www.vidaedinheiro.gov.br/livros-ensino-fundamental/>)

A Tabela 4 dispõe para cada ano final do ensino fundamental, uma habilidade com um objetivo e uma competência da educação financeira, sendo representado por seu código.

Tabela 4: Habilidade matemáticas e educação financeira

Ano	Habilidades	Objetivo de EF	Competência de EF
6º	EF06MA32	Ob.03	C05
7º	EF07MA02	Ob.05	C08
8º	EF08MA24	Ob.03	C06
9º	EF09MA05	Ob.03	C03

Fonte: Elaborado pela autora do trabalho

A proposta de aplicação da educação financeira para o 6º ano do ensino fundamental é trabalhar as operações básicas com números naturais, utilizando as histórias do livro 6 (seis), são histórias que envolvem a criação do avião (no passado), carro elétrico (no presente), uma missão para o espaço (no futuro), decisões simples cotidianas sobre a real necessidade de consumir algum produto ou contratar serviços. Essas histórias podem ter diferentes finais, pois ocorrem conforme as decisões do personagem escolhido pelo aluno e cada decisão (tomada pelo aluno) acarreta sua consequência.

Já a proposta de aplicação para o 7º e 8º anos do ensino fundamental é utilizar as atividades dos livros correspondentes para exercitar conteúdos como porcentagens, acréscimo, decréscimo, entre outros, envolvendo situações de negociações que estimulem a autonomia e criatividade dos alunos.

Por fim, a proposta de aplicação para o 9º ano é utilizar o livro 9 atrelando conteúdos matemáticos como números inteiros positivos e negativos, porcentagens, entre outros, envolvendo questões como vantagens e desvantagens de cartão de débito e crédito, poupança, projetos de vida, etc.

CONCLUSÕES

É possível perceber que a educação financeira é bem mais ampla do que a matemática financeira, e que o equívoco ocorre devido haver uma relação entre elas, uma vez que os conteúdos de matemática financeira estão inseridos no processo de educar financeiramente. No entanto, apenas conhecimento de tais conteúdos matemáticos não bastam, pois de nada adianta saber calcular juros compostos por exemplo, e não saber diferenciar desejos e necessidades e para isso a educação financeira traz juntamente as habilidades, para juntos gerarem atitudes adequadas.

No âmbito escolar, a educação financeira pode ser abordada na área de matemática visando a relação existente e interligando-a com as demais áreas de conhecimento, promovendo além disso a contextualização de situações cotidianas envolvendo finanças para alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

Portanto, mesmo que os conteúdos de matemática financeira não sejam suficientes para sustentar a amplitude da educação financeira, tais conteúdos são essenciais para os indivíduos administrarem as próprias finanças, e contribuir para a economia local, regional e até nacional e para a promoção da cidadania financeira das pessoas, o que evidencia a importância desse trabalho, que é mais um fruto das ações do GEFAM executado por meio do Projeto de Extensão “Educação Financeira: uma proposta de formação continuada aos professores das escolas

públicas do Vale do Acaraú", aprovado no Edital PROEX Nº 01/2021, sob a coordenação da Profa. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda e do Prof. Dr. Alexandre Vinicius Campos Damasceno.

Ainda há um longo caminho a ser percorrido para difundir a educação financeira, e por meio dessas oficinas há a possibilidade de contribuir não apenas para educar financeiramente os participante, mas para que eles sejam futuros multiplicadores.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

_____. **BRASIL: Implementando a Estratégia Nacional de Educação Financeira**. 2010. Disponível em: <[HTTPS://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/Estrategia_Nacional_Educacao_Financeira_ENEF.pdf](https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/Estrategia_Nacional_Educacao_Financeira_ENEF.pdf)> Acesso: 05/06/2021

BCB. Banco Central do Brasil. Relatório de cidadania Financeira 2018. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/nor/releidfin/index.html>> Acesso: 10/01/2021

BCB - Banco Central do Brasil. Relatório de Cidadania Financeira, 2021. Disponível:<https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/RIF/Relatorio_de_Cidadania_Financeira_2021.pdf> Acesso em: 10/01/2022

CONEF. Educação financeira nas escolas: ensino fundamental: livro do professor / [elaborado pelo] Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF) – Brasília: CONEF, 2014. 48 p.: il. color. (Série Educação financeira nas escolas; v.6-9).

NETO, Alexandre Assaf. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12º. ed. – São Paulo: Atlas,2012. ISBN 978-85-224-7248-2.

OCDE/CVM. Recomendação sobre os Princípios e as Boas Práticas de Educação e Conscientização Financeira. Jul. 2005. 8fl

CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS REGULARES

Vítor Teixeira Moura, João, jotavitor.teixeiramoura560@gmail.com¹

Nascimento de Alencar, Livia, livia.livia2808@gmail.com²

Maria Dias de Ávila Rodrigues, Luciana, luavila@unb.br³

¹Estudante da licenciatura em Matemática e bolsista do PET Matemática da Universidade de Brasília

²Estudante do bacharelado em Matemática e bolsista do PET Matemática da Universidade de Brasília

³Professora do Departamento de Matemática e tutora do PET Matemática da Universidade de Brasília

Resumo: *O objetivo deste trabalho é propor o estudo de poliedros regulares trabalhando tanto as noções de figuras planas, ligadas a construção de polígonos regulares, inscritos em uma circunferência, que são as faces dos poliedros, como as noções espaciais relativas aos próprios poliedros.*

Palavras-chave: *poliedros, geometria, construção.*

INTRODUÇÃO

O trabalho em questão é fruto das atividades desenvolvidas pelo grupo PET Matemática da Universidade de Brasília. O objetivo é construir os poliedros regulares, ou seja, sólidos geométricos que atendem as seguintes características: ser convexo; suas faces devem ser regulares e congruentes; todos os vértices devem possuir o mesmo número de arestas; deve valer a relação de Euler: $V-A+F=2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces.

Os poliedros que construiremos são os seguintes:

- Tetraedro: possui 4 faces triangulares, 4 vértices e 6 arestas;
- Hexaedro (cubo): possui 6 faces quadradas, 8 vértices e 12 arestas;
- Octaedro: possui 8 faces triangulares, 6 vértices e 12 arestas;
- Dodecaedro: possui 12 faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas;
- Icosaedro: possui 20 faces triangulares 12 vértices e 30 arestas.

MATERIAIS E RECURSOS PEDAGÓGICOS

Para a execução da oficina utilizaremos: régua, compasso, cartolina, tesoura, cola e fita durex.

CONFECÇÃO DOS POLÍGONOS REGULARES

Iniciamos com a construção dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência que são as faces dos poliedros. São eles o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular inscritos em uma circunferência. Começamos fazendo a construção do círculo na cartolina, que pode ser feito com o compasso e

recortado com a tesoura. A seguir descrevemos a construção de cada um dos polígonos regulares.

1) Triângulo equilátero

Escolhemos um ponto A pertencente à circunferência e, com o compasso com abertura igual ao raio, marcamos os dois pontos B e C da circunferência que distam um raio de A . Depois, para B e C , marcamos os pontos D e E da circunferência que distam um raio de cada um. Os pontos A , D e E formam um triângulo equilátero, como mostra a Figura 1a. Em seguida, utilizando tesoura, cortamos o círculo e dobramos o papel nas arestas.

2) Quadrado

Escolhemos um ponto A pertencente à circunferência e com uma régua traçamos uma reta ligando A ao centro O passando pelo ponto $B \neq A$ da circunferência. Depois, com o compasso com uma abertura maior que o raio, marcamos um ponto C que equidista do pontos A e B . Com a régua traçamos uma reta que liga o ponto C ao centro O passando pela borda do círculo nos pontos D e E . As duas retas construídas são perpendiculares entre si e os pontos A , E , B e D formam um quadrado, como mostra a Figura 1a. Em seguida, com uma tesoura cortamos o círculo e dobramos o papel nas arestas.

3) Pentágono regular

i) Começamos com um círculo com duas retas perpendiculares passando por seu centro, em O . Marcamos os pontos A , B , C e D que pertencem à circunferência e às retas traçadas de maneira que os pontos A e B pertençam à mesma reta, de acordo com a Figura 1b.

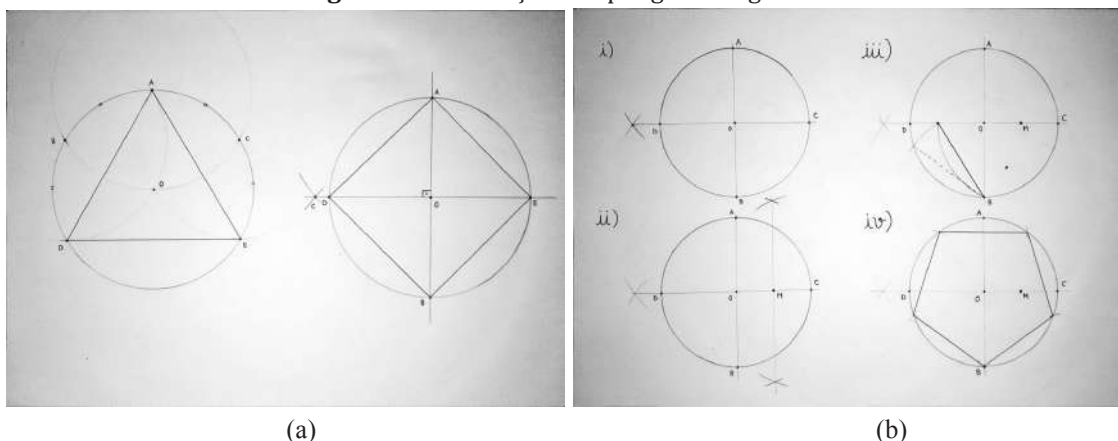
ii) Encontramos o ponto médio M do segmento \overline{OC} fazendo uma reta que liga dois pontos que equidistam de O e C .

iii) Utilizando o compasso com a ponta seca M fazemos um arco com abertura igual ao tamanho do segmento \overline{MB} .

iv) A distância entre o ponto onde o arco intercepta o segmento \overline{OD} e o ponto B é a medida do lado do pentágono. Basta agora fazer cinco marcações com essa abertura.

Finalizamos cortando o círculo e dobrando o papel nas arestas.

Figura 1 - Construção dos polígonos regulares



CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES

Para construir os poliedros regulares utilizamos os polígonos construídos anteriormente.

1) Tetraedro

Para construir o tetraedro, precisamos de 4 triângulos equiláteros e colamos formando uma pirâmide de base triangular.

Figura 2 - Processo de montagem do tetraedro



2) Hexaedro (Cubo)

Para construir o hexaedro (cubo), precisamos de 6 quadrados. Primeiro escolhemos um dos quadrados e colamos outros quatro nesse, colando também esses a seus adjacentes e, por fim, colamos um último às arestas livres, fechando o cubo.

Figura 3 - Processo de montagem do hexaedro (cubo)



3) Octaedro

Para construir o octaedro, precisamos de 8 triângulos equiláteros. Primeiro colamos quatro dos triângulos um no outro, formando uma pirâmide de base quadrada. Repetimos esse procedimento para fazer outra pirâmide e, por fim, juntamos essas metades.

Figura 4 - Processo de montagem do octaedro



4) Dodecaedro

Para construir o dodecaedro, precisamos de 12 pentágonos regulares. Primeiro escolhemos um pentágono e colamos outros cinco nesse, um em cada aresta. Repetimos o procedimento obtendo a outra metade e, por fim, juntamos as partes.

Figura 5 - Processo de montagem do dodecaedro



5) Icosaedro

Para construir o icosaedro, precisamos de 20 triângulos equiláteros. Primeiro colamos cinco triângulos em sequência, um ao lado do outro. Em seguida colamos um triângulo em cada aresta livre obtendo assim uma metade do icosaedro. Repetindo o procedimento obtemos a outra metade e, por fim, finalizamos encaixando essas peças.

Figura 6 - Processo de montagem do icosaedro



OBSERVAÇÕES

Com algumas adaptações na construção dos poliedros podemos construir lindos enfeites natalinos conforme mostramos na Figura 7. Para isso, os polígonos são recortados de cartolinas preparadas com papéis festivos que remetem ao feriado natalino. Na construção dos poliedros incluímos uma fita para pendurar o poliedro na árvore de natal, veja Figura 8.

A construção desses ornamentos natalinos pode ser visualizada no vídeo “Icosaedro de Natal”, no canal do PETMAT UnB no YouTube.

Figura 7 - Poliedros regulares como ornamentos natalinos



Figura 8 - Árvore de natal decorada com as figuras confeccionadas



CONCLUSÕES

Nesta oficina, observamos diferentes aspectos referentes ao estudo dos poliedros regulares e das figuras planas. Utilizamos do desenho geométrico para a construção dos polígonos regulares e as construções que encontramos ao final da atividade são ótimas ferramentas para o estudo dos objetos tridimensionais. A imersão promovida pela confecção dos sólidos proporciona uma facilidade de assimilação, visualização e aprendizado dos mesmos.

REFERÊNCIAS

PEDROSO, H.; PRECIOSO, J. O problema da construção de polígonos regulares de Euclides a Gauss. FAMAT em Revista, n. 13, pp. 101-115, 2009.

PET MATEMÁTICA UNB. Icosaedro de Natal. YouTube, 01 dez. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=c4wJl9fgEdo>. Acesso em: 29 mar. 2022.

CONSTRUÇÃO E USO DO TEODOLITO CASEIRO NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Santos, Luiz Anderson de Morais, luiz.santos@ifam.edu.br¹
Brito, Gilmar Macedo, Gilmar.brito@ifam.edu.br²
Santos, Yasmin Joana Mendonça dos, 2021325478@ifam.edu.br³

¹Docente do IFAM-Campus Humaitá

²Docente do IFAM-Campus Humaitá

³Discente do IFAM Campus Humaitá

Resumo: *A presente Oficina tem por objetivo a construção de um teodolito caseiro, paralelo a essa atividade prática, podemos fazer algumas reflexões, as quais entre elas, se destaca a visão de uma proposta didático-pedagógica que visa uma melhoria do ensino aprendizagem na disciplina de matemática e em especial no conteúdo “trigonometria no triângulo retângulo”. As atividades a serem desenvolvidas na oficina, serão realizadas sob uma perspectiva diferenciada, transformando-a em uma ferramenta facilitadora para o ensino aprendizagem, diminuindo assim a distância entre a teoria ensinada na sala de aula e a sua utilização na prática, tornando mais significativo e concretos os conceitos estudados.*

Palavras-chave: *Teodolito, Triângulo, Trigonometria.*

1. INTRODUÇÃO

Dentro da realidade educacional brasileira os profissionais da educação básica, em especial professores de matemática, enfrentam uma luta constante, para manter vivo o processo de ensino e aprendizagem em suas salas de aula. No entanto, vemos que paralelo a isso a matemática, na maioria das vezes, é vista por muitos como uma disciplina pronta e acabada, sem espaço para a criatividade.

Atualmente percebe-se que a maioria dos alunos, independente do ano escolar, apresentam dificuldades na compreensão e assimilação dos conceitos relacionados à trigonometria, isso acaba gerando uma grande aversão a disciplina de matemática, fazendo com que acreditem que a matemática é abstrata, algo difícil, muito além da realidade e, muitas vezes sem utilidade. Esse tipo de pensamento não condiz com a essência e finalidades iniciais da trigonometria, que é uma disciplina relativamente prática, cujos conceitos foram surgindo das necessidades de expansão territorial e intelectual da sociedade humana.

A trigonometria é considerada um dos tópicos da matemática mais rico em aplicações práticas nas diversas áreas da atuação humana, podemos usar esse fato para enriquecer as aulas com diversos tipos de atividades práticas que permitem ao aluno compreender sua importância para o desenvolvimento de habilidades, além de propiciar a integração com outros componentes curriculares.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000, p.58), são enfáticos quando destacam os benefícios do emprego de materiais concretos pelos professores como um recurso metodológico alternativo, que pode tornar bastante expressivo o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Diante dessa realidade, o presente trabalho, tem por objetivo a construção de um teodolito caseiro o qual propiciará uma experiência pedagógica com a utilização de material concreto, norteando algumas reflexões desta prática como uma proposta didático-pedagógica para melhoria do ensino aprendizagem de matemática. Sendo assim, a referida proposta justifica-se uma vez que tal prática tem a função de desassociar a ideia do aluno e do professor de

que a trigonometria é abstrata e longe da realidade, mostrando com isso que a mesma é um campo fértil para relacioná-la com objetos manipuláveis visando a resolução de situações-problemas na prática.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo Geral

Construir um teodolito caseiro e utilizá-lo para medir alturas de um determinado ponto com relação ao plano horizontal.

2.2. Objetivos Específicos

Manusear de forma correta o Instrumento (Teodolito caseiro) de forma adequada.

Conhecer os conceitos que envolvem o conteúdo “Trigonometria no triângulo retângulo”

Relacionar os conceitos de trigonometria com a atividade prática de construção e utilização do teodolito caseiro.

3. METODOLOGIA

A presente oficina terá duração de 4 horas, preferencialmente dividida em dois encontros, sendo que a mesma será desenvolvida da seguinte forma:

I. Inicialmente será realizado um breve histórico sobre o Teodolito e sua aplicabilidade.

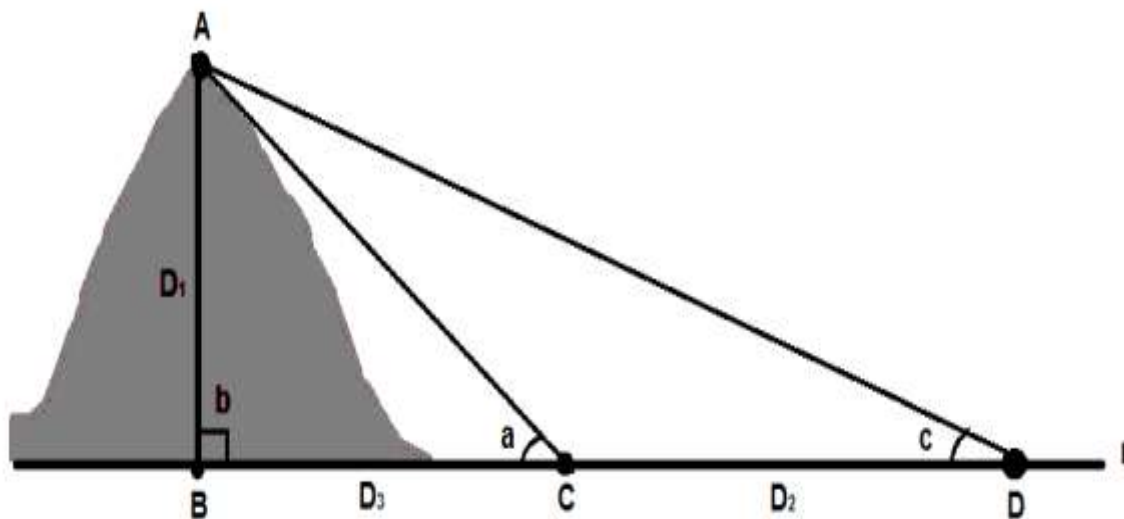
II. Relembraremos alguns conceitos: ângulos, Razões Trigonométricas: seno cosseno e tangente.

III. Serão enfatizadas duas situações para calcular distâncias inacessíveis através da trigonometria, onde tais cálculos serão generalizados em termos da razão tangente.

a) Calcular a altura de um objeto considerando que não é possível chegar até a sua base.

Imagine ter que calcular a altura de uma montanha conhecendo a medida D_2 , Figura 1.

Figura 1 – Ilustração para calcular altura da montanha



Fonte: <http://www.profezequias.net/trigonometria.html>

Podemos verificar dois triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, sendo os dois retos no vértice B. Usando a tangente do “ângulo a” no triângulo $\triangle ABC$, temos,

$$\operatorname{tg}(a) = \frac{D_1}{D_3} \Rightarrow D_3 = \frac{D_1}{\operatorname{tg}(a)} \quad (1)$$

Aplicando a tangente no “ângulo c” do triângulo $\triangle ABD$, temos,

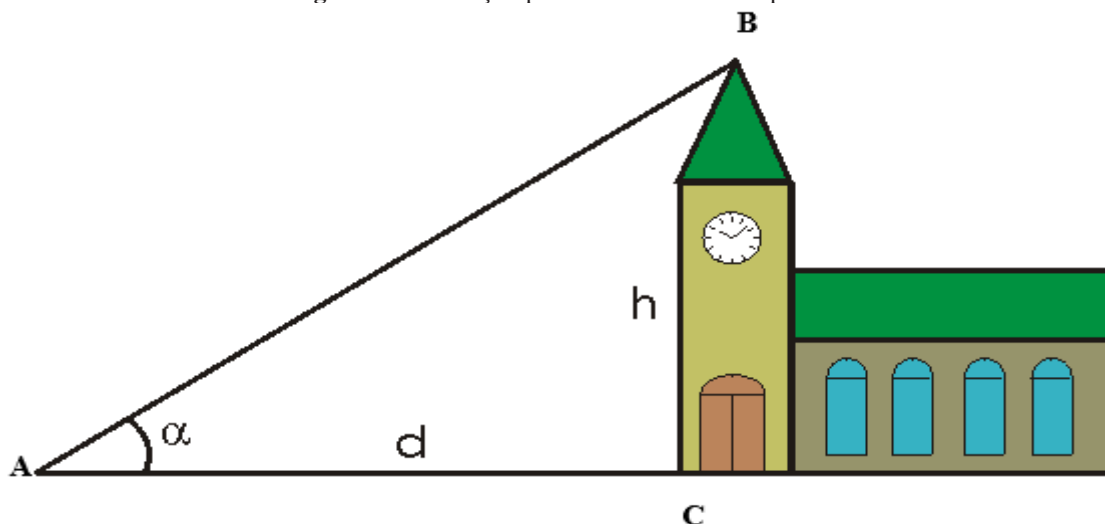
$$\operatorname{tg}(c) = \frac{D_1}{D_3 + D_2} \Rightarrow D_3 + D_2 = \frac{D_1}{\operatorname{tg}(c)} \Rightarrow D_3 = \frac{D_1}{\operatorname{tg}(c)} - D_2 \quad (\text{II})$$

Igualando as equações (I) e (II), temos,

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{\operatorname{tg}(a)} = \frac{D_1}{\operatorname{tg}(c)} - D_2 &\Rightarrow D_2 = \frac{D_1}{\operatorname{tg}(c)} - \frac{D_1}{\operatorname{tg}(a)} = \frac{D_1 \cdot \operatorname{tg}(a) - D_1 \cdot \operatorname{tg}(c)}{\operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{tg}(a)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_2 = D_1 \cdot \frac{(\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(c))}{\operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{tg}(a)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_1 = D_2 \cdot \frac{\operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{tg}(a)}{(\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(c))} \end{aligned} \quad (\text{III})$$

b) Calcular a altura de um objeto considerando que seja possível chegar até a sua base. Imagine ter que calcular a altura de um prédio conhecendo uma medida d , Figura 2.

Figura 2 – Ilustração para calcular altura do prédio



Fonte: <http://www.profezequias.net/trigonometria.html>

Podemos verificar o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em C.

Usando a tangente no ângulo α no triângulo $\triangle ABC$, temos,

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h}{d}$$

$$h = d \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \quad (\text{IV})$$

IV. Nesta etapa construiremos um instrumento rudimentar que chamaremos de “Teodolito Caseiro”, sendo que o mesmo é semelhante ao Astrolábio um dos precursores dos teodolitos atuais, que tem por finalidade medir ângulos verticais em relação ao plano horizontal.

OFICINAS

Para construir o “Teodolito Caseiro” foram utilizados os seguintes materiais, conforme tabela 1:

Tabela 1 – Materiais para construção do teodolito caseiro

MATERIAIS PARA CONSTRUÇÃO DO TEODOLITO CASEIRO	
QUANTIDADE	MATERIAL
1	Isopor 0,2m x 0,2m
1	Transferidor de 360°
1	Estilete
1	Cola de Silicone
1	Barbante 0,5 m
1	Varetas de fixação de balão ou canudo
1	Trena 8m

Figura 3 – Materiais usados na construção do Teodolito



Fonte: Elaborado pelo autor

A montagem do teodolito caseiro ocorrerá da seguinte maneira:

1° Passo: Amarrar um barbante de 45 centímetros passando pelo centro do Transferidor.

2° Passo: Cortar o isopor em um formato quadrangular de 12cm x 12cm usando o estilete;

3° Passo: Com o uso da cola de silicone, colar o transferidor no isopor de modo que o mesmo fique centralizado. Aguardando três minutos para secagem da cola e fixação do transferidor no isopor.

4° Passo: Com o uso da cola de silicone, colar a vareta de fixação de balões ou canudo no transferidor, de modo que ele passe pelo diâmetro do transferidor, ou seja, fique sobre os ângulos de 0° e 180°. Aguardando três minutos para secagem da cola e fixação da vareta ou canudo no transferidor.

5° Passo: Amarrar na outra extremidade do barbante um peso.

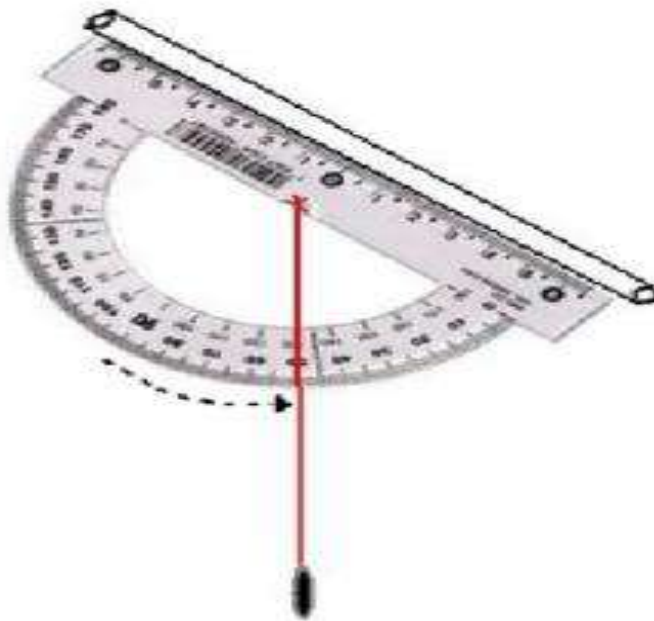
V. Realização da atividade prática: a mesma será realizada em duplas, utilizando uma trena de 8m e o Teodolito caseiro, tal etapa seguirá os seguintes passos para calcular uma determinada altura (a ser definida no local da oficina):

Passo 1: Medir a distância do chão até a altura dos olhos do observador, a qual deverá ser considerada para determinações de medidas verticais.

Passo 2: Posicionar o teodolito com o barbante perpendicular a vareta (canudo), onde o barbante ficará alinhado com a marca dos 90° sobre o limbo do transferidor.

A medida em que, se eleva a vareta (canudo), para visualização do ponto onde deseja-se medir o ângulo relacionado a linha horizontal, o barbante irá determinar uma nova leitura sobre o transferidor do teodolito, sendo assim, para determinar esse ângulo de elevação calcula-se o complementar desse ângulo, conforme figura 4.

Figura 4 – Determinação do ângulo de Inclinação



Passo 3: Medir a distância do observado a base do objeto que se deseja determinar a altura. No caso em que não é possível chegar à base do objeto (local inacessível), desloca-se para traz uma determinada medida que deverá ser aferida.

Passo 4: Calcular a altura a partir da tangente do ângulo encontrado usando as fórmulas (III) e (IV) dependendo de cada situação.

4. CONCLUSÕES

Espera-se que tal oficina possa trazer benefícios para os participantes (Docentes e Discentes), de forma que os mesmos possam relacionar a prática da construção e uso do teodolito caseiro, com os conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo, tornando com isso mais significativo e concreto os conhecimentos adquiridos do transcorrer da oficina.

5. REFERÊNCIAS

BRASIL, Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 2000.

SANTOS, L. A. de M.. Utilização de material concreto no ensino de matemática: uma experiência com o teodolito caseiro no ensino de Trigonometria. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática em rede nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Rondônia. Porto Velho, 2015.

JOGOS AFRICANOS E MATEMÁTICA, POSSIBILIDADES DE CONEXÃO NO ENSINO

Moraes, Simone, simone.moraes@ufba.br¹

Santana Silva, Jaqueline, santanasilva.jaqueline.ufba@gmail.com²

Fagundes Reis, Leonardo, leonardofreis@outlook.com³

¹Universidade Federal da Bahia – UFBA

²Estudante de graduação – UFBA

³Estudante de graduação – UFBA

Resumo: O uso de jogos africanos no ensino de Matemática proporciona conhecimento sobre a origem da Matemática na África, podendo ser um mecanismo para a exploração de diversos tópicos do currículo, permitindo aos alunos e professores conhecerem e reconhecerem como os povos africanos faziam uso de atividades de raciocínio lógico-matemático em atividades de jogos, além de auxiliar no entendimento dos conteúdos matemáticos neles presentes. *No intuito de propiciar a estudantes e professores de matemática material para a implementação da lei no contexto do ensino de Matemática, apresentamos uma proposta de oficina abordando temas relacionados à cultura africana, através de jogos africanos, permitindo aos participantes conhecerem e reconhecerem como os povos africanos faziam uso de atividades de raciocínio lógico em atividades de jogos e, utilizando esse mecanismo, explorarem diversos assuntos do currículo escolar. A dinâmica irá da descrição histórica, passando pela construção dos tabuleiros, discussão de atividades pedagógicas até a elaboração de novas atividades e roteiro de aulas.*

Palavras-chave: *Jogos africanos, matemática, ensino de matemática, jogos de alinhamento, jogos de captura*

INTRODUÇÃO

O reconhecimento e a valorização da história e cultura dos afro-brasileiros nos ambientes escolares foram algumas das reivindicações propostas pelo Movimento Negro Brasileiro ao longo do século XX, resultando na Lei 10.639/03 que, com o objetivo de promover a valorização no ambiente cotidiano educacional das identidades negras, tornou obrigatório, nos estabelecimentos públicos e privados de ensino fundamental e médio, o ensino sobre História e Cultura Afro-Brasileira.

Embora a Lei 10.639/03 estabeleça a inclusão oficial da temática História e Cultura Afro brasileira em disciplinas específicas da rede de Ensino, particularmente na área de humanas, não isenta outras áreas do conhecimento a tratar desta temática.

Com a perspectiva de promover atividades de ensino de Matemática no contexto desta lei apresentamos aqui uma proposta de oficina de jogos africanos para o ensino de matemática, abordando temas da cultura africana.

O uso de jogos africanos no ensino de Matemática proporciona uma contextualização histórica e geográfica sobre a origem da Matemática na África, podendo ser um mecanismo para a exploração de diversos assuntos do currículo e permitindo aos alunos e professores conhecerem e reconhecerem como os povos africanos faziam uso de atividades de raciocínio lógico-matemático em atividades de jogos, além de auxiliar no entendimento dos conteúdos matemáticos neles presentes.

Neste contexto propomos uma oficina de jogos africanos e possibilidades de atividades de ensino de matemática, utilizando os jogos *Achi*, *Borboleta*, *Dara*, *Koruböddo*, *Shisima*, *Tsoro Yematatu* e *Yoté*, todos disputados entre dois jogadores, pretendemos abordar temas de geometria de triângulos e polígonos, construções geométricas com régua e compasso e com dobraduras, equação do segundo grau e potenciação.

A oficina será dividida em quatro etapas: na primeira será apresentada uma breve descrição histórica dos jogos e das regiões de origem; em seguida os participantes serão divididos em equipes e instruídos a construir os tabuleiros dos jogos e experimentando jogar, na terceira etapa serão apresentadas possibilidades de atividade de ensino de matemática, incluindo variações nas regras, e discussão dos conteúdos abordados; na parte final as equipes desenvolverão atividades originais com cada um dos jogos, a ideia é que iniciar um roteiro de aula dinâmico.

Os materiais necessários são: folhas de papel A4 e de papel cartão, régua, compasso, lápis e borracha.

1. JOGOS AFRICANOS DE ALINHAMENTO

1.1. Achi de Gana

O jogo *Achi* é um jogo africano, com país de referência Gana. Não há registros precisos sobre a data e origem do *Achi*, era jogado pelo povo *Iorubá*, que o chamava de *Akidada*. Atualmente é praticado pelo povo *Asante* de Gana. É um jogo de alinhamento de três peças, semelhante ao “jogo da velha”, pois tem o mesmo objetivo de alinhar as peças em um dos segmentos do tabuleiro.

- **Tipo de jogo:** Alinhamento.
- **Tabuleiro:** Um quadrado, com 8 linhas de deslocamento e 9 casas.
- **Peças:** 8 peças, 4 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a alinhar três de suas peças.

1.2. Shisima do Quênia

O jogo *Shisima* é originário do Quênia, é um jogo antigo, não há registros precisos sobre a data de sua origem. No tabuleiro a casa central é chamada *Shisima* e as peças do jogo são chamadas de *imbalavi* que significa “pulgas d’água”, isto porque no Quênia os jogadores movimentavam suas peças tão rápido quanto a velocidade das pulgas d’água.

- **Tipo de jogo:** Alinhamento.
- **Tabuleiro:** Um octógono, com 6 linhas de deslocamento e 9 casas.
- **Peças:** 6 peças, 3 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a alinhar suas peças.

Figura 1 –Achi e Shisima, jogos alinhamentos



Imagens retiradas de <https://img.elo7.com.br/product/main/37E6674/tapatan.jpg> e de <https://www.estrategiajogos.com.br/jogos-de-tabuleiro>

2. JOGOS AFRICANOS DE TABULEIRO QUADRICULADO

2.1. Dara do Nigéria

Dara é um jogo centenário, originário do povo *Dakarkari*, da *Nigéria*, também conhecido é como *Derrah*. É um jogo popular no norte da Nigéria, Níger, Mali e outras regiões do noroeste africano, as estratégias do *Dara*, para superar o oponente, envolvem raciocínio dedutivo e solução de problemas.

- **Tipo de jogo:** Captura, quando um jogador alinha três de suas peças, captura uma do adversário.
- **Tabuleiro:** Um quadriculado retangular 5x6, com 30 casas.
- **Peças:** 24 peças, 12 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a capturar todas as peças do adversário.

2.2. Koruböddo da Somália

O *Koruböddo* é um jogo originário da Somália, não há registros precisos sobre o período de origem. *Koruböddo* significa salto alto, no idioma da tribo *Issaq*. Jogo com sistema de captura análogo ao do jogo de damas.

- **Tipo de jogo:** Captura, cada vez que um jogador saltar uma peça do adversário, esta é capturada.
- **Tabuleiro:** Um quadriculado retangular 5x5, com 25 casas.
- **Peças:** 24 peças, 12 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a capturar todas as peças do adversário.

2.3. Yoté do Senegal

Yoté é um jogo originário das tribos de pastores nômades de Mali, Senegal e Burkina Faso, não há registros de sua data de surgimento. Atualmente, é muito popular no oeste da África, particularmente no Senegal, este jogo foi classificado pelo Comitê Internacional da UNICEF entre “os melhores jogos da infância”, por desenvolver a sagacidade e o sentido de observação.

- **Tipo de jogo:** Captura, quando um jogador saltar uma peça do adversário, ele captura a peça saltada e outra.
- **Tabuleiro:** Um quadriculado retangular 5x6, com 30 casas.
- **Peças:** 24 peças, 12 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a capturar todas as peças do adversário

Figura 2 – Dara, Koruböddo e Yoté, jogos com tabuleiro quadriculado



Imagens retiradas de <https://www.whatdowedoallday.com/dara-game/>, de <http://www.cynningstan.com/game/342/yote> e de https://lh6.googleusercontent.com/U5_3fMI87t-RxAZaK6o3HzwKZDzEtpE017WtHuirMULIEBxVaJ1Cf1Z1DJGJSLFgo1FFw=w1280

3. JOGOS AFRICANOS DE TABULEIRO TRIANGULAR

3.1. Borboleta de Moçambique

Borboleta é um jogo de *Moçambique*, não há registros precisos de sua data de surgimento, é um jogo da família dos jogos de tabuleiro *Alquerque*, também chamado *Gulugufe* (borboleta na língua *Tonga*), a maneira de jogar é semelhante ao jogo de damas, porém aqui as regras de salto e movimento ocorrem nos 19 cruzamentos.

- **Tipo de jogo:** Captura, cada vez que um jogador saltar uma peça do adversário, esta é capturada
- **Tabuleiro:** 2 triângulos isósceles unidos por um vértice, com 12 linhas de deslocamento e os 19 casas.
- **Peças:** 24 peças, 12 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Número de participantes:** Dois jogadores.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a capturar todas as peças do adversário.

3.2. Tsoro Yematatu do Zimbabwe

O *Tsoro Yematatu* é originário do Zimbabwe, um jogo pequeno com um grande nome, que significa *jogo de pedra jogado com três*, considerado uma versão africana do jogo da velha, porém com tabuleiro triangular e com novos elementos de estratégia, pois as peças podem saltar umas sobre as outras sem captura.

- **Tipo de jogo:** Alinhamento.
- **Tabuleiro:** Um triângulo equilátero, com 5 linhas de deslocamento e 7 casas.
- **Peças:** 6 peças, 3 para cada jogador, em cores ou formatos diferentes.
- **Objetivo do jogo:** Ser o primeiro a alinhar suas peças.

Figura 3 – Borboleta e Tsoro Yematatu, jogos com tabuleiro triangular



Imagens retiradas de <https://img.elo7.com.br/product/main/37E6674/tapatan.jpg> e de <https://www.mitrajogos.com.br/mini-jogo-tsoro>

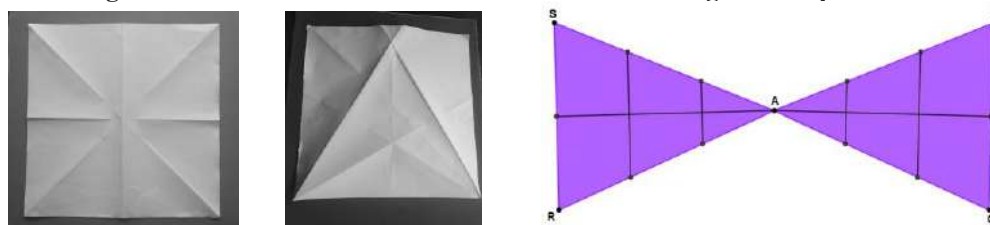
4. ATIVIDADES COM OS JOGOS

4.1. Construção Geométrica

Para construir o tabuleiro do *Achi* e do *Tsoro Yematatu* os participantes serão instruídos, com uma folha de papel seguir os passos para construir com dobradura, respectivamente, um quadrado e um triângulo equilátero, em seguida serão traçados os demais segmentos e casas dos tabuleiros.

Já para a *Borboleta*, com régua serão traçados dois quadrados congruentes e com apenas um vértice em comum, em cada quadrado será construído um triângulo isósceles, com base opostas ao vértice comum, as asas da Borboleta, em seguida serão traçados demais segmentos e as casas, obtendo o tabuleiro da *Borboleta*.

Figura 4 – Tabuleiros obtidos com dobradura e com régua e compasso



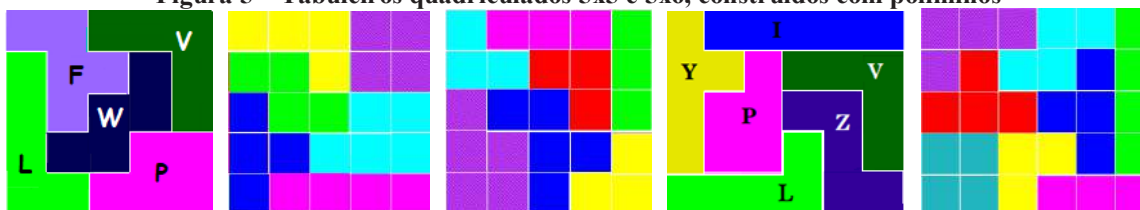
Imagens do acervo dos autores

Após estas construções apresentaremos algumas perguntas sobre diferentes tipos de polígonos, triângulos, retângulos, quadrados e trapézios que surgiram na construção e nas figuras dos tabuleiros. Em geral fazemos esse tipo de dinâmica em atividades na escola.

4.2. Construções de Quadriculado com Poliminós

Para os tabuleiros quadriculados dos jogos *Dara*, *Koruböddo* e *Yoté* vamos utilizar *triminós*, *tetraminós* e *pentaminós*, discutindo as possibilidades de construção e diferentes configurações de construção.

Figura 5 – Tabuleiros quadriculados 5x5 e 5x6, construídos com poliminós

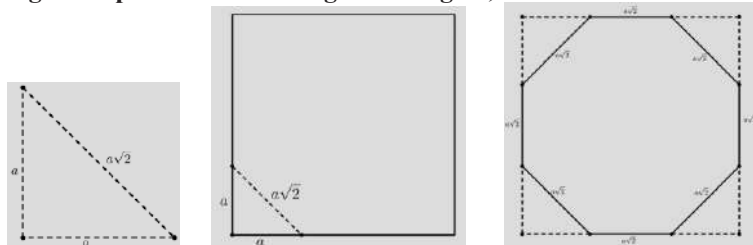


Figuras do acervo dos autores

4.3. Construção de um Octógono Regular

Construir o tabuleiro do Shisima, um octógono regular, com régua e compasso, a partir de um triângulo retângulo com catetos de mesmo comprimento.

Figura 6 – Octógono regular a partir de um triângulo retângulo, com catetos de mesmo comprimento



Figuras do acervo dos autores

4.4. Dara e Equação do 2º Grau

Introduzindo uma variação no jogo, antes de iniciar o jogo cada equipe enumera suas peças de 0 a 11; durante o jogo as faces numeradas ficam para baixo; quando estiver em posição de alinhamento, as três peças são viradas com os números a , b e c ; em seguida lançam três moedas: cara $\rightarrow +$ e coroa $\rightarrow -$; e resolvem a equação do 2º grau: $(?a)x^2 + (?b)x + (?c) = 0$. Neste caso, o jogo será por pontuação que será estabelecida pelas equipes.

4.5. Koruböddo e Potenciação

Também como uma variação no jogo cada equipe enumera com os números -3, -2, -1, 1, 2 e 3, durante o jogo as faces numeradas ficam para baixo; quando estiver em posição de saltar, a peça que faz o salto e a peça saltada são viradas com os números a e b e resolvem a potência a^b . Neste caso, a distribuição dos números nas peças e a pontuação das etapas serão estabelecidas pelas equipes.

CONCLUSÕES

A expectativa é que afinal da oficina os participantes tenham acesso a atividades para o ensino de Matemática, que ampliem e enriqueçam sua formação acadêmica e seu conhecimento sobre a cultura africana, que disponham de um material instigante para ser utilizado em aulas de Matemática, que sejam multiplicadores deste conhecimento e que esta oficina os estimule a buscar outros jogos africanos matemáticos e criar variações.

REFERÊNCIAS:

ALMEIDA, Vera Lia M. Criscuolo de, GUIMARÃES, Diego Dias Machado e BESERRA, Vagner de Sousa, *Pentaminós como uma Ferramenta Didática*, UNESP, disponível em <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2005/artigos/capitulo%2010/pentaminos.pdf>

CASSUBOSKI, P. M. S. *Uma abordagem lúdica do tema transversal: Cultura africana no Ensino de Matemática*. Trabalho de conclusão de Curso. UNILA, Foz do Iguaçu, 2016.

CUNHA, Débora Alfaia da, *Mancalas e tabuleiros africanos: contribuições metodológicas para educação intercultural*, Edição do autor, Castanhal, 2019, disponível em https://livroaberto.ufpa.br/jspui/bitstream/prefix/666/1/Livro_MancalasTabuleirosAfricanos.pdf

SANTOS, Luiz Eduardo da Silva e NASCIMENTO, Anna Karla Silva, *Jogos Africanos e o Ensino de Polinômios: Uma Experiência Extensionista com o jogo Dara Algébrico*, Revista Conexão UEPG, v.14, n.2, 283-290, 2018, disponível em <https://www.revistas2.uepg.br/index.php/conexao/article/view/11084/209209209882>

SOUZA, Andréia C. F., *Jogos africanos e o currículo da matemática: uma questão de ensino*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT, UNESP, São José do Rio Preto, 2016, disponível em <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/144730>



UM JOGO DE ARITMÉTICA TRABALHADO COM METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Baldin, Yuriko Y., yuriko@ufscar.br¹
Silva, Aparecida Francisco da, aparecida_francisco57@hotmail.com²

¹Departamento de Matemática- UFSCar

²IBILCE-UNESP

Resumo: O uso de jogos para atrair interesse de alunos e professores para a Matemática é conhecido e aceito por muitos professores, educadores e pesquisadores, tanto sob perspectiva cultural do desenvolvimento de pensamento matemático notada ao longo dos tempos, como também pelas recomendações curriculares das tendências educacionais atuais. A proposta desta oficina é trabalhar atividades práticas de interação dinâmica na resolução de um desafio clássico de aritmética, encontrado frequentemente em livros de jogos ou de divertimentos matemáticos, com uso sistemático da Metodologia de Resolução de Problemas. Pretende-se vivenciar as dimensões pedagógicas de situações do jogo, das quais fazem parte a descoberta, a exploração e a formulação de conjecturas, a expansão de ideias, e acima de tudo a sistematização das descobertas e das respostas. O problema é conhecido como “pilha triangular” e consiste em um desafio de preencher as casas dispostas como vértices ou pontos médios de um formato triangular com os dígitos estabelecidos. O nível de conhecimento requerido é do Ensino Fundamental I, sendo o diferencial da oficina a abordagem original de questionamentos para desenvolver o raciocínio por trás das diferentes soluções, apoiada pelo método de Lesson Study. Destinada aos professores futuros e em exercício, a atividade vivenciada pode ser executada diretamente numa sala de aula, o que enriquece o conjunto de recursos didáticos do professor de matemática, com destaque para os conteúdos de Matemática, explorados durante a resolução do problema, identificados no currículo escolar. A oficina fez parte da capacitação de professores da Diretoria de Ensino-Região de Jales, em 2021.

Palavras-chave: Jogos de Aritmética, Metodologia de Resolução de Problemas, Lesson Study, Desenvolvimento de Pensamento Matemático

INTRODUÇÃO

O objetivo desta oficina é oferecer uma proposta didático-pedagógica ao professor de matemática do Ensino Fundamental II, que se encontra atualmente desafiado com a necessidade de planejar suas aulas dentro de um currículo renovado, alinhado com as recomendações da Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2018). Em particular, se destaca o uso de jogos na perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas que sabidamente não faz parte da formação inicial dos professores que atuam em salas de aula. Isso não quer dizer que um professor não saiba resolver o problema, mas a atividade de ensinar a resolução de problemas com o uso de jogos na sala de aula, de modo a promover uma aprendizagem ativa e participativa dos alunos, envolve dificuldades que necessitam de sugestões e orientações que esta oficina tem como objetivo oferecer. A oficina será desenvolvida em formato “mão na massa” com os participantes sobre um problema desafio clássico, encontrado na literatura como “triângulo mágico” ou “pilha triangular”. A atividade foi trabalhada numa oficina de capacitação/orientação pedagógica do Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino-Região de Jales (DER-Jales), da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), em 2021, dentro das sessões de Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC),

organizadas e convocadas pelas Coordenadoras Pedagógicas do Núcleo, tendo as autoras desta oficina como orientadoras e com participação colaborativa das pesquisadoras do IBILCE-UNESP.

O problema foi proposto numa das primeiras sessões como um exemplo demonstrativo da metodologia de resolução de problemas através de questionamentos que promovem participações e desenvolvimento de pensamento matemático, dentro da Estratégia de Desenvolvimento Profissional de Professores pelo método de Lesson Study (Pesquisa de Aula). Este método vem sendo trabalhado pelas autoras consistentemente nas pesquisas e nas parcerias com outras Diretorias, por exemplo, da Região de José Bonifácio.

O enunciado do problema proposto foi elaborado na forma mais geral do que costuma ser encontrado nas publicações nas mídias digitais, em que aparecem casos mais simples com um dado extra para facilitar a resolução, pois é objetivo desta oficina provocar questionamentos acerca da possibilidade de existir soluções, de haver outras soluções, as relações entre as soluções, a sistematização dos argumentos, além de abrir discussões sobre a possibilidade de expansão do problema para outras situações. Encontrar uma regularidade entre os argumentos das soluções apresentadas faz parte dos objetivos de metodologias ativas de ensino e aprendizagem, constituindo uma abordagem diferenciada para a metodologia de resolução de problemas para constituir uma capacitação de professores em desenvolver o seu conhecimento pedagógico de conteúdo.

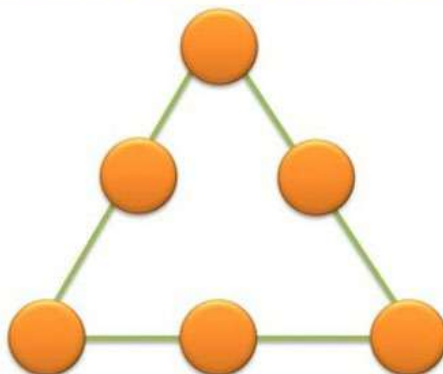
O conteúdo escolhido foi deliberadamente a aritmética que depende apenas do conhecimento familiar de operações e propriedades dos números naturais do Ensino Fundamental I, que poderia mostrar como avançar com estes conhecimentos para níveis seguintes de pensamento matemático, requerido pelas habilidades da BNCC dos anos finais.

O enunciado do problema proposto para os professores, e que iremos trabalhar nesta oficina é:

“Inserir os números de 1 a 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6) nos círculos da pilha, de modo que a soma dos números que estão sobre os lados do triângulo formado pela pilha seja sempre a mesma”.

Figura 1:

Dispor os algarismos de 1 a 6 de modo que em cada lado do triângulo a soma seja a mesma.



Este desafio é lúdico, e pela simplicidade de seus dados é muito atraente para ser usado como material didático. Entretanto, na mídia digital o que mais se encontra é a apresentação de uma solução, com explicação em áudio ou escrito do passo a passo do raciocínio usado, em muitas ocasiões de simples empirismo de “tentativa para começar” e ajustes para “dar certo”, ou seja, são apresentações de soluções, nem sempre com justificativas matematicamente satisfatórias. Vale ressaltar que os Clubes de Matemática da OBMEP (<http://clubes.obmep.org.br>) também se encantam com este desafio e os próprios estudantes postam suas soluções nas redes para compartilhar, o que mostra a beleza e o atrativo deste problema.

O diferencial desta proposta no eixo T5- Tópicos especiais de Matemática é exatamente introduzir uma perspectiva de Resolução de Problemas com questionamentos para a capacitação de professores em promover desenvolvimento de pensamento matemático com conexões entre os conteúdos de matemática escolar. Em particular, vamos questionar a influência da geometria no problema proposto, o significado de soluções diferentes, explorar as expectativas sobre a paridade da soma em relação à paridade dos números colocados nos vértices, discutir o significado da impossibilidade de solução para determinados valores, e o conceito de dualidade que aparece nas soluções. Para atingir este objetivo trabalharemos os passos da oficina fundamentados na metodologia

de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para a formação continuada de professores. Para esta fundamentação utilizaremos o material trabalhado na Oficina da DER-Jales, e nesta proposta não iremos trabalhar a parte teórica desta metodologia por fugir do caráter prático da oficina.

FORMATO DA OFICINA

- 1- Breve explanação sobre as etapas da metodologia de Lesson Study para situar a atividade da Oficina na programação do HTPC da DER-Jales como formação continuada de professores;
- 2- Mão na massa de resolução do desafio pelos grupos de participantes (2 a 3 em cada grupo);
- 3- Compartilhamento pelos grupos de soluções e discussões decorrentes para orientar o significado dos questionamentos adequados para desvendar os argumentos matemáticos que serão sistematizados;
- 4- Compartilhamento de alguns resultados da Oficina de DER-Jales para compreender as expectativas de reação dos alunos, e o tratamento a essas situações quando o problema é usado na sala de aula;
- 5- Apresentação de uma sistematização organizada de conteúdo matemático que justifica a resolução e permite a extensão e generalização de argumentos para outros contextos e técnicas.

Comentários finais sobre variações deste problema em literatura paradidática japonesa (HOSOMIZU, 2010), e nos livros clássicos (PERELMAN, 2008) e (BOLT, 1985).

Material fornecido durante a oficina: Papel impresso com a Figura 1 para trabalho dos grupos, e algumas orientações para os questionamentos.

Apresentação de slides para organizar e sintetizar o desenvolvimento dos argumentos.

Número de participantes: 20 a 25.

CONCLUSÕES

É desejo das autoras difundir na prática as abordagens didáticas diferenciadas que potencializam o conhecimento de conteúdo dos professores, esclarecendo as conexões entre os conceitos matemáticos e as pedagogias na aprendizagem desses, justificadas pela argumentação matemática e teorias de aprendizagem.

AGRADECIMENTOS:

Agradecemos às professoras Coordenadoras do Núcleo Pedagógico da DER-Jales, Fernanda Machado Pinheiro, Rosilaine Sanches Martins e Carla Junqueira que organizaram as sessões de HTPC para as oficinas, a direção administrativa da DER-Jales, e as pesquisadoras parceiras do IBILCE-UNESP, as professoras Ermínia de Lourdes Campello Fanti, Evelin Menegusso Barbaresco e Flávia Souza Machado Silva.

REFERÊNCIAS

BOLT, B., Mais Atividades Matemáticas, Coleção O Prazer da Matemática, Traduzido do original em inglês, Editora Gradiva, 1985.

BRASIL, Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC.2008. (<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>)

HOSOMIZU, Y. Red dragonfly mathematics challenge. Tradução do original japonês, Editado por Peter Gould, Masami Isoda, e Foo Chuan Eng, State of NSW Department of Education and Training, 2010

PERELMAN, Y. Matemáticas Recreativas, Biblioteca Desafios Matemáticos. RBA Coleccionables, EDITEC, Espanha, 2004.

<http://clubes.obmep.org.br>



OFICINA DA GIRAFINHA GEOMÉTRICA: ARTICULAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA, POESIA E CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS

LIMA, Darcinara da Silva, limadarcinara@gmail.com¹
ARAÚJO, Iza Helena Travassos Ferraz, izahelena@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará

²Universidade Federal do Pará

Resumo: *Objetiva-se sensibilizar a comunidade acadêmica quanto às possibilidades de interação da Matemática com a Poesia e Contação de Histórias, e apresentar aos professores da educação básica uma proposta de atividade interdisciplinar e lúdica, por meio da construção de um brinquedo denominado Girafinha Geométrica. A fundamentação teórica está pautada em Nóbrega (2016), Silva e Costa (2008) e Serpa (2020), e a metodologia da oficina baseia-se em duas experiências que foram realizadas com alunos de graduação do curso de Pedagogia da UFPa. Parte-se do pressuposto de que a articulação entre poesia, contação de histórias e matemática contribui para a formação integral dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, além de oportunizar aos professores da educação básica, um novo olhar sobre o ensino da Matemática.*

Palavras-chave: *Matemática; Poesia; Contação de histórias.*

INTRODUÇÃO

Nesta oficina, propomos uma articulação entre Matemática, Poesia e Contação de Histórias na formação integral dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio da construção de um brinquedo, feito de materiais recicláveis, que denominamos de Girafinha Geométrica. Esta proposta surgiu durante uma atividade avaliativa da disciplina "Matemática nos Anos Iniciais", do curso de Pedagogia da UFPa, e depois tornou-se tema de uma pesquisa de trabalho de conclusão de curso.

Nosso propósito é sensibilizar a comunidade acadêmica quanto às possibilidades de interação da matemática com a poesia e contação de histórias, e apresentar aos professores da educação básica uma proposta de atividade interdisciplinar e lúdica, por meio da construção de um brinquedo que envolve figuras geométricas planas e espaciais.

A oficina será dividida em duas partes, na primeira, vamos falar sobre as possibilidades de relacionar Matemática e Poesia, na qual iremos utilizar uma metodologia para que os participantes escrevam suas próprias poesias ou poemas com o tema da Matemática. Após esta atividade, iremos realizar um sarau de poesias matemáticas.

Na segunda parte da oficina, vamos apresentar as contribuições da Contação de Histórias para o ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e construir a Girafinha Geométrica com os materiais recicláveis. Por fim, vamos convidar os participantes a refletirem sobre o ensino da matemática numa perspectiva interdisciplinar, que pode envolver, além de outras disciplinas obrigatórias do currículo, temas como Meio Ambiente e Reciclagem.

1. MATEMÁTICA, POESIA E CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS: POSSIBILIDADES E APROXIMAÇÕES

Em que medida a Matemática pode se relacionar com a poesia e contação de histórias? Quando a poesia e a contação de histórias adentram a escola e permeiam as práticas educativas, cria-se um ambiente sensível, lúdico. Silva e Costa afirmam que a poesia “é a arte de expressar sentimentos acerca dos elementos que rodeiam o poeta, e pode ser encontrada nas formas mais simples da vida” (2008, p.53); em consonância Nóbrega sustenta que:

[...] a intimidade com o universo poético afina as nossas emoções, a nossa capacidade de penetrar nos problemas da vida; afina também o apuro no senso da beleza, da percepção da complexidade do mundo e das pessoas e de nós mesmos, como também no cultivo do amor. (NÓBREGA, 2016, p.13)

Sobre a contação de histórias Bedran (2012) afirma ser uma atividade lúdica, pois amplia os horizontes e as possibilidades de uma criança, de um aluno, além de proporcionar uma interação vinculante e preciosa entre narrador e ouvinte, entre professor e aluno. Através da contação de histórias, pode-se construir um processo de ensino-aprendizagem, que é capaz de auxiliar as crianças na resolução de conflitos (SERPA,2020).

Por meio da linguagem poética é narrada a história de uma girafa inconformada com suas pintas circulares, a procura da Girafinha por uma nova roupagem nos leva por algumas formas geométricas e a partir delas trabalhamos o conteúdo matemático na oficina. A contação de história em formato poético da Girafinha Geométrica desconstrói receios e oportuniza um novo olhar sobre o ensino da Matemática. Almeida *et al.* (2012) expõem:

A relação de conceitos matemáticos através da literatura [poesia] permite ao educador uma análise sobre a assimilação e compreensão do aluno numa dinâmica interdisciplinar. Assim, a história induz a busca de relações entre cotidiano, linguagem e arte. (ALMEIDA *et al.*, 2012, p. 4)

Em consonância, Nóbrega (2016) sinaliza a importância do uso da poesia em aula “Quando o professor utiliza a poesia em sala de aula [...] desenvolve-se a criatividade, a imaginação, a sensibilidade, contribuindo assim para a formação crítica e reflexiva do educando, para compreensão do mundo e do outro” (NOBREGA, 2016, p. 13). Para além das benesses já conhecidas que a leitura da poesia estimula, como o enriquecimento de vocabulário, qualidade de interpretação, criatividade, exercício de conhecimento pessoal, do outro e da realidade que nos cerca, também desenvolve o humano quando tão carregada de sentidos e significados que nos atravessam, marcam, reiniciam.

Ainda sobre isto, Nóbrega (2016, p. 12) afirma que “a poesia tem um caráter humanizador, ético, capaz de mudar o leitor, o meio e o mundo”. Os autores citados ressaltam a beleza da poesia e da contação de histórias e seu entrelaçamento com a vida, esta mesma vida tão cheia de poesia e histórias, ainda que de maneira inconsciente para alguns, também está cheia de matemática. No que tange a uma aprendizagem significativa, o não uso da Poesia e Contação de Histórias como mediação, como ponte para ensino da matemática, é desperdício do seu potencial. Muito se discute sobre promover um ensino multidisciplinar, a articulação entre matemática, contação de histórias e poesia oportuniza isso.

2. SOBRE A CONSTRUÇÃO DA GIRAFINHA GEOMÉTRICA

Para realização da oficina foi elaborada uma poesia autoral e inédita que buscou articular a linguagem poética, com seus versos e rimas, junto a características das formas geométricas círculo, quadrado, losango, triângulo e cilindro.

Girafinha Geométrica¹

Girafinha tão lindinha,
acordou de mau humor
reclamando das bolinhas

¹ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Z2WwEvAJsGU>>

OFICINAS

que criador pintou

Disse ela, toda arteira:
Com círculos não vivo mais!
Farei uma transformação
Não me impeça, não volto atrás.

Decidida que só ela,
começou a procura
por novas formas geométricas
que lhe dessem formosura

O primeiro escolhido
tinha que ser o quadrado
ela logo desgostou
pois tinha 4 lados.

Vira e mexe, olha que fria
o losango também não servia
todos os lados com mesma medida
igual roupa repetida
quadrilátero demais
losango não quero mais

A procura durou muitos dias
se tornava cansativa
Preocupados os amigos
sugeriram terapia.

Girafinha obstinada
não queria nem saber
conselho se fosse bom
todos deveriam vender!

Chegou a vez do triângulo
parece que agora vai!
isósceles, equilátero, escaleno?
Aaaah, opções demais

Experimentou de todo jeito
e só encontrou defeito
Até finalmente perceber
que lindo mesmo, é do seu jeito ser

Aquele pescoço comprido
que nos lembra um cilindro
sua forma tridimensional
faz da girafa, sensacional

Decidiu se aceitar
com círculos e circunferência
Pra que reclamar?
se lhe deixam em evidência

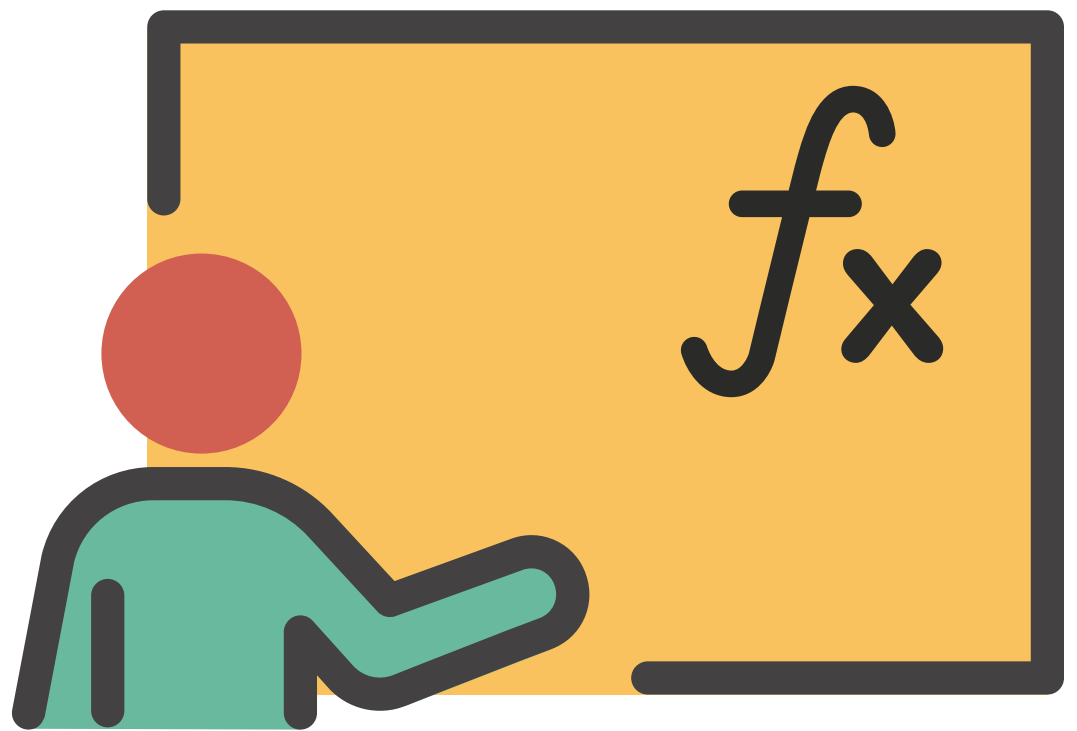
A busca da girafinha,
nos ensinou uma lição

fazendo da sala de aula um lugar prazeroso e divertido de se estar, que forme em vez de deformar e que alegre em vez de fazer chorar. Todos os apontamentos feitos neste trabalho seguiram o forte desejo de inspirar um ensino humanizado.

A partir de nossas vivências e nossa pesquisa, concluímos que esta articulação entre poesia, contação de histórias e matemática, associada ao lúdico e a construção do brinquedo pela criança é possível, desde que os professores venham a ter esta experiência em algum momento de sua formação, seja na inicial ou continuada, e desde que seja aplicada uma dose de compromisso, diligência e ânimo.

REFERÊNCIAS

- BEDRAN, Bia. **A Arte de cantar e contar histórias: narrativas orais e processos criativos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2012.
- FIGUEIREDO, Ana Paula. **MATEMÁTICA: Ensinando a gostar de matemática**. Disponível em : <http://repositorio.unis.edu.br/bitstream/prefix/506/1/MATEM%C3%81TICA%20Ensinando%20a%20gostar%20de%20Matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em 03 de Janeiro de 2022.
- NÓBREGA, Francisca Vânia Rocha. **Da leitura à Poesia: da Poesia à Leitura**. (Dissertação: Mestrado UFPB/CCAEMM). Mamanguape-PB, 2016. 103f. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/8928> Acesso em: 20 de Julho de 2021.
- OLIVEIRA, Vera Barros de. SOLÉ, María Borja i. FORTUNA, Tânia Ramos. **Brincar com o outro: Caminho de saúde e bem estar**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.
- RIBEIRO, Simone. **Alfabetização Matemática: Literatura e Geometria Integradas em uma Experiência Lúdica** in A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental [livro eletrônico] : práticas de sala de aula e de formação de professores / organização Reginaldo Fernando Carneiro, Antonio Carlos de Souza, Luciane de Fatima Bertini. -- Brasília, DF : SBEM, 2018.
- SERPA, Andréa. **Contar & Encantar: A jornada da Encantadora de Histórias**. Maricá-RJ: Editora Proverbo, 2020.
- SILVA, Ana Claudia Mendes da. COSTA, Sueli Silva Gorricho. **A poesia como recurso de desenvolvimento do universo cultural e criativo da criança**. Nucleus, v. 5. n. 1, abr. 2008.
- ALMEIDA, Flávio Aparecido de. (et al.). **Contribuições da Literatura para Ensino da Matemática: A importância da leitura**. XV Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e XII Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online. Disponível em: http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/viewFile/15005/1125612168. Acesso em 25 de Agosto de 2021.



Minicursos



A MODELAGEM MATEMÁTICA CRÍTICA E A EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O QUESTIONAMENTO DE MUNDO

Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo

Nazaré do Socorro Moraes da Silva

Jorge Williams Cunha Ferreira

JUNHO 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 Introdução

2 Embasamento teórico

2.1 A Modelagem Matemática e a Educação Matemática Crítica

2.2 A Educação Financeira

3 Desenvolvimento do minicurso

3.1 Aspectos metodológico do Minicurso

4 Conclusão

Referências

Prefácio

Este minicurso está pautado em refletir de que maneira a modelagem matemática como questionamento de mundo pode contribuir para o ensino da matemática escolar. *Através de um percurso formativo de estudos e investigação, pretendemos questionar as práticas sociais com as quais a matemática se faz subjacente, principalmente no que tange a modelagem matemática crítica em interface com a Educação Financeira dos indivíduos. Esperamos que essa proposta de minicurso fomenta o senso e a capacidade crítica dos participantes de modo a corroborar uma educação com cidadania plena e participativa face as problemáticas de seus contextos sociais.*

BELÉM-PA, JUNHO de 2022

Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo

Nazaré do Socorro Moraes da Silva

Jorge Williams Cunha Ferreira

INTRODUÇÃO

A inserção de sujeitos sociais em questionamentos pertinentes a sociedade tem se configurado como uma das competências desafiadora na instituição escolar que deve criar condições mínimas de ensino para atingir o enfrentamento de problemáticas salutar ao desenvolvimento de cidadãos críticos e reflexivos no sentido proposto pela educação matemática crítica postulada por Skovsmose (1992, 2001, 2007), consoante as pretensões anunciadas pela Organisation for Economic Co-operation and Development Programme for International Student Assessment (OCDE/PISA, 2012).

Dentre estas condições evidencia-se a prática com modelagem matemática crítica e conseqüentemente de modelos como construção dos desejos humanos permeado por interesses e intenções de grupos sociais que nem sempre se mostram visíveis, tal como as estruturas ideológicas que regulam a sociedade como aponta Skovsmose (1992). Para citar alguns exemplos destacamos o modelo usado para o cálculo do Imposto de Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), em particular na composição das tarifas de energia elétrica, o Imposto de Renda Pessoa Física, os Fundos de Participação Estaduais e Municipais, a projeção populacional estimada com o modelo assumido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) com reflexos diretos nos Fundos de Participação de Estados e Municípios, o Financiamento de um bem e o modelo legitimado pelo Sistema Eleitoral Brasileiro definido como Quociente Eleitoral.

Estes modelos além de emergirem de situações concretas e compartilhadas socialmente revelam-se passíveis de discussão no ensino escolar, os modelos também orientam políticas que incidem diretamente na sociedade ao trazer em seu

bojo traços para incursão de práticas com modelagem pautadas pela educação financeira ao manifestar modelos como “caixa-preta” ao conterem pontos cegos que deixam de fora emendas ou rasuras não se constituindo uma adequação ou decisão matemática, contudo de interesses de grupos sociais a quem interessa o modelo.

Skovsmose (2007, p.121) pontua “Quer os modelos macroeconômicos estejam ou não aptos a descreverem, de fato eles são *usados*, e esse *uso* é de importância crítica para compreender política e tomada de decisões econômica.”

Tais discussões suscitam reflexões imprescindíveis no ambiente escolar por meio da prática com modelagem matemática como processos de estudos e investigação, em particular, ao engendrar como objeto de estudo a educação financeira permeada de modelos matemáticos que por não raro despistam uma “racionalidade” própria envolvida nas situações orientadas por uma lógica nem sempre acessível aos não especialistas, incluindo alunos da educação básica.

A construção e discussão de modelos dessa natureza se tornam relevante para o desenvolvimento de valores e competências necessários para julgar as oportunidades e os riscos neles envolvidos ao escamotear interesses outros incrustados ao modelo.

Perrenoud (2002) alude que ensinar direitos e deveres sem mudança de pensamento e tomada de ação não é suficiente para formar cidadãos. O exercício da cidadania é ingrediente indispensável da construção de uma sociedade democrática e justa, e a educação financeira articulada à prática com modelagem matemática crítica assume papel importante para a formação de cidadãos críticos e reflexivos ao desvelar elementos da organização social em torno do mundo financeiro, em geral cheio de armadilhas.

Em que pese à complexidade das discussões reiteramos a necessidade de inserção de discussões da educação financeira articulada ao fazer regular da prática com modelagem matemática crítica no ambiente escolar em função da fecunda e imensa complexidade de um problema novo: o da necessidade de tornar inteligível a não-especialistas, segundo infere Burgermeister (2007, 2010) e como um bom exercício para a competência democrática e para inserção da atividade matemática em si como construção do saber ao revelar-se como processo de estudos e

investigação imbricado a dinâmica da pedagogia de questionamento de mundo e sobre o mundo, incluindo o mundo dos saberes, de acordo destaca Chevallard (2009).

Diante das discussões fomentadas sobre a prática com modelagem matemática crítica como processo de estudos e investigação no contexto escolar articulado a educação financeira o objetivo deste minicurso está pautado em refletir de que maneira a modelagem matemática como questionamento de mundo pode contribuir para o ensino da matemática escolar.

EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 A Modelagem Matemática e a Educação Matemática Crítica

Para D’Ambrósio (1986), a Modelagem Matemática se constitui como uma abordagem na qual os conteúdos matemáticos perpassam em interação com as situações da realidade social, sendo um processo, segundo o autor, significativo, uma vez que a interação matemática-realidade proporciona uma contextualização em problemas práticos do cotidiano sob a interpretação na perspectiva dos objetos do universo matemático.

Em corroboração a esse pensamento, Bassanezi (2002, p. 16), afirma que “a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Almeida e Ferruzi (2009) sistematizam essas concepções ao considerarem a Modelagem Matemática como uma abordagem pedagógica pela qual as respostas às situações-problema desencadeadas, não necessariamente matemáticas, contextualizam-se através da matemática.

Santo (2018), também fala sobre o ciclo de MM que se constitui em ferramenta que tem a pretensão de ajudar na produção de conhecimentos sobre a realidade e é entendido como uma prática social com matemática por ser realizada em espaços concretos, denominados de instituições.

Enquanto abordagem de investigação no âmbito da Educação Matemática, a Modelagem Matemática assenta-se em múltiplas compreensões teóricas e aportes metodológicos. Kaiser e Sriraman (2006) sistematizam seis perspectivas à Modelagem Matemática, que são: perspectiva realística, perspectiva contextual, perspectiva sociocrítica, perspectiva epistemológica, perspectiva cognitivista e perspectiva educacional. Situamos nosso minicurso na perspectiva sociocrítica, uma

vez que o papel da matemática perante a sociedade é reivindicar a necessidade do encorajamento do pensamento crítico sobre o seu compromisso na sociedade, a função e a natureza dos modelos matemáticos, e a missão da modelagem matemática no contexto social (KAISER; SRIRAMAN, 2006).

Essa perspectiva alinha-se ao que Skovsmose (2001) considera como Educação Matemática Crítica. De acordo com o autor, o processo de ensino e aprendizagem matemático necessita constituir-se para além do desenvolvimento de habilidades puramente matemáticas, devendo permitir ao indivíduo a participação crítica nas nuances da sociedade, para a compreensão e discussão de questões de cunho político, social, econômico pelos quais a matemática subjaz. Nesse sentido, o processo formativo exige contextos de aprendizagem que demandem estímulo ao pensamento crítico e o questionamento de mundo e suas relações sociais.

2.2 A Educação Financeira

A Educação Financeira constitui-se em um amplo campo de investigação interdisciplinar. Segundo a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico – OCDE

A educação financeira pode ser definida como o processo pelo qual os consumidores/investidores financeiros melhoram a sua compreensão dos produtos, conceitos e riscos financeiros e, através de informações, instruções e/ou conselhos objetivos, desenvolvem habilidades e confiança para tomar consciência dos riscos e oportunidades financeiras, para fazer escolhas bem informadas, para saber onde pedir ajuda e tomar outras medidas eficazes para melhorar seu bem-estar financeiro. A educação financeira vai além do fornecimento de informações financeiras e consultoria [...] (OCDE, 2005b, p. 4).

Para Giordano, Assis e Coutinho (2019, p. 2) a Educação Financeira, enquanto temática de investigação, “mobiliza saberes, habilidades, competências, crenças e concepções envolvendo diferentes áreas do conhecimento humano, como a Matemática, a Política, a Economia, a Sociologia, a Antropologia, a Filosofia, a Psicologia, a Ética, dentre outras”.

No contexto político e social brasileiro, a Educação Financeira institucionaliza-se através da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), através do Decreto Federal 7.397/2010.

Essa estratégia política tem como foco principal a construção de uma cidadania crítica em assuntos do interesse financeiro, principalmente no que tange a tomada de decisões financeiras com autonomia e consciência. Nesse sentido, Campos, Teixeira e Coutinho (2015) ressaltam a importância de uma implementação de propostas de Educação Financeira contextualizadas, considerando o contexto real dos indivíduos, tendo em vista que uma considerável parte da população brasileira carece de uma educação financeira sólida e consistente.

DESENVOLVIMENTO DO MINICURSO

3.1 Aspectos metodológico do Minicurso

Considerando a prática com Modelagem Matemática como meio de acesso ao saber, constituída a partir de problematizações de situações nos variados contextos de uso da matemática, a presente proposição de minicurso está pautado em situações do mundo concreto compartilhadas socialmente no contexto da educação financeira, mais os elementos internos a prática com matemática como a discussão do trabalho de técnicas de maior alcance, isto é, o exercício da atividade matemática em jogo, tal como postula Chevallard, Bosch e Gascón (2001) ao situar grande parte da atividade matemática pode ser interpretada como atividade de modelagem. Ou seja, as problematizações de complexidade crescente constituem a “razão de ser” do processo de estudos e investigação passíveis de questionamentos de modelos matemáticos providos por interesses e intencionalidades de grupos sociais a quem interessa o modelo.

Metodologia das atividades do minicurso

As atividades serão desenvolvidas em momentos de estudos e investigação, caracterizando um percurso formativo de estudo e pesquisa, através de encontros previamente definidos ao longo período cronológico previsto para desenvolvimento do projeto, conduzido por ministrantes na condição de diretores de estudos responsáveis pela mediação e direção das atividades propostas, de modo a construir condições para a instauração de problemas concretos do contexto social que levem os participantes a possibilidade da construção do saberes relativos à temática em questão e o desenvolvimento do senso crítico. Nesta perspectiva, o fazer com Modelagem Matemática permite a manifestação de saberes em pleno processo de construção.

Material utilizável

As atividades serão desenvolvidas com a utilização de calculadoras científicas, computadores e celulares. Estes instrumentos enquanto parte das condições propostas para construção de saberes no processo de percurso de estudos e investigação são fundamentais no desenvolvimento da prática com Modelagem Matemática não como elementos motivacionais, todavia como parte integrante do processo com modelagem. Nesse sentido, é possível sinalizar possibilidades de articulação de diferentes práticas com matemática no universo escolar como a produção de gráficos e tabelas pertinente ao estudo de funções, progressões, noções de matemática financeira envolvendo cálculo de juros, capitalização e descapitalização, cálculo do valor numérico de polinômios por meio de situações articuladas com matemática financeira, dentre outras práticas que poderão emergir no processo de estudos. Portanto, tais práticas com matemática escolar serão norteadas por meio da prática com modelagem matemática como processos de estudos e investigação articulado a temática da educação financeira.

Público visado

O público principal a que se destina esse minicurso envolve professores em formação inicial, continuada e, também, aos que ensinam matemática nos variados níveis, etapas e modalidades da educação escolar.

Atividades do minicurso

Considerando essa proposição por meio da prática com Modelagem Matemática Crítica articulada à temática Educação Financeira voltada para professores em formação inicial, continuada e, também, aos que ensinam matemática nos variados níveis, etapas e modalidades da educação escolar, as atividades serão norteadas pelas seguintes temáticas: educação financeira e modelagem matemática crítica.

Atividade 1

Tema; Cálculos percentuais por meio de problemáticas passíveis de discussão envolvendo modelos matemáticos compartilhados socialmente.

Objetivo: Delimitar uma problemática comum e socialmente relevante para os participantes do minicurso, de modo a desenvolver tarefas que envolvam uma contextualização para o objeto matemático da porcentagem.

Atividade 2

Tema: Como investir para o futuro?

Objetivo: Instigar os participantes, através de estudos situados e dirigidos de obras de divulgação científica e ou jornalística, através de questionamentos de suas práticas sociais financeiras, para a necessidade de ter um bem estar financeiro e fiscal.

Atividade 3

Tema: Discussão de modelos matemáticos, em particular, os modelos que fazem parte do cotidiano e contexto financeiro dos participantes.

Objetivo: Discutir, através de questionamentos, sobre os modelos matemáticos presentes no cotidiano e contexto financeiro, em especial os que interessam no dia a dia dos participantes.

Avaliação do minicurso

A avaliação como componente imprescindível do processo de ensino e aprendizagem será desenvolvida processualmente ao longo das atividades previstas pelo minicurso ao considerar o envolvimento e participação dos alunos nas construções de saberes passíveis de desenvolvimento. Além de uma avaliação acerca da possibilidade desta proposta para formação de professores de matemática inicial ou continuada.

CONCLUSÃO

Esperamos que este minicurso possibilite momentos de discussão e reflexão, de modo a promover um questionamento de mundo através da prática com Modelagem Matemática, em interface com a Educação Financeira, com o intuito de desvelar o quanto de modelos agem em nossas vidas com políticas de interesses e intencionalidades, nem sempre discutido em contexto social. Intentamos evidenciar, também, os processos de aprendizagem dos participantes, face a prática com modelagem matemática articulada a educação financeira como um exercício para a atividade matemática em jogo e a competência democrática permeada por questionamentos salutar a constituição de cidadãos críticos e reflexivos. Contribuir além da formação dos participantes envolvidos, com a formação do professor em desenvolvimento na função de diretores do estudo, bem como a promoção de reflexões passíveis de encaminhamento de futuras pesquisas pautadas na melhoria do processo de ensino aprendizagem da matemática escolar.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, v. 2, n. 2, p. 117-134, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BURGERMEISTER, P. F. La didactique de la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire d'heir et d'aujourd'hui. **Communication au 2ème Colloque International sur la Théorie Antropologique du Didactique**, Uzès 31 oct-2 nov 2007.

BRASIL. Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010. Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Poder Executivo**, Brasília, DF, 23 dez. 2010. Seção 1, p. 7-8.

CHEVALLARD, Y. (2009) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. **15e école d'été de didactique des mathématiques**, p. 16-23.

DAMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação**: Reflexões sobre Educação e Matemática. Campinas: Ed. Universidade Estadual de Campinas, 1986.

GIORDANO, K. C.; ASSIS, M. R. S.; COUTINHO, C. Q. S. A Educação Financeira e a Base Nacional Comum Curricular. **Em Teia**, v. 10, n. 3, 2019.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p.302-310, 2006.

OECD. Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness. Directorate for Financial and Enterprise Affairs. Jul.2005b. Disponível em <<https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/35108560.pdf>> Acesso em: 30 mar. 2022.

SANTO, C. A. E. O papel dos saberes não matemáticos na Modelagem Matemática: o estudo do cálculo do Imposto de Renda. Dissertação (mestrado). Belém: Universidade Federal do Pará,(2018).

SKOVSMOSE, O. Democratic competence and reflective knowing in mathematics. **The Learning of Mathematics**, v. 12, n. 2, jun. 1992.

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica**: A questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.



FINANÇAS NO COTIDIANO

JERONIMO MONTEIRO

JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Programa do minicurso

- 0.1 Ementa
- 0.2 Carga horária total
- 0.3 Objetivos
 - 0.3.1 Objetivos gerais
 - 0.3.2 Objetivos específicos
- 0.4 Conteúdo programático
- 0.5 Metodologia

1 Introdução

- 1.1 Taxas de Juro
- 1.2 Regras básicas
- 1.3 Critérios de capitalização dos juros

2 Juros simples

- 2.1 Definição
- 2.2 Conceito e utilização
- 2.3 Expressão para o cálculo dos juros simples
- 2.4 Equação do cálculo do valor futuro
- 2.5 Equação do cálculo do valor presente
- 2.6 Expressão para o cálculo do número de períodos
- 2.7 Expressão para o cálculo da taxa de juros
- 2.8 Taxas equivalentes a juros simples
- 2.9 Equivalência de capitais a juros simples

2.10 Cálculo do IOF

3 Juros compostos

3.1 Conceito e utilização

- 3.1.1 Expressão para o cálculo do montante
- 3.1.2 Expressão para cálculo do capital
- 3.1.3 Expressão para cálculo dos juros a partir do capital
- 3.1.4 Expressão para cálculo do número de períodos
- 3.1.5 Expressão para cálculo da taxa de juros
- 3.1.6 Taxas de juros equivalentes compostos
- 3.1.7 Transformação de taxas nominais em taxas efetivas
- 3.1.8 Transformação de taxas efetivas em nominais
- 3.1.9 Capitais equivalentes
- 3.1.10 Operações com taxas compostas pós-fixadas
- 3.1.11 Juros compostos na calculadora *HP-12C*

3.2 Descontos Simples e Compostos

3.2.1 Desconto simples

3.3 Despesas bancárias

- 3.3.1 Taxa implícita de juros do desconto comercial simples
- 3.3.2 Taxa efetiva de juros

3.4 Desconto composto

- 3.4.1 Desconto comercial composto
- 3.4.2 Desconto racional composto

4 Fluxos de caixa

4.1 Valor presente e fator de valor presente

5 Rotinas da *HP-12C*

5.1 Erros da *HP-12c*

Referências

PROGRAMA DO MINICURSO

0.1. EMENTA

Introdução à finanças. Juros Simples. Juros Compostos. Descontos. Fluxos de Caixa.

0.2. CARGA HORÁRIA TOTAL

4 horas-aula

0.3. OBJETIVOS

0.3.1. OBJETIVOS GERAIS

Dar um sólido embasamento teórico indispensável ao estudo de Finanças para o entendimento do cálculo do valor do dinheiro no tempo.

0.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Ao final do curso, o aluno deverá ser capaz de:

- Compreender as diferenças entre os tipos de capitalização simples e composta;
- Compreender o cálculo do valor presente e do valor futuro em quaisquer fluxos de caixa;

- Calcular as mais variadas espécies de taxas de fluxos de caixa;
- Adequar o profissional à utilização da calculadora financeira *HP-12C*;
- Usar o excel.

0.4. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Introdução: Juro e taxas de juro, montante e capital. Critérios de capitalização de juros.
2. Juros simples: Montante e capital. Taxa proporcional e taxa equivalente. Juro comercial e juro exato. Equivalência financeira. Descontos.
3. Juros compostos: Taxa nominal e taxa efetiva. Cálculo do montante e juros. Inflação. Taxas equivalente e equivalência de capitais. Convenção linear e exponencial para períodos fracionários.
4. Fluxos de caixa: Valor presente e valor futuro.

0.5. METODOLOGIA

Aulas expositivas com ampla resolução de exercícios com utilização de calculadora financeira. **É indispensável o uso da *HP-12C* ou seu emulador.**

Belém, Junho de 2022

Jeronimo Monteiro

INTRODUÇÃO

A matemática financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa verificados em diferentes momentos.

Receber uma quantia hoje ou no futuro não são evidentemente a mesma coisa. Em princípio, uma unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã. Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por certo tempo envolve um sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros. Desta forma, são os juros que efetivamente induzem o adiantamento do consumo, permitindo a formação de poupanças e de novos investimentos na economia.

As taxas de juros devem ser eficientes de maneira a remunerar:

a) o risco envolvido na operação (empréstimo ou aplicação), representado genericamente pela incerteza com relação ao futuro;

b) a perda do poder de compra do capital motivada pela inflação. A inflação é um fenômeno que corrói o capital, determinando um volume cada vez menor de compra com o mesmo montante;

c) o capital emprestado ou aplicado. Os juros devem gerar um lucro ao proprietário do capital como forma de compensar a sua privação por determinado período de tempo. Este ganho é estabelecido basicamente em função das diversas outras oportunidades de investimento preteridas e definido o custo de oportunidade.

1.1. TAXAS DE JURO

A taxa de juro é o coeficiente que determina o valor do juro, isto é, a remuneração do fator capital utilizado durante certo período de tempo.

As taxas de juros se referem sempre a uma mesma unidade de tempo (mês, semestre, ano etc.) e podem ser representadas equivalentemente de duas maneiras: *taxa percentual* e *taxa unitária*.

A **taxa percentual** refere-se aos "centos" do capital, ou seja, o valor dos juros para cada centésima parte do capital.

Por exemplo, um capital de \$1000,00 aplicado a 20% ao ano rende de juros, ao fim deste período:

$$Juro = \frac{\$1000,00}{100} \times 20 = \$200,00$$

O capital de \$1000,00 tem dez centos. Como cada um deles rende 20, a remuneração total da aplicação no período é, portanto, de \$200,00.

A **taxa unitária** centra-se na unidade de capital. Reflete o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo.

No exemplo acima, a taxa percentual de 20% ao ano indica um rendimento de 0,20 por unidade de capital aplicada, ou seja:

$$Juro = \$1000,00 \times \frac{20}{100} = \$200,00$$

A transformação da taxa percentual em unitária se processa simplesmente pela divisão da notação percentual por 100. Para a transformação inversa, basta multiplicar a taxa unitária por 100.

Exemplo 1.1.

Taxa Percentual	Taxa Unitária
1,5%	0,015
8%	0,08

Nas fórmulas de matemática financeira todos os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária de juros. Os enunciados e as respostas dos exercícios apresentados nesta apostila estão indicados pela taxa percentual.

1.2. REGRAS BÁSICAS

Nas fórmulas de Matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo. Por exemplo, admita que um fundo de poupança esteja oferecendo 2% ao mês e os rendimentos creditados mensalmente. Neste caso, o prazo a que se refere a taxa (mês) e o período de capitalização do fundo (mensal) são coincidentes, atendendo à regra básica.

Se uma aplicação foi efetuada pelo prazo de um mês, mas os juros definidos em taxa anual, não há coincidência nos prazos e deve ocorrer necessariamente um "rateio". É indispensável para o uso das fórmulas financeiras transformar a taxa de juro anual para o intervalo de tempo definido pelo prazo da operação, ou vice-versa, o que for considerado mais apropriado para os cálculos. Somente após a definição do prazo e da taxa de juro na mesma unidade de tempo é que as formulações da Matemática Financeira pode ser operadas.

Os critérios de transformação do prazo e da taxa para a mesma unidade de tempo podem ser efetuados através das regras de juros simples (média aritmética) e de juros compostos (média geométrica), dependendo do regime de capitalização definido para a operação.

1.3. CRITÉRIOS DE CAPITALIZAÇÃO DOS JUROS

Os critérios de capitalização demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Nesta conceituação podem ser identificados dois regimes de capitalização dos juros: **simples** (ou linear) e **composto** (ou exponencial).

JUROS SIMPLES

2.1. DEFINIÇÃO

Juros simples representam o regime de capitalização no qual juros devidos e não pagos não são capitalizados.

2.2. CONCEITO E UTILIZAÇÃO

Nesse regime de capitalização, os juros devidos e eventualmente não pagos, resultantes da ação da taxa de juros em períodos anteriores, a despeito de permanecerem no saldo devedor, não geram novos juros nos períodos subsequentes. Trata-se de um processo de cálculo no qual os juros referentes a períodos anteriores ficam imunes à ação da taxa de juros, como se estivessem dentro de uma redoma, na qual essa última não consegue penetrar.

Face o exposto, a base de valor para a determinação dos juros, em qualquer instante da operação, é o seu principal valor presente.

No Brasil, esse regime de capitalização é utilizado, em geral, nas operações de empréstimo de curtíssimo prazo, até mesmo por um dia, denominadas no mercado, *Hot money*; na cobrança de cheques especiais; nos financiamentos indexados em moeda estrangeira; e no desconto de títulos de curto prazo, tais como duplicatas e notas promissoras. As três primeiras operações são apresentadas no capítulo referente às aplicações no mercado financeiro. Já a operação de desconto de títulos, devido a sua especificidade, será abordada em capítulo próprio.

2.3. EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DOS JUROS SIMPLES

Imagine um certo valor presente - PV sendo aplicado a uma taxa de juros i sob o crivo dos juros simples. Na determinação dos juros referentes ao primeiro período da operação, teríamos a aplicação da taxa de juros sobre o valor presente, o que seria descrito matematicamente pela seguinte relação:

$$J_1 = PV \times i$$

Pensando nos juros que seriam calculados no segundo período, em função da orientação dada pela definição desse regime de capitalização, mais uma vez a taxa de juros seria aplicada sobre o valor presente da operação. Sendo assim, teríamos, para esses juros uma equação idêntica à expressa para os juros do primeiro período, como se segue:

$$J_2 = PV \times i$$

Dessa forma, caso queiramos determinar os juros totais acumulados ao final de dois períodos (J_{Totais_2}), esses serão calculados através da soma dos juros do primeiro e do segundo períodos. Sendo assim, chegaríamos à seguinte relação:

$$\begin{aligned} J_{Totais_2} &= J_1 + J_2 \\ J_{Totais_2} &= PV \times i + PV \times i \\ \therefore J_{Totais_2} &= PV \times i \end{aligned}$$

Observemos, agora, os formatos das equações responsáveis pelo cômputo dos juros totais, acumulados ao final de cada um dos dois primeiros períodos da operação:

$$\begin{aligned} J_{Totais_1} &= PV \times i \\ J_{Totais_2} &= PV \times i \end{aligned}$$

Note que a única diferença entre elas é o último fator da equação. Para os juros totais do primeiro período o mesmo assume o valor 1, e, para os juros

totais ao final do segundo período, passa a assumir o valor 2. Por uma lógica simples, podemos perceber que esse último fator do cálculo dos juros totais está diretamente associado à variável n , indicativa do número de períodos da operação.

Considerando a lei de recorrência pontuada no parágrafo anterior, podemos concluir que a equação capaz de determinar os juros totais acumulados a qualquer período em uma operação terá o seguinte formato:

$$J = PV \times i \times n$$

Exemplo 2.1. Qual será o juro proporcionado por um capital de \$100.000,00, aplicado à taxa de 3% ao mês, ao final de: a) um mês; b) dois meses.

Dados: $PV = 100.000,00$; $i = 3\%$ a.m.

Solução:

$$\text{a) } n = 1 \Rightarrow J = PV \times i \times n = \$100.000,00 \times 0,03 \times 1 = \$3000,00;$$

$$\text{b) } n = 2 \Rightarrow J = PV \times i \times n = \$100.000,00 \times 0,03 \times 2 = \$6000,00.$$

2.4. EQUAÇÃO DO CÁLCULO DO VALOR FUTURO

Considerando que os cálculos financeiros básicos envolvem quatro variáveis – VP , VF , i e n –, e observando que somente três variáveis foram contempladas nas práticas levadas a efeito no presente capítulo, percebemos que o parâmetro VF não participou dos desenvolvimentos quantitativos, até então, o que será procedido a partir de agora.

Para tanto, imagine que um cidadão realize uma aplicação única em um determinado fundo de investimento, no valor de \$50.000,00. Imagine, ainda, que após 24 meses da aplicação, esse indivíduo se depare com um saldo de \$59.800,00 relativo ao fundo em questão. Considerando ter sido aquela a única aplicação realizada, ao longo dos 24 meses, poderia ele deduzir que o seu saldo final nada mais seria que a soma do valor aplicado com os juros gerados pela operação? Resposta afirmativa!

Dado que só havia realizado um único aporte de capital, toda diferença constatada em relação a esse valor aportado, em datas futuras, será atribuída aos juros gerados pela aplicação. Sendo assim, em cenários como esse, sempre valerá a seguinte relação matemática:

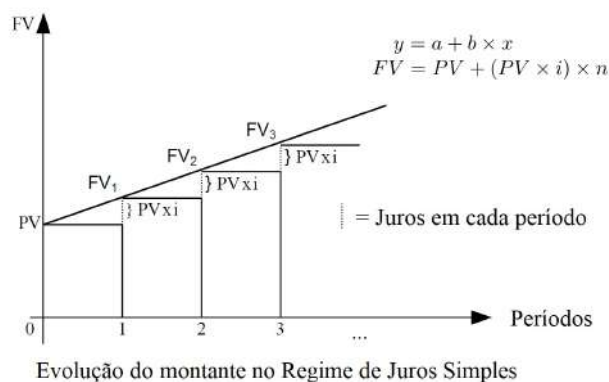
$$FV = PV + J$$

Repare que para chegarmos a essa conclusão não foi preciso identificar o regime de capitalização utilizado na formação dos juros considerados na equação anterior, o que significa dizer que os mesmos podem ter sido gerados através das técnicas dos juros simples, tanto quanto dos juros compostos. Por conseguinte, o formato manifestado pela referida equação é genérico, ou seja, tem aplicação nos dois regimes de capitalização—simples e compostos.

Porém, se na equação anterior substituirmos a variável juros (J) pela relação $PV \times i \times n$, o que era uma relação genérica passará a ter o formato específico do regime dos juros simples, assumindo o formato que se segue:

$$FV = PV + \overbrace{PV \times i \times n}^J$$
$$\therefore FV = PV \times (1 + I \times n)$$

A seguir você tem a representação gráfica da evolução do valor futuro de uma operação realizada no regime de juros simples. Observe que a evolução dos montantes ocorre segundo a equação de uma linha reta, sendo o coeficiente linear (intercepto) identificado pelo PV , e o coeficiente angular (declividade), pelo juro constante ao período $PV \times i$.



Exemplo 2.2. Um investidor aplicou \$20.000,00, à taxa de 10% ao mês, no regime de juros simples. Calcule o montante no final do primeiro mês e do quinto mês.

Dados: $PV = \$20.000,00$; $i = 4\% a.m.$

Solução:

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow FV_1 &= PV \times (1 + i \times n_1) \\ &= \$20.000,00 \times (1 + 0,04 \times 1) \\ &= \$20.000,00 \times 1,04 \\ \therefore FV_1 &= \$20.800,00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 5 \Rightarrow FV_5 &= PV \times (1 + i \times n_5) \\ &= \$20.000,00 \times (1 + 0,04 \times 5) \\ &= \$20.000,00 \times 1,20 \\ \therefore FV_5 &= \$24.000,00 \end{aligned}$$

2.5. EQUAÇÃO DO CÁLCULO DO VALOR PRESENTE

Considerando a equação de determinação do FV de uma operação a juros simples – $FV = PV \times (1 + i \times n)$ –, podemos pensar em tratá-la, ajustando

seu formato, para que possa determinar o valor presente de uma operação. Através dos procedimentos matemáticos pertinentes, temos que:

$$PV = \frac{FV}{(1+i \times n)}$$

Denominamos fator de descapitalização no regime de juros simples a expressão:

$$\frac{1}{(1+i \times n)}$$

Exemplo 2.3. Qual deve ser o capital de uma aplicação que resulte num montante de \$8000,00 daqui a três meses, a uma taxa de juros simples de 2% ao mês?

Dados: $FV = 8.000,00$; $i = 4\%$ a.m.; $n = 3$ meses.

Solução:

$$PV = \frac{FV}{1 + i \times n} = \frac{\$8.000,00}{1 + 0,02 \times 3} \therefore PV = \$7.547,17$$

2.6. EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DO NÚMERO DE PERÍODOS

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + i \times n) \\ \therefore \frac{FV}{PV} &= 1 + i \times n \\ \therefore i \times n &= \frac{FV}{PV} - 1 \\ \therefore n &= \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{i} \end{aligned}$$

Exemplo 2.4. Por quantos períodos deve-se manter uma aplicação no valor de \$1.363,40, à taxa de 1,5% ao trimestre, para gerar um montante de \$3.000,00?

Dados: $PV = \$1.363,40$; $FV = \$3.000,00$; $i = 1,5\%$ a.t.

Solução:

$$n = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{i} = \frac{\frac{\$3000,00}{\$1.363,40} - 1}{0,015}$$

$$\therefore n = 80,63 \text{ trimestres.}$$

2.7. EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA TAXA DE JUROS

Da expressão de n obtemos diretamente:

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + i \times n) \\ \therefore \frac{FV}{PV} &= 1 + i \times n \\ \therefore i \times n &= \frac{FV}{PV} - 1 \\ \therefore i &= \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{n} \end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Qual é a taxa de juros que aplicada a um capital no valor de \$1.800,00, gera como montante o dobro desse capital no período de quatro semestres?

Dados: $PV = \$1.800,00$; $FV = 2 \times \$1.800,00 = \$3.600,00$; $n = 4$ semestres.

Solução:

$$i = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{n} = \frac{\frac{\$3.600,00}{\$1.800,00} - 1}{4} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore i = 25\% \text{ a.s.}$$

2.8. TAXAS EQUIVALENTES A JUROS SIMPLES

Duas taxas de juros serão ditas equivalentes quando: aplicadas sobre o mesmo valor presente, ao longo do mesmo intervalo de tempo, gerarem o mesmo valor futuro. Essa é a definição do que vem a ser duas taxas equivalentes.

Note que, em um primeiro momento, a definição descrita no parágrafo anterior pode soar um tanto quanto estranha aos seus ouvidos, uma vez que se reporta a idéia de que, para que haja a equivalência de taxas, todos os parâmetros devem ser constantes, ou seja, mesmo valor presente, mesmo intervalo de tempo (variável n), chegando ao mesmo valor futuro. A pergunta que poderia ser feita nessa hora seria: o que então haverá de diferente nesse contexto? A resposta para esse questionamento é bastante lógica, e, aliás, encontra perfeita aderência à proposta de cálculo trazida pela abordagem do presente tema, onde pretendemos relacionar duas taxas de juros que gerem exatamente o mesmo resultado, dentro das condições restritivas estabelecidas no parágrafo acima, a diferença reside nas referências temporais manifestadas pelas taxas a serem relacionadas, que podem ser mensal, anual, diária, trimestral etc.. Por fim, essa é a grande base do cálculo de equivalência de taxas, descobrir os valores que associados a períodos diferentes geram os mesmos resultados ao longo do tempo.

Em especial no regime dos juros simples, considerando que os juros referentes a um período não geram juros em períodos subsequentes, as taxas equivalentes conservam uma relação de proporcionalidade. Isso significa dizer que para alterarmos os períodos referentes às taxas de juros precisaremos nos reportar, exclusivamente, a uma regra de três simples, como segue apresentado nos próximos dois exemplos.

Exemplo 2.6. Quais as taxas equivalentes, trimestral e anual, a uma taxa de juros simples de $2,5\%$ *a.m.*?

Dados: $i_m = 2,5\%$ *a.m.*; $i_{trim} = ?$; $i_{anual} = ?$

Solução: a) taxa equivalente trimestral

$$\begin{array}{lcl}
 i_m = 2,5\% \text{ a.m} & \longleftrightarrow & 1 \text{ mês} \\
 i_{trim} & \longleftrightarrow & 3 \text{ meses}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \implies i_{trim} = 3 \times i_m = 3 \times 2,5\% \\
 \implies i_{trim} = 7,5\% \text{ a.t.}
 \end{array} \right.$$

Solução: b) taxa equivalente anual

$$\begin{array}{lcl}
 i_m = 2,5\% \text{ a.m} & \longleftrightarrow & 1 \text{ mês} \\
 i_{anual} & \longleftrightarrow & 12 \text{ meses}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \implies i_{anual} = 12 \times i_m = 12 \times 2,5\% \\
 \implies i_{anual} = 30,0\% \text{ a.a.}
 \end{array} \right.$$

2.9. EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS SIMPLES

Como vimos no capítulo 1, a relação fundamental de equivalência de capitais para um período é expressa pelas seguintes equações:

$$FV = PV \times (1 + i) \text{ e } PV = \frac{FV}{1+i}.$$

No regime dos juros simples, essas equações de equivalência de capitais, considerando n períodos, são:

$$FV = PV \times (1 + i \times n) \text{ e } PV = \frac{FV}{1+i \times n}.$$

Através dessas relações, e uma vez definida uma data de referência para contagem do tempo, é possível estabelecer a troca de dois ou mais capitais, de forma que eles sejam equivalentes financeiramente. Cabe ressaltar que não haverá ganho ou perda para nenhuma das partes em um processo como esse, apenas um eventual interesse na troca temporal das datas de cumprimento do que ficou originalmente convencionado na operação. A data que será utilizada como referência passa a ser denominada data focal, de comparação ou de avaliação. Os capitais envolvidos também são denominados compromissos ou obrigações.

Note que no regime de juros simples, para datas focais diferentes, os valores envolvidos na equivalência também serão diferentes, pois os prazos não são separáveis. Ou seja, considerando um prazo n dividido em dois prazos, iguais ou desiguais, n_1 e n_2 , o valor futuro gerado pela expressão $PV \times (1 + i \times n)$ será diferente do valor futuro gerado pela expressão $PV \times (1 + i \times n_1) \times (1 + i \times n_2)$.

Por motivos de ordem prática, arbitra-se então a data focal zero (data de hoje) como a data focal a ser utilizada nos exemplos.

Dado um conjunto de capitais que constitua a obrigação original assumida, o problema é encontrar o conjunto equivalente de capitais que constitua o compromisso proposto, uma vez definidas a taxa de juros efetiva cobrada e a data de comparação considerada. A expressão que estabelece a igualdade entre esses dois conjuntos será denominada equação (de determinação) de valor.

Exemplo 2.7. Uma empresa tem compromissos de \$2.000,00 e de \$2.500,00 a vencerem-se de hoje a três e oito meses, respectivamente. Seu gerente financeiro propõe à empresa credora a troca desses compromissos por outros dois que lhe sejam equivalentes, a vencerem-se de hoje a 10 e 15 meses, respectivamente. Considere que a taxa de juros linear cobrada é de 2% ao mês e que as obrigações equivalentes devem ter valores iguais. Qual deve ser o valor dessas obrigações?

Dados: $FV_1 = \$2.000,00$; $FV_2 = \$2.500,00$; $n_1 = 3$ meses; $n_2 = 8$ meses;
 $i = 2\%$ a.m.;

Novos prazos: $n_{1_{novo}} = 10$ meses; $n_{2_{novo}} = 15$ meses.

Condição acessória: parcelas iguais.

Solução:

$$\therefore \frac{PV_1 + PV_2}{1 + i \times n_1} = \frac{PV_{1_{novo}} + PV_{2_{novo}}}{1 + i \times n_{1_{novo}}} + \frac{PV_{2_{novo}}}{1 + i \times n_{2_{novo}}}$$

(sendo : $FV_{1_{novo}} = FV_{2_{novo}} = FV$)

$$\therefore \frac{\$2.000,00}{1 + 0,02 \times 3} + \frac{\$2.500,00}{1 + 0,02 \times 8} = \frac{FV}{1 + 0,02 \times 10} + \frac{FV}{1 + 0,02 \times 15}$$

$$\therefore \frac{\$2.000,00}{1,06} + \frac{\$2.500,00}{1,16} = \frac{FV}{1,20} + \frac{FV}{1,30}$$

$$\therefore \frac{\$2000,00}{1,06} + \frac{\$2500,00}{1,16} = FV \times \left(\frac{1}{1,20} + \frac{1}{1,30} \right)$$

$$\therefore \$1.886,79 + \$2.115,17 = FV \times 1,6026$$

$$\therefore \$4.041,96 = FV \times 1,6026$$

$$\implies FV = \$2.522,13$$

Exemplo 2.8. Uma empresa deseja trocar compromissos de \$100.000,00 e \$120.000,00, a vencerem-se em dois e seis meses a partir de hoje, respectivamente, por um único título, vencível em quatro meses a partir de hoje. Qual deve ser o valor do novo compromisso, se a taxa de juros efetiva linear cobrada for de 3% ao mês?

Dados: $FV_1 = \$100.000,00$; $FV_2 = \$120.000,00$; $n_1 = 2$ meses; $n_2 = 6$ meses; $i = 3\%$ a.m..

Novo prazo: $n_{novo} = 4$.

Solução:

$$PV_1 + PV_2 = PV_{novo}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{FV_1}{1 + i \times n_1} + \frac{FV_2}{1 + i \times n_2} &= \frac{FV_{novo}}{1 + i \times n_{novo}} \\ \therefore \frac{\$100.000,00}{1 + 0,03 \times 2} + \frac{\$120.000,00}{1 + 0,03 \times 6} &= \frac{FV}{1 + 0,03 \times 4} \\ \therefore \frac{\$100.000,00}{1,06} + \frac{\$120.000,00}{1,18} &= \frac{FV}{1,12} \\ \therefore \$94.339,62 + \$101.694,92 &= FV \times 0,8929 \\ \therefore \$196.034,54 &= FV \times 0,8929 \\ \implies FV &= \$219.548,15 \end{aligned}$$

Exemplo 2.9. Vejamos, agora, um exemplo de cálculo dos juros, em uma operação com cheque especial, realizado por um determinado banco. Suponha que você tenha feito a seguinte movimentação em sua conta bancária:

Extrato				
Data	Histórico	D	C	Saldo
01/03/X2	Depósito em dinheiro		1.200	1.200
02/03/X2	Cheque 0300	1.600		400
08/03/X2	Cheque 0303	1.000		1.400
15/03/X2	Depósito em dinheiro		2.000	600
20/03/X2	Cheque 0308	2.500		1.900
25/03/X2	Cheque 0310	600		2.500
28/03/X2	Cheque 0315	800		3.300

De posse desses dados, como você faria para saber o valor dos juros que serão

debitados em sua conta corrente ao final do período? A taxa de juros cobrada pela instituição nessa linha de crédito é de 9% ao mês.

Solução:

Calculo da taxa diária:

$$i_d = \frac{i_m}{30} \therefore i_d = \frac{9\%}{30} \therefore i_d = 0,3\% \text{ a.d.} \therefore i_d = 0,003 \text{ a.d.}$$

Determinação dos juros devidos por saldo devedor:

$$J_1 = SDev_1 \times i \times n_1 \therefore J_1 = 400 \times 0,003 \times 6 \therefore J_1 = 7,20$$

$$J_2 = SDev_2 \times i \times n_2 \therefore J_2 = 1.400 \times 0,003 \times 7 \therefore J_2 = 29,40$$

$$J_3 = SDev_3 \times i \times n_3 \therefore J_3 = 1.900 \times 0,003 \times 5 \therefore J_3 = 28,50$$

$$J_4 = SDev_4 \times i \times n_4 \therefore J_4 = 2.500 \times 0,003 \times 3 \therefore J_4 = 22,50$$

$$J_5 = SDev_5 \times i \times n_5 \therefore J_5 = 3.300 \times 0,003 \times 4 \therefore J_5 = 39,60$$

Observação 2.10. O prazo associado ao saldo devedor de \$3.300,00 foi de 04 (quatro) dias por estarmos analisando uma operação ocorrida no mês de março, que contém trinta e um dias, e pelo fato dessa variável ser determinada com base no calendário civil.

Juros totais a serem pagos:

$$\begin{aligned} \text{Juros} &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \\ \therefore \text{Juros} &= 7,20 + 29,40 + 28,50 + 22,50 + 39,60 \\ \therefore \text{Juros} &= \$127,20. \end{aligned}$$

2.10. CÁLCULO DO IOF:

O cálculo do imposto sobre operações financeiras (IOF) referente a esse tipo de operação de crédito pode ser realizado da mesma forma que o cálculo

dos juros, bastando para tanto substituir a sua taxa de juros pela alíquota diária do imposto. Nesse caso, a taxa de 0,3% ao dia será substituída pelo valor 0,0082%, que representa a alíquota diária do IOF vigente. Assim,

$$IOF_1 = SDev_1 \times alíq. \times n_1 \therefore IOF_1 = 400 \times 0,000082 \times 6 \therefore IOF_1 = 2 \times 0,0984$$

$$IOF_2 = SDev_2 \times alíq. \times n_2 \therefore IOF_2 = 1.400 \times 0,000082 \times 7 \therefore IOF_2 = 2 \times 0,4018$$

$$IOF_3 = SDev_3 \times alíq. \times n_3 \therefore IOF_3 = 1.900 \times 0,000082 \times 5 \therefore IOF_3 = 2 \times 0,3895$$

$$IOF_4 = SDev_4 \times alíq. \times n_4 \therefore IOF_4 = 2.500 \times 0,000082 \times 3 \therefore IOF_4 = 2 \times 0,3075$$

$$IOF_5 = SDev_5 \times alíq. \times n_5 \therefore IOF_5 = 3.300 \times 0,000082 \times 4 \therefore IOF_5 = 2 \times 0,5412$$

$$IOF = IOF_1 + IOF_2 + IOF_3 + IOF_4 + IOF_5$$

$$\therefore IOF = 2 \times 0,0984 + 2 \times 0,4018 + 2 \times 0,3895 + 2 \times 0,3075 + 2 \times 0,5412$$

$$\therefore IOF = \$3,46.$$

Ao final do período deverão ser debitados em sua conta corrente, a título de pagamento de juros e IOF referentes à utilização de seu limite de cheque especial, os valores de \$127,20 e \$3,46, respectivamente.

JUROS COMPOSTOS

3.1. CONCEITO E UTILIZAÇÃO

No regime de capitalização a juros compostos, o cômputo dos juros é realizado, no primeiro período, multiplicando-se a taxa de juros pelo capital. A partir do segundo período, calculam-se os juros em cada período multiplicando a taxa de juros sobre o montante acumulado no fim de cada período imediatamente anterior (juros sobre juros). Os juros são incorporados, a cada período, a partir do montante acumulado no fim de cada período imediatamente anterior. Por conseguinte, o valor dos juros cresce exponencialmente com o passar dos períodos.

3.1.1. EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DO MONTANTE

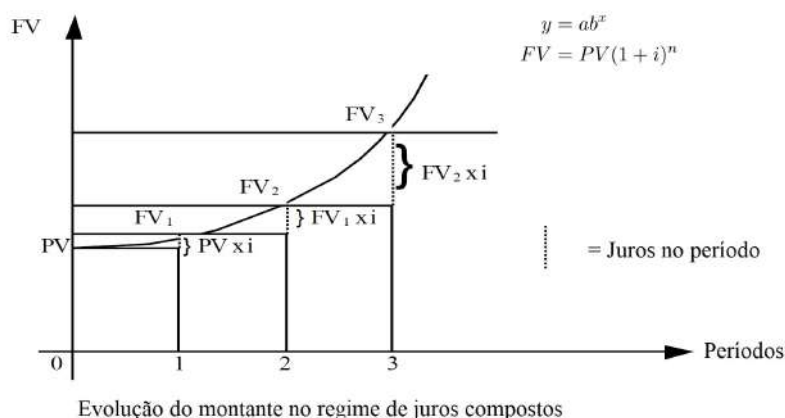
Seja um principal PV aplicado a juros compostos, à taxa de juros i .

$$\begin{aligned}FV_1 &= PV + PV \times i \therefore FV_1 = PV(1 + i) \\FV_2 &= FV_1 + FV_1 \times i \therefore FV_2 = FV_1(1 + i) \\ \therefore FV_2 &= PV(1 + i)(1 + i) \therefore FV_2 = PV(1 + i)^2 \\FV_3 &= FV_2 + FV_2 \times i \therefore FV_3 = FV_2(1 + i) \\ \therefore FV_3 &= PV(1 + i)^2(1 + i) \therefore FV_3 = PV(1 + i)^3\end{aligned}$$

Assim, pode-se deduzir que o valor futuro no n ésimo período será expresso por:

$$FV = PV(1 + i)^n$$

Apresentamos a seguir a representação gráfica da evolução do valor futuro de uma operação realizada no regime de juros compostos. Note-se que a evolução dos montantes ocorre segundo a equação de uma curva exponencial na forma de uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$ e primeiro termo igual a PV .



Exemplo 3.1. Tomou-se um empréstimo no valor de \$10.000,00 pelo prazo de três meses à taxa composta de 4% ao mês. Calcular o montante no final do terceiro mês.

Dados: $PV = \$10.000,00$; $i = 4\% \text{ a.m.}$; $n = 3 \text{ meses}$.

Solução:

$$FV_3 = PV(1 + i)^n = \$10.000,00(1 + 0,04)^3$$

$$\therefore FV_3 = \$11.248,64$$

3.1.2. EXPRESSÃO PARA CÁLCULO DO CAPITAL

Como $FV = PV(1+i)^n$, $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$ ou, alternativamente, $PV = FV(1+i)^{-n}$.

O termo $(1+i)^{-n}$ na expressão anterior é denominado fator de valor atual (de descapitalização ou de desconto composto).

Exemplo 3.2. Quanto se deve investir hoje para produzir \$517.900,00 em três meses no regime de juros compostos, a uma taxa de 1,15% ao mês?

Dados: $i = 1,15\% \text{ a.m.}; FV = \$517,900; n = 3 \text{ meses}.$

Solução:

$$PV = \$517.900,00 \times \frac{1}{(1+0,0115)^3} \therefore PV = \$500.435,66$$

3.1.3. EXPRESSÃO PARA CÁLCULO DOS JUROS A PARTIR DO CAPITAL

Como $FV = PV(1+i)^n$ e $FV = PV + J$

$$\therefore PV(1+i)^n - PV = J$$

$$\therefore J = PV[(1+i)^n - 1].$$

Exemplo 3.3. Qual deve ser o rendimento obtido na aplicação de \$1.000,00 durante dois meses no regime de juros compostos, à taxa de 1% ao mês?

Dados: $PV = \$1.000,00; i = 1\% \text{ a.m.}; n = 2 \text{ meses}.$

Solução:

$$J = \$1.000,00[(1+0,01)^2 - 1] \therefore J = \$20,10$$

3.1.4. EXPRESSÃO PARA CÁLCULO DO NÚMERO DE PERÍODOS

Como $FV = PV(1+i)^n \therefore \frac{FV}{PV} = (1+i)^n$, aplicando logaritmos niperianos nos dois membros da igualdade, tem-se:

$$\ln\left(\frac{FV}{PV}\right) = n \times \ln(1+i) \therefore n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1+i)}$$

Exemplo 3.4. Uma pessoa física aplicou \$15.000,00 à taxa composta de 30% ao ano, recebendo após algum tempo o montante de \$30.195,36. Durante quanto tempo o principal ficou aplicado? Expresse a resposta em fração de anos e em anos e número de meses.

Dados: $PV = \$15.000,00$; $i = 30\%$ a.a.; $FV = \$30.195,36$.

Solução

$$n = \frac{\ln\left(\frac{\$30.195,36}{\$15.000,00}\right)}{\ln(1 + 0,30)} \therefore n = 2,67 \text{ anos} \therefore n = 2 \text{ anos e } 8 \text{ meses.}$$

3.1.5. EXPRESSÃO PARA CÁLCULO DA TAXA DE JUROS

Como

$$\frac{FV}{PV} = (1 + i)^n \therefore \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} = 1 + i \implies i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

ou, alternativamente:

$$i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemplo 3.5. Você recebe uma proposta para investir hoje \$300.000,00 e receber \$321.596,29 dentro de cinco meses. Qual a taxa de rentabilidade mensal implícita nessa aplicação financeira, em termos de juros compostos?

Dados: $PV = \$300.000,00$; $FV = \$321.596,29$; $n = 5$ meses.

Solução:

$$i = \left(\frac{\$321.596,29}{\$300.000,00}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 \therefore i = 0,014 \text{ ou } 1,4\%$$

3.1.6. TAXAS DE JUROS EQUIVALENTES COMPOSTOS

Sejam duas taxas de juros i_n e i_k , existindo z períodos k no prazo n . Como já vimos, taxas equivalentes são aquelas que, ao serem aplicadas sobre

um mesmo principal PV , no mesmo prazo n expresso na unidade de tempo da taxa i_n , produzem o mesmo montante.

Assim, no regime de juros compostos, para que os montantes sejam iguais, as seguintes relações devem ser verdadeiras:

$$PV = (1 + i_n)^n = PV(1 + i_k)^{n \times z} \quad \therefore (1 + i_n)^n = (1 + i_k)^{n \times z}$$

$$\therefore i_n = (1 + i_k)^{\frac{1}{z}} - 1 \quad \text{e} \quad i_k = (1 + i_n)^z - 1$$

Logo, no regime de juros compostos, taxas equivalentes não são taxas proporcionais.

Exemplo 3.6. Qual a taxa anual equivalente, no regime de juros compostos, à taxa de 1,5% ao mês?

Dados: $i_k = 1,5\%$ a.m.; $z = 12$.

Solução:

$$i_n = (1 + 0,015)^{12} - 1 \quad \therefore i_n = 0,1956 \text{ a.a.} = 19,56\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 3.7. Qual a taxa mensal equivalente composta à taxa de 4% aos 40 dias?

Dados: $i_n = 4\%$ 40 dias; $z = 40/30$; $1/z = 30/40$.

Solução:

$$i_k = (1 + 0,04)^{30/40} - 1 \quad \therefore i_k = 0,0299 \text{ a.m.} = 2,99\% \text{ a.m.}$$

3.1.7. TRANSFORMAÇÃO DE TAXAS NOMINAIS EM TAXAS EFETIVAS

Nas fórmulas do regime de juros compostos, caso a taxa de juros apresentada seja nominal, deve-se primeiro encontrar a taxa efetiva relativa ao período de capitalização existente na referida taxa nominal, para então realizar, se necessário, a compatibilização das unidades de tempo. Assim sendo, para obter a taxa efetiva i_n e a taxa efetiva i_k correspondentes a uma dada taxa nominal i_n capitalizada ao período k , devemos utilizar o seguinte procedimento:

- a) a taxa efetiva i_k correspondente é a taxa que lhe seja proporcional:

$$i_k \text{ efetiva} = \frac{i_n \text{ nominal}}{Z}$$

b) a taxa efetiva i_n correspondente é a taxa equivalente composta da taxa i_k :

$$i_n \text{ efetiva} = (1 + i_k \text{ efetiva})^Z - 1 = \left(1 + \frac{i_n \text{ nominal}}{Z}\right) - 1$$

No mercado, quando se fala de taxas equivalentes, pressupõe-se que se esteja falando de equivalência segundo o regime de juros compostos, e dá-se também o nome de taxa efetiva à taxa que, efetivamente, será auferida na operação realizada, em contraste com a taxa nominal, também denominada taxa contratada (declarada) na operação.

Exemplo 3.8. A taxa de juros nominal cobrada por uma instituição financeira é de 12% *a.a.* Calcular a taxa efetiva anual, sabendo-se que o período de capitalização dos juros é: a) mensal; b) trimestral; c) semestral.

Dados: $i_n \text{ nominal} = 12\% \text{ a.a.}$; $k_1 = \text{mês}$; $z_1 = 12$; $k_2 = \text{trimestre}$; $z_2 = 4$; $k_3 = \text{semestre}$; $z_3 = 2$.

$$\text{a) } i_k \text{ efetiva} = \frac{0,12}{12} = 0,01 \quad \therefore i_n = (1 + 0,01)^{12} - 1 \quad \therefore i_n = 0,1268 = 12,68\% \text{ a.a.}$$

$$\text{b) } i_k \text{ efetiva} = \frac{0,12}{4} = 0,03 \quad \therefore i_n = (1 + 0,03)^4 - 1 \quad \therefore i_n = 0,1255 = 12,55\% \text{ a.a.}$$

$$\text{c) } i_k \text{ efetiva} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \quad \therefore i_n = (1 + 0,06)^2 - 1 \quad \therefore i_n = 0,1236 = 12,36\% \text{ a.a.}$$

Como se pode constatar nos exemplos apresentados, uma taxa de juros efetiva i_n é sempre maior do que a correspondente taxa de juros nominal i_n capitalizada ao período k , sendo a diferença entre essas taxas tanto maior quanto maiores forem o número de períodos de capitalização e o valor da taxa nominal.

3.1.8. TRANSFORMAÇÃO DE TAXAS EFETIVAS EM NOMINAIS

Embora taxas nominais não possam ser utilizadas diretamente nas fórmulas desenvolvidas, é importante, para fins de comparação das taxas apresentadas

no mercado financeiro, saber qual taxa nominal i_n capitalizada o período k equivale a uma dada taxa efetiva i_n . Para tanto procede-se de maneira inversa àquela mostrada anteriormente. Assim, a taxa nominal i_n correspondente é a taxa que é proporcional à taxa efetiva i_k :

$$i_n \text{ nominal} = z \times \text{efetiva} = z[(1 + i_n \text{ efetiva})^{1/z} - 1]$$

Exemplo 3.9. Que taxa nominal anual equivale a uma taxa efetiva de 29% ao ano, considerando capitalização mensal?

Dados: $n = 1$ mês; $z = 12$; i_n efetiva = 29% a.a.

Solução:

$$\begin{aligned} i_n \text{ nominal} &= 12[(1 + 0,29 \text{ efetiva})^{1/12} - 1] \\ \therefore i &= 0,2574 = 25,74\% \text{ a.a. nominal mensal.} \end{aligned}$$

3.1.9. CAPITAIS EQUIVALENTES

Como você viu no primeiro capítulo, a relação fundamental de equivalência de capitais para um período é expressa pelas seguintes equações:

$$FV = PV \times (1 + i) \quad \text{e} \quad PV = \frac{FV}{1+i}.$$

No regime dos juros compostos, essas equações de equivalência de capitais, considerando n períodos, são:

$$FV = PV \times (1 + i)^n \quad \text{e} \quad PV = \frac{FV}{(1+i)^n}.$$

Através dessas relações, e uma vez definida uma data de referência para contagem do tempo, é que se pode estabelecer a troca de dois ou mais capitais, de forma que eles sejam *equivalentes financeiramente*. Observe-se que não há ganho nem perda para nenhuma das partes, apenas um eventual interesse na troca temporal das datas de cumprimento dos compromissos. Como vimos, a data de referência é também denominada data focal, de comparação ou de avaliação. Os capitais envolvidos chamam-se também *compromissos* ou *obrigações*.

É importante ressaltar que, no regime de juros compostos, ao aplicar-se um capital PV a uma taxa i , o montante obtido após n períodos de capitalização é igual àquele resultante da aplicação do mesmo capital pelo prazo n_1 e depois pelo prazo n_2 , sendo $n = n_1 + n_2$. Isto é:

$$PV(1+i)^n = PV(1+i)^{n_1} \times (1+i)^{n_2} = PV(1+i)^{n_1+n_2}.$$

Portanto, o regime de juros compostos é separável (cindível) no prazo. Assim, nesse regime, a equivalência financeira entre conjuntos de capitais é independente da data focal, o que faz com que conjuntos de capitais equivalentes numa certa data focal também o sejam em data distinta. Dado, então, um conjunto de capitais que constitua a obrigação original assumida, o problema é encontrar o conjunto de capitais que constitua o compromisso proposto, uma vez definida a taxa de juros efetiva cobrada. O estabelecimento da igualdade dos dois conjuntos denomina-se equação (de determinação) de valor.

Exemplo 3.10. Uma empresa tem compromissos de \$2.000,00 e de \$2.500,00 a vencerem-se de hoje a três e oito meses, respectivamente. Seu gerente financeiro propõe à empresa credora a troca desses compromissos por outros dois que lhe sejam equivalentes, a vencerem-se de hoje a 10 e 15 meses, respectivamente. Considere que a taxa de juros efetiva cobrada é de 10% ao mês e que as obrigações equivalentes devem ter valores iguais. Qual deve ser o valor único dessas obrigações?

Dados: $FV_1 = \$2.000,00$; $FV_2 = \$2.500,00$; $n_1 = 3$; $n_2 = 8$; $n_3 = 10$; $n_4 = 15$; $i = 10\%$ a.m.

Solução: Equação de valor (tomando a data de hoje como a de comparação):

$$\begin{aligned}
 \frac{\$2.000,00}{(1+0,10)^3} + \frac{\$2.500,00}{(1+0,10)^8} &= \frac{FV}{(1+0,10)^{10}} + \frac{FV}{(1+0,10)^{15}} \quad \therefore \\
 \frac{\$2.000,00}{1,331} + \frac{\$2.500,00}{2,143589} &= \frac{FV}{2,593742} + \frac{FV}{4,177248} \\
 &= FV \times \left(\frac{1}{2,593742} + \frac{1}{4,177248} \right) \quad \therefore \\
 \$2.668,90 &= FV \times (0,385543 + 0,239392) \\
 &= FV \times 0,624935 \quad \therefore \\
 FV &= \$4.270,68
 \end{aligned}$$

3.1.10. OPERAÇÕES COM TAXAS COMPOSTAS PÓS-FIXADAS

Considerando que o comportamento da indexação ao longo do tempo é exponencial, e que nos n períodos as taxas de correção monetária (cm) tenham sido iguais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 FV &= PV \times (1+i)^n \quad \therefore \\
 FV &= PV \times (1+r)^n \times (1+cm)^n \quad \therefore \\
 FV &= PV \times ((1+r) \times (1+cm))^n
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.11. Calcular o montante relativo a \$2.500,00, aplicados a juros compostos no fim de 12 meses, supondo-se uma taxa de correção monetária constante de 2% ao mês, de modo a garantir à operação uma rentabilidade real de 1% ao mês.

Dados: \$2.500,00; $n = 12$ meses; $cm = 2\%$ a.m.; $r = 1\%$ a.m.

Solução:

$$\begin{aligned}
 FV &= PV \times (1+r)^n \times (1+cm)^n \quad \therefore \\
 FV &= \$2.500,00 \times (1+0,01)^{12} \times (1+0,02)^{12} \quad \therefore \\
 FV &= \$3.572,72
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.12. Você aplicou \$2.000,00 durante três meses a uma taxa real da operação de 0,5% ao mês. Qual deve ser o montante gerado pela aplicação, sabendo-se que os valores assumidos para a taxa de variação do indexador utilizado para cada mês são iguais a 1,46%, 1,96% e 1,87%, respectivamente?
Dados: $r = 0,5\%$; $cm_1 = 1,46\%$; $cm_2 = 1,96\%$; $cm_3 = 1,87\%$; $n = 3$ meses.

Solução:

$$FV = \$2.000,00 \times (1 + 0,005)^3 \times (1 + 0,0146) \times (1 + 0,0187) \therefore$$

$$FV = \$2.139,44$$

Exemplo 3.13. Calcular o valor do pagamento final de um empréstimo no valor de \$100.000,00 pelo prazo de 31 dias, sabendo-se que o credor cobrou uma taxa de juros composta de 12% ao ano mais a variação monetária determinada por certo indexador. Suponha que a taxa de atualização monetária desse período tenha sido de 1%.

Dados: $PV = \$100.000,00$; $n = 31$ dias; $cm = 1\%$; $r = 12\%$ a.m.

$$FV = \$100.000,00 \times (1 + 0,01)^3 \times (1 + 0,012)^{31/360} \therefore$$

$$FV = \$101.990,47$$

3.1.11. JUROS COMPOSTOS NA CALCULADORA *HP-12C*

Os cálculos financeiros na HP-12C podem ser realizados de duas formas diferentes. Na primeira utilizam-se diretamente as teclas dos registradores financeiros. Na segunda utilizam-se as funções matemáticas da calculadora, sendo necessário conhecer as expressões das fórmulas dos regimes de capitalização.

A utilização dos registradores financeiros permite não só aplicar diretamente as fórmulas apresentadas, mas também efetuar cálculos de forma rápida e segura, desde que se saiba o que eles representam. Para operar corretamente

a calculadora é necessário seguir a simbologia do fluxo de caixa, introduzindo com o sinal negativo todas as saídas de caixa. Em geral adota-se o seguinte procedimento:

- a) apague o conteúdo dos registradores financeiros pressionando $f\ FIN$;
- b) introduza as variáveis conhecidas (no mínimo três) teclando CHS quando a variável representar uma saída de caixa.

Variável	Funções	Visor
Prazo	n	Compatível com i
Taxa	i	Na forma percentual
Capital	PV	Usar CHS se necessário
Prestação	PMT	Usar CHS se necessário
Montante	FV	Usar CHS se necessário

- c) pressione a tecla correspondente à variável cujo valor deseja encontrar.

Vale observar que, até o item de seqüências de rendas certas, você utilizará sempre o valor zero para a tecla PMT .

Sempre que a variável a ser calculada é o prazo, a $HP-12C$ arredonda o valor obtido para o número inteiro imediatamente inferior quando a parte fracionada de n é menor do que 0,005. Caso contrário, arredonda o valor para o inteiro imediatamente superior. Um meio de evitar o arredondamento é utilizar a fórmula apresentada para n .

No processo de compatibilização entre as unidades de tempo do prazo e da taxa de juros no regime de capitalização a juros simples, uma forma rápida de calcular e armazenar no registrador financeiro i a taxa proporcional (equivalente simples) mensal a uma dada taxa de juros anual é introduzir essa taxa e, a seguir, pressionar $g\ 12\div$. A compatibilização pode ser feita para os dois regimes de capitalização, fornecendo o prazo em anos e pressionando $g\ 12\times$, de modo que o prazo em meses fique armazenado no registrador financeiro n .

Exemplo 3.14. Você recebe uma proposta para investir hoje \$300.000,00 e receber \$309.067,00 dentro de dois meses. Qual a taxa (efetiva) composta de

rentabilidade mensal implícita nessa aplicação financeira?

Dados: $PV = \$300.000,00$; $FV = \$309.067,50$; $n = 2$ meses.

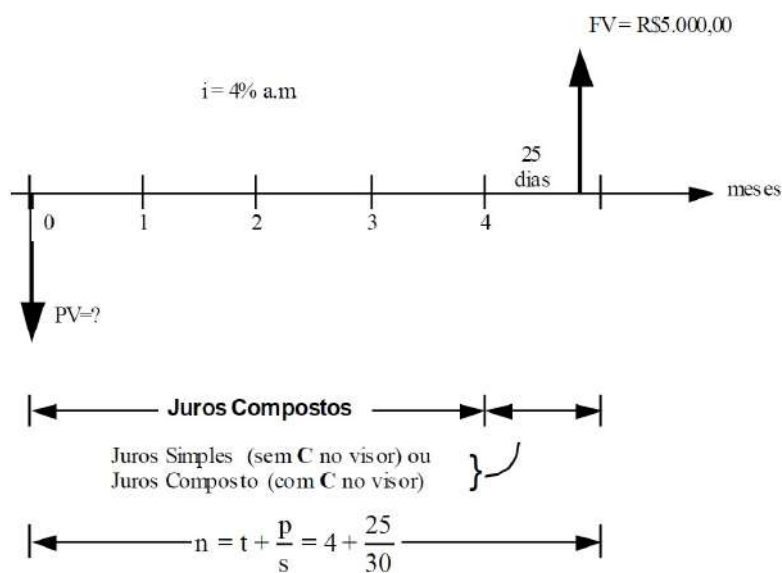
Solução:

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
	f <i>FIN</i>	0,00	Apaga o conteúdo dos registradores financeiros
\$300.000,00	<i>CHS</i> <i>PV</i>	-300.000,00	Armazena o capital aplicado
\$309.067,00		309.067,00	Armazena o montante recebido
2		2,00	Armazena o prazo em meses
		1,50	Obtém taxa de juros mensal expressa em %

ou

Dados	Tecla/Função	Visor	Comentários
\$309.067,00	<i>ENTER</i>	309.067,00	<i>FV</i>
\$300.000,00		300.000,00	<i>PV</i>
	÷	1,03	$FV \div PV$
2		2,00	Número de períodos
	$1/x$	0,50	Expoente $1/n$ da raiz
	y^x	1,01	Raiz de $1/n$ de $FV \div PV$
1		1,00	Subtrai 1 da raiz
	-	0,01	i na forma unitária
100	×	1,50	i na forma percentual

Exemplo 3.15. Calcular o valor atual do fluxo de caixa apresentado a seguir, para uma taxa efetiva composta de 4% a.m.



Dados: $FV = \$5.000,00$; $i = 4\% \text{ a.m.}$; $n = 25 \text{ dias}$.

Solução: Colocar a letra *C* no visor. Nesse caso, os cálculos são feitos a juros compostos em todos os períodos, inclusive no período fracionado, à direita de $n = 4$. Para o fluxo de caixa do exemplo, tem-se:

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
	<i>STO EEX</i>	0,000 c	Usa juros compostos
0	<i>PMT</i>	0,000	Não existem operações
25	<i>ENTER</i>	25,000	Prazo fracionado em dias
30	÷	0,833	Fração do mês
4	+ <i>n</i>	4,833	Armazena prazo fracionário
4	<i>i</i>	4,000	Armazena taxa de juros mensal
5.000	<i>CHS FV</i>	-5.000,000	Armazena montante operação
	<i>PV</i>	4.136,59	Valor atual da operação

Alternativamente, lançando mão da fórmula, tem-se:

$$PV = \frac{FV}{(1+0,04)^{4+(25/30)}}$$

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
145	<i>ENTER</i>	145,0000	Prazo fracionado em dias
30	÷	4,8333	Prazo fracionado em meses
1,04	<i>y^x</i>	1,2087	Inverso do fator do valor atual a juros compostos
5.000	÷	4.136,59	Valor presente

Como se vê, esse resultado coincide com o anteriormente obtido.

Exemplo 3.16. Calcular o pagamento final de um empréstimo no valor de \$40.000,00 pelo prazo de 32 dias à taxa composta de 28% ao ano.

Dados: $PV = \$40.000,00$; $i = 28\%$ a.a.; $n = 32$ dias. Usar 32/360 no n

Solução:

$$FV = \$40.000 \times (1 + 0,28)^{32/360} \therefore FV = \$40.887,43$$

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
	f <i>FIN</i>	0,00000	Apaga registros financeiros
32	<i>ENTER</i>	32,00000	Prazo em dias
360	÷ <i>n</i>	0,08889	Armazena o prazo fracionado
	<i>i</i>	28,00000	Armazena a taxa de juros anual
28	<i>CHS</i> <i>PV</i>	-40.000,000	Valor do capital
40.000	<i>FV</i>	40.887,43	Valor futuro

Exemplo 3.17. Calcular o valor presente de um título de valor de resgate de \$56.000,00, a vencer-se daqui a 91 dias, à taxa composta de 23% ao ano.

Dados: $FV = \$56.000,00$; $i = 23\%$ a.a.; $n = 91$ dias. Usar 91/360 no n .

Solução:

$$PV = \$56.000 \times \left[\frac{FV}{(1+0,23)^{91/360}} \right] \therefore PV = \$53.144,95$$

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
	f <i>FIN</i>	0,00000	Apaga registros financeiros
91	<i>ENTER</i>	91,00000	Prazo em dias
360	÷	0,25278	Fração do ano
	<i>n</i>	0,25278	Armazena o prazo fracionado
23	<i>i</i>	23,00000	Armazena a taxa de juros anual
56.000	<i>CHS</i> <i>FV</i>	-56.000,000	Valor do montante da operação
	<i>PV</i>	53.144,95	Valor presente da operação

Exemplo 3.18. Calcular o valor futuro de um investimento no valor de \$25.000,00 à taxa composta de 1,8% ao mês no final de 122 dias.

Dados: $PV = \$25.000,00$; $i = 1,8\%$ a.m.; $n = 122$ dias. Usar $122/30$ no n .

Solução:

$$FV = \$25.000,00 \times (1 + 0,018)^{122/30} \therefore FV = \$26.881,14$$

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
	f <i>FIN</i>	0,000	Apaga registros financeiros
122	<i>ENTER</i>	122,000	Prazo em dias
30	÷	4,067	Fração em meses
	<i>n</i>	4,067	Armazena o prazo fracionado
1,8	<i>i</i>	1,800	Armazena a taxa de juros mensal
25.000	<i>CHS</i> <i>PV</i>	-25.000,00	Valor presente da operação
	<i>FV</i>	26.881,14	Valor futuro da operação

Exemplo 3.19. Um cliente tomou um empréstimo no valor de \$18.000,00 e pagou, após 20 dias, \$18.224,53. Calcular a taxa composta anual da operação.
Dados: $PV = \$18.000,00$; $FV = \$18.224,53$; $n = 20$ dias. Usar 20/360 no n .

Solução:

$$\$18.224,53 = \$18.000,00 \times (1 + i)^{20/360} \therefore i = 25\% \text{ a.a.}$$

Dados	Tecla / Função	Visor	Comentários
	f FIN	0,00000	Apaga registros financeiros
20	ENTER	20,00000	Prazo em dias
360	÷	0,05556	Fração do ano
	n	0,05556	Armazena o prazo fracionado
18.000	PV	18.000,00	Valor presente
18.224,53	CHS FV	-18.224,53	Valor do montante da operação
	i	26.881,14	Taxa anual da operação

Exemplo 3.20. Calcular o valor do montante de um empréstimo no valor de \$100.000,00 pelo prazo de 31 dias, sabendo-se que o credor cobrou uma taxa de juros composta de 12% ao ano mais a correção monetária determinada por um dado indexador. Suponha que a correção monetária desse período tenha sido de 1%.

Dados: $PV = \$100.000,00$; $n = 31$ dias. Usar 31/360 no n ; $cm = 1\%$; $r = 12\% \text{ a.a.}$; $(1 + cm) = 1,01$.

Solução:

$$FV = \$100.000,00 \times (1 + 0,01) \times (1 + 0,12)^{31/360} \therefore FV = \$101.990,47$$

Dados	Tecla / Função	Viseira	Comentários
100.000,00	<i>ENTER</i>	100.000,00	Valor do empréstimo
1,01	×	1.000,00	Produto do empréstimo pelo fator de atualização monetária
1,12	<i>ENTER</i>	1,12	Fator da taxa de juros
31	<i>ENTER</i>	31,00	Prazo em dias
360	÷	0,09	Fração do prazo
	y^x	101	Exponencia o fator da taxa de juros
	×	101.990,47	Montante da operação

3.2. DESCONTOS SIMPLES E COMPOSTOS

Entende-se por valor nominal o valor de resgate, ou seja, o valor definido para um título em sua data de vencimento. Representa, em outras palavras, o próprio montante da operação.

A operação de se liquidar um título antes de seu vencimento envolve geralmente uma recompensa, ou um desconto pelo pagamento antecipado. Desta maneira, desconto pode ser entendido como a diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor atualizado apurado n períodos antes de seu vencimento. Por outro lado, valor descontado de um título é o seu valor atual na data do desconto, sendo determinado pela diferença entre o valor nominal e o descontado, ou seja:

$$\text{Valor Descontado} = \text{Valor Nominal} - \text{Desconto}$$

As operações de desconto podem ser realizadas tanto sob o regime de juros simples como no de juros compostos. O uso do desconto simples é amplamente

adotado em operações de curto prazo, restringindo-se o desconto composto para as operações de longo prazo. Tanto no regime linear como no composto, ainda são identificados dois tipos de desconto:

- (a) desconto “por dentro” ou racional e;
- (b) desconto “por fora” ou bancário, ou comercial.

3.2.1. DESCONTO SIMPLES

Conforme foi salientado, são identificados dois tipos de desconto simples: o desconto “por dentro” (ou racional) e o desconto “por fora” (ou bancário, ou comercial).

Desconto racional (ou "por dentro")

O desconto racional, também denominado de desconto “por dentro”, incorpora os conceitos e relações básicas de juros simples, conforme desenvolvidas no primeiro capítulo.

Assim, sendo D_R o valor do desconto racional, A o capital (ou valor atual), d a taxa periódica de juros e n o prazo do desconto (número de períodos que o título é negociado antes de seu vencimento), têm-se a conhecida expressão de juros simples.

$$D_R = A \times d \times n$$

Pela própria definição de desconto e introduzindo-se o conceito de valor descontado no lugar de capital no cálculo do desconto, tem-se:

$$D_R = N - A$$

sendo N o valor nominal (ou valor de resgate, ou montante) e A o valor descontado racional (ou valor atual) na data da operação.

Como: $N = A \times (1d_n)$, então

$$D_n = \frac{N \times d \times n}{1 + d \times n}$$

A partir desta fórmula é possível calcular o valor do desconto racional obtido de determinado valor nominal N a uma dada taxa de desconto simples d e a um determinado prazo de antecipação n .

Já o valor descontado, conforme definição apresentada, é obtido pela seguinte expressão de cálculo:

$$A = \frac{N}{1+d \times n}$$

Observe, uma vez mais, que o desconto racional representa exatamente as relações de juros simples descritas no capítulo inicial. É importante registrar que o juro incide sobre o capital (valor atual) do título, ou seja, sobre o capital liberado da operação.

Exemplo 3.21. Seja um título de valor nominal de \$4.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% *a.a.* a taxa nominal de juros corrente, pede-se calcular o desconto e o valor descontado desta operação.

Solução:

$$D_R = \frac{4.000 \times 0,035 \times 3}{1 + 0,035 \times 3} = \$380,10$$

$$A = N = D_n \implies 4.000,00 - 380,10 = \$3.619,90$$

Do ponto de vista do devedor, \$380,10 representam o valor que está deixando de pagar por saldar a dívida antecipadamente (3 meses antes de seu vencimento). O valor líquido do pagamento (valor descontado) é de \$3.619,90.

Desconto comercial (ou "por fora")

Este tipo de desconto, simplificada por incidir sobre o valor nominal (valor de resgate) do título, proporciona maior volume de encargos financeiros efetivos nas operações. Observe que, ao contrário do desconto "por dentro", que calcula os encargos sobre o capital efetivamente liberado na operação, ou

seja, sobre o valor presente, o critério “por fora” apura o desconto sobre o montante, indicando custos adicionais ao tomador de recursos. A modalidade de desconto “por fora” é amplamente adotada pelo mercado, notadamente em operações de crédito bancário e comercial a curto prazo.

O valor deste desconto, genericamente denominado de desconto comercial ou “por fora” D_C no regime de juros simples é determinado pelo produto do valor nominal do título N , da taxa de desconto periódica “por fora” contratada na operação d e do prazo de antecipação definido para o desconto n . Isto é:

$$D_C = N \times d \times n$$

O valor descontado “por fora” A , aplicando-se a definição, é obtido:

$$\begin{aligned} A &= N - D_C \\ A &= N - N \times d \times n \\ A &= N \times (1 - d \times n) \end{aligned}$$

Para melhor avaliar as diferenças dos tipos de descontos, são desenvolvidos os mesmos exemplos utilizados anteriormente no desconto racional.

Exemplo 3.22. Seja um título de valor nominal de \$4.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado antes de seu vencimento. Sendo de 42% *a.a.* a taxa de desconto adotada, pede-se calcular o desconto e o valor descontado desta operação.

Solução:

$$\begin{aligned} D_R &= N \times d \times n \\ \implies D_R &= 4.000,00 \times 0,035 \times 3 = \$420,00 \end{aligned}$$

Observe que o maior valor dos juros cobrado pelo título deve-se ao fato, conforme ressaltado anteriormente, de o desconto “por fora” ser aplicado diretamente sobre o valor nominal (valor de resgate) e não sobre o valor atual como é característico das operações de desconto racional.

Exemplo 3.23. Determinar a taxa de desconto “por fora” de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a \$26.000,00 e o valor atual na data do desconto de \$24.436,10.

Solução:

$$\begin{aligned}D_R &= N \times d \times n \\ \implies D_R &= 26.000,00 - 24.436,10 = 26.000,00 \times d \times 2 \\ \implies d &= 3\% \text{ a.m}\end{aligned}$$

3.3. DESPESAS BANCÁRIAS

É importante registrar que em operações de desconto com bancos comerciais são geralmente cobradas taxas adicionais de desconto a pretexto de cobrir certas despesas administrativas e operacionais incorridas pela instituição financeira. Estas taxas são geralmente prefixadas e incidem sobre o valor nominal do título uma única vez no momento do desconto.

A formulação do desconto comercial apresenta-se, conforme demonstrada anteriormente:

$$D_C = N \times d \times n$$

Chamando de t a taxa administrativa cobrada pelos bancos em suas operações de desconto e incluindo esta taxa na formulação, tem-se:

$$\begin{aligned}D_C &= (N \times d \times n) + (t \times N) \\ D_C &= N(d \times n + t)\end{aligned}$$

De forma análoga, o valor descontado A incluindo a cobrança da taxa administrativa t , é apurado da forma seguinte:

$$\begin{aligned}A &= N - D_C \\A &= N - N(d \times n + t) \\A &= N \times [1 - (D \times N + T)]\end{aligned}$$

3.3.1. TAXA IMPLÍCITA DE JUROS DO DESCONTO COMERCIAL SIMPLES

Conforme foi introduzido nos exemplos ilustrativos apresentados no item anterior, o desconto “por fora”, ao ser apurado sobre o valor nominal (resgate) do título, admite implicitamente uma taxa de juros superior àquela declarada para a operação.

Por exemplo, suponha um título de valor nominal de \$50.000,00 descontado num banco um mês antes de seu vencimento à taxa de 5% ao mês. Aplicando-se o critério de desconto “por fora”, como é típico destas operações, teremos:

$$\begin{aligned}A &= \$47.500,00 \\N &= \$50.000,00 \\D_C &= \$2.500,00\end{aligned}$$

Observe que a taxa de juros adotada de 5% ao mês aplicada sobre o valor atual A não iguala ao valor nominal N em nenhum momento do tempo. Ou seja, esta taxa, se aplicada ao valor atual de \$47.500,00, não produz, para o período de um mês, o montante de \$50.000,00 (produz apenas \$47.500,00 + $0,05 \times \$47.500,00 = \$49.875,00$).

Logo, há uma taxa implícita de juros na operação, superior aos declarados 5% ao mês, que conduz o valor atual A e o valor nominal N a um mesmo resultado no período. Esta taxa é obtida pelo critério de desconto racional (juros “por dentro”) conforme definido.

Chamando de i a taxa de juros implícita ou real da operação, tem-se que, no exemplo acima, calcula-se esta taxa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}50.000,00 &= 47.500,00 \times (1 + i \times 1) \\ \therefore i &= 5,26\% \text{ a.m.}\end{aligned}$$

Se ao invés de 1 mês, a operação fosse de 2 meses, teríamos:

$$\begin{aligned}50.000,00 &= 45.000,00 \times (1 + i \times 1) \\ \therefore i &= 11,1\% \text{ a.b.}\end{aligned}$$

Os cálculos de apuração da taxa racional de juros podem ser substituídos pelo emprego direto da seguinte fórmula:

$$i = \frac{d \times n}{1 - d \times n}$$

Assim, para obtenção da taxa implícita i da operação mencionada acima, basta conhecer a taxa de desconto comercial ou “por fora” e o prazo de desconto. Aplicando-se esta fórmula nos exemplos anteriores:

$$\begin{aligned}n = 1 \text{ mês} \therefore i &= \frac{0,05}{1 - 0,05 \times 1} \therefore i = 5,26\% \text{ a.m.} \\ n = 2 \text{ meses} \therefore i &= \frac{0,05 \times 2}{1 - 0,05 \times 2} \therefore i = 11,1\% \text{ a.b.}\end{aligned}$$

Deve ser ressaltado que essas taxas mensais são representativas do regime de juros simples. Para cálculos mais rigorosos é necessário, conforme foi discutido em capítulos anteriores, adotar o regime de juros compostos.

Para o desconto de um mês, a taxa implícita mensal de 5,26% ao mês está correta. Lembre-se que, para um único período, os dois regimes de capitalização produzem o mesmo resultado. No entanto, para um desconto de dois meses, a taxa mensal não é de 5,56%, resultado da média aritmética da taxa bimestral de 11,1%. Nas operações com mais de um período, é necessário sempre trabalhar com juros compostos, ou seja:

$$\text{Taxa mensal implícita} = (1,111)^{1/2} - 1 = 5,4\% \text{ a.m.}$$

3.3.2. TAXA EFETIVA DE JUROS

A taxa implícita de juros calculada para todo o período da operação é adequada para a matemática financeira, permitindo comparações em idênticas condições de prazo. No entanto, quando os prazos dos descontos não forem os mesmos, o regime de juros simples não é adequado tecnicamente para esta análise. Ficou esclarecido também no capítulo anterior a nítida superioridade técnica do regime composto para o cálculo da taxa de juros de um fluxo de caixa.

Desta maneira, a taxa efetiva de juros de um desconto “por fora” apurado à taxa d é definida pela aplicação do conceito de taxa interna de retorno, conforme exposta no capítulo anterior. Em outras palavras, a taxa efetiva conceitualmente é aquela obtida pelo critério de capitalização composta.

A taxa equivalente mensal obtida pelo regime de juros compostos é interpretada como a taxa efetiva de operação.

Em verdade, é a própria taxa interna de juros da operação, ou seja, a taxa de juros, que iguala, num único momento, entradas com saídas de caixa.

O prazo e a taxa efetiva nas operações de desconto comercial simples

As características de apuração do desconto “por fora”, convencionalmente obtido a partir do valor de resgate do título, pode apresentar certos resultados bastante estranhos.

Inicialmente, coloca-se a situação de uma operação de desconto comercial (ou bancário) apresentando um prazo longo. Dependendo do produto “taxa de desconto x prazo de desconto” a que se chega, pode-se concluir pela existência de um valor descontado negativo. Ou seja, o proprietário do título, além de não receber recurso algum pelo desconto, deve ainda desembolsar certa quantia no ato da operação.

Por exemplo, seja o caso de um empréstimo de \$30.000,00 concedido através de desconto comercial simples de uma nota promissória 18 meses antes de seu vencimento. Sendo de 6% ao mês a taxa de juros simples considerada, tem-se o seguinte valor descontado:

$$A = 30.000 \times [1 - (0,06 \times 18)] = -\$2.400,00$$

Neste caso hipotético, o detentor do título não recebe nada pela operação e ainda tem que desembolsar a quantia de \$2.400,00. Em outras palavras, os encargos financeiros (desconto) da operação são de \$2.400,00 maiores que o valor descontado. Como, por convenção, os encargos são descontados no ato da operação, o proprietário do título nada recebe pelo desconto realizado. Ao contrário, deve ele ainda pagar uma quantia equivalente ao saldo negativo do valor descontado apurado.

Para que este resultado absurdo não venha a ocorrer, é necessário que as condições de prazo e taxa de desconto sejam definidas da forma seguinte:

$$d \times n < 1$$

3.4. DESCONTO COMPOSTO

O desconto composto, utilizado basicamente em operações de longo prazo, pode ser identificado, igualmente ao desconto simples, em dois tipos: o desconto racional ou “por dentro” e o desconto comercial ou “por fora”.

O desconto composto “por fora” é raramente empregado no Brasil, não apresentando uso prático. O desconto composto “por dentro” envolve o valor atual e valor nominal de um título capitalizado segundo o regime de juros compostos, apresentando, portanto, larga aplicação prática.

3.4.1. DESCONTO COMERCIAL COMPOSTO

O desconto composto “por fora” caracteriza-se pela incidência sucessiva da taxa de desconto sobre o valor nominal do título, o qual é deduzido, em cada período, dos descontos obtidos em períodos anteriores. A fórmula de cálculo do valor atual A no desconto comercial composto é:

$$A = N \times (1 - d)^n$$

Consequentemente, o desconto comercial é calculado da seguinte maneira:

$$D_C = N \times [1 - (1 - d)^n]$$

Exemplo 3.24. Um título de valor nominal de \$35.000,00 é negociado através de uma operação de desconto composto “por fora” 3 meses antes de seu vencimento. A taxa de desconto adotada atinge 5% ao mês. Pede-se determinar o valor atual, o desconto e a taxa de juros efetiva da operação.

Solução:

$$A = 35.000,00 \times 1 - 0,05^3 = \$30.008,12$$

$$D = 35.000,00 - 30.008,12 = \$4.991,88$$

$$i = 35.000,00^{1/3} - 1 = 5,26\% \text{ a.m.}$$

3.4.2. DESCONTO RACIONAL COMPOSTO

Conforme comentado, o desconto racional composto ou “por dentro” é aquele estabelecido segundo as conhecidas relações do regime de juros compostos. Assim sendo, o valor descontado racional equivale ao valor presente de juros compostos, conforme apresentado anteriormente, ou seja:

$$D_R = \frac{N}{1+d^m}$$

Por outro lado, sabe-se que o desconto é obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual. Logo, o desconto racional tem a seguinte expressão de cálculo:

$$D_R = N \times [1 - (1 + d)^{-n}]$$

Por exemplo, suponha que uma pessoa deseja descontar uma nota promissória 3 meses antes de seu vencimento. O valor nominal deste título é de \$50.000,00. Sendo de 4,5% ao mês a taxa de desconto racional, o valor líquido recebido (valor atual) pela pessoa na operação será de:

$$A = \frac{50.000,00}{1+0,045)^3}$$

O valor do desconto racional será de:

$$D_R = 50.000,00 - 43.814,83 = \$6.185,17.$$

FLUXOS DE CAIXA

Um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos ou de recebimentos que se estima ocorrer em determinado intervalo de tempo.

É bastante comum, na prática, defrontar-se com operações financeiras que se representam por um fluxo de caixa. Por exemplo, empréstimos e financiamentos de diferentes tipos costumam envolver uma seqüência de desembolsos periódicos de caixa. De maneira idêntica, têm-se os fluxos de pagamentos/recebimentos de aluguéis, prestações oriundas de compras a prazo, de investimentos empresariais, de dividendos etc.

Os fluxos de caixa podem ser verificados das mais variadas formas e tipos em termos de períodos de ocorrência (postecipados, antecipados ou diferidos), de periodicidade (períodos iguais entre si ou diferentes), de duração (limitados ou indeferidos) e de valores (constantes ou variáveis).

Com o intuito de melhor estudar as formulações e aplicações práticas do fluxo de caixa, como um dos mais importantes temas da Matemática Financeira, o assunto será tratado separadamente. A primeira parte do capítulo dedica-se ao estudo do fluxo de caixa uniforme, o qual apresenta uma característica de formação-padrão. É entendido como modelo-padrão de uma sucessão de pagamentos ou de recebimentos. A seqüência do capítulo dedica-se às demais classificações dos fluxos de caixa, definidas como não convencionais.

Os termos dos fluxos de caixa são genericamente simbolizados por PMT , sendo para as demais variáveis empregada a mesma simbologia adotada nos capítulos anteriores (PV , FV , n , i).

1. *Período de ocorrência:* postecipatos, antecipados e diferidos.

2. *Periodicidade*: periódicos e não periódicos.
3. *Duração*: limitados(finitos) e indeterminados(Indefinidos).
4. *Constantes*: variáveis.

O modelo-padrão de um fluxo de caixa, conforme grifado no esquema acima, é verificado quando os termos de uma sucessão de pagamentos ou recebimentos apresentam, ao mesmo tempo, as seguintes classificações:

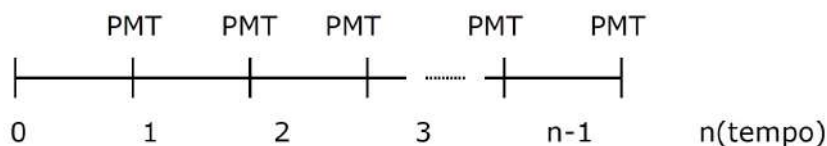
a) **Postecipados** – indica que os fluxos de pagamentos ou recebimentos começam a ocorrer ao final do primeiro intervalo de tempo. Por exemplo, não havendo carência, a prestação inicial de um financiamento é paga ao final do primeiro período do prazo contratado, vencendo as demais em intervalos seqüenciais.

b) **Limitados** – o prazo total do fluxo de caixa é conhecido a priori, sendo finito o número de termos (pagamentos e recebimentos). Por exemplo, um financiamento por 2 anos envolve desembolsos nesse intervalo fixo de tempo sendo, conseqüentemente, limitado o número de termos do fluxo (prestações do financiamento).

c) **Constantes** – indica que os valores dos termos que compõem o fluxo de caixa são iguais entre si.

d) **Periódicos** – é quando os intervalos entre os termos do fluxo são idênticos entre si. Ou seja, o tempo entre um fluxo e outro é constante.

Graficamente, o fluxo de caixa uniforme (padrão) é representado da forma seguinte:

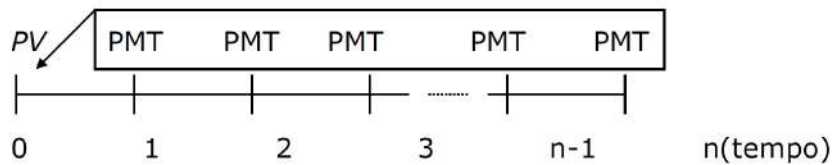


Observe que a estrutura desse fluxo obedece à classificação-padrão apresentada anteriormente:

- O PMT inicial ocorre em $n = 1$: postecipado;
- A diferença entre a data de um termo e outro é constante: periódico;
- O prazo do fluxo é preestabelecido (fixo), apresentando n períodos: limitado ou finito;
- Os valores do PMT são uniformes (iguais) constantes.

4.1. VALOR PRESENTE E FATOR DE VALOR PRESENTE

O valor presente de um fluxo de caixa uniforme, conforme discutido no item precedente, para uma taxa periódica de juros, é determinado pelo somatório dos valores presentes de cada um de seus valores. Reportando-se à representação gráfica do fluxo-padrão apresentado, tem-se:



Logo:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

COLOCANDO-SE PMT em evidência:

$$PV = PMT \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

$$PV = PMT \left[\frac{1}{(1+i)^{-1}} + \frac{1}{(1+i)^{-2}} + \frac{1}{(1+i)^{-3}} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{-n-1}} + \frac{1}{(1+i)^{-n}} \right]$$

A expressão entre colchetes é denominada de Fator de Valor Presente, sendo representada pela Matemática Financeira de forma seguinte:

$$FPV(i, n)$$

Com isso, a formulação genérica do valor presente assume a expressão:

$$PV = PMT \times FPV(i, n)$$

Observe que a FPV , conforme é apresentado na formulação anterior entre colchetes, equipara-se à soma de uma progressão geométrica (PG) de n termos (a_n) igual a $(1+i)^{-n}$.

A fórmula de cálculo da soma de uma PG é dada por :

$$S_n = FPV(i, n) = \frac{a_1 - a_n \times q}{1 - q}$$

Substituindo-se os valores da expressão na soma dos termos de uma PG , tem-se:

$$FPV(i, n) = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

Seguindo-se a seqüência de dedução adotada por Mathias e Gomes[4] multiplica-se o numerador e o denominador por $(1+i)$, obtendo-se:

$$FPV(i, n) = \frac{[(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}] \times (1+i)}{[1 - (1+i)^{-1}] \times (1+i)}$$

$$FPV(i, n) = \frac{(1+i)^{-1} \times (1+i) - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1} \times (1+i)}{(1+i) - (1+i)^{-1} \times (1+i)}$$

$$FPV(i, n) = \frac{(1+i)^{-1+1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1+1}}{(1+i) - (1+i)^{-1+1}}$$

$$FPV(i, n) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1+i - 1}$$

$$FPV(i, n) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Essa expressão é muitas vezes representada da maneira seguinte:

$$FPV(i, n) = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$FPV(i, n) = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}$$

$$FPV(i, n) = \frac{1 - (1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Mediante o FPV, a fórmula do valor presente de um fluxo de caixa uniforme é apresentada da maneira seguinte:

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

ou

$$PV = PMT \times FPV(i, n)$$

Exemplo 4.1. Determinado bem é vendido em 7 pagamentos mensais, iguais e consecutivos de \$4.000,00. Para uma taxa de juros de 2,6%*a.m.*, até que preço compensa adquirir o aparelho a vista?

Dados: $PMT = \$4.000,00$; $PV = ?$; $i = 2,6\%a.m.$; $n = 7$.

Solução:

Dados	Tecla / Função	Viseira	Comentários
	f <i>FIN</i>	0,00	Apaga o conteúdo dos registradores financeiros
4.000	<i>CHS PMT</i>	-4000,00	Armazena a parcela
2,60	<i>i</i>	2,60	Armazena a taxa
7	<i>n</i>	7,00	Armazena o prazo em meses
25.301,18	<i>PV</i>		Obtém o valor à vista

$$PV = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^n}{i}$$

ou

$$PV = PMT \times FPV(i, n)$$

$$PV = 4.000,00 \times \frac{1 - (1,026)^{-7}}{0,026}$$

$$PV = 4.000,00 \times 6,325294 = \$25.301,18$$

O valor presente pode ser também calculado pela atualização de cada um dos termos do fluxo, ou seja:

$$PV = \frac{4.000,00}{1,026} + \frac{4.000,00}{(1,026)^2} + \frac{4.000,00}{(1,026)^3} + \dots + \frac{4.000,00}{(1,026)^7}$$

Resolvendo-se a expressão chega-se, evidentemente, ao mesmo resultado:

$$PV = \$25.301,18.$$

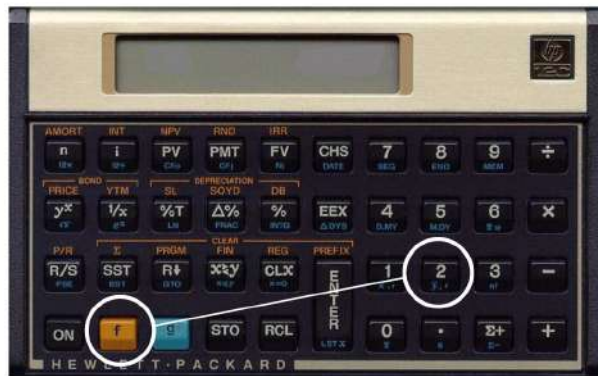
ROTINAS DA *HP-12C*



Para ligar ou desligar a calculadora, basta pressionar a tecla ON.
Ao ser deixada ligada, a calculadora se desligará automaticamente dentro de alguns minutos.



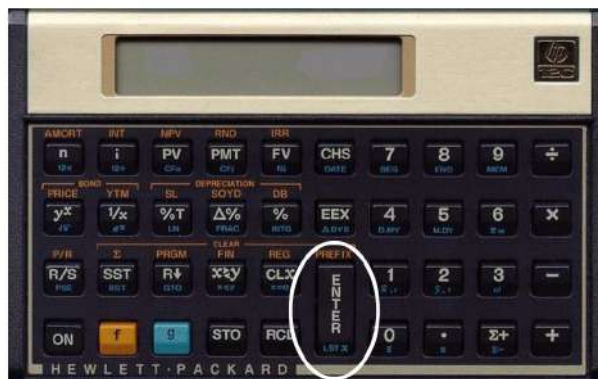
Para alterar o separador decimal da calculadora, de ponto para vírgula ou vice-versa, adote os seguintes passos, com a calculadora desligada: fique pressionando com um dedo a tecla do PONTO e dê um toque na tecla ON (pressione e solte). Pronto!



Para alterar o número de casas após a vírgula, basta pressionar a tecla “f” e em seguida o número de casas desejado. Por exemplo:

Exemplo 5.1. Se quiser formatar o visor com 3 casas, pressionar f 3.

Exemplo 5.2. Se quiser formatar o visor com número inteiro, pressionar f 0.



RPN: Reverse Polish Notation. A Hewlett Packard utilizou nesta calculadora, o método desenvolvido pelo matemático polonês Jan Lukasiewicz. O

método se adequou bem ao uso na calculadora, uma vez que dispensa a necessidade de parênteses.

Exemplo 5.3.

Método algébrico: $(4 + 5) \times 6 =$;

Método RPN: 4 *ENTER* 5 + 6 × .



A calculadora tem quatro linhas, que contém os valores a utilizar nos cálculos. Somente uma das linhas aparece no visor: é o registrador “X”.

Os demais registradores não aparecem, mas ficam disponíveis para os cálculos.

Exemplo 5.4. Digite 1 *ENTER* 2 *ENTER* 3 *ENTER* 4. A seguir, vá lendo todos os registradores, utilizando a função R.

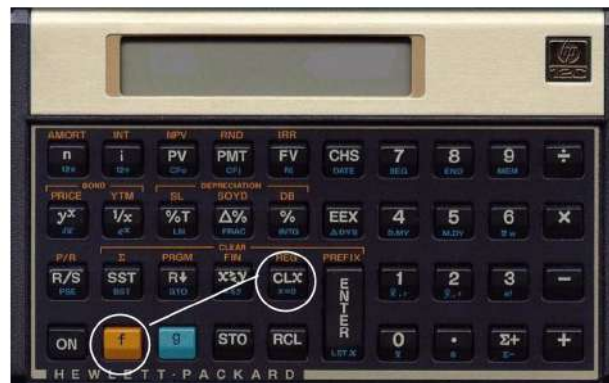


Um simples toque na tecla *CLx* limpa o visor. Observe que esta operação somente apaga o VISOR, não afetando os demais registradores da pilha operacional, nem os registradores financeiros, de armazenamento ou os programas.



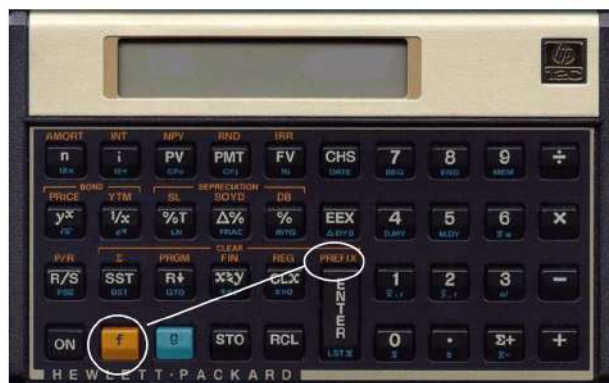
Para limpar somente os registradores financeiros, enumerados acima, basta pressionar a tecla *f* seguida da segunda função da tecla *X <> Y* que está na cor dourada: *FIN*.

Note que este procedimento não limpa o visor. Para confirmar (testar) se os registradores financeiros foram apagados pressionar *RCL* seguido do registrador financeiro desejado (*n*, *i*, *PV*, *PMT*, *FV*).

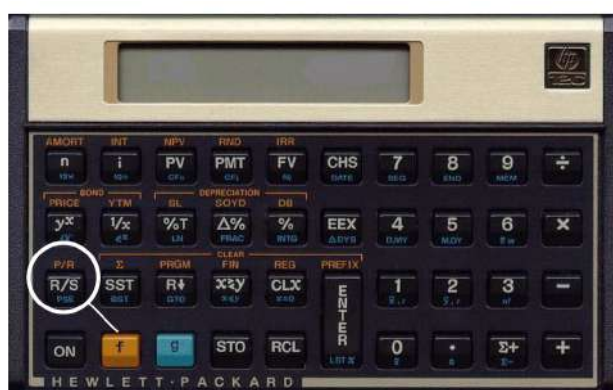


Para limpar todos os registradores, com exceção dos programas introduzidos, pressionar a tecla *f* e em seguida *CLx* (aciona a função *REG* que está em dourado logo acima de *CLx*).

Clear REG: limpa todos os registradores, menos os programas.



As teclas *f*, *g*, *STO* e *RCL* não têm função se pressionadas isoladas. Por isso são chamadas de **PREFIXOS**. Se alguma delas for pressionada indevidamente, para anular a operação basta pressionar *f* **PREFIX** (função em dourado acima da tecla *ENTER*).



As diversas funções de limpeza não desgravam os programas armazenados na calculadora. Para limpar os programas, deve-se entrar no modo de programação e, em seguida, executar a operação de limpeza. Para limpar os programas digitar:

f, *P/R* (para entrar no modo de programação):

f, *PRGM* (para limpar os programas);

f, *P/R* (para sair do modo de programação e retornar ao modo normal).



Para preservar a parte fracionária de um determinado número que aparece no visor, tornando a parte inteira igual a zero, pressionar g FRAC (em azul junto da função $\Delta\%$).

Para voltar o número original ao visor pressionar g *LSTx* (em azul na tecla *ENTER*).



Para preservar a parte inteira de um número que se encontra no visor, tornando a parte fracionária igual a zero, pressionar g *INTG* (em azul junto com a função %).

Para voltar ao visor o número original pressionar g *LSTx* (em azul junto com a tecla *ENTER*).



O inverso de um número é conseguido dividindo-se a unidade (1) por este. Na calculadora *HP – 12C* a função $1/x$ executa esta operação.

Para calcular-se o inverso de um número basta ter o número no visor e pressionar $1/x$.



Calcula quanto por cento um determinado valor (parte) representa de um outro valor (total). Para calcular-se o percentual que um número representa de outro, basta entrar-se com o número que servirá de base (total) e pressionar *ENTER* e em seguida digitar o outro número (parte) e pressionar $\%T$.



Para se calcular a variação percentual entre dois números, digitar o primeiro número (base ou valor anterior) e pressionar *ENTER*.

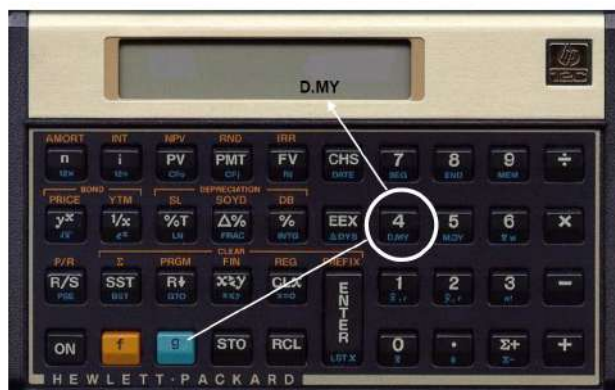
Logo após, introduzir o outro número (novo ou segundo número) e pressionar a função $\Delta\%$.

Se o segundo número for menor, aparecerá o resultado com o sinal de menos, significando que para chegar-se do primeiro para o segundo número deve-se deduzir o percentual que aparece no visor.



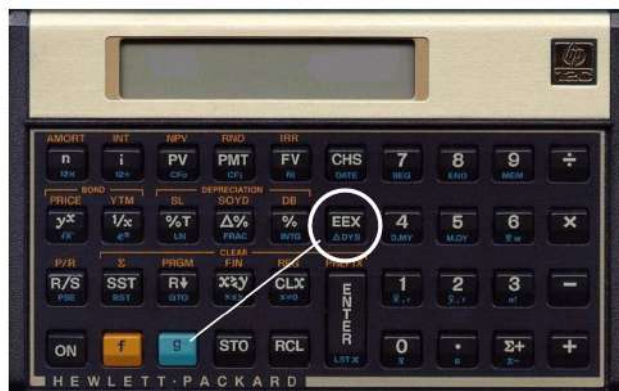
Para calcular um valor que resulta aplicando uma determinada percentagem sobre um número, digitar o número base e pressionar *ENTER* e em seguida a percentagem desejada e a função %.

Se quisermos somar o resultado ao número base basta pressionar o sinal +. Se quisermos deduzir o resultado do número base, basta pressionar -.



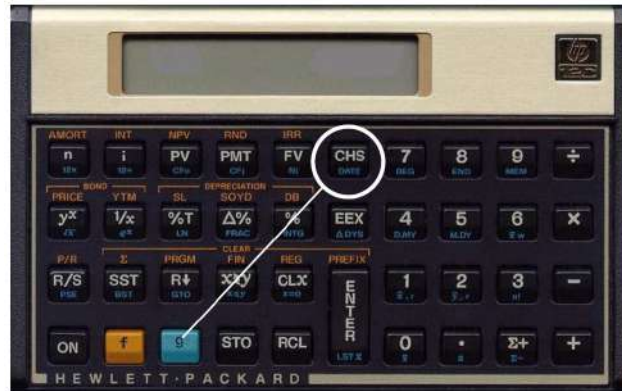
Sendo a calculadora americana, ela vem originalmente preparada para calcular datas pelo sistema utilizado pelos americanos: MÊS/DIA/ANO. Se não estiver aparecendo a mensagem *D.MY* no visor, a máquina estará preparada para calcular datas pelo sistema americano.

Para passar para o modo utilizado no Brasil, basta pressionar as teclas *D.MY*. Aparecerá o indicativo no visor da calculadora. É recomendável deixá-la neste modo.



Considerando que a máquina esteja preparada para cálculos pelo sistema utilizado no Brasil, entrar com a primeira data DIA.MÊSANO (digitar o dia, em seguida um ponto e na seqüência o mês e o ano completo juntos) e pressionar ENTER. Feito isso, entrar com a segunda data no mesmo formato e pressionar ΔDYS .

Aparecerá no visor o tempo exato (de acordo com o calendário). Se pressionarmos $X \langle \rangle Y$ aparecerá o tempo aproximado (mês comercial).

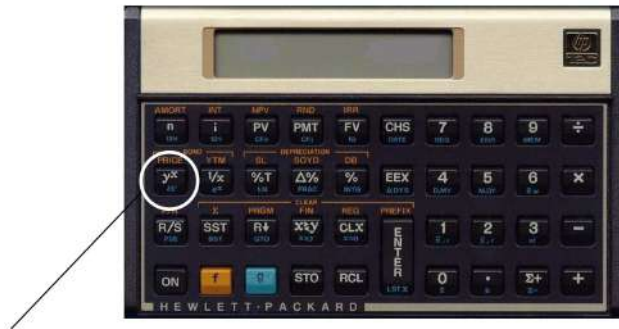


Para somar um determinado número de dias a uma data, entrar com esta data e pressionar $ENTER$, em seguida o número de dias e g $DATE$ (em azul abaixo da tecla CHS). Se quisermos diminuir, após digitar-se o número de dias pressionar CHS para trocar o sinal do número e em seguida g $DATE$.

O número que aparece isolado à direita é o dia da semana (1 = *segunda*, ...). Para saber-se o dia da semana de uma determinada data, basta digitar esta data e somar-se $ZERO$ utilizando esta função.



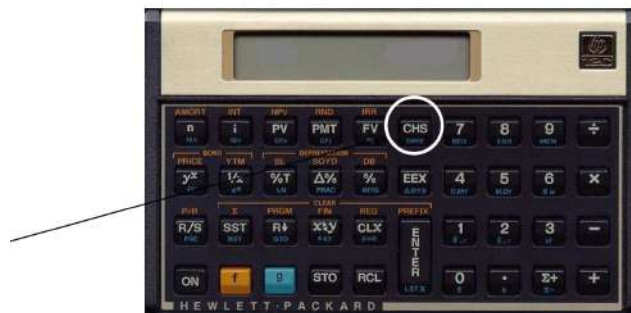
Para aplicar-se um expoente a um determinado número existe a função Y_x . Digitar inicialmente a base e pressionar $ENTER$. Feito isso, entrar com o expoente e pressionar Y_x .



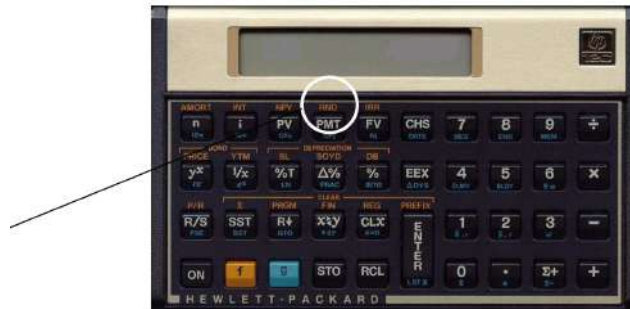
Para realizar operações de radiciação, utiliza-se a mesma função utilizada para potenciação, bastando para isso, transformar a raiz em potência fracionária. Veja a equação ao lado:

$$\sqrt[3]{4^5} = 4^{\frac{5}{3}}$$

4 ENTER 5 ENTER 3 ENTER : y^x



Em diversas operações necessitaremos trocar o sinal de um número que aparece no visor. Para isso existe a função *CHS* (change signal). Para trocar o sinal de um número que esteja no visor, basta pressionar a função *CHS* que o sinal será trocado.



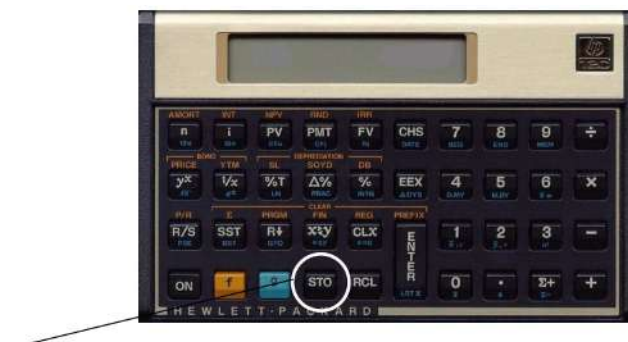
Em algumas situações pode-se querer trabalhar com um certo número de casas após a vírgula, desprezando as demais que estão na memória da calculadora.

Para arredondar um determinado número fracionário que apresenta diversas casas após a vírgula, fazer inicialmente aparecer no visor o número de casas desejado pressionando f este número. Em seguida pressionar f *RND* (em dourado acima da função *PMT*). Para voltar o número original pressionar g *LSTx*



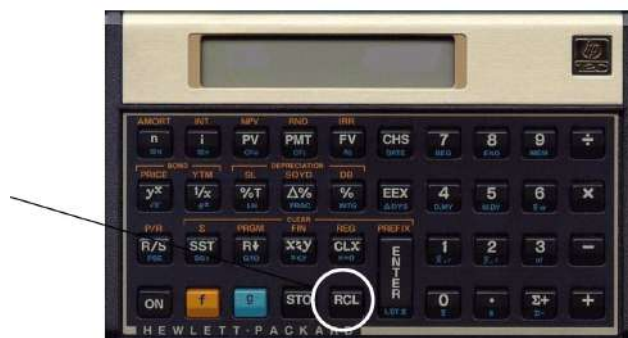
Os cálculos na *HP – 12c* são feitos pelo cotejo dos conteúdos dos registradores Y e X (o registrador X é o que está aparecendo sempre no visor).

Se digitarmos, por exemplo o número 8 e pressionarmos a tecla *ENTER* este número estará tanto no registrador X quanto no Y. Agora, se introduzirmos o número 4, este estará no registrador X e o número 8 no Y. Para intercambiar a localização destes números pressionar *X <> Y*.

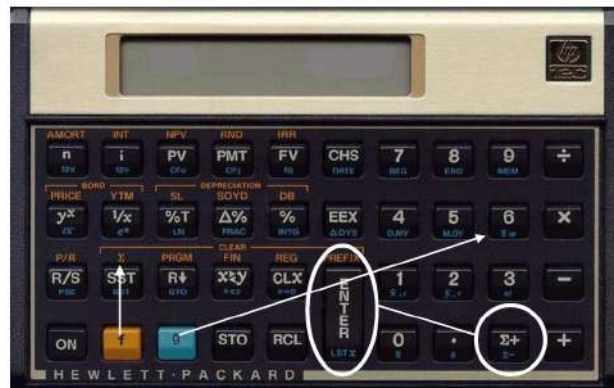


A máquina possui 20 registradores de armazenamento de dados, além dos financeiros. Os registradores são identificados por um número de 0 a 9 e de .0 a .9 (ponto zero a ponto nove).

Para armazenar um número, por exemplo, no registrador .5, digitar o número e em seguida *STO .5*



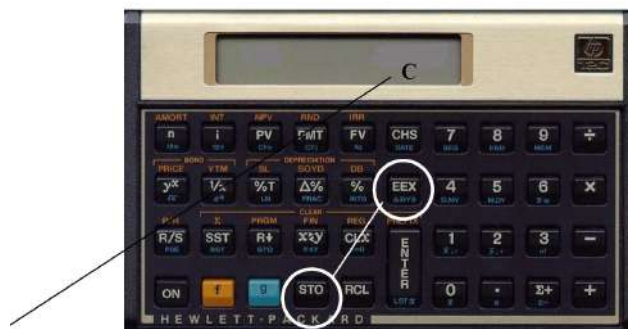
Para ler o conteúdo de um determinado registrador pressionar *RCL* e o número do registrador. Tendo armazenado um número em um registrador, a máquina pode ser até desligada que ele permanecerá armazenado. Para limpar o número armazenado deve-se utilizar a função *f REG*.



Limpar os registradores estatísticos pressionando $f \Sigma$ ou todos pressionando $f REG$.

Ir digitando os pares de dados (o valor a ponderar primeiro e o peso logo a seguir): valor a ponderar $ENTER$ peso $\Sigma +$ (vai aparecendo no visor o número de ordem dos pares de dados 1, 2, 3 ...).

Para calcular a média aritmética ponderada pressionar $g x_w$ (função em azul junto com o número 6 do teclado numérico).



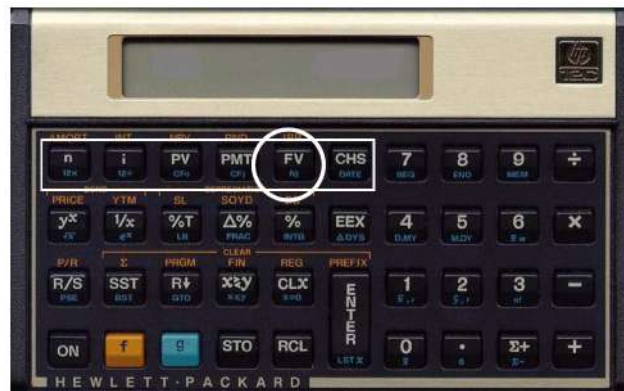
Quando o número de períodos n for fracionário (por exemplo 3,4 meses), o critério de cálculo de juros no período fracionário (0,4) pode ser escolhido entre SIMPLES e COMPOSTO.

Se estiver aparecendo no visor a indicação C o cálculo no período fracionário será feito pelo critério de JUROS COMPOSTOS.

Se não estiver aparecendo a indicação C o cálculo será feito utilizando-se o critério de JUROS SIMPLES no período fracionário.



Digitar o número de parcelas e pressionar n ;
Digitar o valor à vista ou valor presente e pressionar CHS, PV ;
Digitar a taxa de juros ao período e pressionar i ;
Pressionar PMT que aparecerá o valor da prestação.
Atenção: se não estiver aparecendo o indicativo $BEGIN$ no visor o critério que estará sendo utilizado é o $SEM ENTRADA$. Para considerar o critério $COM ENTRADA$, antes de pedir a prestação pressionar BEG .



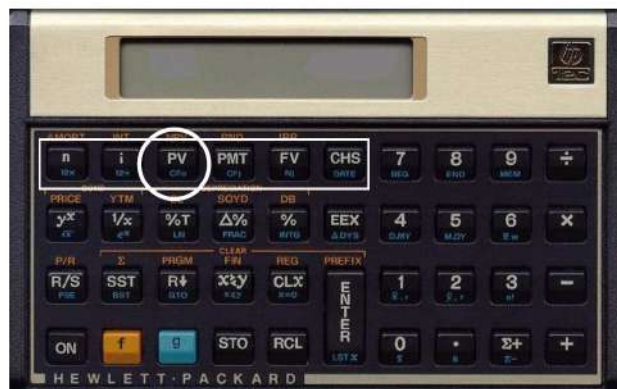
O valor futuro pode ser calculado a partir de um determinado valor presente PV ou de um conjunto de prestações PMT :

Digitar o número de parcelas em n .
Digitar o valor das parcelas em PMT ou o valor presente em PV .

Digitar a taxa de juros ao período em i .

Pressionar FV que aparecerá o valor futuro correspondente.

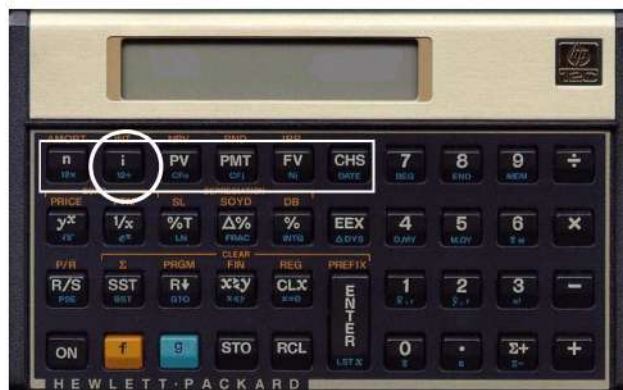
Atenção: cuidado para os modos $BEGIN$ ou END conforme as prestações ocorram nos inícios ou aos finais dos períodos!



Pode ser calculado a partir de um determinado valor futuro FV ou de um conjunto de prestações futuras PMT . Digitar o valor futuro FV ou o valor das prestações PMT :

Digitar a taxa de juros ao período em i ;

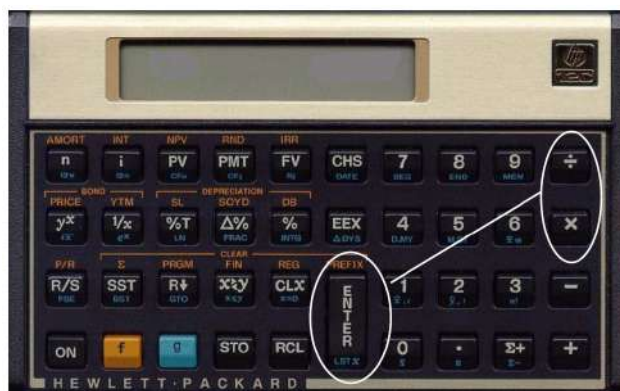
Digitar o número de períodos em n ; Pressionar PV para obter o resultado.



Digitar o valor à vista ou valor presente em a seguir as teclas *CHS*, *PV*;
Digitar o número de prestações e pressionar *n*;
Digitar o valor das prestações e pressionar *PMT*;
Pressionar *i* para obter a taxa de juros ao período.



Digitar o valor presente e pressionar *CHS*, *PV*;
Digitar o valor futuro e pressionar *FV*;
Digitar o número de períodos e pressionar *n*;
Pressionar *i* para saber a taxa de juros ao período (de acordo com *n*).



O cálculo de taxas proporcionais de juros se refere a JUROS SIMPLES. Tendo-se uma taxa referente a um determinado período e desejando-se calcular a taxa proporcional para um outro período, basta fazer uma regra de três. Na calculadora HP 12C proceder da seguinte forma:

- Digitar a taxa de juros conhecida e pressionar *ENTER*;
- Digitar o tempo conhecido e pressionar \div (divide);
- Digitar o tempo desejado e pressionar \times (vezes);
- A taxa proporcional aparecerá no visor.



Para calcular na *HP-12C* taxas equivalentes (tanto capitalizando quanto descapitalizando), proceder da seguinte forma:

- Digitar 1 e pressionar *ENTER*
- Digitar a taxa conhecida e pressionar $\% +$;
- Digitar o tempo para o qual se quer calcular a taxa e pressionar *ENTER*;
- Digitar o tempo a que se refere a taxa e pressionar \div (divide);
- Pressionar y^x ;
- Digitar 1 e pressionar $-$ (menos);
- Digitar $100 \times$ (vezes).



Digitar o valor do fluxo de caixa no momento ZERO e pressionar *CHS* g *CF₀*.

Ir digitando os demais fluxos com VALOR g *CF_j* Após ter digitado todos os fluxos, pressionar f *IRR* para calcular a taxa interna de retorno (internal return rate).



A explicação de como introduzir fluxos com valores e períodos irregulares será dada pelo exemplo abaixo:

Exemplo 5.5.

800 *CHS* g *CF₀*

0 g *CF_j*

20gNj

350 g CF_j
0 g CF_j
26 g N_j
275 g CF_j
0 g CF_j
21 g N_j
225 g CF_j

Solução: Informar o valor dos fluxos dia a dia. Quando não houver valor, digitar *ZERO* e informar com que frequência ocorre N_j .

f *IRR* nos dará a taxa de juros ao dia, uma vez que informamos os fluxos dia a dia.

5.1. ERROS DA *HP-12c*

Erro 1: Relacionado à utilização de valores maiores do que $9,999999999 \times 1099$ e menores do que $-9,999999999 \times 1099$ em operações com as teclas *STO* e $12x$.

Erro 2: Relacionado às operações estatísticas.

Erro 3: Relativo ao cálculo da taxa interna de retorno (*TIR*) ou de juros de um fluxo (serão apresentados os fluxos de caixa que ocasionam esse tipo de erro).

Erro 4: Relativo ao erro de memória (modo de programação).

Erro 5: Relacionado à utilização de valores nos registradores financeiros fora de seus intervalos de definição (regime de juros compostos).

Erro 6: Relacionado à utilização de valores nos registradores *STO*, *RCL*, CF_j , N_j , *NPV* e *IRR* fora de seus intervalos de definição.

Erro 7: Relativo ao cálculo da taxa interna de retorno (*TIR*) ou de juros de um fluxo caso não existam no mínimo uma entrada de caixa (fluxo de caixa positivo) e uma saída de caixa (fluxo de caixa negativo).

Erro 8: Relativo às operações com calendário.



jeronimomonteir@uol.com.br

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FARO, CLÓVIS DE (1995). Princípios e Análise do Cálculo Financeiro. 5. ed, Rio de Janeiro: IBMEC.
- [2] PUCCUNI, ABELARDO LIMA (1993). Matemática Financeira. 5. ed, Rio de Janeiro: LTC.
- [3] BREALEY, RICHARD e MYERS, STEWART (1996). Princípios de Finanças Empresariais. 5. ed, Lisboa: McGrawHill.
- [4] GOMES, JOSÉ MARIA e MATHIAS, WASHINGTON FRANCO (2009). Matemática Financeira. 2.ed, Atlas.



GRAFOS E APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES

CATARINA MENDES DE JESUS SÁNCHEZ

20 A 24 JUNHO DE 2022

À minha querida família.

SUMÁRIO

Prefácio

1 Grafos e superfícies

- 1.1 Noções básicas de grafos
- 1.2 Superfícies fechadas
- 1.3 Característica de Euler de Superfícies
- 1.4 Grafos associados às Superfícies com Curvas

2 Aplicações entre superfícies

- 2.1 Singularidades de aplicações estáveis
- 2.2 Grau de Aplicação entre Superfícies
- 2.3 Transições de Codimensão 1

3 Grafos dual de aplicações

- 3.1 Grafos de aplicações estáveis entre superfícies
- 3.2 Cirurgias de aplicações estáveis

4 Aplicações entre superfícies

- 4.1 Aplicações no plano
- 4.2 Aplicações entre superfícies fechadas

Referências

PREFÁCIO

Um dos principais problemas em Matemática consiste em classificar objetos de estudo. Dependendo das propriedades de interesse deste objeto se define uma classe de equivalência. Em geral, uma pergunta clássica é: *dois objetos dados são equivalentes ou não?* O nosso objeto de estudo são as aplicações estáveis entre superfícies, tema que tem interessado vários autores, tais como ([26, 25, 27, 29, 30, 31]).

A palavra estável garante o comportamento de uma aplicação mesmo com “pequenas perturbações”. Localmente, as aplicações entre superfícies podem ser vistas como aplicações do plano no plano e as singularidades ocorrem nos pontos em que a matriz Jacobiana (formada pelas derivadas parciais de primeira ordem) não tem posto máximo. Em (1955), Whitney [30] iniciou o estudo das aplicações estáveis do plano no plano, quando determinou que um germe de aplicação em cada ponto (análise local) é equivalente a um ponto *regular*, ou ponto de *dobra* ou uma *cúspide*. Também determinou que o conjunto das aplicações estáveis formam um subconjunto aberto e denso no espaço de todas as aplicações suaves. No final dos anos 70, Thom [28] notou que esses resultados poderiam ser incorporados a uma nova teoria: a *Teoria das Singularidades*. No caso global de aplicações estáveis entre superfícies, se o domínio é uma superfície fechada, então o conjunto singular consiste de uma coleção de curvas fechadas, simples e disjuntas, que separa o conjunto regular em componentes conexas disjuntas desta superfície.

Em [8, 16] foi introduzido grafos com pesos nos vértices associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano. As componentes do conjunto regular corresponde aos vértices e as componentes do conjunto sin-

gular correspondem às arestas do grafo. O peso em cada vértice corresponde ao gênero da região regular associada a ele. Estes grafos servem como invariantes topológicos globais, que auxilia nas classificações dessas aplicações, pois carrega as informações topológicas do conjunto regular e a disposição do conjunto singular. Além disso, o grafo serve como uma ferramenta bastante útil para a construção de exemplos dessas aplicações. Essa técnica de aplicar grafos no estudo de aplicações estáveis foi estendido para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas ([9, 10, 15]), para aplicações entre superfícies fechadas e não orientadas ([20, 21]), para aplicações de Gauss de superfícies fechadas imersas no 3-espaço ([18, 22]) e aplicações de 3-variedades no 3-espaço ([11, 19]). Para uma imersão de uma superfície no 3-espaço é possível estudar ao mesmo tempo a função altura, suas projeções e a aplicação de Gauss. Em recentes trabalhos temos estudado a combinações destes diferentes pontos de vista da imersão de uma superfície no 3-espaço ([17, 23]).

Nestas notas, escrita para a X Bienal de Matemática em Belém/PA, abordamos sobre o estudo de grafos associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano e também aplicações entre duas superfícies fechadas e orientadas. Apresentamos técnicas para a construção e alguns exemplos destas aplicações. Para isso, recordamos alguns conceitos básicos de Topologia Geral e de Singularidades. O principal objetivo é mostrar como os grafos com pesos nos vértices podem ajudar a construir aplicações entre superfícies com o conjunto singular pré-determinado. As descrições feitas aqui sobre grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas podem ser vistas com detalhes nas seguintes referências [9, 10, 15].

Juiz de Fora, junho de 2022

Catarina Mendes de Jesus Sánchez

GRAFOS E SUPERFÍCIES

Introduziremos aqui, de forma bem resumida, alguns conceitos básicos de topologia sobre grafos e superfícies, baseado em Lima [7], Kinsey [12], Massey [13] e Munkres [24]. Os conceitos específicos sobre grafos associada às superfícies com curvas podem ser vistos em [9, 10, 15].

1.1. NOÇÕES BÁSICAS DE GRAFOS

Alguns conceitos básicos sobre grafos conexos que podem ser visto com mais detalhes em [12] e [14].

Definição 1.1. Um **grafo** finito $G(V, E)$ é formado por um conjunto de V pontos chamados de **vértices** e um conjunto com E traços de curvas chamados de **arestas**, onde cada traço conecta um par de vértices de V .

Uma aresta que conecta os dois vértices u e v será denotada por uv .

Definição 1.2. Dado o grafo $G(V, E)$, dizemos que:

- um **caminho** sobre $G(V, E)$ é uma sequência de vértices $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$, todos distintos e arestas $\{e_1, \dots, e_k\}$, distintas $v_1e_1v_2e_2 \cdots e_kv_{k+1}$, onde e_j é incidente aos vértices v_j e v_{j+1} .
- dois vértices são adjacentes se são conectados por uma mesma aresta.
- duas ou mais arestas são adjacentes se são incidentes num mesmo vértice.
- $G(V, E)$ é um grafo **conexo** se existe um caminho que liga quaisquer dois de seus vértices.

Definição 1.3. Dois grafos $G(V, E)$ e $G(V', E')$ são **isomorfos** se existem uma correspondência $\phi : G(V, E) \rightarrow G(V', E')$ bijetiva entre os V vértices e as E arestas que conserva a relação de adjacências.

O grafo **planar** é bastante conhecido, é um grafo isomorfo a um grafo sem cruzamento de arestas no plano. Caso não haja um isomorfismo desse tipo o grafo é dito não planar. Quando um grafo é planar ele divide o plano em regiões que são delimitadas por suas arestas. A essas regiões damos o nome de faces. A região exterior ao grafo, que não é limitada por suas arestas, também é contada como uma face do grafo. Segundo Euler, dado um grafo planar e conexo, com V vértices, F faces (ou regiões) e E arestas, então: $V + F - E = 2$. Aqui vamos considerar grafos no caso geral, podendo ser planar ou não planar.

Definição 1.4. Um **ciclo** no grafo é um caminho fechado $v_1e_1v_2e_2 \cdots e_kv_{k+1}$, onde $v_1 = v_{k+1}$.

Um **laço** no grafo é um ciclo com única aresta.

Definição 1.5. Um grafo **bipartido** é um grafo em que todos os seus ciclos têm comprimento par.

Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos. Consequentemente, toda árvore é bipartida.

Definição 1.6. Uma árvore T será dito **árvore maximal** do grafo $G(V, E)$ se T é um subgrafo de $G(V, E)$ contendo os seus V vértices.

Definição 1.7. O **grau** de um vértice v corresponde ao número de arestas incidentes v , contando duas vezes cada laço em v .

Example 1.8. A Figura 1.1 ilustra três grafos conexos, todos com 7 vértices: (a) o grafo é uma árvore e seus vértices tem grau 1, 2, e 3; (b) o grafo é bipartido com dois ciclos de comprimento 4, seus vértices tem grau 1, 2, e 3; (c) é um grafo não bipartido com um ciclo de comprimento 4 e dois ciclos de comprimento 3 e seus vértices tem grau 1, 2, 3 e 4.

Definição 1.9. O número de **ciclos livres** de um dado grafo G com V vértices é o número mínimo de aresta que podem ser retirada do grafo para obter uma árvore com os V vértices. Este número será denotado por $\beta_1(G)$.

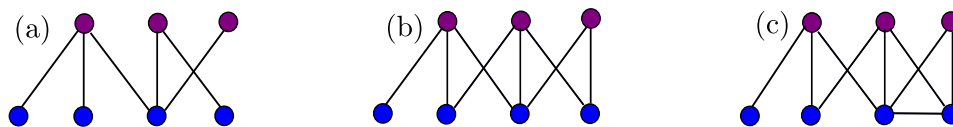


Figura 1.1: Exemplos de grafos com 7 vértices.

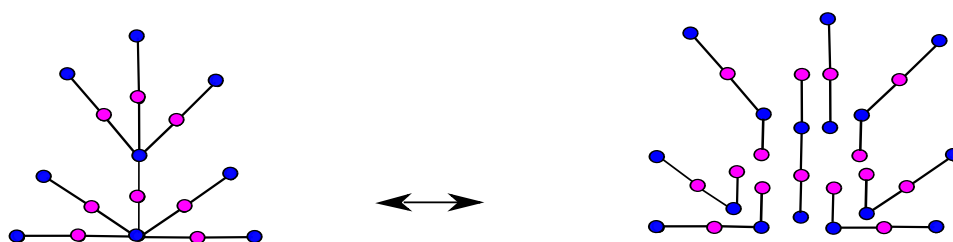


Figura 1.2: Decomposição de árvore em grafos L_1 , L_2 e L_3 .

Teorema 1.10. [12] *A característica de Euler de um grafo $G(V, E)$ é um invariante topológico e é dado por $\chi(G) = V - E$.*

Consequentemente, toda árvore tem característica de Euler igual a 1.

Teorema 1.11. *O número de ciclos (livres) do grafo $G(V, E)$ é dado por*

$$\beta_1(G) = E - (V - 1) = 1 - \chi(G).$$

O número $\beta_1(G)$ é também conhecido como o primeiro **número de Betti** do grafo.

As cirurgias de grafos como definidas a seguir podem ser vista com mais detalhes em [21].

Definição 1.12. Uma **cirurgia horizontal** no grafo $G(V, V - 1)$ identifica a duas arestas uv e yz , resultando na aresta rs , ao mesmo tempo que identifica os vértices u e x , resultando no vértice r , e os vértices v e z , resultando no vértice s .

Uma **Cirurgia Vertical** no grafo $G(V, V - 1)$ é a conexão de dois vértices u e v do grafo por uma aresta uv .

Notação: Dado uma árvore com n vértices (e $n - 1$ arestas), denotamos por:

- L_n o grafo que tem $n - 1$ vértices com grau 2 (tipo linha),
- por S_n quando o grafo tem $n - 1$ vértices com grau 1 (tipo estrela).

Lema 1.13. *Todo grafo $G(V, V - 1)$ (árvore) com m vértices com grau $d_j > 2$ ($j = 1, \dots, m$) pode ser obtido como soma horizontal de no máximo $\sum_{j=1}^m (d_j) - 1$ grafos do tipo L_i ($1 < i < V$).*

Demonstração. A soma conexa horizontal entre dois grafos L_i ($i > 1$) pode alterar o grau de um vértice, quando a cirurgia envolve pelo menos uma aresta extrema, ou pode alterar o grau de dois vértices nenhuma aresta envolvida na cirurgia é extrema. Podemos escolher as cirurgias que envolvem pelo menos uma aresta extrema (ver Figura 1.2). Neste caso, para cada vértice com grau d_j ($j = 1, \dots, m$) vamos precisar de fazer no máximo $d_j - 1$ cirurgias entre d_j grafos L_i , para algum $i > 1$. Logo, o máximo de grafos L_i necessário, para obter o $G(V, V - 1)$ por soma conexa horizontal, será necessário de $\sum_{j=1}^m (d_j) - 1$ grafos L_i , pois como o grafo é conexo, pelo menos um dos grafos L_i vai repetir em duas cirurgias. \square

1.2. SUPERFÍCIES FECHADAS

Os conceitos básicos da Topologia Geral podem ser vistos em [24].

Definição 1.14. Uma *topologia* sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X que tem as seguintes propriedades:

- 1- Os subconjuntos \emptyset e X estão em τ .
- 2- A união de elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ .
- 3- A interseção finita de qualquer subcoleção de τ está em τ .

Se X é um conjunto e τ é uma topologia definida sobre X , chama-se **espaço topológico** ao par (X, τ) . Os subconjuntos de X que pertencem à coleção τ são chamados de conjuntos **abertos**.

Definição 1.15. Um subconjunto F de um espaço topológico X é chamado de **fechado** se o conjunto $X \setminus F$ é aberto.

Definição 1.16. Um subconjunto F de um espaço topológico X é chamado de **fechado** se o conjunto $X \setminus F$ é aberto.

Definição 1.17. Seja S subconjunto do espaço topológico X . O **interior** de S é definido como a união de todos os subconjuntos abertos de X contidos em S e denotado por $\text{int}(S)$. O **fecho** de S , no espaço topológico X , é definido como a intersecção de todos os subconjuntos fechados de X que contém S e denotado por \overline{S} .

Definição 1.18. O **bordo** ou **fronteira** de S é o conjunto $\overline{S} \setminus \text{int}(S)$.

Definição 1.19. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e β uma família de subconjuntos de X tal que $\beta \subset \mathcal{T}$. Dizemos que β é uma base para \mathcal{T} se para todo $A \in \mathcal{T}$, temos que:

$$A = \cup B_i; B_i \in \beta$$

Definição 1.20. Um espaço X é chamado de **espaço de Hausdorff** quando, dados dois pontos diferentes x e y em X , existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.21. Uma coleção \mathcal{C} de subconjuntos de um espaço X é chamada de cobertura de X , se a união de elementos de \mathcal{C} é igual a X . O conjunto \mathcal{C} é chamada de **cobertura aberta (fechada)** de X se seus elementos são subconjuntos abertos (fechados) de X .

Definição 1.22. Um espaço X é chamado de **compacto** se qualquer cobertura aberta \mathcal{C} de X contém uma subcobertura finita que também cobre X .

Definição 1.23. Sejam (X, τ) e (Y, δ) espaços topológicos. A aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em $x \in X$ se para qualquer aberto V contendo $f(x)$ existe aberto U contendo x tal que $f(U) \subset V$.

Ou seja, a aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** se, e somente se, para todo aberto U em Y a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é aberto em X .

Note que a continuidade depende não só de f mas também das topologias de X e Y .

Definição 1.24. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de um conjunto arbitrário X num espaço topológico Y . A coleção τ das imagens inversas $f^{-1}(A)$ dos abertos $A \subset Y$ pela aplicação f é uma topologia em X chamada **topologia induzida**.

A aplicação f da topologia induzida é contínua, pois a imagem inversa de cada aberto de Y é aberta em X . A Figura ?? ilustra o intervalo $[0, a)$ como aberto de $[0, 1]$, induzida pela aplicação $f(x) = x$.

Definição 1.25. Um subespaço de um espaço topológico X é um subconjunto S de X que é equipado com uma topologia induzida daquela de X chamada **topologia de subespaço** (ou topologia relativa, ou topologia induzida).

Um subconjunto de S está aberto na topologia de subespaço se, e somente se, for a interseção de S com um conjunto aberto em (X, τ) .

Definição 1.26. Sejam X e Y espaços topológicos. A **topologia produto** sobre $X \times Y$ é a topologia contendo como base a coleção β de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é subconjunto aberto de X e V é subconjunto aberto de Y .

Definição 1.27. Seja X um espaço topológico e defina uma relação de equivalência \sim sobre X . Seja $q : X \rightarrow X/\sim$ a função que envia $x \in X$ para a classe de equivalência $[x]$. A **topologia quociente** sobre X/\sim é definida por $U \subseteq X/\sim$ se, e somente se, $q^{-1}(U)$ é aberto em X .

Definição 1.28. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um **homeomorfismo** se, e somente se f é uma bijeção contínua com a inversa contínua.

Diremos que $f : X \rightarrow Y$ é um mergulho se f é um homeomorfismo entre X e o subespaço $f(X)$ de Y .

Definição 1.29. O espaço topológico X é dito um espaço **localmente euclidiano**, se é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , para algum $n \geq 1$.

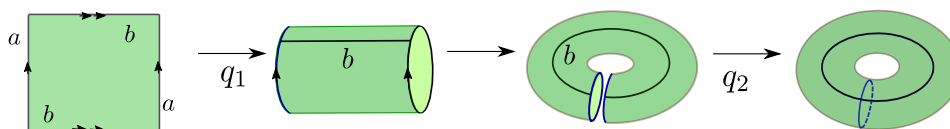


Figura 1.3: Construção do Toro pela aplicação quociente do quadrado.

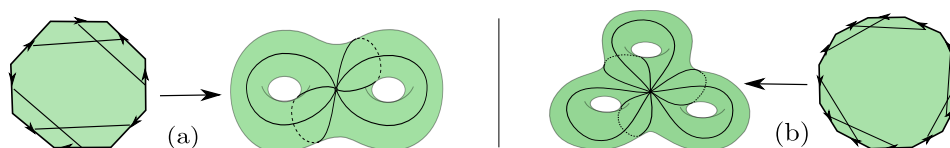


Figura 1.4: Construção do Bitoro e Tritoro por aplicações quociente.

Definição 1.30. O conjunto X é dito uma **variedade topológica** de dimensão n ou uma n -variedade topológica se é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Definição 1.31. Uma **superfície** é uma variedade topológica de dimensão 2. Uma superfície M será dita **fechada** se é compacta e não tem bordo.

Em outras palavras podemos dizer que uma **superfície** M sem bordo é um espaço topológico de Hausdorff, que em cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto.

Definição 1.32. Uma superfície suave M é **orientável** se todo caminho fechado preserva orientação. Caso contrário, se existe um caminho que inverte orientação, M é **não-orientável**.

Example 1.33. A esfera S^2 e o toro T^2 são superfícies orientadas sem bordo. O disco fechado D^2 , tem uma componente de bordo e o cilindro limitado é uma superfície orientada com duas componente de bordos.

Example 1.34. As Figura 1.3, 1.4 e 1.5 ilustram construções de superfícies por aplicações quociente de polígonos regulares.

- O Cilindro na Figura 1.3 é obtido pela identificação de duas arestas opostas do bordo no quadrado, respeitando as orientações indicadas pelas setas sobre o bordo do quadrado.

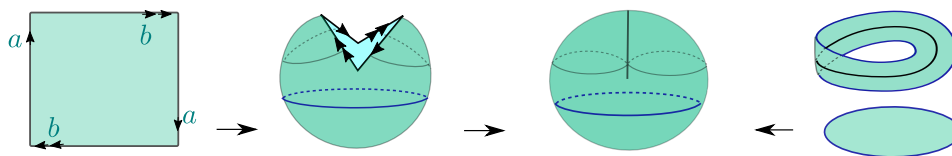


Figura 1.5: Construção do Plano Projetivo pela aplicação quociente do quadrado.

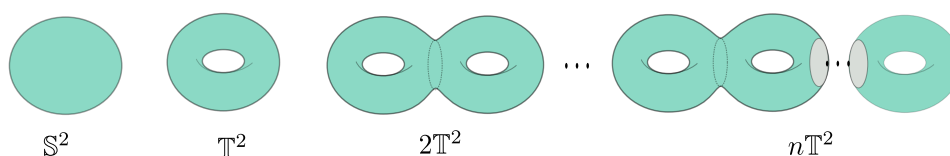


Figura 1.6: Exemplo de superfícies fechadas e orientadas.

- O Toro \mathbb{T}^2 na Figura 1.3 é obtido pela identificação das arestas opostas do bordo no quadrado, respeitando as orientações indicadas.

O Toro também pode ser obtido pela topologia produto como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

- Na Figura 1.4, o bitoro e o tritoro podem ser obtidos pela aplicação quociente que identifica pares de arestas do Octógono e dodecágono, respectivamente. Os seguimentos de retas aponta os pares de aresta identificados pela aplicação.
- Na Figura 1.5, o plano projetivo é obtido da identificação de pares das arestas do bordo do quadrado, respeitando as orientações indicadas pelas setas no bordo. A vizinhança da curva, imagem do bordo pela identificação, é uma faixa de Möbius.

Definição 1.35. A **soma conexa** de duas superfícies M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$, é a nova superfície obtida pela remoção de um pequeno disco em M_1 e um em M_2 e a identificação dos bordos (ver Figura 1.6).

Note que esfera \mathbb{S}^2 é o elemento neutro da soma conexa de superfícies.

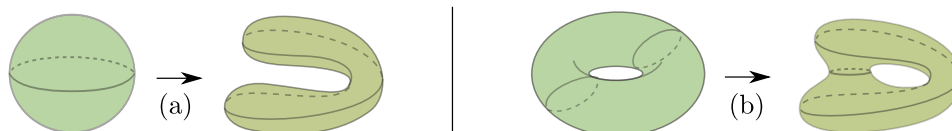


Figura 1.7: Exemplos de superfícies homeomorfas

Observação 1.36. A superfície resultante da soma conexa de duas superfícies orientadas é uma superfície orientada.

A superfície resultante da soma conexa de duas superfícies não orientadas é uma superfície não orientada.

A superfície resultante da soma conexa de uma superfície não orientada e uma superfície orientada é uma superfície não orientada.

Definição 1.37. Duas superfícies S e M são **homeomorfas** ou **topologicamente equivalente** se existe um homeomorfismo entre elas. Em outras palavras, dizemos que duas superfícies são homeomorfas se uma pode ser transformada na outra através das deformações citadas acima, que não alteram as propriedades topológicas das superfícies (ver Figura 1.7).

Teorema 1.38. (*Teorema da Classificação das Superfícies*) Toda superfície M , fechada e orientada é homeomorfa a esfera, a soma conexa de n -toros ou a soma conexa de m planos projetivos, isto é: $M \cong S^2 \# n\mathbb{T} \# m\mathbb{P}$, para algum $n \geq 0$ e $m \geq 0$.

1.3. CARACTERÍSTICA DE EULER DE SUPERFÍCIES

Os conceitos desta seção, sobre triangulação, soma conexa, característica de Euler e gênero de superfícies, podem ser vistos em [12].

Definição 1.39. Uma **triangulação de uma superfície** é um simplicial 2-complexo tal que:

- i) Cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;

- ii) Um dado vértice pode pertencer a n triângulos, denotados por T_1, \dots, T_n , de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum e T_n identifica com T_1 ao longo de uma aresta.

Teorema 1.40. *Uma superfície é compacta se, e somente se, qualquer triangulação possui um número finito de triângulos.*

Teorema 1.41. *Uma superfície é conexa se, e somente se, uma triangulação pode ser arranjada na ordem T_1, \dots, T_n , de modo que cada triângulo possui no mínimo uma aresta identificada com a aresta do triângulo anterior.*

A **característica de Euler** de uma superfície M é dada por:

$$\chi(M) = v - a + f,$$

onde f , a e v denotam o número de faces, arestas e vértices, respectivamente, da triangulação da superfície M .

Teorema 1.42. *A característica de Euler é um invariante topológico para superfícies compactas e conexas.*

O Teorema 1.42 garante que a característica de Euler não se altera quando esticamos, entortamos ou torcemos a superfície.

Definição 1.43. Dada uma superfície compacta orientável $M \cong \mathbb{S}^2 \# n\mathbb{T}^2$ o número n é dito **gênero** de M , que corresponde o número de **alças** da superfícies.

Definição 1.44. Analogamente, dada uma superfície não orientável $M \cong \mathbb{S}^2 \# pP^2$ o número p é dito **gênero** de M , que corresponde o número de **faixas de Möbius** contida na superfície, também pode ser denotado por $g(M)$.

A Figura 1.6 ilustra uma sequência de superfícies orientadas, desde a esfera até superfície homeomorfa a $M \cong \mathbb{S}^2 \# n\mathbb{T}^2$ que vamos chamar de n -toro e denotar simplesmente por $n\mathbb{T}^2$. Observe que o n -toro pode ser obtido como

soma conexa de n copias do toro. Então podemos afirmar que toda superfície fechada e orientada com gênero $n > 0$ é homeomorfa ao n -toro.

Podemos dizer também que uma superfície M é dita **orientável** se não contém uma faixa de Moebius. Caso contrário, M é **não-orientável**.

Definição 1.45. Seja M uma superfície fechada com característica de Euler $\chi(M)$, então o gênero de M é dado por o o gênero de S é dado por:

$$g(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(M)) & \text{se } M \text{ é orientada} \\ 2 - \chi(M) & \text{se } M \text{ é não orientada.} \end{cases} .$$

A seguir veremos como calcular a característica de Euler para superfícies com bordos em função do seu gênero.

Teorema 1.46. *Seja M uma superfície com gênero $g(M)$ e k componentes de bordo. A característica de Euler de M é dado por*

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 - 2g(M) - k, & \text{se } M \text{ é orientada,} \\ 2 - g(M) - k, & \text{se } M \text{ é não orientada.} \end{cases}$$

Corolário 1.47. *Se M_1 e M_2 são superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

*A característica de Euler da **soma conexa** de duas superfícies, M_1 e M_2 , é dada por $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.*

Observação 1.48. A característica de Euler de superfícies é um **invariante completo**, ou seja, se M_1 e M_2 são duas superfícies conexas e fechadas então M_1 é topologicamente equivalente a M_2 se, e somente se, $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ e ambas são orientáveis ou ambas são não-orientáveis.

1.4. GRAFOS ASSOCIADOS ÀS SUPERFÍCIES COM CURVAS

Sejam M uma superfície fechada (sem bordo) e $\mathcal{C} = \cup_{i=1}^E \alpha_i$ um conjunto com E curvas fechadas, simples e disjuntas sobre M .

O conjunto \mathcal{C} separa M em um conjunto de V regiões conexas, isto é, $M \setminus \mathcal{C}$, é uma união disjunta de regiões conexas de M .

Definição 1.49. Dois pares (M, \mathcal{C}) e (M', \mathcal{C}') são ditos **equivalentes** quando existe um difeomorfismo de M em M' que leva \mathcal{C} em \mathcal{C}' .

Dado é uma superfície fechada e orientada M e \mathcal{C} um conjunto de curvas simples e disjuntas sobre M , podemos associar a este par um grafo G com pesos nos vértices ao par (M, \mathcal{C}) da seguinte forma:

- cada região conexa U_i de $M \setminus \mathcal{C}$ fazemos corresponder a um vértice v_i em G , $i = 1, \dots, V$, e cada curva α_j de \mathcal{C} fazemos corresponder uma aresta e_j em G , $j = 1, \dots, E$;
- uma aresta e_j incide no vértice v_i se, e somente se, a curva de \mathcal{C} correspondente a e_j está no bordo da região $M \setminus \mathcal{C}$ correspondente a v_i ;
- um ciclo com única aresta, chamado de laço, ocorre quando a curva correspondente é bordo (duas vezes) de uma única região;
- um vértice v_i recebe o peso t_i se a região regular correspondente a v_i tem gênero t_i (soma de t_i toros com buracos), onde $W = \sum_{i=1}^V t_i$.

Observação 1.50. Se (M, \mathcal{C}) e (M', \mathcal{C}') são equivalentes, então existe um isomorfismo entre os seus respectivos grafos associados.

Se grafo associado (M, \mathcal{C}) será denotado por $G(V, E, W)$, onde V , E , e W denotam, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o peso total nos vértices. O complemento de \mathcal{C} em M será denotado por $M \setminus \mathcal{C}$.

Proposição 1.51. *Todo grafo $G(V, E, W)$ está associado a um par (M, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C} é um conjunto de curvas fechadas, com E componentes, mergulhadas e disjuntas sobre a superfície fechada M .*

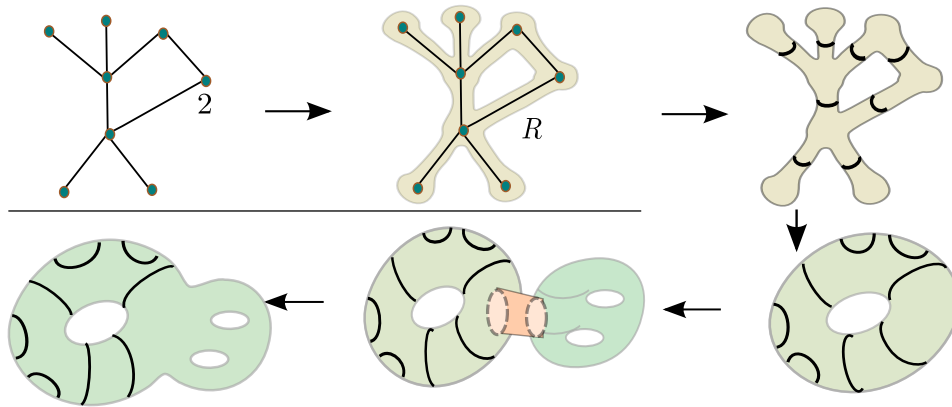


Figura 1.8: Superfície com curvas: vizinhança tubular de um grafo com peso.

Demonstração. Dado um grafo G , podemos obter o par (M, \mathcal{C}) associado a G da seguinte forma (veja Figura 1.8):

1. Mergulhe o grafo G em \mathbb{R}^3 e tome uma região (conveniente), que denotaremos por R , vizinhança de G em \mathbb{R}^3 .
2. Denotamos por Z a superfície fechada bordo de R , que é conhecida como vizinhança tubular de G .

Observe que o gênero de Z é igual a $\beta_1(G) = 1 - V + E$.

3. Faça corresponder a cada aresta a_i de G , uma curva fechada α_i em Z , transversal à aresta a_i .

Denotamos por \mathcal{C} o conjunto destas curvas. O par (Z, \mathcal{C}) corresponde ao grafo G com peso zero.

4. Para realizar o grafo G com os pesos, façamos em cada uma das região Z_i de Z , correspondente ao vértice v_i com peso $t_i > 0$, uma soma conexa de uma superfície fechada W_i com gênero t_i com Z .

Esta soma conexa que resulta no par (M, \mathcal{C}) , onde M é uma superfície fechada e orientada com o conjunto de curvas, que realiza o grafo G . \square



Figura 1.9: Vizinhança de curvas em superfícies não orientada.

Proposição 1.52. *Se $G(V, E, W)$ é um grafo associado ao par (M, \mathcal{C}) , onde M é uma superfície orientada. Então a característica de Euler de M é dado por $\chi(M) = 2(V - E - W)$ e o gênero é dado por $g(M) = \beta_1(G) + W$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.46, a característica de Euler de cada componente conexa U_i de $M \setminus \mathcal{C}$ é dada por $\chi(U_i) = 2 - 2t_i - E_i$, onde t_i e E_i correspondem, respectivamente, ao gênero e ao número de componentes de bordos de U_i . Como cada componente de \mathcal{C} é bordo de duas componentes de $M \setminus \mathcal{C}$ então o número total de componentes do bordo da união das componentes U_i é igual a $2E$. A interseção entre duas componentes é sempre uma curva fechada ou conjunto vazio e tem característica de Euler igual a zero. Logo $\chi(M) = \chi(\cup_{i=1}^V U_i) = \sum_{i=1}^V \chi(U_i) = \sum_{i=1}^V (2 - 2t_i - E_i) = 2(V - W - E)$. O gênero de uma superfície orientada M é dado por $g(M) = 1 - \frac{\chi(M)}{2} = 1 - (V - W - E)$. Como $\beta_1(G) = 1 - V + E$, então $g(M) = \beta_1(G) + W$. \square

Dado um conjunto de curvas sobre uma superfície fechada e não orientada, pode ocorrer o seguinte (ver Figura 1.9):

- a vizinhança da curva ser do tipo cilindro,
- a vizinhança da curva ser do tipo faixa de Möbius.
- As regiões do complemento de \mathcal{C} em M podem ser todas orientadas ou todas não orientadas.
- pode ter regiões do complemento de \mathcal{C} em M orientadas e não orientadas.

Em geral, para M uma superfície fechada, podemos associar um grafo com pesos nos vértices, ao par (M, \mathcal{C}) , da seguinte forma:

1. cada região regular de $M \setminus \Sigma f$ corresponde a um vértice v do grafo;
2. cada curva α de Σf corresponde a uma aresta a do grafo;
3. uma aresta e_j conecta o vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a e_j está no bordo da região regular associada a v ;
4. um vértice v recebe o peso $(t, 0)$ se a região regular correspondente a v é orientada e tem gênero t (soma de t toros) e v recebe o peso $(0, p)$ se a região regular correspondente a v é não orientada e tem gênero p (soma de p projetivos).
5. uma aresta e_j no grafo, será dita \star -laço quando a vizinhança da curva α correspondente a e_j é uma faixa de Möbius. Neste caso, a aresta e_j recebe uma \star .

Denotamos por V , E , $T + P$ e S , respectivamente, o número de vértices, o número de arestas, o peso total e o número de \star -laços do grafo associado do grafo, que será denotado por $G^S(V, E, T, P, S)$.

Teorema 1.53. *Todo grafo $G(V, E, T, S)$ pode ser associado a um par (M, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C} é um conjunto com E componentes de curvas fechadas simples e mergulhadas sobre a superfície M com gênero dado por*

$$g(M) = \begin{cases} 1 - V + E + W, & \text{se } M \text{ é orientada} \\ 2(1 - V + E + T) + P - S, & \text{se } M \text{ é não orientada.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $P = S = 0$, pela Proposição 1.51, o $G(V, E, T, 0, 0)$ pode ser realizado por um par (Y, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C}' é um conjunto com $E - S$ curvas simples fechadas e mergulhadas em Y , superfície com gênero $g(Y) = 1 - V + (E - S) + T$.

Para $P > 0$ ou $S > 0$, $G(V, E, T, P, S)$ pode ser realizado como segue:

- i) primeiro retira os S \star -laços e todos pesos $(0, p_i)$ do grafo, obtendo um novo grafo $G(V, E - S, T, 0, 0)$ que pode ser associado a um par (Z, \mathcal{C}') , pela Proposição 1.51, onde Z é uma superfície fechada e orientada, com gênero $g(Z) = 1 - V + (E - S) + T$, e \mathcal{C}' é um conjunto com $E - S$ curvas simples fechadas e mergulhadas em Z .

ii) Agora vamos realizar o grafo $G(V, E - S, T, P, 0)$, com os pesos p_j nos vértices. Suponhamos que existem V_p vértices com pesos $p_j > 0$. Para cada uma das regiões U_j de Z , correspondente ao vértice v_j com peso $(0, p_j)$, façamos uma soma conexa de Z com superfícies fechadas e não orientada Z_j , com gênero p_j ($i = 1, \dots, V_p$). Assim obtemos um par (R, \mathcal{C}_1) associado ao grafo $G(V, E - S, T, P, 0)$, onde R é uma superfície fechada não orientada com gênero $g(R) = 2g(Z) + \sum_{j=1}^{V_p} p_j = 2[1 - V + (E - S) + T] + P$.

iv) Finalmente, podemos realizar o grafo $G(V, E, T, P, S)$, com os S laços \star -laços. Denotamos por \mathbb{P} o plano projetivo com uma curva fechada cuja vizinhança é uma faixa de Möbius. Suponha que existe V_s vértices com \star -laços no grafo. Para cada um dos S_i \star -laços retirado no vértice v_i ($S = \sum_{i=1}^{V_s} S_i$), correspondente a região U_j ($j = 1, \dots, V_s$) de R , façamos um soma conexa de \mathbb{P} com R , na região U_j , obtendo a superfície fechada M com gênero $g(M) = g(R) + S = 2[1 - V + (E - S) + T] + P + S = 2[1 - V + E + T] + P - S$.

Assim, obtemos o par (M, \mathcal{C}) associado a $G(V, E, T, P, S)$, onde o gênero da superfície não orientada M é dado por $g(M) = 2[1 - V + E + T] + P - S$. \square

Corolário 1.54. [21] *Seja $G(V, E, T, P, S)$ o grafo associado ao par (M, \mathcal{C}) , onde M é uma superfície fechada e \mathcal{C} um conjunto de curvas fechadas simples e disjuntas sobre M . Então a característica de Euler de M é dado por*

- $\chi(M) = 2(V - E - T)$ quando M é orientada. Nesse caso, $P = S = 0$ e o gênero de M é dado por $g(M) = 1 - V + E + W$.
- $\chi(M) = 2(V - E - T) + P - S$, quando M é não orientada. Nesse caso, o gênero de M é dado por $g(M) = 2(1 - V + E + T) + P - S$.

APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES

Os conceitos específicos sobre grafos associada a superfícies com curvas estão baseados na introdução de grafos associados às aplicações entre superfícies que podem ser visto nos trabalhos [9, 10, 15].

2.1. SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Segundo Whitney [30], as aplicações entre duas superfícies, localmente podem ser vistas como aplicações do plano no plano. Ao longo do texto, quando for estudo local, podemos considerar as superfícies M e N como regiões simplesmente conexa do plano.

Definição 2.1. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre as duas superfícies M e N . Um ponto $p \in M$ de M é dito **ponto regular** de f quando a derivada $f'(p) : TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ é injetiva. Caso contrário, p diz-se um ponto singular de f .

A aplicação f uma *imersão* se todo ponto $p \in M$ é um ponto regular de f .

Definição 2.2. Dados $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$, dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **suave** se para cada $p \in X$ existir um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo p e uma extensão de classe C^∞ de $f : Y \cap U \rightarrow X$ a U .

Se f é diferenciável (suave) e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é também diferenciável dizemos que f é um **difeomorfismo**.

Dois conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ são **difeomorfos** se existe um difeomorfismo $f : X \rightarrow Y$.

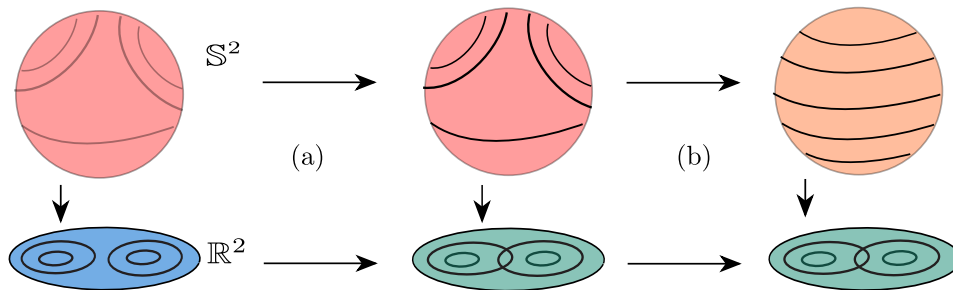


Figura 2.1: Exemplos de aplicações estáveis da \mathbb{S}^2 no \mathbb{R}^2 .

Definição 2.3. Sejam M uma superfície e V_i um aberto de \mathbb{R}^2 , com $i \in I$ um conjunto de índices. Dizemos que M é **diferenciável de classe \mathcal{C}^k** , $0 < k \leq \infty$, se é um conjunto junto com uma família de aplicações biunívocas $\phi_i : U_i \subset M \rightarrow V_i$, chamadas **carta local** (ou sistema de coordenadas local), tal que U_i é um aberto de \mathbb{R}^2 . Os domínios das cartas recobrem M , isto é, $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Sejam M e N duas superfícies suaves e $\mathcal{F}(M, N)$ o conjunto de todas as aplicações entre M e N . Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ o conjunto de todas as aplicações $f \in \mathcal{F}(M, N)$.

Definição 2.4. Quando M e N são de classe \mathcal{C}^∞ , a **topologia \mathcal{C}^∞ de Whitney** em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ é definida como a união das topologias induzidas pela inclusão $\mathcal{C}^\infty(M, N) \rightarrow \mathcal{C}^r(M, N)$, $1 \leq r < \infty$ (ver [5])

Definição 2.5. Duas aplicações $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ são ditas **\mathcal{A} -equivalentes** quando existem difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ e $\psi : N \rightarrow N$, tais que $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, f e g são \mathcal{A} -equivalentes se o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

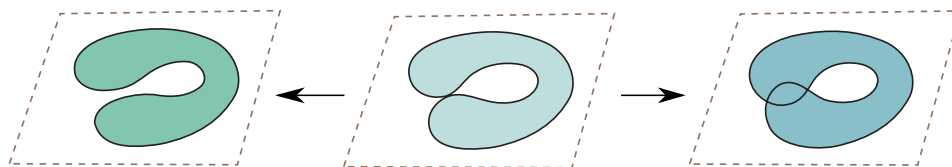


Figura 2.2: Exemplo de contorno aparente de aplicação do \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^2 .

Example 2.6. A Figura 2.1 ilustra três aplicações não equivalentes da esfera no plano. Note que não existe difeomorfismo entre o contorno aparente da aplicação do meio e o da aplicação à esquerda, assim como não existe difeomorfismo entre o conjunto singular da aplicação do meio e o da aplicação à direita.

Definição 2.7. Uma aplicação $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ é dita **estável** se existe uma vizinhança aberta W_f de f em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ (com a topologia \mathcal{C}^∞ de Whitney) tal que cada h em W_f é \mathcal{A} -equivalente a f .

O conjunto das aplicações estáveis de $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, denotado por $\mathcal{E}(M, N)$, é também chamada de aplicação **1-genérica**.

Se M é compacta e $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ é uma imersão, submersão ou difeomorfismo local (esses três conceitos coincidem, pois $\dim M = \dim N$) então f é estável [5]. Em particular, se f é difeomorfismo então f é estável.

Teorema 2.8. [30] *O conjunto $\mathcal{E}(M, N)$ é aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.*

Definição 2.9. Duas aplicações $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow N$ são ditas **estavelmente isotópicas** se existe uma aplicação suave (estável) $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que para cada $t \in [0, 1]$, a aplicação em que $F_t = F|_{M \times \{t\}}$ é estável, com $F_0 = f$ e $F_1 = h$.

Observação 2.10. Dizer que f e h são estavelmente isotópicas é equivalente a dizer que f e h se encontram na mesma componente conexa de $\mathcal{E}(M, N)$, pois uma isotopia estável define um caminho entre as aplicações f e h onde todas as aplicações ao longo deste caminho são estáveis.

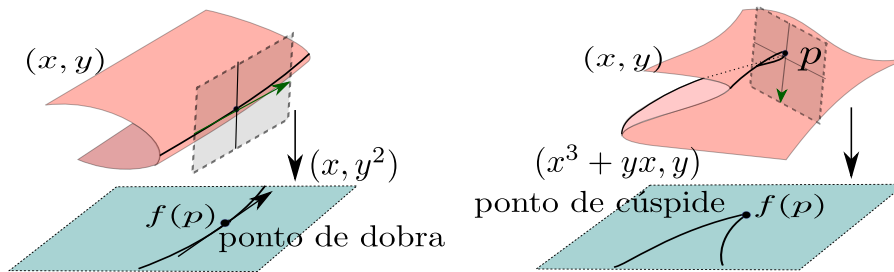


Figura 2.3: Singularidades estáveis do plano no plano.

Example 2.11. A Figura 2.2 ilustra três imagens de aplicações da esfera no plano. Note que a aplicação do centro não é estável e as outras duas aplicações não são isotopicamente estáveis, pois qualquer caminho entre as duas passa por uma aplicação não estável (tangência). Então as duas aplicações estão em diferentes componentes conexas de $\mathcal{E}(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$.

Definição 2.12. Seja $f \in C^\infty(M, N)$ uma aplicação estável. Um ponto $x \in M$ é dito **ponto regular** de f se, numa vizinhança do ponto x , a aplicação f é um difeomorfismo local, caso contrário, dizemos que x é um ponto **singular** de f . Em outras palavras, um ponto singular de f é um ponto $p \in M$ tal que o posto da aplicação linear df_p é menor que 2 (dimensão de N).

Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação estável e $p = (x, y) \in U$, então pode ocorrer uma das seguintes situações (ver Figura 2.3):

1. p é ponto **regular** se $(df)_p$ é isomorfismo. Nesse caso, localmente, f é da forma $(x, y) \mapsto (x, y)$.
2. p é ponto **singular** de f do tipo:
 - a) **Dobra**, se $T_p\Sigma(f) \oplus \text{Ker}(df)_p = T_pU$.
Nesse caso, podemos escolher um sistema de coordenadas (x, y) em \mathbb{R}^2 centrada em p tal que $(x, y) \mapsto (x, y^2)$.
 - b) **Cúspide**, se $T_p\Sigma(f) = \text{Ker}(df)_p$. Nesse caso, podemos encontrar coordenadas (x, y) centradas em p tais que localmente f é da forma $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$.

Observação 2.13. Se p é ponto de dobra então a aplicação derivada $(df)_p$ leva o plano tangente T_pU na reta tangente ao contorno aparente de f , em $f(p)$. Por outro lado, se p é um ponto de cúspide então $(df)_p$ leva a reta tangente a Σf , em p , no ponto $f(p)$.

Definição 2.14. O conjunto de todos os pontos singulares de f , denotado por Σf , é chamado de **conjunto singular** de f .

A imagem do conjunto singular, denotado por Bf , é chamado de **contorno aparente**.

O conjunto de todos os pontos não singulares de f , denotado por $M \setminus \Sigma f$, é chamado de **conjunto regular** de f .

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é uma aplicação estável:

1. O conjunto singular Σf está formado por um **conjunto de curvas** simples disjuntas e mergulhadas (suaves e sem auto intersecção) no domínio de f (subvariedade de codimensão 1), podendo ter pontos de cúspides isolados.
2. O conjunto Σf separa o conjunto regular $M \setminus \Sigma f$ em componentes conexas que são imersas por f sobre a imagem.
3. O contorno aparente $Bf = f(\Sigma f)$ é formado por um conjunto de **curvas suaves** na imagem de f , podendo ter **pontos duplos** (formados por interseções transversas de imagens de duas curvas de dobras) e cúspides isoladas (veja Figura 2.3).

Se duas aplicações f e g são \mathcal{A} -equivalentes, os conjuntos singulares Σf e Σg são \mathcal{A} -equivalentes e os contornos aparentes Bf e Bg são \mathcal{A} -equivalentes. Assim, duas aplicações que não têm conjuntos singulares \mathcal{A} -equivalentes ou contornos aparentes \mathcal{A} -equivalentes não são \mathcal{A} -equivalentes (veja Figura 2.2).

2.2. GRAU DE APLICAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES

A Teoria do Grau atribui um invariante topológico (numérico) a cada aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas. Este invariante

chamado o grau da aplicação f . Na realidade o grau é um invariante homotópico no sentido em que duas aplicações homotópicas têm sempre o mesmo grau.

Definição 2.15. Duas aplicações contínuas $f, h : M \rightarrow N$ são chamadas homotópicas, se existe uma aplicação contínua $H : M \times I \rightarrow N$, onde para todo $x \in M$, temos

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases} .$$

Quando isto ocorre, dizemos que H é uma homotopia entre f e g .

Definição 2.16. Sejam M e N superfícies orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável. Uma região regular U de $M \setminus \Sigma f$ é dita **positiva** se tem a orientação preservada por f e **negativa** em caso contrário.

Definição 2.17. O fecho de cada componente conexa regular de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é preservada por f será denotado por U_i^+ , enquanto o fecho de cada componente conexa de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é invertida por f será denotado por U_j^- . Denotaremos por $M^+ = \cup_i U_i^+$ e $M^- = \cup_j U_j^-$. Assim, M^+ e M^- são superfícies compactas e com bordo. Além disso, $M = M^+ \cup M^-$ e $\Sigma f = M^+ \cap M^-$.

Definição 2.18. Dizemos que um ponto $x_k \in f^{-1}(y)$ é **positivo** se $x_k \in M^+$ ou **negativo** se $x_k \in M^-$.

Definição 2.19. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **própria** se a imagem inversa de um compacto é um compacto.

Definição 2.20. Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . O **grau de f no ponto y** (grau local), indicado por $deg_y f$ é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.

Teorema 2.21. [7] *Toda aplicação $f : M \rightarrow N$, de classe C^2 , corresponde a um inteiro r , tal que para todo valor regular y de f , tem-se que $deg_y f = r$.*

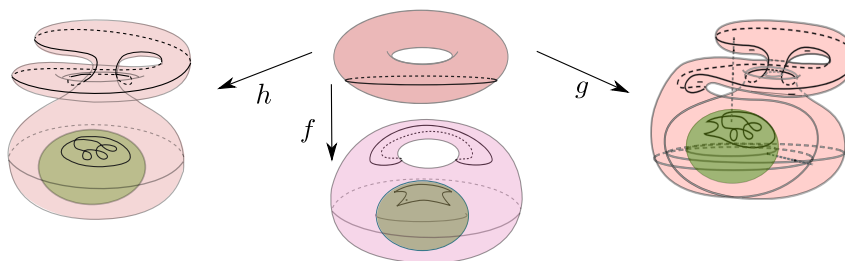


Figura 2.4: Exemplos de aplicações do toro na esfera.

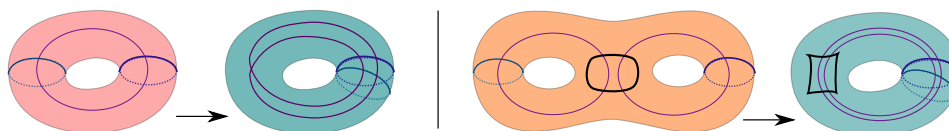


Figura 2.5: Aplicações do toro e do bitoro no toro.

Definição 2.22. O número $d = \deg_y f$ do Teorema 2.21 é o **grau da aplicação** f , ou simplesmente, $\deg f$.

Example 2.23. A Figura 2.4 ilustra as aplicações $f, g, h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ com os conjuntos singulares conexos: $\deg h = \deg f = 1$ e $\deg g = 2$.

Example 2.24. A Figure 2.5 ilustra: a direita uma aplicação do toro no toro com grau 2 e sem pontos singulares; a esquerda uma aplicação do bitoro no toro com grau 2 e uma curva singular com 4 pontos de cúspides.

Example 2.25. A Figure 2.6 ilustra uma aplicação $p : 7\mathbb{T}^2 \rightarrow 3\mathbb{T}^2$ com grau 3 e $\Sigma f = \emptyset$. A esquerda está a decomposição do 7-toro em superfícies A, B, C , sendo que A tem dois bordos e $g(A) = 2$, B tem quatro bordos e $g(B) = 1$, C tem dois bordos e $g(C) = 2$.

Teorema 2.26. *Sejam M e N superfícies fechadas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação com $\deg f = d$ e $\Sigma f = \emptyset$. Então a característica de Euler de M e N satisfaz o seguinte $\chi(M) = d\chi(N)$.*

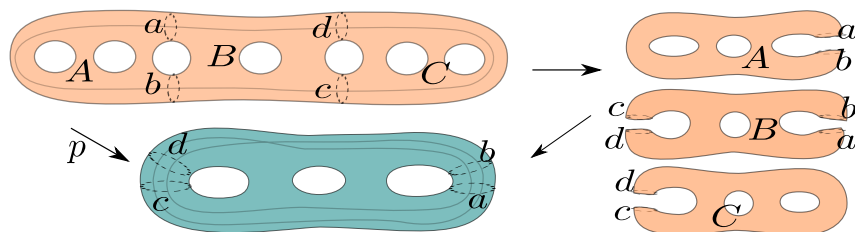


Figura 2.6: Aplicação do 7-toro no 3-toro com grau 3 e conjunto singular vazio.

Demonstração. Seja M uma superfície fechada e orientada $f : M \rightarrow N$ uma aplicação com grau d e com conjunto singular vazio. Podemos decompor M em d componentes conexas, $C_1, C_2, \dots, C_{d-1}, C_d$, que cobre N somente uma vez. Duas destas componentes, suponhamos C_1 e C_d , tem duas componentes de bordo. Então $\chi(C_1) = \chi(C_d) = 2 - 2(n-1) - 2 = 2 - 2n$. As outras componentes C_2, \dots, C_{d-1} tem gênero $n - 2$ e 4 componentes de bordo. Então $\chi(C_2) = \chi(C_{d-1}) = 2 - 2(n - 2) - 4 = 2 - 2n$. Como a interseção das componentes são curvas fechadas com característica de Euler nula, então $\chi(M) = \chi(C_1 \cup \dots \cup C_d) = d(2 - 2n) = d\chi(N)$. \square

Observação 2.27. Se M e N são superfícies fechadas e orientadas, as transições ao longo de uma homotopia em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, entre duas aplicações estáveis, não altera o grau da aplicação. Então duas aplicações com diferentes graus não podem estar na mesma classe de homotopia e não são A -equivalentes. Assim, o grau é um invariante global natural das aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas.

2.3. TRANSIÇÕES DE CODIMENSÃO 1

Considere uma homotopia $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ entre duas aplicações estáveis $f, g : M \rightarrow N$ no conjunto $\mathcal{E}(M, N) \subset \mathcal{C}^\infty(M, N)$. À medida em que t varia no intervalo $[0, 1]$ o contorno aparente de $H_0 = f$ é deformado no contorno aparente de $H_1 = g$. Pode acontecer que ao longo do caminho entre f e g , para algum $t_0 \in (0, 1)$ a aplicação H_{t_0} não é estável. Neste caso, os

contornos aparentes de f e g não são equivalentes e o mesmo pode ocorrer com os conjuntos singulares (ver Figura 3.1).

Definição 2.28. O conjunto das aplicações não estáveis $\mathcal{C}^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$, complementar do conjunto das aplicações estáveis em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, é chamado de conjunto **discriminante** e será denotado por \mathcal{D} (ver [5]).

Tipo	Nome	Forma normal
1) L	lábios	$(x, y^3 + y(x^2 - a))$
2) B	bicos	$(x, y^3 - y(x^2 - a))$
3) S	rabo de andorinha	$(x, y^4 + xy - ay^2)$
4) DD^0	tangências de dobras	$(x, -y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
5) DD^1	tangência de dobras	$(x, y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
6) DD^2	tangências de dobras	$(x, +y^2 + a), (x', x'^2 - y'^2)$
7) PT^0	pontos triplos	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (-x''^2, y'')$.
8) PT^1	pontos triplos	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (x''^2, y'')$.
9) CD^1	cúspides com dobra	$(x, y^3 + xy), (y'^2 - a, x')$
10) CD^2	cúspides com dobra	$(x, y^3 + xy), (-y'^2 - a, x')$

Tabela 2.1: Estratos de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

A Tabela 2.1 apresenta as formas locais a 1-paramêtro (na vizinhança de zero), de aplicações de 1-germe, 2-germes e 3-germes, ilustradas na Figura 2.7 (ver [25]). Cada transição está representada localmente por uma sequência de três aplicações em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. As aplicações do centro tem codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ e pertencem ao conjunto discriminate \mathcal{D} , que formam tipo “paredes” separando as componentes de $\mathcal{E}(M, N)$. Nas intersecções de “duas paredes” (ou mais) estão as aplicações de codimensões maiores que 1. Note que as aplicações são não estáveis para $a = 0$ e estáveis para $a \neq 0$. Estas sequências são chamadas de **transições de codimensão 1**.

Em outras palavras, uma transição de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ é uma aplicação de codimensão 1 que está na interseção de um caminho que conecta duas aplicações f e g em diferentes componentes de $\mathcal{E}(M, N)$ com o conjunto discriminante \mathcal{D} .

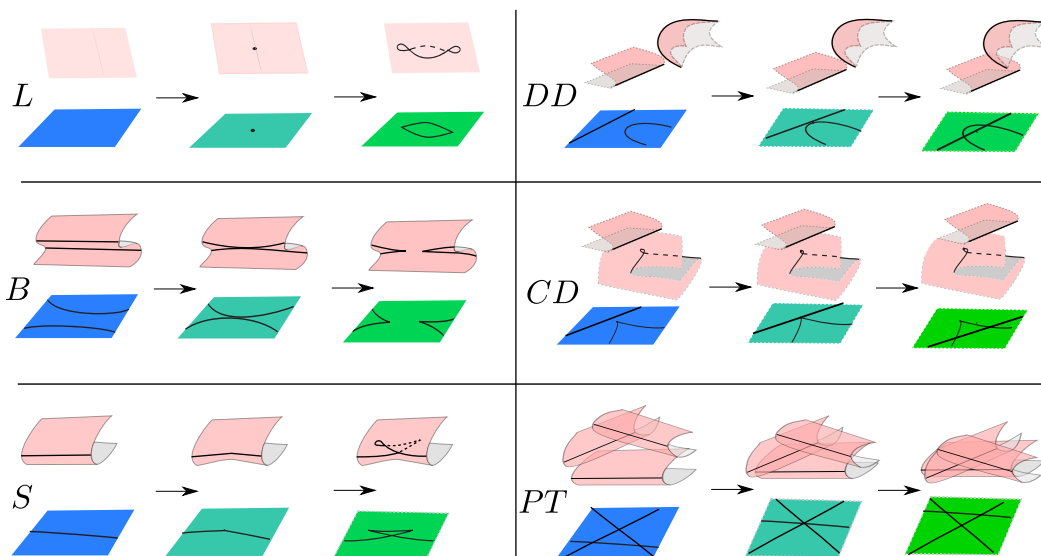


Figura 2.7: Transições de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Considerando caminhos positivo, como na Figura 2.7, da esquerda para a direita no sentido que aumenta o número de cúspides ou pontos duplos, as transições de codimensão 1 tem efeitos sobre as novas aplicações estáveis da seguinte forma:

1. Transição *Lips* (ou *Lábios*) L ocorre dentro de uma região regular U , nasce uma nova curva singular com duas novas cúspides.
2. Transição *Beaks* B da aplicação f , no sentido que aumenta o número de cúspides, pode unir duas curvas singulares ou decompor uma curva em duas, podendo ainda alterar o número de componentes regulares ou o gênero de uma região regular.
3. Transição *Rabo de Andorinha* S : sobre um arco de curva de dobras nasce dois pontos de cúspides, com sinais opostos, e um ponto duplo. S altera somente o número de pontos duplos por $+1$.
4. Transição *Tangência entre duas curvas de dobras* TD^i , $i = 1, 2$: altera somente o número de pontos duplos por $+2$.

5. Transição *Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra* CD^i , $i = 1, 2$: altera somente o número de pontos duplos por $+2$.
6. Transição *Pontos Triplos* PT^i , $i = 1, 2, 3$: passagem por um ponto triplo formado pela interseção de três curvas de dobras. Não altera o conjunto singular nem o regular.

Baseados nas transições de codimensão 1, em torno de uma aplicação de codimensão 2, Ohmoto e Aicardi apresentaram três invariantes de aplicações estáveis de superfícies no plano. Dentre estes invariantes está $I_c = 2(B+L+S)$, que corresponde o número de pontos de cúspides e I_n , que corresponde o número de pontos duplos no contorno aparente.

Teorema 2.29. [28] *Sejam M e N superfícies fechadas. Se M é orientada e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável, então o número de cúspides do contorno aparente Bf é par.*

As classes de homotopia de $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ são conexas por caminhos, logo existe um caminho $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ que conecta duas aplicações em diferentes componentes conexas de cada classe de homotopia que atravessa \mathcal{D} passando somente por aplicações de codimensão 1. Isto mostra que o Teorema 2.29 é bastante natural, pois se M é orientada sempre é possível ligar uma aplicação estável qualquer a uma aplicação dobra (sem cúspide) passando pelo discriminante somente através das transições de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Todas as transições de codimensão um alteram o total das cúspides sempre por um número par (ver Figuras 2.7).

As transições que alteram o número de componentes singulares e regulares são (L) , chamada de transição **lábios**, (B) , a transição **bicos** (ver Figura 3.1). As transições que alteram o número de cúspides são (L) , (B) e a transição **rabo de andorinha** (S) . As transições que alteram o número de pontos duplos são (S) , (T^i) , $i = 1, 2$, **tangência entre duas dobras**, e (TC^i) , $i = 1, 2$, **tangência de uma dobra com uma cúspide**.

A Figura 2.8 ilustra as possíveis decomposição da transição beaks B , no sentido que aumenta o número de cúspides, que pode ser classifica em oito

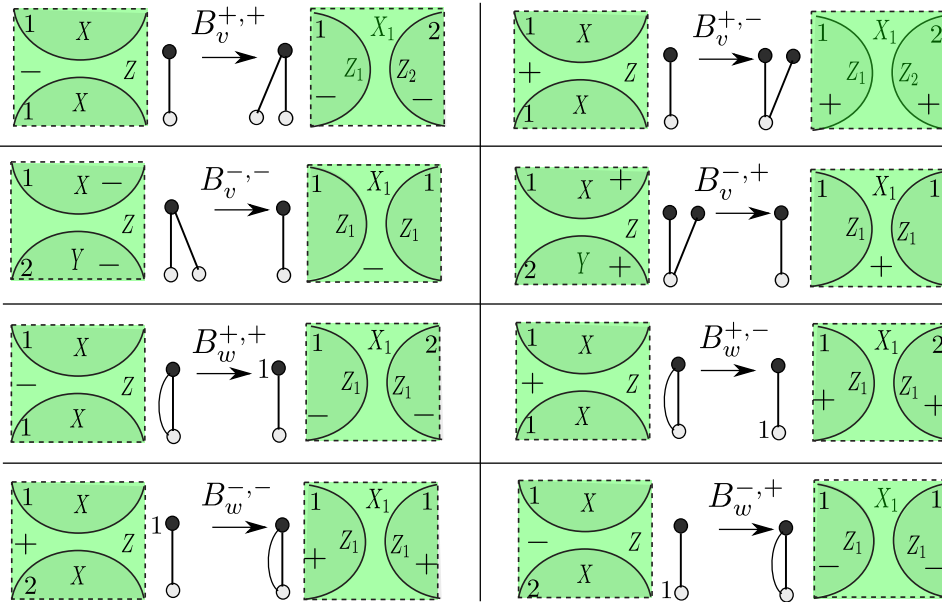


Figura 2.8: Decomposição da transição beaks.

diferentes transições. As notações X, X_1, Y, Z, Z_1 e Z_2 denota (localmente) as regiões onde ocorre as transições, o número 1 e 2 representa o número de curvas singulares envolvidas na transição:

1. $B_v^{+,\pm}$ ($B_v^{-,\pm}$): aumenta por 1 (diminui por 1) o número de vértice em V^\mp e o número de arestas E .
2. $B_w^{+,\pm}$ ($B_w^{-,\pm}$): aumenta por 1 (diminui por 1) o peso em W^\pm e diminui por 1 (aumenta por 1) o número de arestas E .

Example 2.30. A Figura 3.1 ilustra uma sequência de aplicações da esfera no plano, onde a transição beaks altera o número de curvas singulares e o número de componentes regulares. A Figura 3.2 ilustra uma sequência de aplicações do toro no plano, onde a transição beaks altera o número de curvas singulares sem alterar o número de componentes regulares.

Como exercício, o leitor pode verificar quais transições ($B_v^{+,\pm}$ e $B_w^{+,\pm}$) atua nas Figuras Figura 3.1 e 3.2.

GRAFOS DUAL DE APLICAÇÕES

Os conceitos sobre grafos de aplicações estáveis entre superfícies foram introduzidos em [8, 16] para o caso de aplicações no plano. Em [9] foi introduzido o conceito de cirurgia de aplicações e os efeitos nos grafos, estendendo os resultados para aplicações entre outras superfícies em [10, 15, 21]. A representação planar nas figuras indica uma região da superfície fechada contendo o contorno aparente. Aqui trataremos somente de grafos associado às aplicações entre superfícies orientadas. O caso de grafos associados às aplicações entre superfícies não orientadas, pode ser vista em [21].

3.1. GRAFOS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS ENTRE SUPERFÍCIES

Seja M uma superfície fechada e orientada e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável. O conjunto singular Σf está formado por um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas em M que separam as componentes conexas regulares do complemento $M \setminus \Sigma f$. Se Σf tem E componentes de curvas e $M \setminus \Sigma f$ tem V regiões conexas, análogo ao feito na Seção 1.4, podemos associar ao par $(M, \Sigma f)$ um grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$, onde W corresponde a soma total dos pesos nos V vértices, da seguinte forma:

1. cada curva α de Σf faz corresponder a uma aresta a do grafo;
2. cada região U de $M \setminus \Sigma f$ faz corresponder a um vértice v no grafo;
3. o vértice v recebe um peso t se U tem gênero t (soma de t toro).

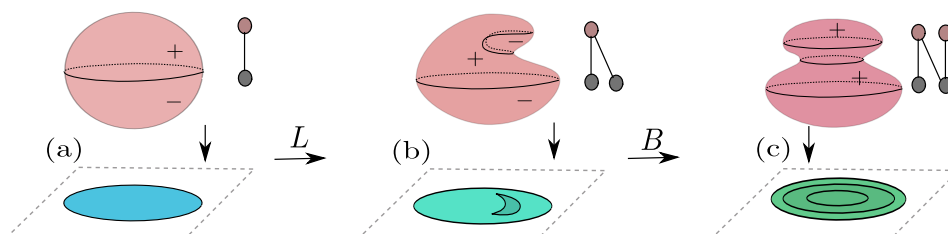


Figura 3.1: Sequência de aplicações da esfera no plano.

Está claro que a incide no vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular correspondente a v .

Definição 3.1. O grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$, ou simplesmente \mathcal{G} , associado ao par $(M, \Sigma f)$ é chamado de **grafo dual** de f .

Example 3.2. A Figura 3.1 ilustra uma sequência com três diferentes aplicações estáveis da esfera no plano, ao longo de um caminho no espaço das aplicações suaves $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, que realizam as árvores L_1 , L_2 e L_3 com peso total zero: (a) a projeção trivial da esfera no plano, com única curva singular realiza L_1 ; (b) o grafo tem duas arestas, com a transição lips (ou lábios) L que criou uma nova curva singular com duas cúspides; (c) o grafo aumentou mais uma aresta, com a transição beaks (ou bicos) B , que identificou as duas cúspides decompondo a curva singular em duas.

Example 3.3. A Figura 3.2 ilustra o contorno aparente de três diferentes aplicações do toro no plano. A aplicação do centro pode ser obtida da aplicação da esquerda por duas transições rabo de andorinha S e a aplicação da direita pode ser obtida da aplicação do centro passando por uma transição bicos $-B$, no sentido que diminui o número de cúspides e aumenta o peso.

Observação 3.4. As transições beaks e lips sempre alteram o número de componentes do conjunto singular. As transições lipes, no sentido que aumenta o número de cúspides, aumenta ao mesmo tempo, o número de vértice e de aresta no grafo. A transição beaks pode aumentar ao mesmo tempo um vértice e uma aresta ou também pode diminuir um peso por 1 quando aumenta

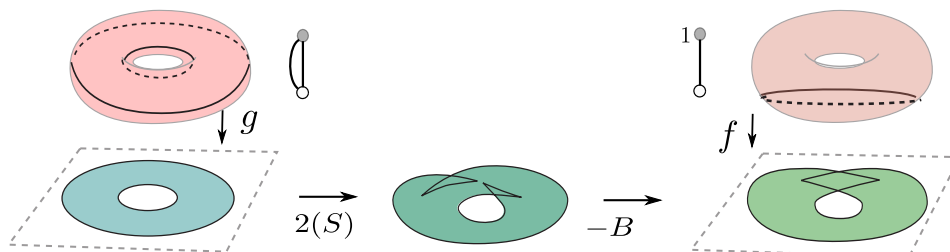


Figura 3.2: Transição S e B altera número de cúspides e peso no grafo.

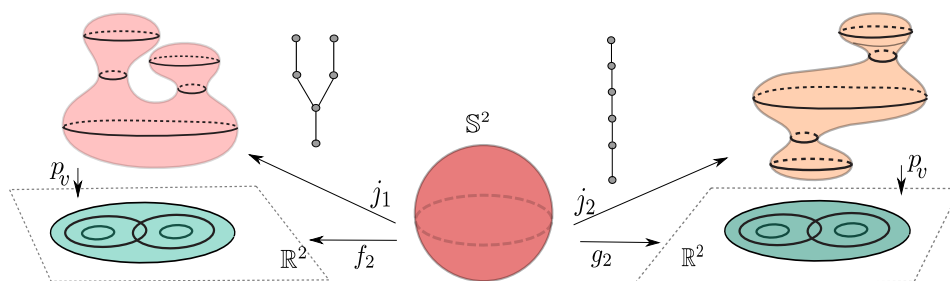


Figura 3.3: Construção de aplicação do toro no plano com única curva singular.

uma aresta e neste caso aumenta também o número de ciclo, pois o gênero da superfície é constante igual a $1 - V + E + W$, como vimos na Proposição 1.52.

Example 3.5. A Figura 3.3 ilustra duas aplicações da esfera no plano com 5 curvas singulares e sem pontos de cúspides. As duas aplicações tem o mesmo contorno aparente mas os grafos não são isomorfos, pois o grafo à esquerda tem um vértice com grau 3, diferente do grafo à direita.

A Figura 3.4 ilustra duas aplicações do toro no toro com grafu e 4 curvas singulares e sem pontos de cúspides. As duas aplicações também tem o mesmo contorno aparente mas os grafos não são isomorfos, pois o grafo à esquerda tem o vértice do meio com peso 1, diferente do grafo à direita que o peso está no vértice extremo.

As Figuras 3.3 e 3.4 mostra que o grafo dual é um **invariante global** das aplicações estáveis entre superfícies. Além do grafo codificar as informações do conjunto regular nos vértices, ele também carrega as informações topológica

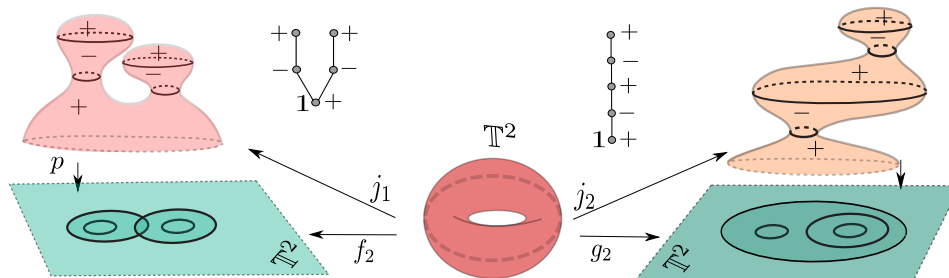


Figura 3.4: Exemplos de aplicações do toro no toro sem pontos com grau 1.

do conjunto singular.

Dado uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ tal que $\Sigma f = \mathcal{C}$ sempre existe um grafo associado a ela, pela construção do grafo. A pergunta agora: *Quais grafos $\mathcal{G}(V, E, W)$ podem ser associados a alguma aplicação estável $f : M \rightarrow N$?* Isto equiva a perguntar se um dado conjunto de curvas simples e fechada \mathcal{C} em M é o conjunto singular de alguma aplicação estável $f : M \rightarrow N$.

O próximo resultado nos dá uma condição necessária para que um grafo dado possa estar associado a alguma aplicação estável entre duas superfícies orientadas.

Proposição 3.6. *O grafo dual de qualquer aplicação estável $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas e orientadas é bipartido.*

Se N é uma superfície orientada e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável associado ao grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$. Então M é uma superfície orientada se, e somente se, $\mathcal{G}(V, E, W)$ é bipartido.

Demonstração. Se f é uma aplicação estável entre duas superfícies orientadas M e N , então cada curva singular de Σf é bordo de uma componente de M^+ e de uma componente de M^- . Conseqüentemente cada aresta do grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$ associado a f conecta um vértice de $V^+(\mathcal{G})$ com um vértice de $V^-(\mathcal{G})$, criando uma bipartição no conjunto dos vértices. \square

Corolário 3.7. *Seja N uma superfície fechada e não orientada e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável associada ao grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$. Então M é orientada se, e somente se, $\mathcal{G}(V, E, W)$ é bipartido e f tem grau zero.*

3.2. CIRURGIAS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS

O objetivo desta seção é apresentar técnicas de cirurgias de aplicações estáveis e o efeito destas sobre os grafos com objetivo de mostrar quais grafos com pesos nos vértices podem ser associados às aplicações estáveis entre superfícies fechadas.

Para obter uma aplicação com um grau desejado, uma forma de construir estas aplicações é através de cirurgias de aplicações estáveis. Em particular, uma cirurgia sobre uma aplicação $h \in \mathcal{E}^\infty(Z, N)$ é removido um par de discos disjuntos, D_1 e D_2 , da superfície M que é substituído por um tubo conectando os dois bordos $M \setminus D_1 \cup D_2$ menos os disco, onde estendemos a aplicação sobre o interior do tubo, resultando numa aplicação $h_\beta \in \mathcal{E}^\infty(M, N)$, onde M é uma superfície fechada obtida pela cirurgia sobre Z . É claro que a cirurgia realizada nas aplicações induz naturalmente a cirurgia sobre os grafos associados. Veremos dois tipos de cirurgias (horizontal e vertical) de aplicações, relacionada com a cirurgia de grafos no primeiro capítulo, introduzida em [9].

Sejam $Z = Z_1 \cup Z_2$ e N duas superfícies orientadas e $h : Z \rightarrow N$ uma aplicação estável. Denotamos por h_1 a restrição de h a Z_1 e h_2 a restrição de h a Z_2 . Veremos agora dois tipos de cirurgias sobre a aplicação h .

a) Cirurgia Horizontal S_H Uma cirurgia horizontal sobre a aplicação estável $h : Z \rightarrow N$ pode ser feita da seguinte forma (ver a) Figura 3.6):

1. Escolha dois arcos $l = h(l')$ e $j = h(j')$ em Bh (imagem do conjunto singular de h), onde l' e j' são arcos de dobras em Σh e exista um caminho η entre l e j com $\eta \cap Bh = \emptyset$.
2. Mergulhe um retângulo β em $N \setminus Bh$, na vizinhança de η , onde dois lados opostos de β , complementares dos arcos opostos k e m em β , são identificados com os arcos l e j , respeitando a orientação de Bh , conectando os arcos l e j , como ilustra a Figura 3.5, chamado de **ponte** entre as curvas.
3. Escolha dois pequenos discos D_l e D_j em Z contendo os arcos de curva singular l e j e repasse a seus interiores por um tubo T , respeitando a

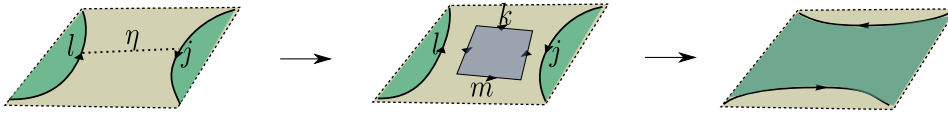


Figura 3.5: Retângulo β entre duas curvas do cotorno aparente.

orientação de Z , obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada M (ver Figura 3.6).

- Estenda a aplicação estável h sobre o tubo T , obtendo a aplicação h_β , de forma que h_β sobre T tenha dois arcos de curvas singulares k' e m' , com $h_\beta(k') = k$ e $h_\beta(m') = m$.

b) Cirurgias Vertical S_V Uma cirurgia vertical (ver b) Figura 3.6) sobre a aplicação estável $h : Z \rightarrow N$ pode ser feita da seguinte forma:

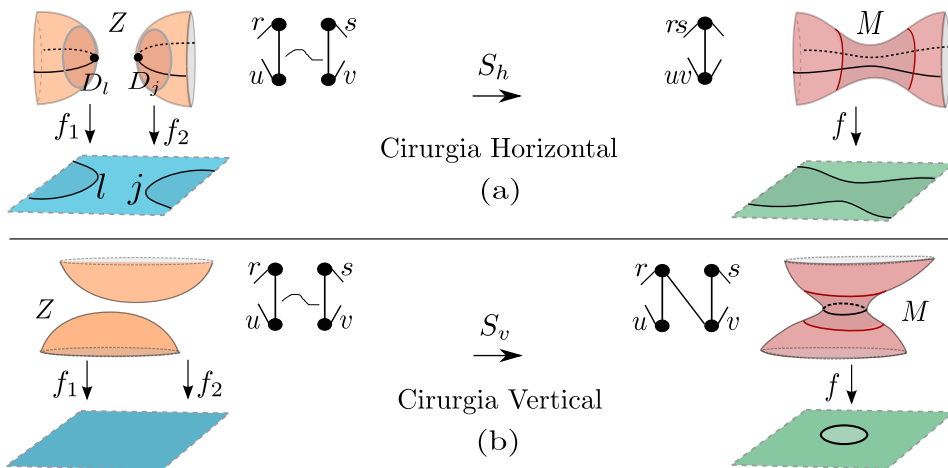


Figura 3.6: Efeitos no grafo das cirurgias horizontal e vertical.

- Escolha dois pontos $p, q \in Z \setminus \Sigma h$, tais que $p \in Z^+$ e $q \in Z^-$ e $h(p) = h(q) \in N \setminus Bh$.
- Escolha dois pequenos discos D_p e D_q em Z vizinhança dos pontos p e q , respectivamente, e repasse a seus interiores por um tubo T , respeitando

a orientação de Z , obtendo uma nova superfície fechada e orientada M e a nova aplicação estável $f : M \rightarrow N$.

3. Estenda a aplicação estável h sobre tubo T , de forma que sobre T tenha somente uma curva singular γ que é mergulhada por h_γ na vizinhança de Q em $N \setminus Bh$.
4. Estenda a aplicação estável h sobre o tubo T , obtendo a aplicação h_β , de forma que sobre T tenha dois arcos de curvas singulares k' e m' , com $h_\beta(k') = k$ e $h_\beta(m') = m$.

Observação 3.8. A superfície resultante será orientada se na cirurgia horizontal o tubo T conecta regiões positivas com regiões positivas e regiões negativas com negativas e na cirurgia vertical o tubo T conecta uma região positiva com uma região negativa.

Em particular, se Z é a união disjunta das superfícies Z_1 e Z_2 , denotamos por $Z = Z_1 \sqcup Z_2$. Se as aplicações h_1 e h_2 denotam, respectivamente, as restrições de h às superfícies Z_1 e Z_2 , então podemos denotar $h = h_1 \cup h_2$ e a aplicação resultante da cirurgia horizontal por $f = h_\beta = h_1 \oplus_H h_2$ e da cirurgia vertical por $f = h_\beta = h_1 \oplus_V h_2$.

Definição 3.9. Se Z_1 e Z_2 são superfícies conexas disjuntas, então a cirurgia horizontal $h_\beta = h_1 \oplus_H h_2$ é chamada de **soma conexa horizontal** das aplicações estáveis h_1 e h_2 e a cirurgia vertical $h_\beta = h_1 \oplus_V h_2$ é chamada de **soma conexa vertical** das aplicações estáveis h_1 e h_2 (ver Figura 3.6).

As cirurgias horizontal e vertical podem ocorrer também sobre uma mesma superfície Z , neste caso Z_1 e Z_2 estão contidas em Z . Neste caso, estamos acrescentado uma nova alça em Z . Neste caso, vamos denotar a aplicação resultante da cirurgia horizontal por $h_H : Z_H \rightarrow N$ e a aplicação resultante da cirurgia vertical por $h_V : Z_V \rightarrow N$, onde Z_H (e Z_V) é superfície obtida de Z pelo acréscimo de uma alça com a cirurgia horizontal (cirurgia vertical).

Example 3.10. A projeção trivial do Toro no plano, pode ser obtida por uma cirurgia vertical sobre a projeção trivial da esfera no plano. Da mesma forma, podemos fazer n cirurgias verticais sobre a esfera para obter o n -toro.

A aplicação do toro no plano, com duas curvas simples no contorno aparente, pode ser obtido pela cirurgia horizontal sobre a projeção no plano, com única curva singular, da esfera deformada no espaço, como na ver Figura 2.2 a esquerda.

Pela Definição 3.9 e pelas construções por cirurgias, das aplicações estáveis entre superfícies, podemos afirmar o seguinte:

Proposição 3.11. *Se \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são grafos associados, respectivamente, às aplicações estáveis $h_1 : Z_1 \rightarrow N$ e $h_2 : Z_2 \rightarrow N$ então o grafo $\mathcal{G}_1 \oplus_H \mathcal{G}_2$ (resultante da soma conexa horizontal) e o grafo $\mathcal{G}_1 \oplus_V \mathcal{G}_2$ (resultante da soma conexa vertical) são grafos associados, respectivamente, às aplicações estáveis $h_1 \oplus_H h_2$ e $h_1 \oplus_V h_2$.*

Neste caso, para o gênero vale: $g(Z_1 \oplus_H Z_2) = g(Z_1 \oplus_V Z_2) = g(Z_1) + g(Z_2)$.

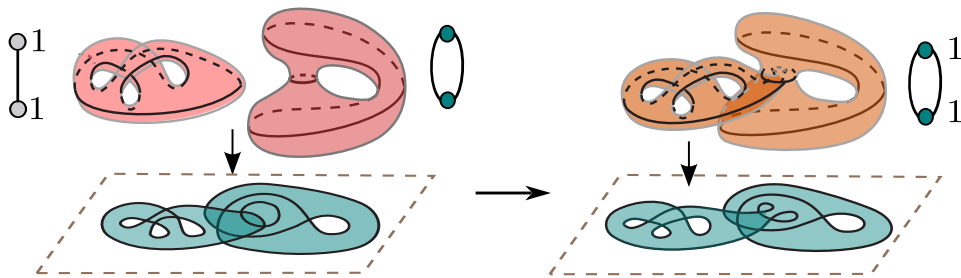


Figura 3.7: Exemplo de cirurgia horizontal entre o bitoro e o toro.

Proposição 3.12. *Se \mathcal{G} é um grafo associado à aplicação estável $h : Z \rightarrow N$, então o grafo \mathcal{G}_H , resultante da cirurgia horizontal sobre h , e o grafo \mathcal{G}_V , resultante da cirurgia vertical sobre h , são grafos associados às aplicações estáveis $h_H : Z_H \rightarrow N$ e $h_V : Z_V \rightarrow N$, obtidos das respectivas cirurgias.*

Neste caso, para o gênero vale: $g(Z_H) = g(Z_V) = g(Z) + 1$.

Example 3.13. A Figura 3.7 ilustra um exemplo de cirurgia horizontal entre uma aplicação do bitoro, com uma curva singular que separa de cada lado um toro com buraco, e uma aplicação do toro, com duas curvas singular que

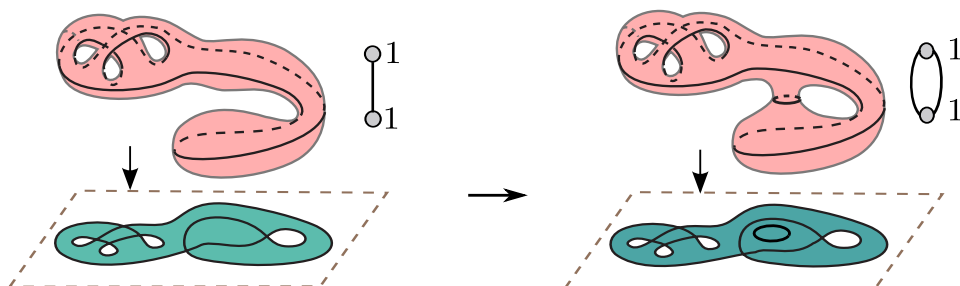


Figura 3.8: Exemplo de cirurgia vertical sobre o bitoro.

divide o toro em dois cilindro. Noque que poderia fazer a cirurgia sobre a curva singular do bitoro e quaisquer das curvas singulares do toro. Foi necessário fazer uma interseção entre as duas superfícies imersas para permitir fazer a cirurgia sobre a curva escolhida no toro. O resultante foi uma aplicação do 3-toros no plano com grafo resultante em $E = 2$, $V = 2$ e $W = 2$.

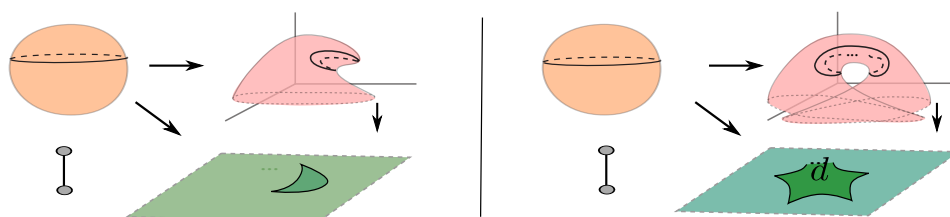


Figura 3.9: Exemplo de aplicações da esfera na esfera com grau d .

Example 3.14. A Figura 3.8 a direita ilustra uma aplicação do bitoro no plano com única curva singular com 6 pontos duplos. A direita ilustra uma aplicação do 3-toros no plano, com duas curvas singulares, que pode ser obtida por uma cirurgia vertical sobre a aplicação da esquerda, conectando as duas diferentes regiões regulares. Observe que a imersão pode ser “estirada” de forma que altera o contorno aparente mas não altera o número de componentes singulares.

Example 3.15. A Figura 3.9 à direita pode ser vista como uma aplicação da esfera na esfera com grau 1 e o contorno aparente com duas cúspides. Esta

aplicação pode ser obtida por uma transição lips sobre a aplicação identidade do esfera.

A aplicação à direita pode ser obtidas por $d - 1$ cirurgias horizontais entre d copias da aplicação à esquerda da esfera com grau um, obtendo assim uma aplicação da esfera na esfera com única curva singular, grau d e com $2d$ cúspides. Pode verificar que $2d$ é o menor número de cúspides para uma aplicação para uma aplicação da esfera na esfera com grau d , conjunto singular conexo e contorno aparente sem pontos duplos (ver [1]).

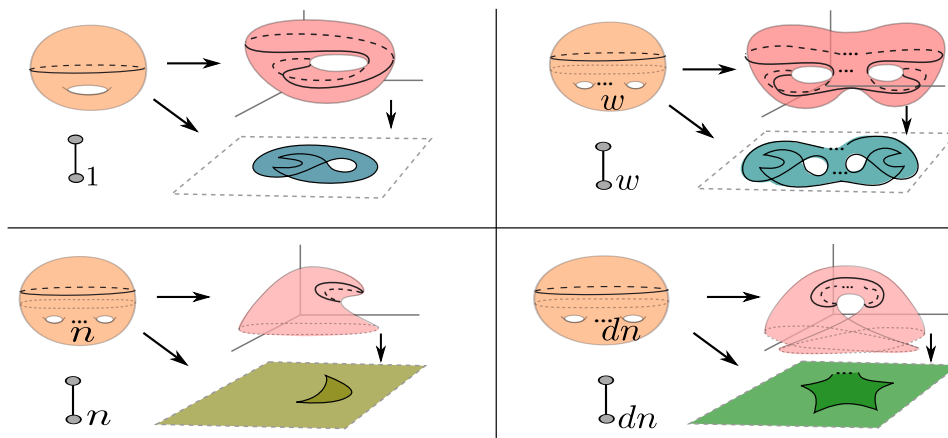


Figura 3.10: Exemplos de aplicações no n -toro.

Example 3.16. A Figura 3.10 ilustra à esquerda superior uma aplicação do toro no plano com única curva singular, dois pontos duplos e duas cúspides. A aplicação superior direita, do w -toro no plano (tem única curva singular com $2w$ pontos duplos e $2w$ cúspides) pode ser obtida por $w - 1$ cirurgias horizontais entre w copias da aplicação do toro (a esquerda).

A figura a esquerda e abaixo, ilustra uma aplicação do n -toro no n -toro com grau 1 e uma curva singular com duas cúspides. Esta aplicação pode ser obtida por uma transição lips sobre a aplicação identidade do n -toro. A aplicação à direita dessa pode ser obtidas por $d - 1$ cirurgias horizontais entre d copias da aplicação à esquerda com grau um.

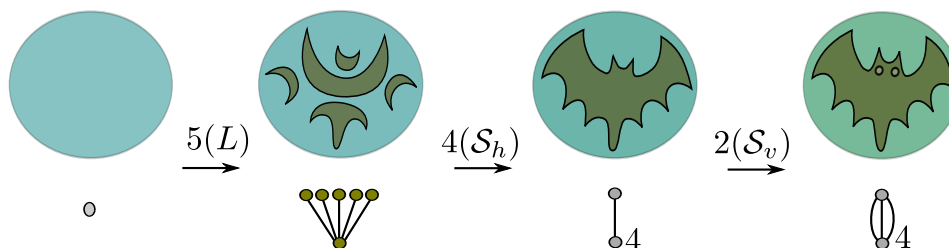


Figura 3.11: Construção de uma plicação do 6-toros na esfera.

Example 3.17. A Figura 3.11 apresenta uma seqüência (da esquerda para a direita) de aplicações com $d = 1$. A primeira corresponde a aplicação identidade da esfera na esfera com $E = 0$, $V = 1$, $W = 0$ (única componente regular que é a esfera). A segunda, também da esfera na esfera, tem $E = 5$, $V = 6$ e $W = 0$. Cada uma das curvas singulares pode ser obtida pela transição lábios. A terceira com $E = 1$, $V = 2$ e $W = 4$, pode ser obtida fazendo 4 cirurgias horizontais sobre a segunda aplicação. A última com $E = 3$, $V = 2$ e $W = 4$ pode ser obtida fazendo duas cirurgias vérticais sobre a terceira (“olhos do morcego”).

Example 3.18. A Figura 3.12 ilustra o contorno aparente de duas aplicações do 10-toro no 3-toro com grau 1, que podem ser obtidas a partir da aplicação identidade pela transição lips e as cirurgias horizontal e vertical.

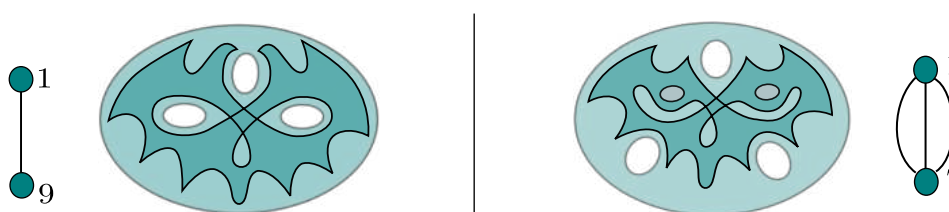


Figura 3.12: Exemplos de aplicações do 10-toro no 3-toro com grau 1.

Example 3.19. A Figura 3.13 ilustra duas aplicações sem cúspides: à esquerda a aplicação dobra tem grau 1 e grafo L_2 tem peso zero. A direita uma

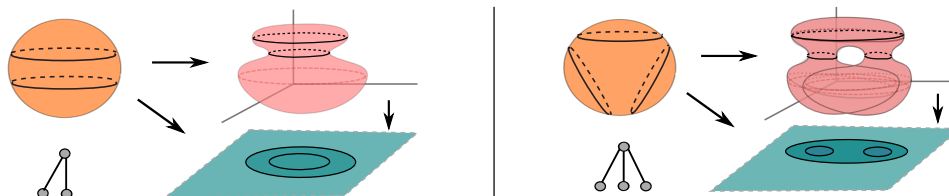


Figura 3.13: Aplicações dobra da esfera na esfera com grau 1 e 2.

aplicação com grau 2, que pode ser obtida por cirurgia horizontal entre duas copias da primeira, tem o grafo tipo estrela com 3 arestas e peso zero.

As cirurgias não alteram o número de cúspides das aplicações (aplicações dobra). Então podemos construir aplicações sem cúspides a partir de outras aplicações sem cúspides, como pode observar nas Figuras 3.7 e 3.8.

Denotamos por V^+ e V^- o número de vértices associados às regiões regulares positivas e negativas, respectivamente, e por W^+ (W^-) a soma total dos pesos nos V^+ (V^-) vértices:

1. $V^+ = V^-$ é uma condição necessária e suficiente para que um grafo $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ (árvore de peso zero) possa ser associado a uma aplicação sem cúspides da esfera no plano. Para mais detalhes, veja [8].
2. $V^+ - V^- = W^+ - W^-$ é uma condição necessária e suficiente para que o grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$ possa ser associado a alguma aplicação dobra de uma superfície fechada e orientada no plano. Para mais detalhes, veja [10].

APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES

Toda aplicação estável entre duas superfícies orientadas está associada a um grafo bipartido com pesos inteiros nos vértices (Proposição 3.6. Agora veremos os grafos que podem ser realizados por uma aplicação estável entre duas superfícies orientadas baseados em [9, 10, 15].

4.1. APLICAÇÕES NO PLANO

Dizemos que um grafo **realiza** quando existe alguma aplicação estável que pode ser associada a ele.

Lema 4.1. *Toda grafo L_n ($n > 0$) pode ser realizado por alguma aplicação $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Os grafos L_1 , L_2 e L_3 podem ser realizados por aplicações f_1 , f_2 e f_3 , como na Figura 3.1. Se $n > 3$, então L_n pode obtido como soma conexa vertical de no máximo k ($k \geq n/2$) grafos tipo L_i , com $i = 1, 2, 3$. Então L_n pode ser realizado pela aplicação estável $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, obtida por no máximo $(k - 1)$ cirurgias verticais entre aplicações do tipo f_1 , f_2 e f_3 . \square

Teorema 4.2. *Toda grafo $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ (árvore) pode ser realizado por alguma aplicação estável $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Se $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ é um L_n , então realiza como no Lema 4.1. Se $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ tem m vértices com grau $d_i > 2$ ($j = 1, \dots, m$), então ele admite uma decomposição em no máximo $r = \sum_{j=1}^m (d_j) - 1$ grafos tipo L_i ,

de forma que $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ pode ser obtido por cirurgias horizontais destes r grafos, como no Lema 1.13. Uma vez decomposto $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ nos r grafos tipo L_i , pode realizar os grafos L_i , como no Lema 4.1, por aplicações f_i . Por cirurgias horizontais entre as aplicações, respeitando a decomposição do grafo, obtemos a aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$. \square

Teorema 4.3. *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}(V, E, 0)$ pode ser realizado por uma aplicação estável $g : m\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $m = \beta_1(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Se $\mathcal{G}(V, E, 0)$ é um grafo com m ciclos, então $E = V + m - 1$. Retirando uma aresta de cada um dos $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$ que pode ser realizado por uma aplicação estável $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pelo Teorema 4.2.

Para obter uma aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza o grafo $\mathcal{G}(V, E, 0)$, podemos fazer uma cirurgia vertical sobre f , para cada uma das m arestas retirada do grafo, criando uma nova curva singular que realiza a aresta retirada.

Como a esfera é conexa, cada cirurgia vertical sobre h altera por $+1$ o gênero da superfície M resultante. Então o gênero de M é m . \square

Lema 4.4. *Toda árvore L_1 com peso w pode ser realizada por alguma aplicação estável $h : w\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Para $w = 1$, a árvore L_1 , pode ser realizada por uma aplicação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com única curva singular, como na Figura 3.2. Uma aplicação $h : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza L_1 com peso w pode ser obtida por $w - 1$ cirurgias horizontais sobre w aplicações do tipo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. \square

Teorema 4.5. *Toda árvore $\mathcal{G}(V, V - 1, W)$ pode ser realizada por alguma aplicação estável $r : W\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$*

Demonstração. O peso do grafo satisfaz $W = \sum_{i=1}^V w_i$, onde w_i é o peso do vértice v_i . Para $W = 0$, a árvore $\mathcal{G}(V, V - 1, 0)$, pode ser realizada por uma aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, como no Teorema 4.2.

Fazendo, para cada vértice com peso $w_i > 0$, uma cirurgia horizontal entre a aplicação f e uma aplicação tipo $h : w_i\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, no Lema 4.4, obtemos a aplicação estável $r : W\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. \square

Teorema 4.6. *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}(V, E, W)$ pode ser realizado por uma aplicação estável $s : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde M é uma superfície fechada e orientada com gênero $g(M) = 1 - V + E + W$.*

Demonstração. Se $\mathcal{G}(V, E, W)$ é um grafo com m ciclos, então $E = V + m - 1$. Retirando uma aresta de cada um dos $\mathcal{G}(V, V - 1, W)$ que pode ser realizado por uma aplicação estável $r : W\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, como no Teorema 4.5.

Para obter a aplicação estável $s : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza o grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$, podemos fazer uma cirurgia vertical sobre a aplicação r , para cada uma das m arestas retirada do grafo, como no Teorema 4.3, acrescentando mais m alças no W -toro. Logo o gênero de M é dado por $g(M) = m + W = 1 - V + E + W$, pela Proposição 1.52. \square

4.2. APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS

Os resultados sobre aplicações entre superfícies fechadas e orientadas podem ser vistos com mais detalhes em [10, 15]. Como na seção anterior, para o caso de aplicações no plano, vamos fazendo as construções por partes, começando com aplicações na esfera.

Diferente do plano, podemos ter aplicação identidade $id : N \rightarrow N$ (sem pontos singulares) que realiza o grafo $\mathcal{G}(1, 0, W)$. O grafo L_1 pode ser realizado por uma aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, com grau d , como no Exemplo 3.15.

Lema 4.7. *Todo grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$ que é realizável por uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser realizado por uma aplicação $h : M \rightarrow N$ com grau zero, onde M e N são superfícies fechadas.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}(V, E, W)$ um grafo associado a uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como M é fechada, então existe um disco D no plano com $f(M) \subset D$. Seja $j : D \rightarrow N$ um mergulho. Então $g = j \circ f : M \rightarrow N$ é uma aplicação com grau zero que realiza o grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$. \square

Teorema 4.8. *Todo grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$ que é realizável por uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser também realizável por uma aplicação $h : M \rightarrow \mathbb{S}^2$*

com grau d , onde M é uma superfície fechada e orientada com gênero $g(M) = 1 - V + E + W$.

Demonstração. Pelo Lema 4.7 o grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$ que é realizável no plano, também pode ser realizável na esfera com grau zero. Uma aplicação $h : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, com grau d , que realiza $\mathcal{G}(V, E, W)$ pode ser obtida por uma cirurgia entre a aplicação g e uma aplicação com única curva singular e grau d , como na Figura 3.9. \square

Teorema 4.9. [15] *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}(V, E, W)$ pode ser realizado por alguma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies fechadas e orientadas com grau $|d| \leq (W - 1)/(n - 1)$.*

Algoritmo de Realização: Todo grafo pode ser realizado por uma aplicação com grau zero entre duas superfícies fechadas e orientadas, pelo Lema 4.7. Agora vamos ver como construir aplicações com grau $d > 0$.

Dado um grafo bipartido $\mathcal{G}(V, E, W)$, para construir uma aplicação f com grau d , entre duas superfícies fechadas e orientadas, que realiza \mathcal{G} , primeiro devemos supor que a bipartição de \mathcal{G} , com sinais “+” e “-” nos vértices, satisfaz:

- (a) $W^+ - W^- \geq dn$,
- (b) existem vértices v_i^+ , $i = 1, \dots, V^+$, com pesos $t_i \geq d_i n$, onde $d_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^s d_i = d$.

Se $\mathcal{G}(V, E, W)$ tem as propriedades acima, um algoritmo bem resumido para a sua realização (por uma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas) é como segue (ver Figuras 4.1 e 4.2):

1. $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, W)$: retira uma aresta de cada um dos β_1 ciclos do grafo $\mathcal{G}(V, E, W)$.
2. $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, W - dn)$: subtrai pesos $d_i n$ em cada vértice, nos vértices com pesos $w_i > d_i n$ ($d = \sum_{i=1}^V d_i$), para a região que deseja colocar grau d_i .

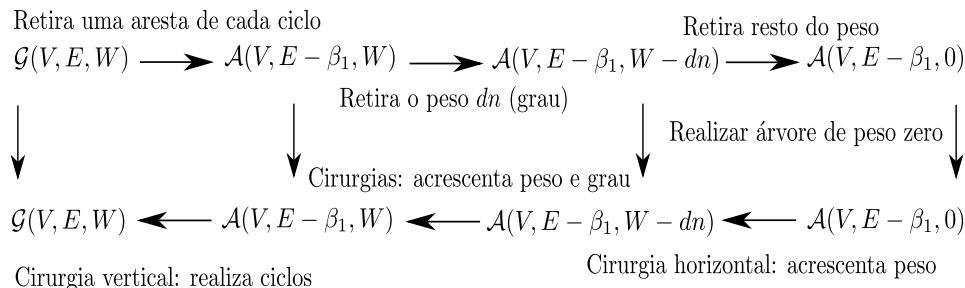


Figura 4.1: Exemplo de esquema para realização de um grafo.

3. $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, 0)$: retira os pesos todos os vértices.
4. decompõe a árvore $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, 0)$ em um conjunto de subgrafos \mathcal{A}_i , $i = 1, \dots, k$, de peso zero associadas às aplicações f_i , com grau zero já conhecidas.
 Por cirurgias (horizontais e/ou verticais) entre as aplicações f_i pode realizar $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, 0)$ por uma aplicação $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow N$ de grau zero.
5. realiza os pesos na árvore $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, W - dn)$ por cirurgias horizontais entre h e aplicações de grau zero $h_i : Z_i \rightarrow N$ com grafos $\mathcal{A}(2, 1, w_i - d_i n)$.
6. realiza a árvore $\mathcal{A}(V, E - \beta_1, W)$ por uma aplicação $f_0 : M_0 \rightarrow N$ obtida por cirurgias horizontais entre h e aplicações $g_i : Z_i \rightarrow N$, com grau d_i e grafos $\mathcal{A}(2, 1, d_i n)$.
7. a aplicação $f : M \rightarrow N$ que realiza $\mathcal{G}(V, E, W)$, pode ser obtida, realiza os ciclos do grafo do grafo por β_1 cirurgias verticais sobre f_0 .

O esquema na Figura 4.1 e o algoritmo indica uma forma de realizar o grafo dado, com objetivo de ajudar o leitor a construir um exemplo. Mas pode construir de outras formas, por exemplo: primeiro realiza o grafo com peso zero, por uma aplicação de grau zero. Para acrescentar os pesos, aplica cirurgia horizontal entre esta aplicação e aplicações com única curva singular, de acordo com peso de cada vértice, respeitando grau que cada vértice deve contribuir.

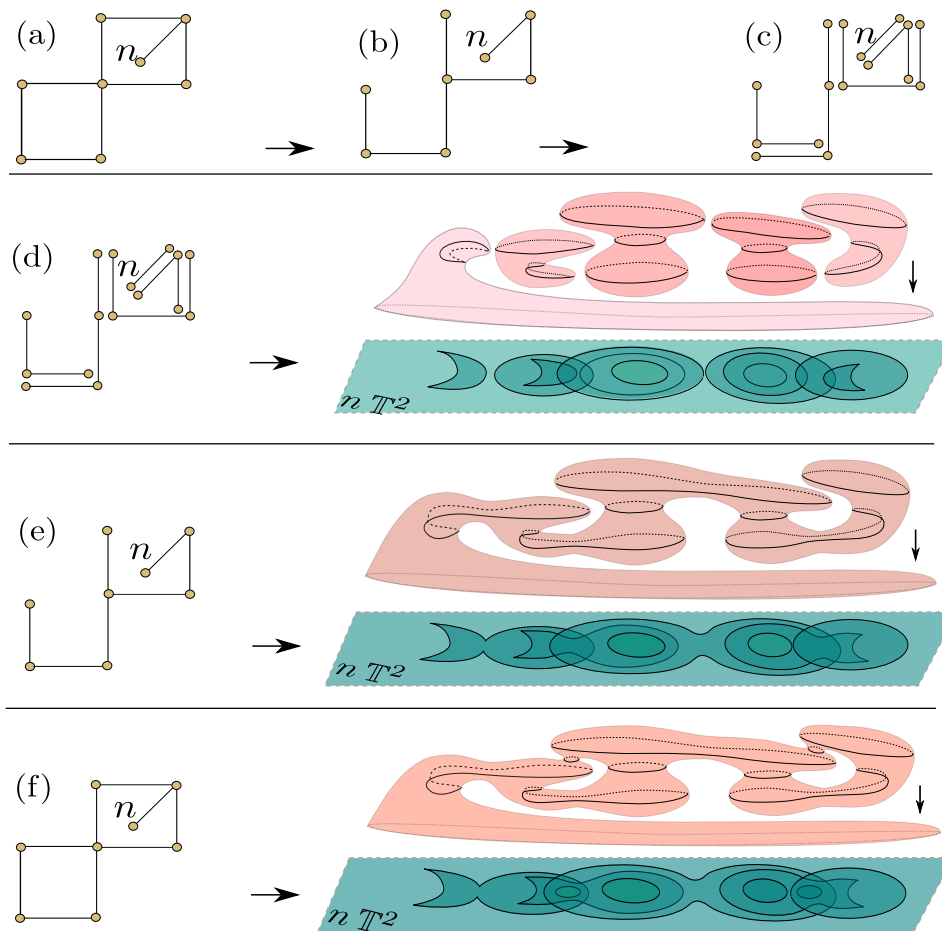


Figura 4.2: Aplicação de grau 1 e grafo com peso n .

A Figura 4.2 ilustra um exemplo de decomposição e realização do grafo, seguindo o algoritmo dado. No exemplo, o grafo tem único vértice com peso n que permitiu construir uma aplicação com grau 1. A representação planar corresponde uma região do n -toro contendo todo o contorno aparente.

Qualquer sugestão ou correção,
favor enviar para cmendesjesus@ufjf.br

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DEMOTO. S. Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve. *Hiroshima Math. J.* 35 (2005), 93-113.
- [2] ELIASHBERG. Y. On singularities of folding type. *Math. USSR-Izv.* 4 (1970), 1119-1134.
- [3] FUKUDA T. AND YAMAMOTO. T., Apparent contours of stable maps into the sphere, *Journal of Singularities*, 156 (2011), 113-125.
- [4] GIBSON. C. G. Singular Points of Smooth Mappings, Research Notes in Maths, 25, Pitman (1979).
- [5] GOLUBITSKY. M.; GUILLEMIN. V. Stable Mappings and Their Singularities, Springer Verlag, Berlin (1976).
- [6] V. GORYUNOV, Local invariants of maps between 3-manifolds, *Journal of Topology* (2013), 1-20.
- [7] LIMA. E. L. Introdução à Topologia Diferencial. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [8] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Fold maps from the sphere to the plane, *Experimental Maths*, 15 (2006), 491-497.
- [9] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, *Topology and Its Appl.*, 154 (2007), 166-175.

- [10] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere, *J. Singularities*, 2 (2010), 67-80.
- [11] HUAMANÍ. N. B.; MENDES DE JESUS. C. AND PALACIOS. J. Invariants of stable maps from the 3-sphere to the Euclidean 3-space, *Bull Braz Math Soc, New Series.* (2019).
- [12] KINSEY. L. C. *Topology of Surfaces*, Springer Verlag, New York (1993).
- [13] MASSEY. W. S., *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer (1991).
- [14] C. LEONARDO LUCCHESI, *Introdução a Teoria de Grafos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 1979.
- [15] MENDES DE JESUS. C. Graphs of stable maps between closed orientable surfaces, *Comp. Appl. Math.*, 36 (2017) 1185-1194.
- [16] MENDES DE JESUS. C. Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano. 2001. 103 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Departamento de Matemática, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2001.
- [17] MENDES DE JESUS. C.; BATISTA. E. B.; COSTA. J. C. F. Stable bi-maps from closed orientable surfaces to $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* (2021)
- [18] MENDES DE JESUS. C.; MORAES. S. M. DE.; ROMERO FUSTER. M. C., Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 42 (2011), 87-103.
- [19] MENDES DE JESUS. C.; OSET SINHA. R.; ROMERO FUSTER. M. C. Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to \mathbb{R}^3 , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 267 (2009), 205-216.

- [20] MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Graphs of stable maps between closed surfaces, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B55 (2016), 147-159.
- [21] MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane, *Topology and its Applications*, 234 (2017) 298–310.
- [22] MENDES DE JESUS. C. AND SANABRIA-CODESAL. E. Realization of graphs by fold Gauss maps, *Topology and Its Appl.*, 234: 248-258 (2018).
- [23] MENDES DE JESUS. C.; SANTOS. L. J.; ROMERO. P. D. Graphs of stable plane-Gauss maps, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* (2021)
- [24] MUNKRES. J. R. Topology: a first course, 2^a Edição. New Jersey: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.
- [25] OHMOTO. T.; AICARDI. F. First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45 (2006), 27-45.
- [26] PIGNONI. R. Minimal arrangements of singularities for apparent contours, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 313 (12) (1991) 873-878.
- [27] QUINE. J. R. A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds. *Trans. AMS* 236: 307–314, 1978.
- [28] THOM. R. Les singularites des applications differentiables, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955-1956), 43-87.
- [29] VASSILIEV. V. A. Complements of Discriminants of smooth maps, *Topology and applications*, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [30] WHITNEY. H. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.* (2) 62 (1955), 374-410.
- [31] YAMAMOTO. M. Immersions of surfaces with boundary into the plane. *Pacific J. Maths*, 212 (2003), 371-376.



HISTÓRIA E MATEMÁTICA DOS CONTEXTOS ÀS ATIVIDADES

MIGUEL CHAQUIAM

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

*Ao meu irmão
José Chaquiam
Um homem fraterno,
de poucas e sábias palavras.
(In memoriam)*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Um panorama sobre História e Matemática em sala de aula

1.1 O que aponta a literatura

2 A constituição do Diagrama-Metodológico

2.1 Os primeiros passos

2.2 O diagrama-metodológico atual e seus contextos

3 Da composição do diagrama à elaboração do texto

3.1 A pesquisa inicial e a composição do diagrama-metodológico

3.2 A elaboração do texto e os recortes para sala de aula

4 Sobre as atividades propostas e sua utilização

4.1 A pesquisa inicial e a composição do diagrama-metodológico

4.2 O diagrama, o texto e as atividades como recurso didático

Referências

PREFÁCIO

O ensino da matemática ao longo do tempo tem sido caracterizado, como apontam diversas pesquisas, como frio, mecanizado e decorativo, sem a preocupação do professor em tornar as aulas mais interativas, dinâmicas e interessantes para os alunos. Tais fatos que podem refletir na aprendizagem e os problemas podem ser percebidos a partir do desempenho dos alunos nas avaliações coordenadas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e pelo Ministério da Educação (MEC), dentre eles, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Provinha Brasil e Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Nesse sentido, percebe-se a necessidade de o professor buscar metodologias e formas diversificadas para o ensino, de modo a contribuir à melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. No campo da Educação Matemática identifica-se claramente alternativas que podem contribuir para um trabalho mais eficaz do professor e uma maior aprendizagem por parte dos alunos, a saber, História da Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas e Etnomatemática, dentre outras.

Pesquisas recentes apontam que a inserção de fatos da história pode ser uma dinâmica interessante na introdução determinados conteúdos matemáticos em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas da humanidade, conhecer suas preocupações em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. Lopes Ferreira [23] apontam que a História da Matemática vem se consolidando como área de conhecimento e investigação

em Educação Matemática ao longo das últimas quatro décadas e também que a história da matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes e que é possível mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos. Além disso, outras pesquisas desenvolvidas nesse campo indicam que há um crescente interesse por parte de professores no uso da história durante o ensino de conteúdos disciplinares e que o interesse dos alunos está intimamente ligado à motivação e interesse por essa ciência.

Embora muitos acreditem que seja desperdício de tempo e esforço, concordo com Weinberg [34] quando afirma que a pesquisa hoje é amparada e alumiada pelo conhecimento de seu passado, que pode contribuir para o sucesso do trabalho ou gerar infortúnios pelo seu desconhecimento. Nesse sentido, Vianna [33] resume as posições de André Weil (1906 – 1998) e de Dirk Jan Struik v (1894 – 2000) a favor do uso didático da história da matemática quando afirma que História da Matemática pode contribuir para “satisfazer nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram; proporcionar o encontro entre o especialista em Matemática e profissionais de outras áreas científicas e ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática”.

Sob o prisma da formação de professores, Mendes [28] ressalta que durante a formação inicial do professor, tanto didática quanto conceitual, o uso da história da matemática deve transcender aspectos centrados em personagens consagrados intelectualmente, datas e locais. Para Brandemberg [6] nessa formação são enfatizados aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos, com raríssimas inserções sobre a constituição ou evolução de conteúdos matemáticos, fato geralmente restrito a condução da disciplina história da matemática.

Ainda sob esse prisma, Miguel e Brito [29] relatam que por meio da história é possível evidenciar que a matemática modifica-se através dos tempos devido interferência de outros setores do conhecimento humano, da cultura e da técnica, entretanto, quando Miguel [30] discute as potencialidades pedagógicas da história da matemática, ressalta a ausência de literatura adequada e a natureza imprópria da literatura disponível sobre história da matemática, argumentos que não corroboram em relação utilização da história da matemática de forma didática.

A pesar as dificuldades apontadas, Borges e Cavalari [4] e Lopes Ferreira

[23] destacam que a inserção da história da matemática durante o ensino dos conteúdos matemáticos pode contribuir à compreensão de conceitos matemáticos, assim como, segundo Roque [32], “a história da matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos matemática”.

Pautado nesse cenário e nos caminhos trilhados por Chaquiam [8; 9; 10; 12;13; 14; 16], quanto as possibilidades integração da história geral, em especial a história da matemática, ao ensino de conteúdos matemáticos, faço a proposição de uso de um diagrama-metodológico, que contempla quatro contextos, para balizar a elaboração de textos que integram em seu bojo história e conteúdos matemáticos, bem como atividades associadas. Da necessidade de organizar didaticamente a disciplina de História da Matemática nos cursos de graduação e pós-graduação emerge um esboço desse constructo e, a partir de diversas aplicações, reflexões e avaliações chegou-se na proposta ora apresentada. Nesse diagrama metodológico orientador procura-se destacar o saber matemático em diversos contextos onde procura-se estabelecer conexões em quatro contextos: (i) histórico, sociocultural e geopolítico; (ii) personagens contemporâneos; (iii) epistemológico, científico e técnico e (iv) didático-pedagógico.

Ressalto que essa proposta não está endereçada aos matemáticos com experiência em história da matemática, tampouco aos historiados de profissão, mas, sim, àqueles que possuem pouca ou nenhuma experiência na elaboração de textos com esse viés. De forma mais específica, destina-se aos professores em geral em formação inicial ou continuada, tendo em vista aproximalos da história, em especial, da história da matemática, com o intuito de apresentar possibilidades de associações entre história e matemática num texto, balizado pelo referido diagrama, que também pode ser utilizado como um recurso didático nas aulas de matemática.

Embora o texto gerado a partir do diagrama-metodológico apresente maior alinhamento com os textos assentados numa perspectiva historiográfica tradicional, é possível agregar resultados oriundos de ações desenvolvidas sob uma perspectiva historiográfica mais atualizada. Nesse sentido, é provável que essa proposta para os historiadores de ofício que trabalham numa perspectiva his-

torigráfica mais atualizada venha despertar poucos interesses, entretanto, os nossos são bem diferentes dos interesses desses profissionais, os nossos “caminhos” podem servir de inspiração aos iniciantes, promover descobertas e vislumbrar possíveis interações entre os diversos contextos que integram o diagrama, numa aproximação da matemática e sua história.

Por fim, o diagrama apresenta-se também sob a perspectiva de formação específica e pedagógica. Justifico por meio do questionamento apresentado por André Weil no International Congress of Mathematicians, Helsinki, em 1978: “Quanto conhecimento matemático deve-se possuir para lidar com a história da matemática?” Além disso, observado os diversos contextos que compõem o diagrama-metodológico pode-se ampliar o questionamento anterior: Quanto conhecimento de matemática, de história da matemática e de história geral deve possuir um iniciante para lidar com os diversos contextos que compõem o diagrama e elaborar um texto que associe história e matemática para fins didáticos?

Esse texto está esteado nos trabalhos anteriores de minha autoria, constantes nas referências, e que nos quatro capítulos a seguir são abordados tópicos que relacionam história e matemática em sala de aula, caminhos trilhados durante a constituição e evolução do constructo ora proposto, orientações sobre a obtenção dos elementos constitutivos do diagrama-metodológico, direcionamentos quanto a escrita do texto e recortes deste para uso em sala de aula e, por fim, sobre a elaboração das atividades e suas finalidades.

Belém (PA), junho de 2022

Miguel Chaquiam

UM PANORAMA SOBRE HISTÓRIA E MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Apresento inicialmente discussões acerca da integração história e matemática, em particular história da matemática, e sua utilização durante o processo de ensino de conteúdos específicos. Para tanto, busco na literatura argumentos que apontam favoravelmente seu uso e pontuo sobre as possibilidades do uso da história em sala de aula, observado sua utilização durante o processo de formação inicial de professores. Parte das discussões derivam dos textos de Chaquiam [8; 9; 10; 12;13;14; 16; 17].

1.1. O QUE APONTA A LITERATURA

As pesquisas voltadas à História das Ciências e, em particular, da História da Matemática demonstram o crescente desenvolvimento desses campos, com maior impulso nesse século, e indicam que estão estabelecendo elementos que contribuem à melhoria do processo de ensino e de aprendizagem, nas diferentes áreas e em diversos níveis de ensino. Embora ainda seja necessário investigações que indiquem essa melhoria, pode-se conjecturar que são decorrentes do fato de proporcionarem uma melhor compreensão das origens das ideias que deram forma à nossa cultura, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços.

Os estudos também indicam que a combinação de outros recursos didáticos e metodológicos com a integração da história aos conteúdos específicos pode

contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem, assim, essa combinação insurge dentro do conjunto de possibilidades de ver e entender os conteúdos específicos de forma mais contextualizada e integrada às outras áreas do saber, tornando esse processo mais agradável, mais criativo e mais humanizado.

Embora tenhamos identificado trabalhos anteriores ao de Miguel e Brito [29], seguimos a partir desse numa ordem cronológica a apresentação das discussões sobre as possibilidades vinculadas ao uso e ao estudo da história. Para esses autores, a história pode possibilitar que o futuro professor perceba que a matemática modifica-se através dos tempos devido interferência de outros setores do conhecimento humano, da cultura e da técnica, além do “movimento de abstração e generalização crescentes por que passam muitos conceitos e teorias em matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático”. [29]

As posições de André Weil (1906 – 1998) e Dirk Jan Struik (1894 – 2000) relativas ao uso didático da história da matemática, assim como as contribuições decorrentes de seu estudo, encontram-se em Vianna [33], onde é destacado que a História da Matemática pode contribuir para:

- i. Satisfazer nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram;
- ii. O ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo;
- iii. Entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências, em particular a física e a astronomia; e também com as artes, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais;
- iv. O encontro entre o especialista em Matemática e profissionais de outras áreas científicas; v. Oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente e
- v. Ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática.[33]

D’Ambrosio conecta a Matemática as atividades humanas a partir das formas de fazer e de saber ao longo da história e reconhece que “as ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias

de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. [19]

Baroni e Nobre [1] posicionam as pesquisas no cenário brasileiro em oito blocos a partir das identificações de Hans Wussing, a saber: a) História de problemas e conceitos; b) As interligações entre Matemática, Ciências Naturais e Técnica; c) Biografias; d) Organizações institucionais; e) A Matemática como parte da cultura humana; f) Influências sociais ao desenvolvimento da Matemática; g) A Matemática como parte da formação geral do indivíduo; h) Análise histórica e crítica de fontes literárias. É importante destacar que em 1999 foi fundada a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBH-Mat) e a instituição bianual do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM)

A utilização da história da matemática na construção de noções basilares e conceituais dos objetos matemáticos é sustentada por Mendes [28], visto que isso pode permitir que o aluno participe da construção do conhecimento de forma ativa e crítica. Ainda no contexto de sala de aula, esse autor ressalta que as atividades estejam associadas a pesquisa, fato que pode proporcionar ao professor a possibilidade de inserção de problemas identificados ao longo da história da matemática e, a partir destes, iniciar o desenvolvimento das atividades pedagógicas.

Noutra perspectiva, Mendes, Fossa e Valdez [27] ressaltam que o desconhecimento da história da humanidade, em particular da história da matemática, pode ocasionar durante o processo de formação inicial do professor uma visão linear e acumulativa da Matemática, desconsiderar as contribuições das gerações passadas e seus contextos, além de desvincular a Matemática das outras áreas do conhecimento.

A instituição da SBHMat ao final da década de 1990 é um indicador de que a história da matemática no Brasil começa avigorar-se e Baroni, Teixeira e Nobre [2] classificam as pesquisas em quatro grandes temas, a saber: “i) História da Educação Matemática; ii) Concepções de professores de Matemática em relação à História da Matemática; iii) História da Matemática na formação do matemático e do professor de Matemática; iv) Utilização da História da

Matemática como recurso pedagógico.”

Para complementar o descrito acima sobre o movimento da história da matemática no Brasil, recomendamos o trabalho de Pereira [31], onde é dedicado uma seção ao “Movimento de pesquisas em História da Matemática” a partir da fundação da SBHMat e ressaltado textos que buscam tendências de história da matemática, relações com a educação matemática e possibilidades pedagógicas da História na educação Matemática.

No leque das possibilidades pedagógicas, Brandemberg [5] versa sobre o uso de textos históricos no ensino de conteúdos matemáticos e defende a inclusão da história da matemática como componente metodológica para o ensino. Sob o viés de texto histórico, esse autor [10] apresenta uma classificação em classes (Quanto ao conteúdo – Quanto ao distanciamento – Quanto ao uso – Quanto a investigação e quanto ao contexto) e categorias associadas as classes.

Relações entre matemática, história e ensino estão presentes em Mendes [25], onde são apresentadas possibilidades de uso da história da matemática no ensino de matemática a partir de reflexões teóricas e experiências. Com foco para ensinar matemática, esse autor apresenta reflexões acerca da utilização do conhecimento histórico na busca do conhecimento matemático, entrelaçando questões de ordem conceituais e didáticas.

O exposto acima situará o leitor sobre o processo de constituição, consolidação e evolução quanto ao uso da história da matemática sob diversos aspectos, principalmente aos relacionados ao processo de ensino e formação inicial de professores de Matemática. Recomenda-se visitar as referências bibliográficas com vista a ampliar o leque de informações sobre as possibilidades de utilização de informações históricas da matemática.

A CONSTITUIÇÃO DO DIAGRAMA-METODOLÓGICO

Aqui apresento recortes sobre a constituição e evolução do diagrama-metodológico, iniciado em 2005 quando assumo a disciplina História da Matemática no curso de licenciatura em Matemática e tendo em vista que inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

2.1. OS PRIMEIROS PASSOS

A partir de 2005, incomodado com a forma que a disciplina História da Matemática era ministrada e considerando que essa disciplina figura no último ano do curso e a possibilidade de viabilizar a retomada dos conteúdos matemáticos, propiciar reflexão sobre a importância do seu uso como recurso didático, passo a desenvolver pesquisas relacionadas ao uso da história da matemática no ensino de Matemática.

Os primeiros passos ocorreram por meio de seminários que, de um modo geral, ficaram restritos as leituras de textos obtidos em livros ou artigos e, principalmente, informações obtidas na internet. Além disso, observei que a maioria dos alunos procurou destacar nomes, datas e traços biográficos de per-

sonagens já reconhecidos. Em 2006, iniciei o curso com debates sobre como a História de Matemática pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, prosseguindo com a análise de livros didáticos do ensino fundamental e médio quanto ao uso da História da Matemática como estratégia/recurso didático facilitador do processo de ensino dos conteúdos matemáticos, fato que contribuiu para uma primeira tentativa de uso da história da matemática como recurso didático.

Na sequência, retomo os seminários envolvendo apresentação de personagens que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo, tendo em vista a construção de traços biográficos e a vinculação dos conteúdos identificados ao longo da história com os conteúdos atuais. Em decorrência da pouca experiência nesse campo, diria que os resultados foram razoáveis. A partir da apresentação dos trabalhos surge a Coleção Trilhos da Matemática [17], composta de vinte quadros, expostos inicialmente em dezembro de 2006.

Em 2007, a partir da aproximação com a SBHMat, intensifico os estudos e pesquisas relacionados ao uso da história da matemática como recurso didático. Ainda nesse sentido, em 2009 é realizado o VIII Seminário Nacional de História da Matemática (VIII SNHM) em Belém (PA) e Encontro Paraense de Educação Matemática (EPAEM) em 2011, sob a temática Faces da História da Matemática e da Educação Matemática na Amazônia.

A partir de 2012, com a conclusão do doutoramento, retomo as pesquisas e as empirias nas aulas de História da Matemática no curso de licenciatura em Matemática, quando decido ministrar parte dos conteúdos relacionados à disciplina História da Matemática a partir de personagens/matemáticos, correlacionando traços biográficos, seus contemporâneos, trabalhos produzidos e as principais contribuições à Matemática ou à Ciência.

Em 2013, apresento a palestra “Proposta para o ensino de matemática e da história da matemática a partir de matemáticos” [16] no XI ENEM, durante a participação na mesa intitulada “Propostas práticas de uso didático da História da Matemática na Educação Básica”. Nesse momento destaco pontos a importância de efetuar estudo detalhado a respeito do matemático eleito com objetivo de identificar as interações, tanto do ponto de vista do

conteúdo matemático quando as relações com outros matemáticos, bem como, a construção de um esquema primário, elege quais aspectos serão abordados/aprofundados para evitar um tratamento superficial, além do cuidado em não exagerar na quantidade de correlações. No diagrama estavam destacados personagem/matemático Leonhard Euler, associado ao tema “a evolução do conceito de função”, e visões recentes de Guilherme de La Penha e José Maria Filardo Bassalo.

Em 2015, de forma mais consolidada, apresento minicurso intitulado História da matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos [14], volume 10 da Série História da Matemática para o Ensino, livros publicados pela SBHMat durante a realização do SNHM. Em 2016, considerando os resultados de novas empirias, compartilho a publicação do livro História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores [25], a Parte I sob a responsabilidade do professor Iran Abreu Mendes - História da matemática e reinvenção didática na sala de aula, e a Parte II, de minha autoria, Um diagrama, um texto.

No livro Ensaio Temático – História e Matemática em sala de aula [12], publicado em 2017, apresento uma descrição mais elaborada do diagrama e trago oito resultados da aplicação do diagrama-metodológico por alunos da graduação e pós-graduação, além de ampla discussão sobre o uso da história no ensino de Matemática. Os livros de [25] e [12] estão disponíveis gratuitamente no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e no site do Grupo de Pesquisa GHEMAZ (<http://paginas.uepa/ghemaz>).

Em 2020, apresento na revista Paradigma o artigo História y Matemáticas Integradas através de un diagrama metodológico [10], retomo discussões acerca do diagrama-metodológico e discussões a respeito da evolução do diagrama de 2013 a 2017, bem como os resultados das empirias na visão de alunos da graduação e pós-graduação, que afirmaram não fazer uso da história da matemática em suas atividades acadêmicas ou profissionais e que o diagrama-metodológico contribuiu para aproximá-los da história da matemática e que está não restrita a nomes, datas e fatos, além de proporcionar melhoria quanto a elaboração de textos que envolvem história e matemática.

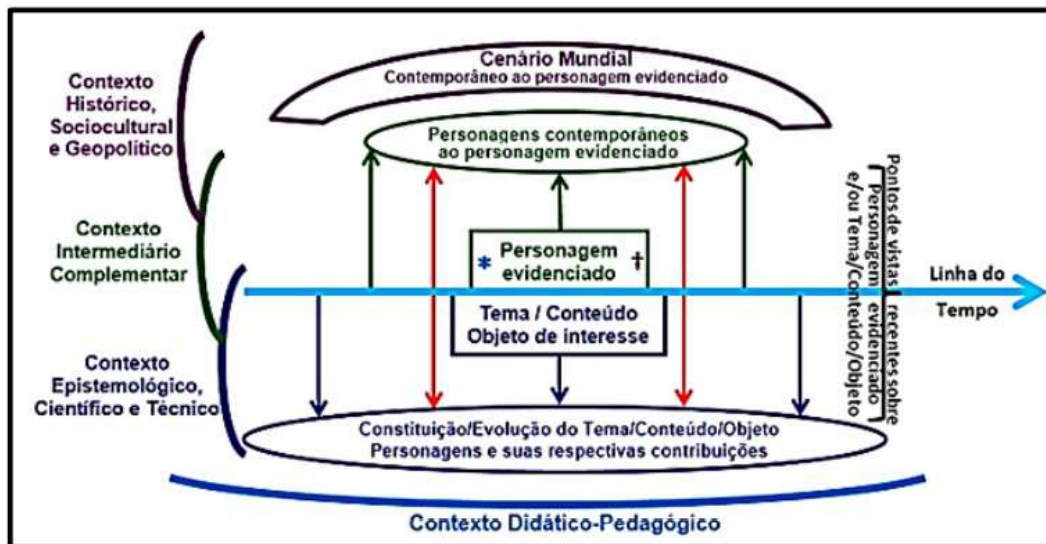


Figura 2.1: Diagrama-Methodológico

Observa-se que o diagrama é composto por quatro contextos, sendo que três deles foram alterados por alguma razão - Epistemológico, Científico e Técnico (diagrama anterior - Técnico Científico), Intermediário Complementar (diagrama anterior - Pluridisciplinar); Histórico, Sociocultural e Geopolítico (diagrama anterior - Sociocultural); Didático-Pedagógico. Ressalto que podem haver variações na forma de apresentação do diagrama-methodológico, tal qual no exemplo apresentado abaixo com a temática Conceito de Função.

2.2. O DIAGRAMA-METODOLÓGICO ATUAL E SEUS CONEXOS

O diagrama atual, apresentado a seguir, foi reestruturado quanto a dimensão dos contextos e detalhamento dos recortes efetuados a partir de uma história do tema/conteúdo/objeto. Essas modificações irão proporcionar mais liberdade durante a elaboração dos textos e, principalmente, na elaboração das atividades vinculadas a esses textos

No próximo capítulo descrevo cada um dos contextos, assim como a ordem que deve ser seguida no desenvolvimento da pesquisa. Ressalto que, embora

figure no digrama-metodológico uma linha temporal, isso não significa que estamos admitindo uma evolução do conhecimento de forma linear e, sim, apenas para situar em tempo e espaço cada um dos acontecimentos. Embora o processo se aproxime mais de uma historiografia tradicional, isso não significa que oportunamente possam ser inseridos elementos decorrentes de uma análise historiográficas mais atualizada.

DA COMPOSIÇÃO DO DIAGRAMA À ELABORAÇÃO DO TEXTO

Aqui descrevo o passo-a-passo da pesquisa, que inicia com a escolha de uma temática e finaliza com a identificação de trabalhos mais recentes que abordem essa temática ou o personagem que almeje evidenciar. A determinação dos elementos que compõem o contexto epistemológico, científico e técnico é crucial para a constituição dos demais contextos, isto é, sem esses elementos, não há texto.

3.1. A PESQUISA INICIAL E A COMPOSIÇÃO DO DIAGRAMA-METODOLÓGICO

A ordem proposta a seguir está em consonância com a ordem de prioridades e deve ser seguida ao longo do desenvolvimento da pesquisa. a) Inicia-se com a escolha de um tema/conteúdo/objeto matemático previsto para um dos níveis de ensino, preferencialmente da Educação Básica;

b) A partir dessa escolha, agora dentro do contexto epistemológico, científico e técnico, parte-se para a obtenção de informações que contribuam à constituição/evolução do tema/conteúdo/objeto definido;

c) Na sequência é feita a escolha do personagem que almeja evidenciar. Esse personagem emerge dentre aqueles identificados no contexto epistemológico, científico e técnico e que contribuíram para a constituição/evolução da temática selecionada;

d) Sobre esse personagem, os traços biográficos podem contemplar: a) Nome completo e pseudônimo, quando for o caso; b) Árvore genealógica, quando for possível identificar; c) Trajetória acadêmica e profissional; d) Trabalhos produzidos, dando ênfase aos mais importantes e/ou soluções de importantes problemas; e) Frases célebres; f) Fotografias pessoal, familiar, além de livros e trabalhos autorais ou em coautoria, dentre outras; g) Curiosidades, fatos pitorescos ou anedotas;

e) O contexto intermediário complementar contempla os personagens contemporâneos ao personagem evidenciado, seus traços biográficos e suas respectivas contribuições. Recomenda-se a inclusão de contemporâneos de diversas áreas do conhecimento;

f) O contexto histórico, sociocultural e geopolítico contempla a história geral contemporâneo ao personagem evidenciado, visando a delimitação em tempo e espaço;

g) Os pontos de vista atuais sobre o personagem evidenciado ou tema/conteúdo/objeto serve para adicionar outros olhares e trabalhos de historiadores ou pesquisadores que para associar elementos que ajudem a compreensão e análise da temática ou completar os traços biográficos do personagem evidenciado, tendo em vista a melhoria do texto e possibilitar a elaboração de novas atividades.

3.2. A ELABORAÇÃO DO TEXTO E OS RECORTES PARA SALA DE AULA

Um primeiro texto que descreve a evolução e constituição do conceito de função foi publicado em 2021 no livro *O Olho do Mestre: Dez Livros—Textos Históricos* [8], sob a organização do professor John Andrew Fossa, onde consta o capítulo intitulado *Constituição do Conceito de Função e generalidades por Leonhard Euler em Introductio in Analysis Infinitorum*. Para tanto, tomou-se por base o diagrama a seguir, diagrama que contemplou apenas o contexto epistemológico, científico e técnico por restrições espaciais no citado livro.

Para melhor entendimento do processo, recomendo a leitura do citado livro, disponível na página do Grupo de Pesquisa. A seguir está uma representação

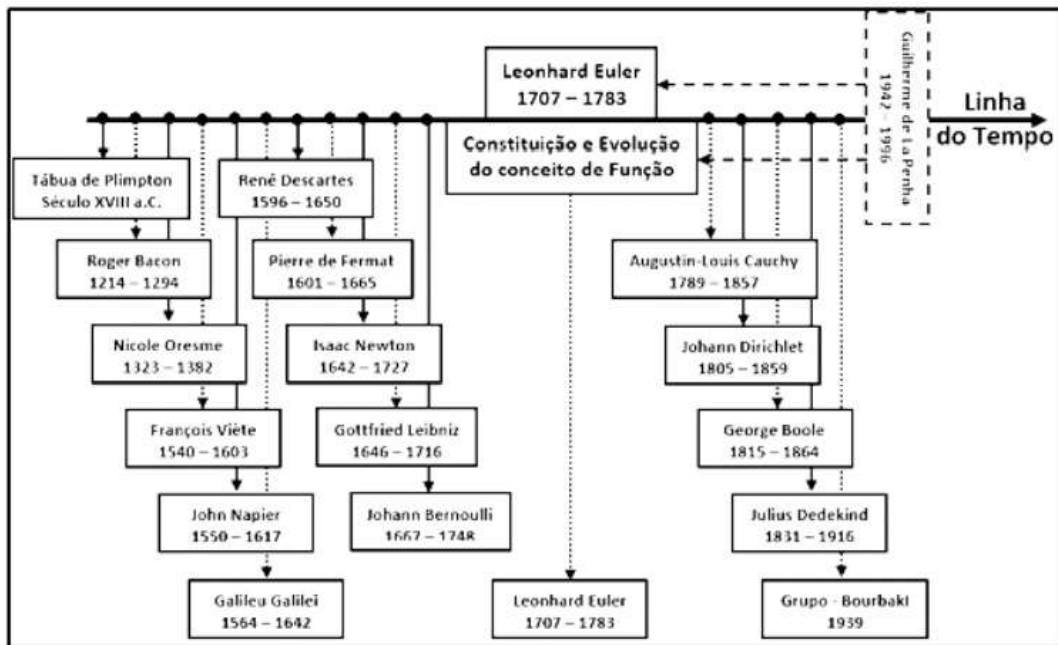


Figura 3.1: Contexto epistemológico, científico e técnico – Conceito de função.

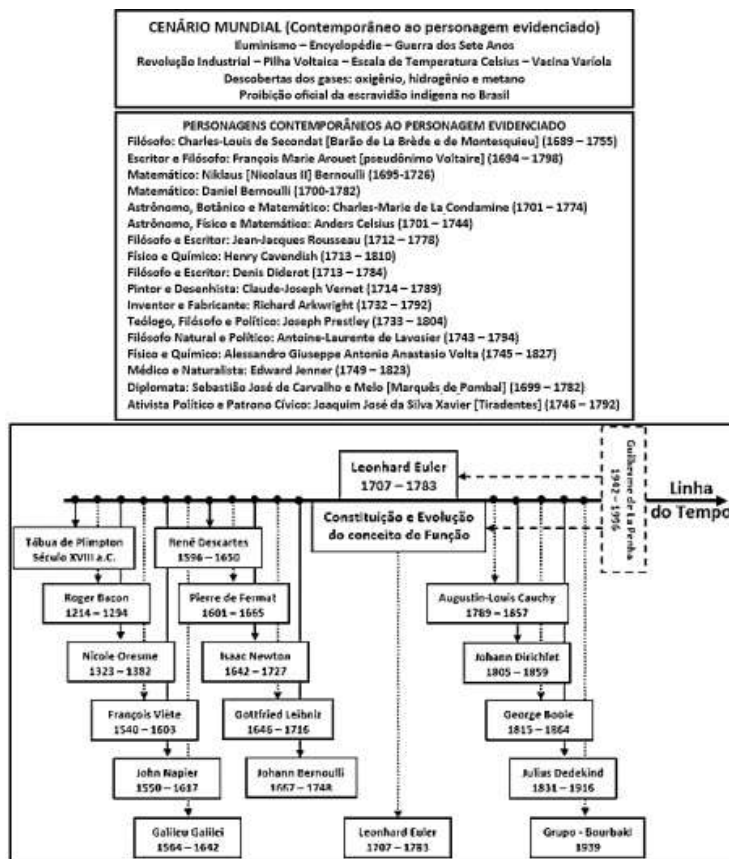


Figura 3.2: Contexto epistemológico, científico e técnico – Conceito de função.

do diagrama-metodológico e seus três contextos, exceto o contexto didático-pedagógico, visto que esse está diretamente vinculado ao texto produzido.

A partir desses dois diagramas é possível efetuar recortes e elaborar uma história envolvendo a constituição do conceito de função em consonância com os objetivos didáticos estabelecidos.

SOBRE AS ATIVIDADES PROPOSTAS E SUA UTILIZAÇÃO

As atividades estão intrinsecamente vinculadas ao texto elaborado, portanto, quanto maior o número de informações que podem ser exploradas didaticamente, maior será a quantidade de atividades vinculadas ao texto. Apresento apenas três atividades a partir de um possível recorte, observado os diagramas anteriores.

4.1. A PESQUISA INICIAL E A COMPOSIÇÃO DO DIAGRAMA-METODOLÓGICO

A título de ilustração, irei considerar apenas as primeiras definições de função, cujos personagens estão representados no diagrama da figura 4.1.

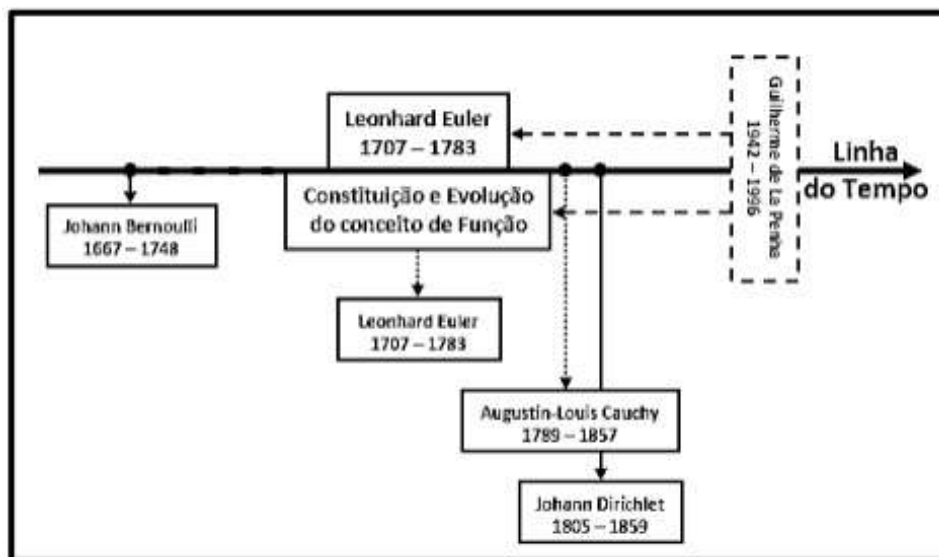


Figura 4.1: As primeiras definições de função.

As primeiras definições de Função

Os motivos que levaram a discutir o conceito de função foram os resultados da revisão de bibliográfica sobre a temática, entrevista com estudantes e professores do ensino médio e os conteúdos constantes nos livros didáticos da Educação Básica. Além disso, há o destaque dessa temática nos documentos oficiais que balizam a educação brasileira.

A revisão da literatura aponta que as dificuldades de aprendizagem do conceito de função sobrevivem da não compreensão da natureza das variáveis, tais como variabilidade, dependência e como elas se relacionam, associadas às abordagens mecânicas e abstratas sem conexões entre os elementos gráficos e as expressões algébricas.

Durante o século XVII o desenvolvimento dos estudos de curvas por métodos algébricos torna necessário designar um termo para representar quantidades que eram dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica. Nesse desenrolar, numa correspondência trocada por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748) entre 1694 e 1698, emerge a palavra “função” para aten-

der tal finalidade.

Em 1718, Johann Bernoulli publicou um artigo onde apresenta pela primeira vez a definição explícita de uma função como expressão analítica, a saber, “Chamamos a função de uma quantidade variável de uma quantidade composta de qualquer maneira, dessa quantidade variável e de constantes”. Nesse artigo, Bernoulli propõe o uso da letra f para denotar uma função $f(x)$, sem o parêntesis. A notação proposta por Euler em 1740 se encontra no formato $f(x/a + c)$, equivalente a $f(x)$. Além disso, ele denomina de “funções contínuas” aquelas definidas por uma única expressão analítica e de “funções mistas” aquelas que requerem expressões analíticas diferentes.

Finalmente, em 1748, Leonhard Euler em *Introductio in Analysis Infinitorum* publica sua definição para função. Na tradução francesa, *Intoduction à L’Analyse Infinitésimale*, essa definição encontra-se no Volume I, Capítulo I, Recursos em geral, página 2: “Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo, pela mesma quantidade e números, ou com quantidades constantes”.

Euler coloca o conceito funcional desempenhando um papel central na análise matemática, classifica funções de acordo com a forma de sua expressão analítica, rompe com a geometrização da análise matemática e dá início ao que atualmente consideramos como Análise Matemática Moderna. A maioria das funções nesse tempo fossem analíticas no sentido moderno do termo, nem sempre é possível determinar a natureza algébrica ou transcendente pela simples análise da sua expressão. A função definida por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + 1 + e^x + 1 - e) / (x^n + 1)$, para $x \geq 0$, quando n tende ao infinito tem-se: a) $f(x) = e^x + 1 - e$, se $0 \leq x < 1$; b) $f(1) = 1$ e c) $f(x) = x$, se $x > 1$.

Euler denomina de “funções contínuas” aquelas definidas por uma única “expressão analítica” e que “funções mistas” são aquelas que requerem “expressões analíticas diferentes”. Assim, a primeira das ideias a ser criticada nesse contexto foi exatamente a de haver isolado a classe das “funções mistas”.

O matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) apresentou em 1844 a função definida pelas expressões $f(x) = x$, se $x \geq 0$ e $f(x) = -x$, $x < 0$, que é mista, mas também é contínua, contrapondo Euler a considerou “descontínua”.

Cerca de vinte e sete anos depois do *Introductio in Analysis Infinitorum*, em 1755, em seu *Institutiones calculi differentialis*, Euler, citado por La Penha (1986), reformula sua definição de função procurando explicitá-la de uma forma tão universal quanto abstrata possível e apresenta:

Se algumas quantidades dependem de tal forma de outras quantidades que, se as últimas variam as primeiras também o fazem, então as primeiras quantidades são chamadas funções das últimas. Esta denominação é da mais ampla natureza e compreende cada método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x representa uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x de um modo qualquer ou são Poe [por] ele determinadas, são chamadas funções dele (sic). [22]

Para finalizar, tomo o exemplo apresentado em 1829 pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), onde afirma que há uma função que não é representada por uma expressão analítica ou por várias delas, tão pouco sua representação gráfica pode ser desenhada a mão livre e que é descontínua em todos os pontos do seu domínio no sentido moderno e, não no sentido de Euler, a saber: $f(x)$ será c ou d , se x for racional ou irracional, respectivamente, sendo c e d são constantes arbitrárias distintas.

Atividades

Atividades Tomando por base o texto elaborado a partir do diagrama é possível elaborar atividades que exigem reflexões ou aplicações de conteúdos matemáticos do passado e atuais.

a) Considerando a primeira definição de função apresentada por Euler, faça uma comparação com as definições de função constantes nos livros didáticos de Matemática.

b) Tome o exemplo apresentado por Cauchy para contrapor Euler e reescreva-o noutra formatação matemática e faça um esboço do seu gráfico.

c) Apresente argumentos sobre o fato da função apresentada por Dirichlet ser contínua no sentido de Euler e descontínua no sentido moderno.

Esses três exemplos de atividades podem representar a dimensão e as possibilidades de uso da história da matemática no ensino de conteúdos matemáticos.

4.2. O DIAGRAMA, O TEXTO E AS ATIVIDADES COMO RECURSO DIDÁTICO

O conjunto, diagrama-metodológico, texto e atividades, proposto é uma das muitas pesquisas que procuram relacionar a história da matemática com o ensino de conteúdos matemáticos. De certa forma, esse constructo – o diagrama-metodológico – pode ser visto como um organizador na integração história e matemática em diversos contextos, bem como proporcionar uma visão global da constituição e evolução das ideias matemáticas que temos hoje.

Essa proposta orienta a elaboração e a escrita de um texto que contempla uma abordagem multicontextual, proporciona a integração da história e matemática e fornece uma visão global aos iniciantes da historicidade do conhecimento científico. Embora apresente característica de uma visão historiográfica tradicional, a linha temporal não caracteriza um desenvolvimento linear do conhecimento científico, apenas posiciona no tempo e espaço os acontecimentos, desagregado de uma visão presentista e evolucionista, podendo conter elementos oriundos de pesquisas desenvolvidas numa perspectiva historiográfica mais atualizadas.

As avaliações das empirias que envolveram alunos da graduação e pós-graduação quanto as dificuldades encontradas no desenvolvimento da pesquisa e elaboração do texto, a maior parte desses alunos foram categóricos em afirmar que tiveram dificuldades em obter informações para constituição elementos do diagrama, muito provavelmente acarretado pela escassez de referenciais teóricos ou materiais didáticos que abordem a história de conteúdos matemáticos. Além disso, apontam que há pouca literatura disponível que apresente parâmetros claros e bem definidos quanto ao uso da história da matemática em

sala de aula.

Discussões em torno das potencialidades pedagógicas oriundas do diagrama proposto e do uso da história da matemática no ensino indicam que há uma maior aproximação dos alunos com a história da matemática, contribuições para compreensão dos conteúdos matemáticos, estabelecimento de conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento, além de ressaltar nos revela a importância das propostas didáticas com viés histórico durante a formação inicial de a importância de ações dessa natureza como estratégias didática.

Por fim, informo que ainda este ano será lançado um livro com informações detalhadas sobre o diagrama-metodológico, textos balizados por este e atividades decorrentes do texto envolvendo história dos juros, da probabilidade, dos números complexos e trigonometria. Esse livro será disponibilizado no site do Grupo de Pesquisa GHEMAZ (<http://paginas.uepa/ghemaz>).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARONI, R.L.S. e NOBRE, S.R. (1999). *Pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática*. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, p. 129-136.
- [2] BARONI, R.L.S. e TEIXEIRA, M.V. e NOBRE, S.R. (2004). *Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática*. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (Orgs.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez. p. 164-185.
- [3] BICUDO, M.A.V. e GARNICA, A.V.M. (2003). *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- [4] BORGES, L.C. e CAVALARI, M.F. (2021). *A História da Matemática em propostas didáticas para a formação de professores: um estudo em teses e dissertações brasileiras*. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Campos Mourão (PR), v. 10, n. 32, p.174-199.
- [5] BRANDEMBERG, J.C. (2021). *Sobre Textos Históricos e o Ensino de Conteúdos Matemáticos*. In: *Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática sob o Olhar da Pluralidade*. Curitiba (PR): CRV.
- [6] BRANDEMBERG, J.C. (2020). *Una propuesta para el uso de historia en la enseñanza de las matemáticas: sobre la potencialidad didáctica de los textos históricos y el desarrollo de conceptos*. *Revista PARADIGMA*, v. XLI, N^o Extra 1; pp. 266-284.

- [7] BRASIL. (2017). *Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 2 de 22/12/2017, Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/CNE.
- [8] CHAQUIAM, M. (2021). *Constituição do conceito de função e generalidades por Leonhard Euler em Introductio in Analysis Infinitorum*. In: O Olho do Mestre: Dez livros-textos históricos. Org. Fossa, J. A. Campina Grande (PB): EDUEPB.
- [9] CHAQUIAM, M. (2021). *Da Tábua de Plimpton às primeiras definições de função*. In: Investigações científicas envolvendo a história da matemática sob o olhar da pluralidade. Org. Pereira, A. C. C; Martins, E. B. Curitiba: Editora CRV.
- [10] CHAQUIAM, M. (2020). *História e Matemática Integradas por meio de um Diagrama Metodológico*. Revista PARADIGMA, v. XLI, Nº Extra 1; pp. 197-211.
- [11] CHAQUIAM, M. e CABRAL, N.F. (2019). *Funções: uso, desuso e reflexão sobre o ensino*. Belém: SINEPEM.
- [12] CHAQUIAM, M. (2017). *Ensaio Temático: História e Matemática em sala de aula*. Belém: SBEM-PA.
- [13] CHAQUIAM, M. (2016). *Um diagrama, um texto*. In: MENDES, I.A. e CHAQUIAM, M. História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat. pp. 77 - 125.
- [14] CHAQUIAM, M. (2015). *História da matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*. Natal: Livraria da Física.
- [15] CHAQUIAM, M. (2015). *Uso e Implicações das Linguagens no Ensino de Matemática*. Coleção Educação Matemática na Amazônia, v. 4. Belém: SBEM-PA.

- [16] CHAQUIAM, M. (2013). *Proposta para o ensino de matemática e da história da matemática a partir de matemáticos*. Anais do XI ENEM. SBEM: Curitiba (PR).
- [17] CHAQUIAM, M. (2006). *Trilhos da Matemática um resultado da disciplina história da matemática*. Anais do V ENEM. SBEM: Belo Horizonte (MG).
- [18] D'AMBROSIO, U. (2013). *A Interface entre História e Matemática: Uma Visão Histórico-Pedagógica*. Revista de Matemática, Ensino e Cultura. Natal (RN): EDUFRN.
- [19] D'AMBROSIO, U. (1999). *A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática*. In: BICUDO, M.A.V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 97-115.
- [20] DIAS, M.S.; SAITO, F. (2013). *Interface entre História e Ensino de Matemática: Aspectos Teóricos e Metodológicos*. In. Actas del VII CIBEM. Montivideo, pp. 7502 – 7509.
- [21] EULER, L. (1796). *Introduction a L'Analyse Infitésimale*. Tradução J. B. Labey. v. 1. Paris.
- [22] LA PENHA, G.M.S.M. (1998). *A evolução do conceito de função*. Rio de Janeiro: EPUC- RJ.
- [23] LOPES, L.S. e FERREIRA, A.L.A. (2013). *Um olhar sobre a história nas aulas de matemática*. Revista Abakós. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.
- [24] MENDES, I.A. (2022). *Usos da História no Ensino da Matemática: Reflexões Teóricas e Experiências*. São Paulo: Livraria da Física.
- [25] MENDES, I.A. e CHAQUIAM, M. (2016). *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*. Belém: SBHMat.

- [26] MENDES, I.A. (2015). *História da Matemática no Ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas*. São Paulo: Livraria da Física.
- [27] MENDES, I.A. e FOSSA, J.A. e VALDES, J.E.N. (2006). *A história como um agente de cognição na educação matemática*. Porto Alegre: Sulina.
- [28] MENDES, I. A. (2001). *O uso da história no ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências*. Belém (PA): EDUEPA.
- [29] MIGUEL, A. BRITO, A.J. (1996). *A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática*. Cadernos CEDES - História e Educação Matemática. Campinas (SP): Papyrus.
- [30] MIGUEL, A. (1997). *As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*. Revista Zetetiké. Campinas (SP).
- [31] PEREIRA, A.C.C. (2021). *Pesquisas Científicas em História da Matemática e suas relações com o Ensino de Matemática nos Anais do SCHM*. In: Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática sob o Olhar da Pluralidade. Curitiba (PR): CRV.
- [32] ROQUE, T; CARVALHO, J.B.P. (2012). *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM.
- [33] VIANNA, C.R. (1998). *Usos didáticos para História da Matemática*. Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática. (Org) Fernando Raul Neto. Recife (PE): SBHMat. pp. 65 – 79.
- [34] WEINBERG, S. (2015). *Para explicar o mundo: A descoberta da ciência moderna*. São Paulo: Companhia das Letras.



INTEGRAL DE RIEMANN GENERALIZADA: ALÉM DA INTEGRAL DE LEBESGUE

ANDRÉ FELLIPE RIBEIRO DE ALMEIDA
CRISTINA LÚCIA DIAS VAZ

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 O problema da Área

1.1 Área

1.2 Newton e Leibniz

2 Cauchy, Riemann e Lebesgue

2.1 A integral de Cauchy

2.2 A integral de Riemann

2.3 A integral de Lebesgue

3 Riemann Generalizada

3.1 Medidores e Partições δ -refinadas

3.2 A integral de Riemann Generalizada

4 Considerações finais

Referências

PREFÁCIO

Este texto propõe-se a fazer uma apresentação das principais ideias e conceitos da integral desde Cauchy até a integral de Riemann Generalizada e ajudar a promover esta última como uma ferramenta possível de ser ensinada nos cursos de graduação em matemática. Foi escrito como texto-base para o minicurso apresentado na X Bienal de Matemática 2020 promovida pela Sociedade Brasileira de Matemática e surgiu da paixão antiga (desde 2011) dos autores pelo tema, quando culminou com o trabalho de conclusão de curso de um deles.

Iniciaremos com uma breve evolução do conceito de integral do século XVII por Newton e Leibniz, destacando o problema de cálculo de áreas na Grécia Antiga, formalizaremos a integral utilizando as ideias de Cauchy e as implicações teóricas desse conceito que introduziram uma integral mais geral que é chamada integral de Riemann. Como motivação para a integral de Lebesgue, abordaremos as principais ideias do artigo “Sobre uma generalização da integral definida: tradução do primeiro trabalho de Henri Lebesgue sobre sua nova Integral” de Sílvio César Otero-Garcia, no qual temos a tradução do artigo onde Henri Lebesgue apresenta a definição de uma nova integral, hoje conhecida como integral de Lebesgue. Para irmos além, apresentaremos o conceito de uma integral que generaliza a de Lebesgue e seus principais resultados, a famosa integral de Riemann Generalizada ou também integral de Kurzweil-Henstock. Esta integral foi desenvolvida de forma independente pelos matemáticos Ralph Henstock e Jaroslav Kurzweil entre 1957 e 1962 e se mostrou uma ferramenta muito poderosa.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 apresen-

taremos o problema da área e os seus desdobramentos até a sua solução no século XVII com a invenção do cálculo por Isaac Newton e Gottfried Leibniz. No capítulo 2 destacamos as teorias de integração de Augustin Cauchy, Bernhard Riemann e Henri Lebesgue. No capítulo 3 apresentamos a integral de Riemann Generalizada. No capítulo 4 fazemos nossas considerações finais.

Agradecemos a Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade e a todos aqueles que nos incentivaram a escrever este texto.

Belém, 20 de junho de 2022

André Almeida
Cristina Vaz

O PROBLEMA DA ÁREA

1.1. ÁREA.

A integral é uma ferramenta matemática que surge com o advento do cálculo iniciado por Isaac Newton e Gottfried Leibniz no século XVII. Contudo a sua ideia e sua utilidade surgem desde o século V a.C. com o problema envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas. Incrivelmente este problema, que remonta à Grécia antiga, só começou a ser resolvido vários séculos depois com o fortalecimento do pensamento matemático e incontáveis trabalhos de diversos matemáticos ao longo do tempo. Observando a história da ciência podemos observar grandes cientistas que resolveram grandes problemas em suas respectivas áreas de conhecimento e assim elevaram a ciência a um novo patamar. Com a matemática não foi diferente e, em especial, o cálculo integral. A integral que conhecemos hoje e estudamos em nossos cursos de Cálculo levou muitos anos para ser fundamentada e posteriormente ensinada. Ainda mais, a teoria da integração cresceu e avançou mesmo após os trabalhos de matemáticos como Newton, Cauchy, Riemann, Lebesgue serem compreendidos completamente.

Na Grécia Antiga, era conhecido a ideia de área de figuras planas poligonais, como por exemplo, triângulos e quadriláteros, podendo-se trabalhar sempre com a decomposição de figuras planas poligonais mais trabalhosas em triângulos e entendia-se a soma das áreas desses triângulos como sendo a área da figura, contudo a dificuldade residia em trabalhar com figuras planas “arredondadas” que envolviam círculos ou setores circulares. Uma forma encontrada na época era a de se calcular a quadratura, isto é, determinar um quadrado que possui mesma área que a região estudada, processo conhecido como qua-

dratura. Hipócrates de Atenas (430 a.C.) foi um dos primeiros a trabalhar com áreas de figuras de forma arredondada, com o que ficou conhecido como lúnula de Hipócrates, como podemos ver na figura abaixo.

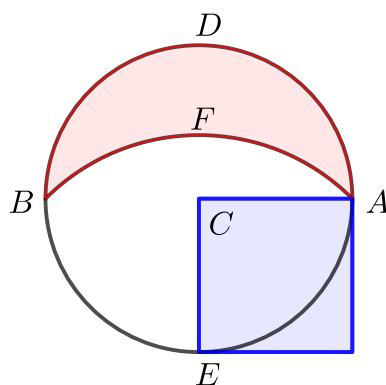


Figura 1.1: Lúnula de Hipócrates

onde a área da lúnula (região entre os arcos circulares ADB e AFB, em vermelho) é igual a área do quadrado de lado igual ao raio do círculo de centro em C (em azul). A demonstração desse resultado pode ser consultada em [9, p.3-4].

Muitos naquela época também buscavam encontrar métodos para determinar áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, contudo, percebeu-se que tais métodos precisavam ter alguma validação, isto é, algum meio de comprovação (ou se quisermos nos termos modernos, uma demonstração) da veracidade do método ou afirmação utilizados. Um dos métodos mais famosos que chegaram até nós foi o Método da Exaustão atribuído a Eudoxus (408 a.C) que consiste em uma dupla redução ao absurdo e cujo enunciado é: “considerando duas grandezas desiguais, se da maior subtraímos uma grandeza maior que sua metade, e se este processo é repetido continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor das grandezas consideradas”.

Tal método era utilizado pelos matemáticos da época para “provar” rigorosamente os procedimentos de cálculo de áreas e volumes e dentre esses matemáticos gregos, podemos destacar Arquimedes de Siracusa (287 a.C.), que descobriu que uma expressão para algumas áreas e volumes com um método próprio e ainda utilizou o Método da Exaustão para comprovar seus resultados rigorosamente. Um dos seus resultados mais conhecidos é o cálculo da área do círculo que consta em [8, p.9-10]

Example 1.1. A área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo cuja altura é o raio do círculo e cujo comprimento é o comprimento da circunferência.

Durante a idade média, os trabalhos de Arquimedes (assim como o de muitos filósofos e matemáticos gregos) foram pouquíssimos difundidos e por isso não houve um expressivo desenvolvimento ou avanço na matemática durante essa época. Contudo, apenas no século XVII os trabalhos de Arquimedes começaram a ser difundidos pela Europa, durante o Renascimento. Entretanto, os trabalhos desenvolvidos nessa época tentaram a todo custo esquivar-se do Método da Exaustão, por ser um método rigoroso e cada vez menos usado, uma vez que muitos trabalhavam com ideias pouco rigorosas e gerais e desenvolviam métodos de cálculo com certa intuição e experimentação. Mas a partir deles muitos matemáticos conseguiram desenvolver grandes ideias, dentre os quais podemos destacar os trabalhos de Bonaventura Cavalieri. Este foi discípulo de Galileu Galilei e em seu trabalho, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* postula o que chamamos de Princípio de Cavalieri: “Se dois sólidos (ou regiões planas) tem alturas iguais e se secções paralelas às bases e as distâncias iguais delas estão sempre a uma razão, então os volumes (ou áreas) dos sólidos (ou regiões) também estão nessa razão”. Um exemplo famoso sobre o uso desse método pode ser encontrado em [10, p.426], onde considerando que a equação da elipse com centro na origem e eixo maior $2a$ sobre o eixo das abscissas é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

e a equação da circunferência com centro na origem e raio a é:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

então, temos que para $y > 0$,

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}$$

e

$$y = (a^2 - x^2)^{1/2}$$

Logo, suas ordenadas são dadas em razão $\frac{b}{a}$, logo, pelo princípio de Cavalieri as áreas da região limitada pela elipse (A_E) e do círculo (A_C) também deveriam ter a mesma razão, isto é,

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{b}{a}A_C \\ A_E &= \frac{b}{a}\pi a^2 \\ A_E &= \pi ab \end{aligned}$$

Esse método foi a base do que Kepler adotou na época para determinar a área da região limitada pela elipse em seus trabalhos. Além de Kepler, outros cientistas como John Barrow utilizaram o princípio de Cavalieri para obter a integração de expressões como x^n , $n \in \mathbb{N}$. Outras contribuições importantes foram as de Pierre Fermat com as quadraturas das regiões limitadas pela curva do tipo $y = x^n$ além de avanços no cálculo diferencial.

1.2. NEWTON E LEIBNIZ

Dentre os nomes que prepararam o campo para a criação do Cálculo Integral há de se destacar os de John Wallis e Isaac Barrow. Wallis nasceu em 1616 e foi um escritor e matemático brilhante, além de professor de geometria em Oxford. Em seu livro *Arithmetica infinitorum*, aparece o que hoje seria

$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$, além de outros resultados obtidos a a partir de casos particulares. Barrow, por sua vez, nasceu em 1630, em Londres, e era versado em teologia, física, matemática e astronomia. Em sua obra *Lectiones opticae et geometricae*, há a utilização de um método chamado “triângulo diferencial” no qual há uma abordagem parecida com o processo de diferenciação moderno. Além disso, é considerado que Barrow foi um dos primeiros a notar a relação entre diferenciação e integração (mesmo sem esses processos ainda não terem sido nomeados dessa forma) e na obra supracitada há uma versão ainda inicial do teorema fundamental do cálculo.

Segundo [10, p.435], muitas integrações, cálculos de áreas e volumes já haviam sido realizados e retificações destes também; também já havia indícios da criação do processo de diferenciação e a ideia de limite já estava no pensamento da época; por fim o teorema fundamental já tinha sido estabelecido. O que restava fazer era a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um novo desenvolvimento, agora rigoroso, dos fundamentos. Este primeiro foi possível com os trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz, enquanto que o segundo seria realizado quase dois séculos depois.

Newton e Leibniz fundaram o Cálculo Integral, resolvendo assim o problema da área. Lançando mão de diversos trabalhos da época e generalizando muitos resultados obtidos, desenvolveram uma linguagem simbólica e universal que pudesse ser utilizada para a solução e formalização de diversos resultados. Em seus trabalhos, Isaac Newton desenvolveu o chamado “Método dos Fluxos” onde definia que uma quantidade variável era chamada *fluente*, x e sua variação em relação ao tempo era chamada *fluxo do fluente*, \dot{x} , o que poderíamos considerar hoje como a derivada de uma função em relação ao tempo. Nesse sentido, Newton definiu o que chamou de “momento” de um fluente x sendo dado por $\dot{x}o$, que se trata de acréscimo infinitamente pequeno sofrido por um fluente em um intervalo de tempo o infinitamente pequeno. Sendo assim, substituindo os fluentes por seus respectivos momentos e desprezando os termos em que o possui expoente maior ou igual a 2 e mais algumas manipulações algébricas, obteríamos uma relação entre fluentes e seus fluxos, o que pode ser comparado

ao processo de diferenciação (derivação). Contudo, outra abordagem para o método de Newton poderia ser obtida, onde o objetivo era determinar uma relação que envolvesse apenas os fluentes, o que pode ser comparado hoje ao processo de integração.

Um dos resultados de Newton que mostre o alcance de suas ideias é o estabelecimento do Teorema Fundamental do Cálculo. Em 1666, Newton escreve alguns problemas em seu *Tract on Fluxions* onde descreve alguns problemas, dentre os quais pode ser compreendido que ele relaciona encontrar a área de uma região limitada (“fluentes”) por uma curva conhecendo a “natureza” da curva. A descrição da resolução destes problemas pode ser encontrada em [8, p.87-89], mas fica evidente que Newton já tinha ciência da relação entre a área de uma região limitada por uma curva e a forma dessa curva (inclinação da curva ou ainda o “fluxo” em um instante). Vale também ressaltar que muitos dessas “fluentes” (quadraturas/integrações) foram encontradas através do uso de expansões em série por meio da generalização do teorema do binômio (atribuído a Newton) onde se utilizaria não apenas expoentes naturais mas também expoentes racionais. Um exemplo disso era que Wallis não encontrou o valor da quadratura de $(x - x^2)^{1/2}$, encontrado por Newton por seu método e utilizando o que chamamos hoje de integração termo a termo. Veja [6, p.18].

Leibniz destaca-se pela criação das notações que se mantiveram até hoje em nossos livros de cálculo, além de ser mais didático que Newton. Além disso, Leibniz publicou seus resultados primeiro que Newton, o que ocasionou uma disputa entre quem seria o inventor do cálculo. Deixando as desavenças de lado, é importante salientar a importância das notações de Leibniz, pois, as notações de Newton não foram bem aceitas pela Europa continental, muito provavelmente devido à esta disputa, e ficaram restritas à Inglaterra. Contudo, os trabalhos de Leibniz chegaram até matemáticos famosos como os irmãos Bernoulli, e posteriormente seus ensinamentos foram repassados também ao rico marquês de L'Hospital, autor do primeiro livro, considerado historicamente, de cálculo, *Analyse des infiniment petits*.

Por mais que os trabalhos de Newton e Leibniz tenham sido revolucionários para a época, algumas coisas ainda precisavam ser melhor explicadas, como por exemplo, o porque desconsiderar o intervalo de tempo infinitamente pequeno

o quando elevado a potências maiores ou iguais a 2. Newton deu algumas explicações, mas não foi muito convincente. Outro ponto a ser destacado era que a ideia de encontrar as “fluente” estava estritamente ligado ao de “fluxo”, isto é, a ideia (ou conceito) de integral de Newton e Leibniz estava ligada à de derivada, evidenciando assim que, no sentido de Newton e Leibniz, resolver uma “fluente” (integral) equivale a encontrar uma primitiva do “fluxo”. Contudo, isso seria o palco para outros trabalhos que buscariam um rigor maior em suas definições.

CAUCHY, RIEMANN E LEBESGUE

2.1. A INTEGRAL DE CAUCHY

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) estudou na “École Polytechnique” ingressando depois na “École des Ponts et Chaussées”, trabalhou como engenheiro e resolveu problemas de interesse matemático enquanto isso e ao retornar a Paris, tem como feitos notáveis a sua inserção como membro da Academia de Ciências e tornou-se professor da “École Polytechnique”.

Era tradição da “École Polytechnique” que os professores escrevessem textos didáticos, não ficando Cauchy de fora desta tradição, então ele escreveu três livros: “Cours d’Analyse de l’École Polytechnique” (1821); “Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal” (1823) e “Leçons sur le calcul différentiel” (1829). Nesses livros, Cauchy introduz uma definição mais rigorosa de limite, que foi atribuído a D’Alembert: “Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, este último se chama o limite dos outros todos”.

Além disso, Cauchy foi o primeiro a definir o infinitésimo como uma variável dependente e não como um número fixo e muito pequeno, como seus antecessores. A definição usada por Cauchy era: “Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente de modo a convergir ao limite zero”.

Desde a fundação do Cálculo Integral por Newton e Leibniz, tínhamos que a integral somente tinha o sentido de antiderivada, isto é, sua definição era sempre vinculada à definição de derivada. Porém, Cauchy foi o primeiro a

definir integral de uma função de forma independente da derivada, uma vez que observou que funções que possuem derivada em um ponto necessariamente deveriam ser contínuas no referido ponto, mas que funções poderiam ser descontínuas em um ponto e delimitarem regiões com áreas bem definidas.

A integral de Cauchy para área delimitada por uma curva contínua em um intervalo fechado e o eixo das abscissas foi definida de modo construtivo. Primeiramente, consideremos uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e um conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, sendo que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

chamado **partição** de $[a, b]$.

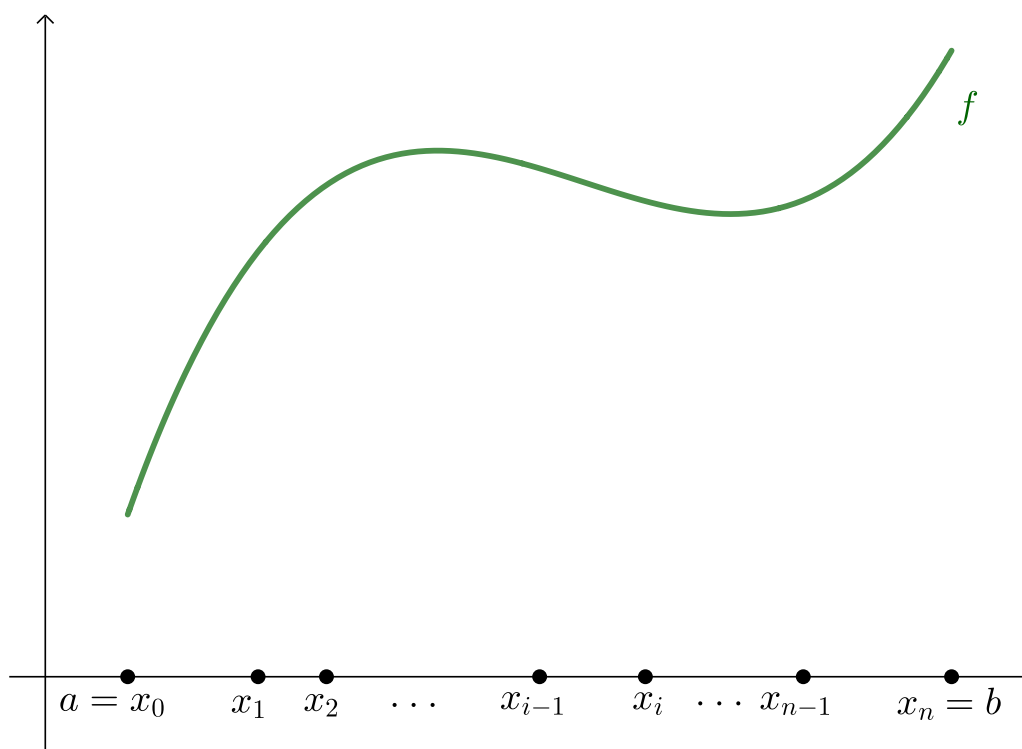


Figura 2.1: Partição de um intervalo $[a, b]$

Os pontos de \mathcal{P} dividem o intervalo $[a, b]$ em subintervalos fechados $I_i := [x_{i-1}, x_i]$.

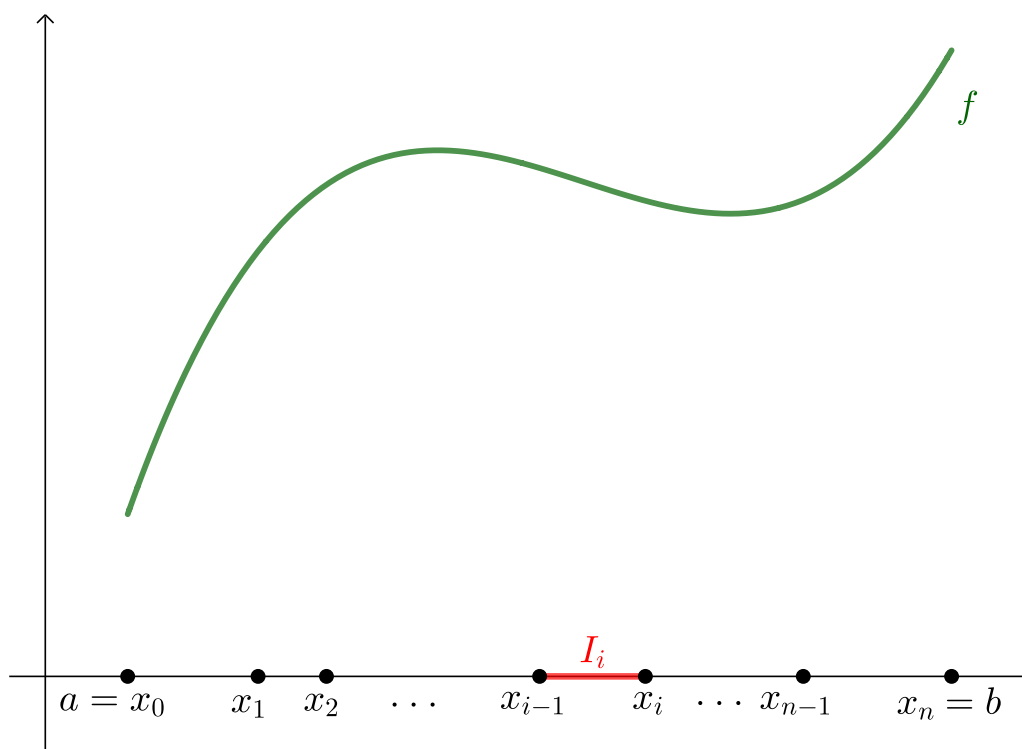


Figura 2.2: Subintervalos da partição

Dessa forma, Cauchy notou que era possível construir retângulos, cuja base seria o comprimento do subintervalo I_i , isto é, o número $x_i - x_{i-1}$ e altura dada pela imagem da função no extremo esquerdo do subintervalo, isto é, $f(x_{i-1})$.

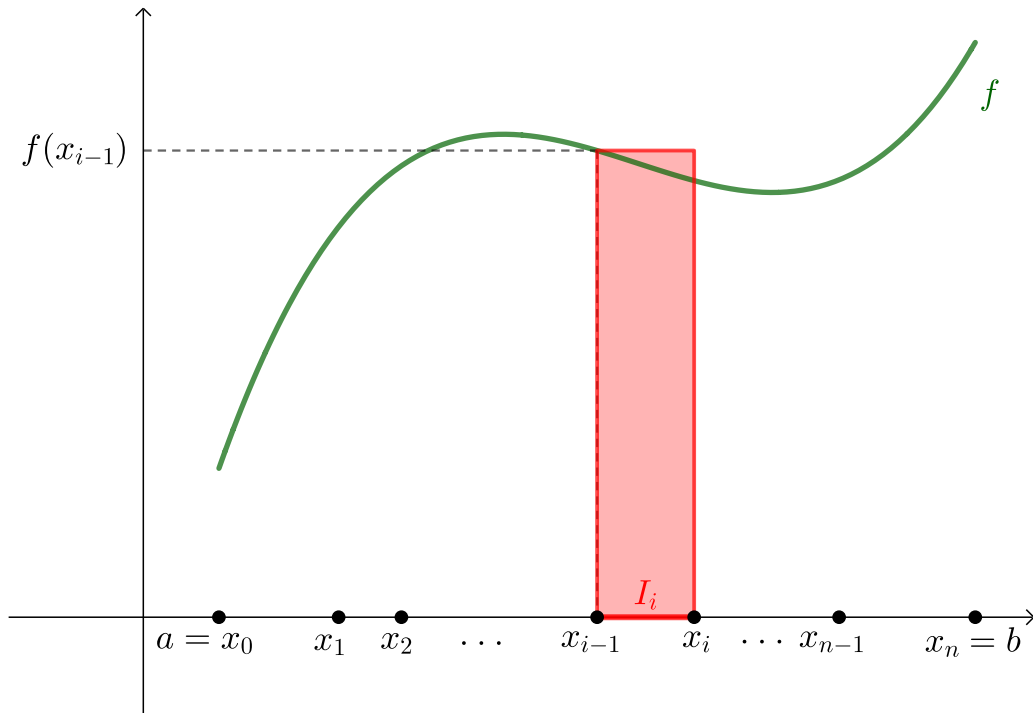


Figura 2.3: Retângulos de área $f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Desse modo, tomamos as **Somas de Cauchy**, dadas por

$$S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (2.1)$$

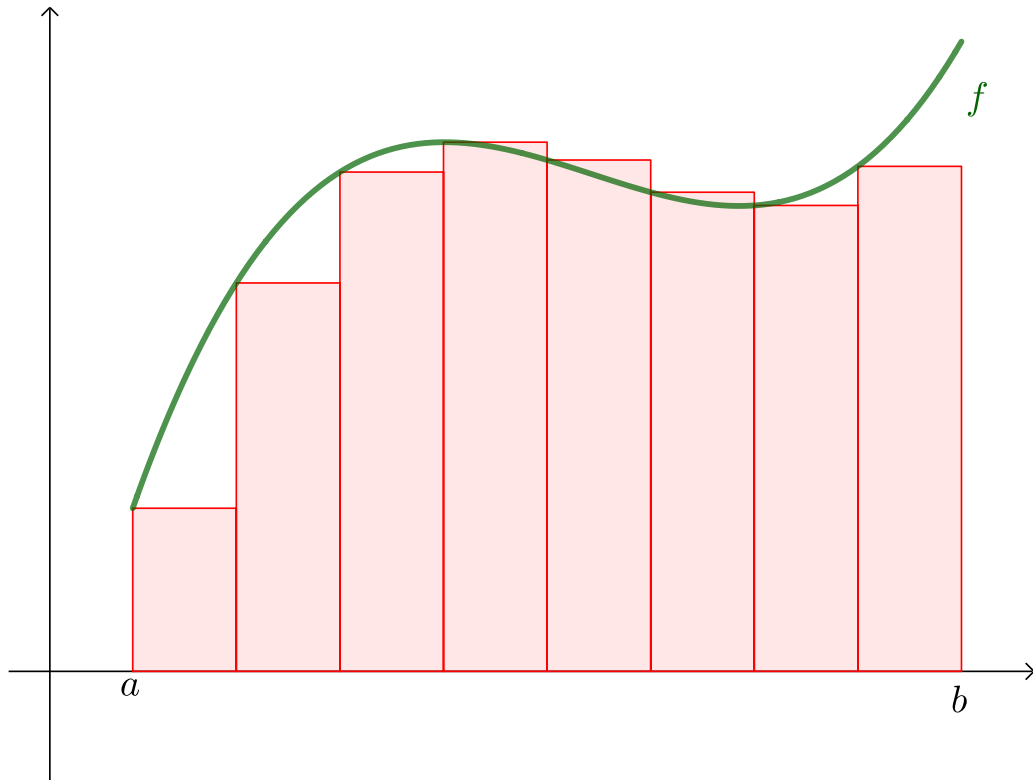


Figura 2.4: Soma de Cauchy com 8 retângulos

que corresponde à soma de todos os retângulos formados. Note que quanto maior a quantidade de pontos na partição \mathcal{P} maior a quantidade de retângulos formados e por conseguinte, menor é a diferença entre a soma de Cauchy para a área desejada.

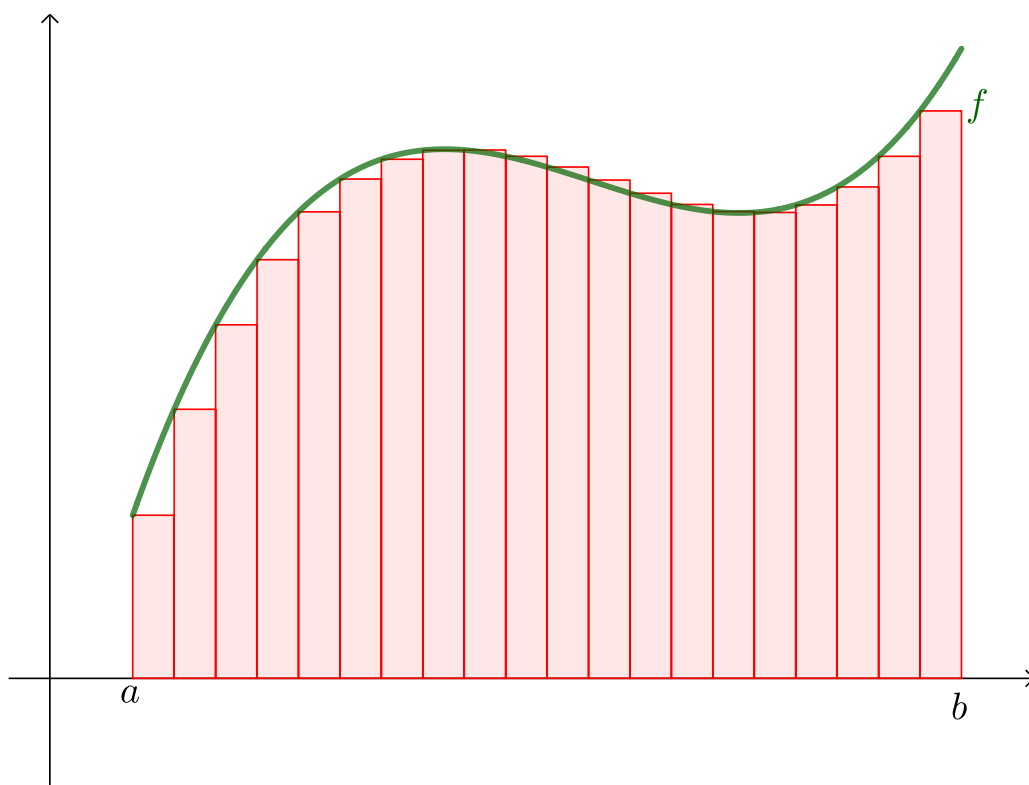


Figura 2.5: Soma de Cauchy com 20 retângulos

Dessa forma, Cauchy definiu que se o valor da soma em (2.1) se aproxima tanto quanto se queira de um número A sempre que o número de elementos da partição \mathcal{P} fica infinitamente maior, para toda partição de $[a, b]$, então A é a integral de Cauchy para a função f no intervalo $[a, b]$. Como trataremos de mais de uma definição de integral, adotaremos a notação da integral de Cauchy da seguinte forma:

$$A = \mathcal{C} \int_a^b f(x) dx$$

Em notação moderna, a integral de Cauchy poderia ser definida por:

Definição 2.1 (Integral de Cauchy). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos que f é Cauchy integrável em $[a, b]$ se existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se \mathcal{P} é qualquer partição de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ então

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| < \varepsilon \quad (2.2)$$

onde $\|\mathcal{P}\|$ é chamada norma da partição \mathcal{P} e representa o comprimento do maior subintervalo da partição, isto é

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Sobre os principais avanços que a integral de Cauchy, Magossi e Barros em [11, p.244] afirmam: “O estudo de integral em Cauchy indica um procedimento **construtivo** (algorítmico) voltado ao cálculo de integrais e não simplesmente um procedimento **descritivo** onde se deve ‘adivinhar’ a resposta, ou seja, determinar alguma função primitiva”.

Além disso, Cauchy mudou a noção de resolução de uma integral. Antes, com a teoria de Newton e Leibniz, deveríamos sempre encontrar uma primitiva, agora, ele introduziu a ideia de uma função ser integrável, ou seja, pertencer a uma classe de funções que atende a uma determinada propriedade (no caso, a sua definição de integral). Ele ainda chegou a trabalhar com funções que apresentavam uma quantidade finita de descontinuidades e é provado que a integral definida por ele é válida para essa classe de funções, e quando se tratava de funções do tipo $f(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^2}$, por exemplo, precisou utilizar integrais impróprias, em outras palavras, limites acoplados com a integração.

Em [9, p.35] vemos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo, para a integral de Cauchy:

Teorema 2.2. *Se F é uma função derivável em (a, b) e F' é contínua em $[a, b]$ então F' é Cauchy integrável em $[a, b]$; e*

$$\mathcal{C} \int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a, b]$.

A principal desvantagem da integral de Cauchy se dá pela classe de funções integráveis se restringir, em sua maior parte, às funções contínuas, o que

limitava muito o cálculo de integrais de funções como por exemplo, a função de Thomae, dada por $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{n}, & \text{se } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \text{ com } m, n \in \mathbb{N}, \text{ primos entre si} \end{cases}$$

Note que a função é descontínua em um número infinito de pontos. O próximo passo para o avanço da teoria de integração só seria dado no final do século, por Bernhard Riemann.

2.2. A INTEGRAL DE RIEMANN

Quando os trabalhos de Cauchy estavam sendo melhor entendidos e utilizados no final do século XIX, algumas dificuldades surgem dos trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier no que tange a escrita de funções como uma série de funções trigonométricas, chamada série de Fourier, uma vez que os coeficientes dessa expansão são dados por integrais. Muitas questões pairavam no ar e muitos matemáticos como Peter Gustav Lejeune Dirichlet tentaram desenvolver matemática para solucionar tais questões, contudo muitos dos problemas apresentados sempre chegavam a conclusão de que a integral de Cauchy não era suficiente para a solução de tais dúvidas. Sendo assim, em 1854 durante o trabalho de habilitação para se tornar professor de uma universidade alemã, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que tratou sobre a representação de funções em série de Fourier, desenvolveu em poucas páginas, a definição da integral que chegaria até nós com o seu nome.

Filho de um pastor luterano, Riemann nasceu em Hanover, Alemanha. Cursava Filosofia e Teologia em 1846 na universidade Göttingen quando mudou para a universidade de Berlim para estudar matemática, sob a orientação de Dirichlet, retornando em 1849 para Göttingen e fazer seu doutoramento sob a orientação de Gauss. No ano de 1854, após seu doutorado, fez uma espécie de exame de habilitação para ser professor da universidade de Göttingen onde deveria desenvolver uma nova tese sobre um tema da matemática e o

trabalho resultante foi *On the Representation of a Function by a Trigonometric Series* (Da representação de uma função por uma série trigonométrica, tradução nossa) onde Riemann enuncia e prova as condições suficientes e necessárias para a existência dos coeficientes de da expansão em série de Fourier. Para responder esta pergunta, Riemann teve que definir uma nova integral, baseando-se no processo construtivo de Cauchy e fazendo modificações que expandiriam a classe de funções integráveis.

Riemann considerou uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Tomando uma partição do intervalo $[a, b]$, dada por $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, sendo que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

como Cauchy fez. Porém, em vez de tomar sempre o extremo esquerdo de cada subintervalo, x_{i-1} , para construir a altura dos retângulos do processo construtivo, Riemann definiu que poderia ser escolhido qualquer ponto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Desse modo, ao ser escolhido um ponto de cada subintervalo da partição, deu-se origem ao que os autores de matemática chamam de partição rotulada ou etiquetada ou ainda pontilhada, onde $t_i \in I_i$ é o rótulo ou etiqueta ou ponto do subintervalo I_i . E desse modo, utilizaremos a notação $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$, onde $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e $x_i \in \mathcal{P}$. Sendo assim, construiu os retângulos cujo comprimento é o comprimento dos subintervalos e altura igual ao valor de $f(t_i)$.

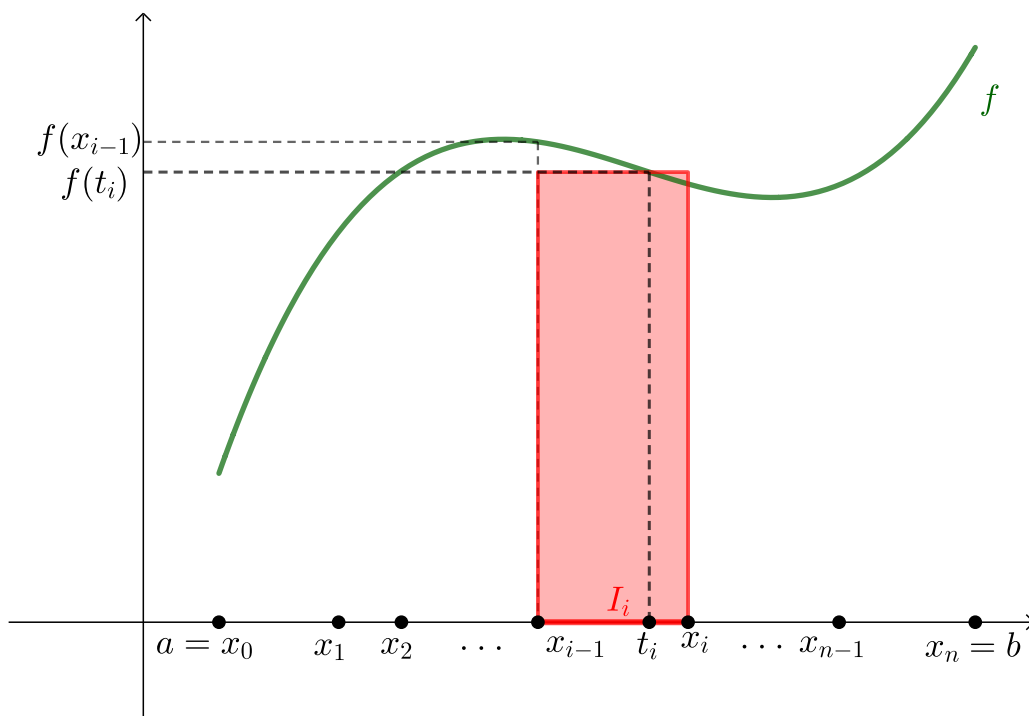


Figura 2.6: Retângulo sobre I_i

Analogamente a Cauchy, Riemann definiu o que foi chamado de somas de Riemann:

$$S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (2.3)$$

que representa a soma das áreas dos retângulos cujo comprimento é o comprimento de cada subintervalo e a altura é o valor de $f(t_i)$.

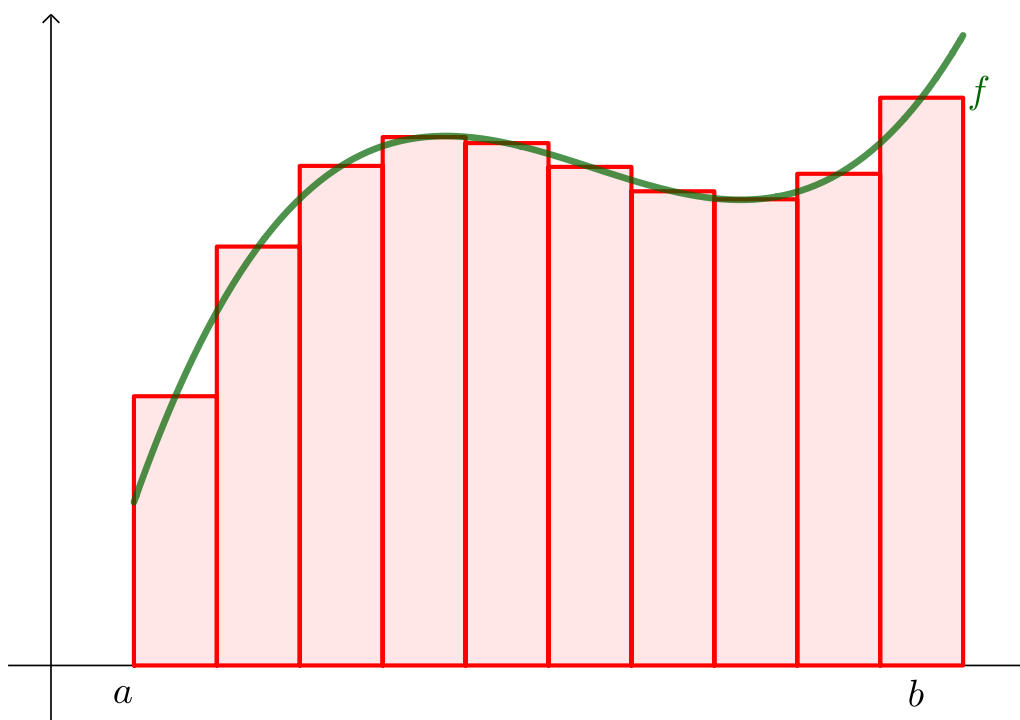


Figura 2.7: Retângulos da soma de Riemann

De forma análoga a Cauchy, Riemann definiu que se o valor da soma em (2.3) se aproxima tanto quanto se queira de um número B sempre que o número de elementos da partição rotulada/etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ fica infinitamente maior, para toda partição de $[a, b]$, então B é a integral de Riemann para a função f no intervalo $[a, b]$, e denotaremos

$$B = \mathcal{R} \int_a^b f(x) dx$$

Em notação moderna, a definição da integral de Riemann seria dada por:

Definição 2.3 (Integral de Riemann). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos que f é Riemann integrável em $[a, b]$ se existe $B \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é qualquer partição rotulada de $[a, b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ então

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - B| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Desse modo, Riemann obteve resultados muito melhores que os de Cauchy como a expansão da classe de funções integráveis para além das funções contínuas ou com uma quantidade finita de descontinuidades. Obteve posteriormente um teorema fundamental do cálculo com hipóteses menos exigentes.

Teorema 2.4. *Se F é uma função derivável em (a, b) e F' é Riemann integrável em $[a, b]$ então temos que*

$$\mathcal{R} \int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Para a demonstração desse resultado consulte [3], [8] e [9]).

A integral de Riemann representou um salto de qualidade em relação à integral de Cauchy e seus desdobramentos propuseram o desenvolvimento de outras áreas da matemática. Contudo, ainda havia lacunas que não foi possível resolver, por exemplo o fato de algumas funções não serem Riemann integrável, como a função de Dirichlet, dada por $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1$ se x é racional. Além disso, o teorema fundamental do cálculo ainda impõe a condição de F' ser Riemann integrável, não permitindo um teorema mais geral. Além disso, Riemann trabalhava apenas com funções limitadas o que não tornava a sua teoria muito geral e Vito Volterra (1860-1940) apresentou um exemplo que recebeu o nome de “função de Volterra” onde apresenta uma função de derivada limitada, mas que não era Riemann integrável.

2.3. A INTEGRAL DE LEBESGUE

Muitos matemáticos se lançaram sobre o desafio do cálculo integral e com o surgimento da teoria dos conjuntos, muitos obtiveram resultados muito importantes, porém um dos que mais se destacou foi Lebesgue.

Henri Lebesgue (1875 - 1941) foi um estudante da *École Normale Supérieure* em Paris, trabalhando posteriormente em algumas escolas em cidades do país. Em 1902 sua dissertação de mestrado foi aceita pela Sorbonne. Após

doutorar-se, Lebesgue iniciou como professor da Sorbonne em 1910 e em 1921 foi indicado para ser professor do *Collège de France* e tornou-se membro da *Académie des Sciences*. Segundo [6, p.415], durante a época em que estava estudando, a integral de Riemann era reconhecida como a melhor teoria de integração e permeava todos os trabalhos de diversos matemáticos, contudo ela apresentava algumas falhas e começava-se a entender que um dos motivos era a definição de função, uma vez que se pensava nas funções não como uma correspondência ponto a ponto, como vemos hoje, mas sim como uma variação lisa.

Estudando sobre as limitações da integral de Riemann, Lebesgue fez a proposição de um novo modelo de integral. Em sua tese de doutorado, em 1901, Lebesgue repensou a abordagem de Riemann e Cauchy de uma forma totalmente diferente (veja [12]). Em vez de particionar o intervalo do domínio, ele tomou uma partição da imagem da função da seguinte forma. Considere uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada em $[a, b]$, isto é, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, para todo $x \in [a, b]$ então tomamos uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é

$$\alpha = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

e sabemos que esta partição subdivide o intervalo $[\alpha, \beta]$ em subintervalos da forma $J_i = [y_{i-1}, y_i]$, $1 \leq i \leq n$. Consideremos os conjuntos

$$E_i = \{x \in [a, b] \mid y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$$

e podemos mostrar que $[a, b] = \cup_{i=1}^n E_i$. Em cada E_i , tomamos um rótulo $t_i \in J_i$ e consideremos a partição rotulada da imagem, dada por

$$\dot{\mathcal{P}} = \{(J_i, t_i)\}_{i=1}^n$$

E definimos a soma de Lebesgue

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\mu(E_i)$$

onde $\mu(E_i)$ representa a medida (no sentido de Lebesgue) do conjunto E_i . Diz-se então que a integral é o limite C das somas $S(f, \dot{\mathcal{P}})$, caso exista, quando o

número de pontos na partição cresce indefinidamente, para qualquer partição \mathcal{P} . E caso isso ocorra, dizemos que f é Lebesgue integrável em $[a, b]$ (veja [14] e [1]) e denotaremos por

$$C = \mathcal{L} \int_a^b f d\mu$$

A figura a seguir pode ajudar na compreensão dos conjuntos E_i .

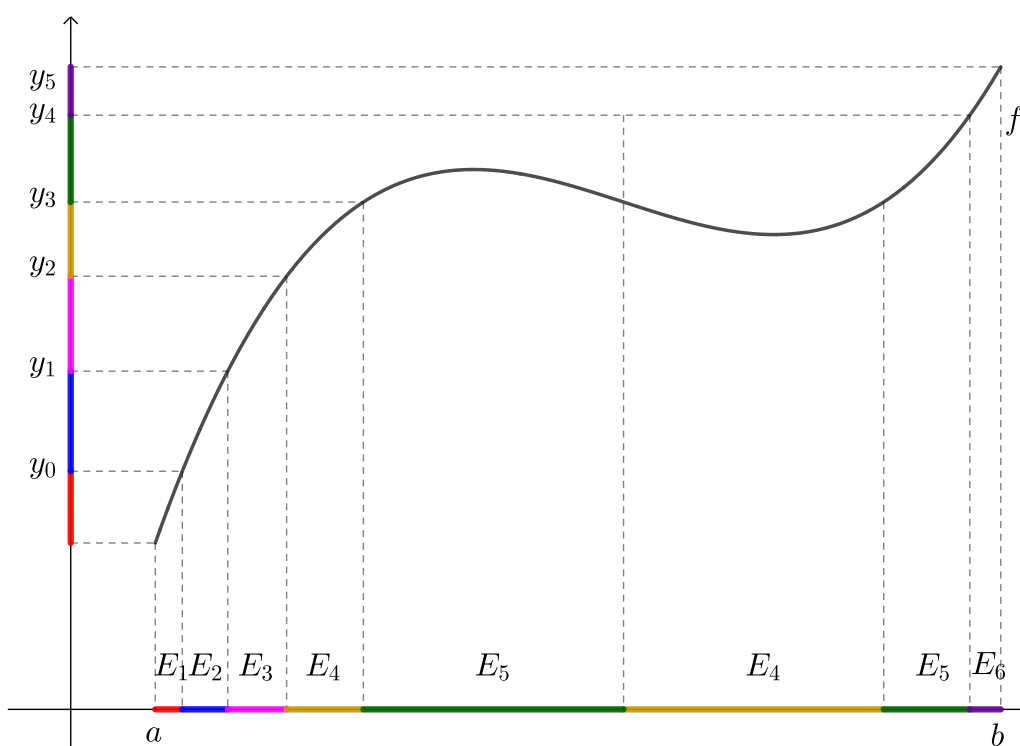


Figura 2.8: Partição na Imagem

Uma dúvida que com certeza ficou ao definirmos a integral de Lebesgue é a ideia de medida de um conjunto, afinal, “como medir conjuntos?” Após generalizar a integral de Riemann, Lebesgue publicou mais dois artigos onde detalha sua ideia de medida baseando-se em trabalhos como o de Émile Borel e Camille Jordan, definindo o conceito de cobertura enumerável, medida interior e exterior de um conjunto.

Não é do nosso interesse neste curso de rápida duração ensinar teoria da medida, mas é necessário que se faça indicação e utilização de resultados desta área da matemática para que a compreensão seja realizada. Em [7, p.138] pode ser encontrada a seguinte definição de medida Lebesgue para conjuntos:

Definição 2.5 (Medida Lebesgue). Dado um conjunto limitado $S \subset \mathbb{R}$, a medida Lebesgue exterior de S , $\mu_e(S)$, é o ínfimo das medidas tomando todos os conjuntos abertos que contém S . A medida Lebesgue interior $\mu_i(S)$ é o supremo das medidas tomando todos os conjuntos fechados que estão contidos em S . O conjunto S é chamado Lebesgue mensurável se e somente se as suas medidas, interior e exterior, são iguais.

São exemplos de conjuntos mensuráveis em \mathbb{R} : intervalos fechados e abertos, conjuntos abertos, conjuntos fechados, conjuntos compactos e para as demonstrações desses resultados indicamos que veja [2, p.299]. Uma definição que precisaremos aqui neste texto é a de conjunto de medida nula.

Definição 2.6 (Conjunto de Medida Nula). Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é dito ter medida nula ou medida zero se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma coleção enumerável $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abertos tais que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \varepsilon$$

São exemplos de conjuntos de medida nula, o conjunto nulo, o conjunto unitário, os conjuntos enumeráveis. Para mais exemplos, consulte [2, p.31-33]. Uma propriedade é dita ser verdadeira **quase sempre** se o conjunto no qual ela é falsa é um conjunto de medida nula.

Os estudos de Lebesgue foram realmente excepcionais e ele desenvolveu o seguinte critério de integrabilidade para as funções Riemann integráveis

Teorema 2.7. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. f é Riemann integrável se, e somente se, ela é contínua quase sempre.*

Além disso, Lebesgue expandiu a classe de funções integráveis, por exemplo, garantindo a existência da integral da função de Dirichlet que, como vimos

anteriormente, não era Riemann integrável. Os desdobramentos dos trabalhos de Lebesgue também permitiram a criação de teoremas com hipóteses menos exigentes na área de sequências de funções, como foi o Teorema da Convergência Dominada. Além disso, é possível mostrar que a integral de Riemann é um caso particular da integral de Lebesgue e seus valores coincidem. Após isso, o teorema fundamental do cálculo para integral de Lebesgue foi provado, como mostrado em [7, p.203].

Entretanto uma dificuldade apresentada no estudo dessa integral é a preparação de um estudante na área, visto que o mesmo precisa de um entendimento sobre a medida de Lebesgue para começar a trabalhar com a integral e além disso, gostaria-se de um teorema fundamental do cálculo que impusesse menos hipóteses à função cuja integral definida deseja-se calcular o valor. Acrescentando existem funções que ainda não são Lebesgue integráveis, como por exemplo a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2}), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

não é Lebesgue integrável como mostrado em [7, p.189].

RIEMANN GENERALIZADA

3.1. MEDIDORES E PARTIÇÕES δ -REFINADAS

Nesse capítulo introduziremos a integral desenvolvida entre 1957-1962 pelos matemáticos europeus Jaroslav Kurzweil e Ralph Henstock, chamada de integral de Kurzweil-Henstock ou como ficou popularmente conhecida, integral de Riemann Generalizada. E ela ficou conhecida assim, pois os dois matemáticos supracitados realizaram, de forma independente, uma alteração na definição construtiva da integral de Riemann e obtiveram uma nova integral, com uma classe de funções integráveis maior e com resultados importantes através dos desdobramentos da teoria desenvolvida.

Algumas noções são importantes antes de introduzirmos a definição dessa integral, que são as de medidor/calibrador e partições δ -refinadas. Definimos medidor ou calibrador de um intervalo I , como sendo uma função estritamente positiva $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $t \in I$. O intervalo ao redor de $t \in I$ controlado pelo medidor (calibrador) δ é o intervalo

$$B[t, \delta(t)] = [t - \delta(t), t + \delta(t)]$$

E sendo $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição rotulada de I , dizemos que ela é refinada pelo medidor δ ou δ -refinada se

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Um questionamento que fazemos é: *dado qualquer medidor de um intervalo fechado e limitado, sempre vai existir uma partição refinada por ele?* A resposta é sim, e o resultado que nos garante isso é o Teorema de Cousin:

Teorema 3.1 (Teorema de Cousin). *Se $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não degenerado e compacto e δ um medidor de I , então existe uma partição de I que é δ -refinada.*

Prova: Suponha por contradição que o intervalo $[a, b]$ não tenha nenhuma partição δ -refinada e considere $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Então, dividimos o intervalo $[a, b]$ em $[a, c]$ e $[c, b]$. Notemos que pelo menos um desses intervalos não possui uma partição δ -refinada, pois se os dois tivessem, a união seria uma partição δ -refinada de $[a, b]$. Supondo que $[a, c]$ não tenha nenhuma partição δ -refinada, então, faremos uma biseção nesse intervalo, como antes. Ao repetir esse processo, obtemos uma sequência de subintervalos compactos e encaixados, logo, pela propriedade dos intervalos encaixantes, temos que existe um ξ que pertence a todos esses subintervalos. Portanto, sendo $\delta(\xi) > 0$, pela Propriedade Arquimediana, segue que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\ell(I^p) = \frac{(b - a)}{2^p} < \delta(\xi)$$

Logo, $I^p \subset [\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)]$ e o par (I^p, ξ) é uma partição δ -refinada de I^p . Mas, isso é uma contradição à construção dos subintervalos I^n como intervalos de $[a, b]$ que não possui partições δ -refinadas. Então, dado qualquer medidor δ de um intervalo $[a, b]$ existe uma partição refinada por esse medidor. ■

3.2. A INTEGRAL DE RIEMANN GENERALIZADA

Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann Generalizada integrável em I se existe um número $D \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um medidor $\delta_\varepsilon > 0$ em I tal que se toda partição rotulada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ de I é δ_ε -refinada, então

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - D| \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

E denotaremos $D = \mathcal{RG} \int_a^b f(x) dx$.

Proposição 3.2. *Toda função Riemann integrável é Riemann Generalizada integrável*

Prova: Como f é Riemann integrável temos que para todo $\varepsilon > 0$ e toda partição rotulada $\dot{\mathcal{P}}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - I \right| < \varepsilon.$$

Considere o medidor $\delta(t) = \left(t - \frac{1}{4\delta}, t + \frac{1}{4\delta} \right)$ para $t \in [a, b]$.

Então, $I_i \subset \delta(t_i)$ e $x_i - x_{i-1} < \frac{1}{2\delta}$, $\forall i$, $\dot{\mathcal{P}}$ é δ -refinada e

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - I \right| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\mathcal{RG} \int_a^b f dx = I. \quad \blacksquare$$

Mas a recíproca dessa proposição não é verdadeira. Consideremos a função de Dirichlet, em $I = [0, 1]$, definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Vamos mostrar que f é Riemann Generalizada Integrável com $\mathcal{RG} \int_0^1 f = 0$.

Seja $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos racionais em $[0, 1]$ e $\varepsilon > 0$ dado, definiremos o seguinte medidor:

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, & \text{se } t = r_k \\ 1, & \text{se } t \text{ for irracional} \end{cases}$$

Consideraremos apenas os rótulos (t_i) racionais, pois os irracionais terão contribuição nula para a soma de Riemann

Se t_i é racional então $t_i = r_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então r_k é o rótulo de algum subintervalo I_i . Como $\dot{\mathcal{P}}$ é δ_ε -refinada, temos:

$$I_i \subseteq [r_k - \delta_\varepsilon(r_k), r_k + \delta_\varepsilon(r_k)]$$

Com $l(I_i) \leq 2\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2^k}$

Então:

$$S(f, \dot{P}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 1 \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon$$

Logo, $|S(f, \dot{P}) - 0| \leq \varepsilon$ e f é Riemann Generalizada integrável em $[0, 1]$ e $\mathcal{RG} \int_0^1 f = 0$ Como isso, podemos considerar a integral de Riemann como um caso particular dessa nova integral. E podemos ir mais além,

Teorema 3.3. *Se f é Lebesgue integrável em $[a, b]$ então a integral Riemann Generalizada de f existe nesse intervalo e possui o mesmo valor que a integral de Lebesgue.*

A demonstração desse teorema encontra-se em [7, p.295]. A recíproca desse teorema não é verdadeira pois temos que a função em (2.5) não é Lebesgue integrável mas é Riemann Generalizada integrável e a demonstração desse resultado pode ser vista como consequência do teorema a seguir:

Teorema 3.4 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma primitiva F em $[a, b]$ quase sempre, isto é $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$ a menos de um conjunto de medida nula, então f é Riemann Generalizada integrável e vale*

$$\mathcal{RG} \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3.2)$$

Note que o Teorema Fundamental do Cálculo para esta integral é mais geral que o de Lebesgue, uma vez que se a função tiver uma primitiva, então f é Riemann Generalizada integrável. Sendo assim, note que a função descrita em (2.5) possui como primitiva $F(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ quase sempre, mas como visto anteriormente f não é Lebesgue integrável.

Como essa abordagem sobre a nova integral, temos que a classe de funções integráveis foi expandida, obtém-se um teorema fundamental do cálculo mais geral do que o da integral de Lebesgue, no área de sequência de funções, consegue-se obter um teorema da convergência dominada, além disso, como em

descrito em [3, p.288], a integral de Riemann generalizada não faz uso de integrais impróprias, o que contrasta com as integrais de Cauchy, Riemann e até Lebesgue que fazem uso dessa ferramenta. Ainda mais, note que a preparação para um aluno iniciar nesse tema não é tão extensa pois não há necessidade de o aluno se preparar em teoria da medida mais profunda para compreender a integral, isto porque podemos notar que a forma de definição da integral de Riemann Generalizada é semelhante a da integral de Riemann, mostrando assim a beleza desse estudo, pois em resumo, torna-se uma integral em certo ponto simples de definir, contudo se mostra uma ferramenta poderosa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que o texto *A integral de Riemann Generalizada: além da integral de Lebesgue* pode ser um ponto de partida para que os alunos de matemática possam ser motivados a estudar o cálculo integral e desenvolver seus próprios caminhos dentro desta área. Acreditamos que ao relatar os caminhos percorridos por grandes matemáticos durante a história podemos inspirá-los a pensar em ideias inovadoras e a manter viva a matemática nesta geração. Esperamos também que os participantes consigam compreender as principais características da integral de Riemann Generalizada, compreendendo suas principais ideias e o desenvolvimento dos conceitos apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARONI, R.L.S. OTERO-GARCIA, S.C. (2014). *Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue*. Coleção PROPG Digital UNESP.
- [2] BARTLE, R. G. (2000). *A Modern Theory of Integration*. American Mathematical Society.
- [3] BARTLE, R. G. SHERBERT, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons.
- [4] BARTLE, R. G. (1996). *Return to the Riemann Integral*. American Mathematical Monthly.
- [5] BARTLE, R. G. (1995). *The elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons.
- [6] BOYER C.B. MERZBACH (2019). *História da Matemática*. Blucher.
- [7] BRESSOUD, D.M. (2008). *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*. Cambridge University Press.
- [8] BRESSOUD, D. M. (2019). *Calculus Reordered.: A History of the big ideas*. Princeton University Press.
- [9] BURK, F. E. (2007). *A Garden of Integrals*. The Mathematical Association of America.

- [10] EVES, H. (2011). *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino Domingues. Editora da Unicamp.
- [11] MAGOSSÍ, J.C. BARROS, A.C.C. (2019) *O conceito de integrais nos cursos de Cálculo*. Revista Professor de Matemática Online.
- [12] OTERO-GARCIA, S.C. (2012). *Sobre uma Generalização da Integral Definida*: Tradução do primeiro trabalho de Henri Lebesgue sobre sua nova integral. Revista Brasileira de História da Matemática.
- [13] PHILLIPS, E. (1984). *An introductory to Analysis and Integration Theory*. Dover Publications.
- [14] SANTOS, J.M. dos (2014). *Quadratura da Parábola: Uma abordagem possível para o ensino de somas infinitas*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- [15] SWARTZ, C. (2001). *Introduction to Gauge Integrals*. World Scientific.



INTRODUÇÃO A CADEIAS DE MARKOV

CAROLINA S. FRAGA

JUNHO 2022

*Dedico esse trabalho aos meus familiares,
amigos e professores que me apoiaram
nessa jornada.*

SUMÁRIO

Prefácio

1

Introdução a Cadeia de Markov

- 1.1 Cadeias de markov
- 1.2 Processos markovianos
- 1.3 Cadeias de markov em n passos
- 1.4 Vetor estacionário
- 1.5 Cadeias de markov absorvente
- 1.6 Conclusão

Apêndices

A Grafos

Referências

PREFÁCIO

Cadeias de Markov, é um tema que trata de variações de estados em função do tempo e que usa Álgebra linear e Probabilidade como ferramentas. É amplamente utilizada em diversos campos como economia, computação, física dentre outros.

Cadeias por se tratar de uma cadeia de eventos relacionados e Markov em homenagem ao matemático russo Andrey Andreyevich Markov é uma instrumento poderoso para prever eventos futuros. Sendo um assunto relevante na matemática atual, mas pouco difundida nos cursos de graduação de Matemática. Dessa forma, o minicurso tem como foco principal a introdução dos principais conceitos e definições utilizando o método de recorrência linear não homogênea a partir da probabilidade de transição e em tempo discreto. De modo que o conteúdo do minicurso foi desenvolvido de forma clara e direta com aplicações de exemplos e demonstração de alguns resultados.

Valença - BA, 05 de Maio de 2022

Carolina S. Fraga

INTRODUÇÃO A CADEIA DE MARKOV

1.1. CADEIAS DE MARKOV

Imagine uma cadeia de eventos em tempo discreto (enumerável), ou em tempo contínuo, esses eventos variam aleatoriamente dependendo apenas do resultado anterior. Tais eventos são chamados de processos estocásticos ou processos de perda de memória, que variam a uma probabilidade p onde $0 \leq p \leq 1$.

Definição 1.1. Considerando $1, 2, \dots, n \in \Omega$ um conjunto de estados possíveis em uma matriz de transição P_{ij} onde o processo inicia em um estado i , podendo mover - se para o estado j , ou permanecer no mesmo estado, tal processo é chamado de probabilidade de transição em que i é o estado atual e j o estado futuro.

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i). \quad (1.1)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_0).$$

Portanto, a probabilidade de transição, mantidas as mesmas condições do estado inicial i para o estado j será dada por:

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i). \quad (1.2)$$

Exemplo 1.1 Um guarda de trânsito é designado para controlar o tráfego nos oito cruzamentos como indicado na figura abaixo.

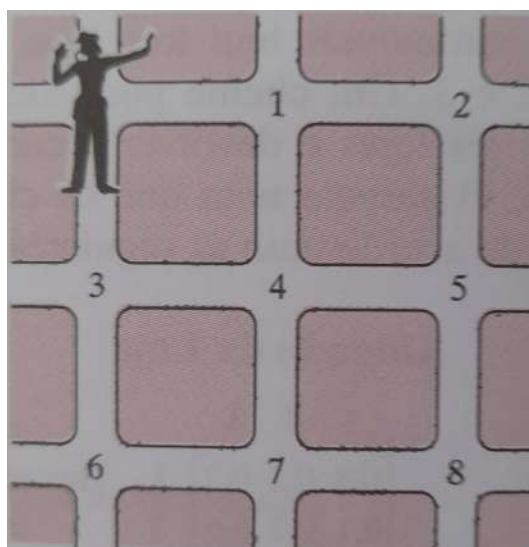


Figura 1.1: Álgebra Linear com Aplicações(2008, p.392)

Ele é instruído a permanecer em cada cruzamento por uma hora, em seguida, ou permanece no mesmo cruzamento ou segue para um cruzamento adjacente. Para evitar que ele estabeleça um padrão, ele deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ele está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Cada dia ele começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição desta Cadeia de Markov é

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \\ \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \\ \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \\ \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \\ \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \\ \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \\ \text{Cruzamento Velho} \\ \text{Cruzamento Novo} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1.2. PROCESSOS MARKOVIANOS

Em 1907, o matemático russo chamado Andrei Andreyevich Markov iniciou o estudo de um processo em que apenas o resultado de uma experiência atual pode interferir no resultado da experiência seguinte. Tal processo é chamado de Markoviano ou processo de perda de memória. É um caso particular de processo estocástico com estados discretos. Eventos desse modo podem ser representados por uma Matriz de Transição determinada por P_{ij} de ordem quadrada, em que P_{ij} é a probabilidade de que haja uma transição do estado i para o estado j em uma unidade de tempo. Em uma Matriz de Transição regular de ordem $n \times n$, todas as estradas devem ser positivas e as somas dos elementos dos vetores linha devem ser iguais a um.

Exemplo 1.2.1

Numa determinada cidade há três lojas de doces, semanalmente 200 pessoas vão para a loja A, 120 vão para a loja B e 180 para loja C. Mas tipicamente as pessoas não vão para as mesmas lojas de doces toda semana. Na loja A, 80% continuam frequentando a loja, 10% vão para a loja C e 10% para a loja B. Na loja B, 70% continuam comprando, 20% vão para a loja A e 10% vão para a loja C. Enquanto na loja C, 60% continuam a comprar os doces da loja, 30% migram para a loja B e 10% para a loja A.

Temos então uma cadeia de eventos que varia a uma probabilidade p , de espaço de estados discreto, sendo necessário apenas o estado atual para determinar o estado seguinte. Assim a matriz de transição será dada por

$$P_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para calcular qual será a probabilidade do próximo estado basta multiplicar o vetor estado pela Matriz de Transição, obtendo assim o novo estado.

Definição 1.2 Em uma Cadeia de Markov do tipo P_{ij} , o vetor estado em uma observação é um vetor linha que representa a probabilidade do sistema estar no j -ésimo componente no n -ésimo tempo.

$$(\text{Matriz de Transição}) \cdot (\text{Vetor estado}) = (\text{Novo Estado})$$

$$P_{ij} \cdot X_0 = X_1 \tag{1.3}$$

Neste exemplo o vetor estado constitui o número de clientes no tempo $t = 0$ que é dado pela matriz $P_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 200 & 120 & 180 \end{pmatrix}$. Usando a regra de multiplicando

de matrizes temos

$$X_1 = \begin{pmatrix} 200 & 120 & 180 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 202 & 158 & 140 \end{pmatrix}$$

Para encontrar o estado X_2 basta fazer a multiplicação agora usando o estado X_1 como atual.

$$P_{ij} \cdot X_1 = X_2 \quad (1.5)$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 202 & 158 & 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 207 & 173 & 120 \end{pmatrix}$$

No exemplo anterior a Matriz de Transição foi representada por P_{ij} na qual representa a probabilidade de estar no estado i dado que a transição foi iniciada em um estado j . Contudo também podemos representar a Matriz de Transição por P_{ji} . Neste caso será a matriz $(P_{ij})^t$. De forma análoga, o vetor de estado deve ser representado por um vetor coluna. Utilizando o mesmo exemplo anterior, será calculado para o tempo $t = 1$ na matriz do tipo P_{ji}

Relembrando: Numa determinada cidade há três lojas de doces, semanalmente 200 pessoas vão a loja A, 120 vão na loja B e 180 vão na loja C. Mas tipicamente as pessoas não vão para as mesmas lojas de doces toda semana. Na loja A 80% continuam frequentando a loja, 10% vão para a loja c e 10% para a loja B. Na loja B 70% continuam comprando, 20% vão para a loja A e 10% vão para a loja C. Enquanto na loja C, 60% continuam a comprar os doces da loja, 30% migram para a loja B e 10% para a loja A.

$$P_{ji} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \end{matrix} ; X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 202 \\ 158 \\ 140 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Exemplo 1.2.2 Pierre tem quatro guarda-chuvas, uns em casa e outros no escritório. Quando chove, ele leva o guarda-chuva para ir de um lugar para outro. Quando não está chovendo, ele obviamente não pensa mais nesses guarda-chuvas, que, portanto, ficam onde estão. Acontece que todos os guarda-chuvas estão somente em um lugar e ele no outro. Então começa a chover e ele deve partir logo. Represente este problema usando uma Cadeia de Markov cuja variável é o número dos guarda-chuvas disponíveis no momento, considerando que a probabilidade p de chover quando Pierre tem que fazer o seu caminho é constante.

Solução: Para resolver o problema, considere uma cadeia de Markov tomando valores no conjunto $S = \{i : i = 0, 1, 2, 3, 4\}$, onde i representa o número de guarda-chuvas no local onde Pierre está atualmente (casa ou escritório). Se p é a probabilidade de chover logo, $1 - p = q$ que é a probabilidade de não chover.

Através do diagrama temos:

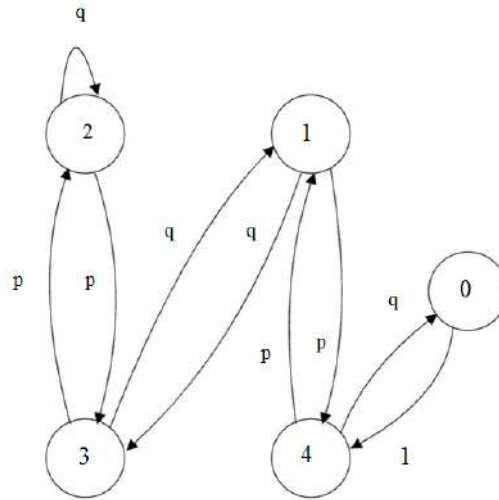


Figura 1.2: Exemplo de figura

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4
 \end{array}
 & \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & q & p \\
 0 & 0 & q & p & 0 \\
 0 & q & p & 0 & 0 \\
 q & p & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

1.3. CADEIAS DE MARKOV EM n PASSOS

Dada uma Cadeia de Markov definida por

$$r_{ij}(n) = P(x_n = j \mid x_0 = i) \tag{1.8}$$

No diagrama a seguir, podemos observar um exemplo das diferentes maneiras que esse evento pode acontecer.

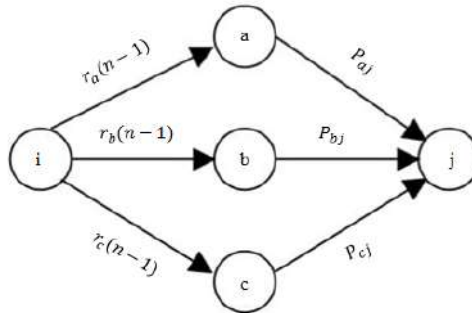


Figura 1.3: Exemplo de figura

Definição 1.3. A probabilidade de estar no estado j é a soma das probabilidades de todas as possibilidades de chegar a esse objetivo, considerando apenas o estado anterior.

$$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n r_{ik}(n-1) \cdot P_{kj} \quad (1.9)$$

Em algumas situações se deseja encontrar o quarto, sexto ou décimo segundo estado. Nesses casos não é necessário calcular estado por estado até chegar ao estado desejado. A fórmula demonstrada abaixo pode ser usada para calcular qualquer probabilidade de se estar em um determinado estado sem a necessidade de calcular as probabilidades anteriores.

Para encontrar o estado 1 dado o estado inicial temos:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= X_0 \cdot P \\
 X_2 &= X_1 \cdot P \Rightarrow X_2 = (X_0 \cdot P) \cdot P \Rightarrow X_2 = X_0 \cdot P^2 \\
 X_3 &= X_2 \cdot P \Rightarrow X_3 = (X_0 \cdot P^2) \cdot P \Rightarrow X_3 = X_0 \cdot P^3 \\
 &\vdots \\
 X_n &= X_0 \cdot P^n
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Exemplo 1.3.1 Em um supermercado são vendidos semanalmente 200 cremes dentais. 80 da marca A, 60 da marca B e 60 da marca C. 10% dos consumidores da marca A mudam para B e 30% para C. 30% que compram o

creme dental B mudam para A e 20% para marca C. 20% dos consumidores C mudam para A e 40% para B. Quantos consumidores terá cada marca daqui a três semanas?

Solução

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \tag{1.11}$$

$$\begin{pmatrix} 0,403 & 0,384 & 0,366 \\ 0,288 & 0,325 & 0,342 \\ 0,309 & 0,291 & 0,292 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77,24 \\ 63,06 \\ 59,7 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Exemplo 1.3.2 Na Idade das Trevas, Harvard, Dartmouth e Yale admitiam apenas estudantes do sexo masculino. Suponha que, naquela época, 80% dos filhos de homens de Harvard fossem para Harvard e o resto foi para Yale, 40% dos filhos dos homens de Yale foram para Yale, e o restante foi dividido igualmente entre Harvard e Dartmouth; e dos filhos dos homens de Dartmouth, 70% foram para Dartmouth, 20% para Harvard e 10% para Yale.

(i) Encontre a probabilidade de que o neto de um homem de Harvard tenha ido para Harvard.

(ii) Altere o enunciado acima, assumindo que o filho de um homem de Harvard sempre foi para Harvard. Encontre novamente a probabilidade de que o neto de um homem de Harvard tenha ido para Harvard.

Solução

i) Primeiro formamos uma Cadeia de Markov com espaço de estado $S = H, D, Y$ e a seguinte matriz de probabilidade de transição:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} H & D & Y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Observe que as colunas e linhas estão ordenadas: primeiro H, depois D, depois Y. Lembre-se, a entrada ij da matriz P^n é a probabilidade de que a Cadeia de Markov que começa no estado i esteja no estado j após n passos. Assim, a probabilidade de que o neto de um homem de Harvard tenha ido para Harvard é o elemento superior esquerdo da matriz.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,06 & 0,24 \\ 0,33 & 0,52 & 0,15 \\ 0,42 & 0,33 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Logo a probabilidade é igual a $0,8 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,7$ e, como pode ver, não é necessário calcular todos os elementos de P^2 para responder a esta pergunta.

ii) Se todos os filhos de homens de Harvard fossem para Harvard, isso daria a seguinte matriz para a nova cadeia de Markov com o mesmo conjunto de estados:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} H & D & Y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

O elemento superior esquerdo de P^2 é 1, pois $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 = 1$, o que não é surpreendente, porque os descendentes de homens de Harvard entram apenas nesta mesma instituição.

Exemplo 1.3.3 Certa máquina de calcular usa apenas os dígitos 0 e 1. Ela deve transmitir um desses dígitos através de vários estágios. No entanto, em

cada estágio, há uma probabilidade p de que o dígito que entra nesse estágio seja alterado quando sai e uma probabilidade $q = 1 - p$ no qual o dígito não é modificado.

i) Forme uma Cadeia de Markov para representar o processo de transmissão tomando como estados os dígitos 0 e 1.

ii) Assumindo que o processo começa no estado 0 e passa por dois estágios de transmissão, qual é a probabilidade de que a máquina, após dois estágios, produza o dígito 0.

Solução:

i) Tomando como estados os dígitos 0 e 1, identificamos a seguinte cadeia de Markov.

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 0 \\
 1 \\
 \\
 P =
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 q & p \\
 p & q
 \end{pmatrix}$$

ii) Como queremos encontrar o que acontece na etapa 2 devemos fazer P^2 .

$$P^2 = \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} q^2 + p^2 & q \cdot p + p \cdot q \\ q \cdot p + p \cdot q & p^2 + q^2 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, a probabilidade de que a máquina produza 0 em dois passos, se começar com 0, é $p^2 + q^2$.

Exemplo 1.3.4 (O problema da Ruína do Jogador) Em uma certa aposta, a cada jogada, o jogador ganha um dólar com probabilidade p ou perde um

1.4. VETOR ESTACIONÁRIO

Um fenômeno interessante que pode ocorrer na Cadeia de Markov é o vetor estacionário, ou seja, após uma determinada quantidade de tempo o vetor de transição se aproxima de uma condição de equilíbrio com valores fixos. Isso significa que a probabilidade de transição se aproxima de um vetor estacionário mesmo com os eventos continuando a acontecer:

$$P \cdot \bar{x} = \bar{x} \tag{1.13}$$

Definição 1.4. Considere a cadeia de Markov dada por:

$$r_{ij}(n) = \sum_k r_{ik}(n-1)P_{kj} \tag{1.14}$$

Com $n \rightarrow \infty$

$$\pi_j = \sum_k \pi_k P_{kj} \tag{1.15}$$

Para que esse fenômeno ocorra a Cadeia de Markov deve seguir os seguintes critérios:

- Estados recorrentes estão todos em classe única
- Classe recorrente única não é periódica

Em Cadeia de Markov estados recorrentes são aqueles que podem ocorrer k vezes em n eventos diferentes.

Teorema 1.4. Se P é a matriz de transição de um processo de Markov regular, e $P^n \rightarrow Q$, quando $n \rightarrow \infty$, com os u_i sendo números positivos tais que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1$

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

Obs: Não iremos provar esse teorema.

Então existe um único vetor estacionário g , de forma que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1$, que satisfaz a equação $P \cdot g = g$

$$g = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Demonstração: Dada a matriz $P^n \rightarrow Q$, quando $n \rightarrow \infty$, se x é qualquer vetor de probabilidade então.

$$Q \cdot x = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n & \dots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 x_1 & u_1 x_2 & \dots & u_1 x_n \\ u_2 x_1 & u_2 x_2 & \dots & u_2 x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n x_1 & u_n x_2 & \dots & u_n x_n \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot x = \begin{pmatrix} u_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ u_2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Uma vez que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

Logo $Q \cdot g = g$, onde g é um vetor de probabilidade fixo com entradas positivas. Pelo teorema temos que $P^n \rightarrow Q$, portanto $P^{n+1} \rightarrow Q$, quando $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 1.4.1

Dado uma matriz $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix}$, Encontre \bar{P} e \bar{x} .

Solução: Sabemos que $P \cdot \bar{x} = \bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } 0,5A + 0,25B = A$$

$$\text{ii) } 0,5A + 0,75B = B$$

i)

$$0,25B = A - 0,5A \Rightarrow 0,25B = 0,5A \Rightarrow (0,25B = 0,5A) \cdot 4 \Rightarrow B = 2A$$

Sabemos que $A + B = 1$. substituindo.

$$A + 2A = 1 \quad A = \frac{1}{3}$$

$$B = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ e } \bar{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.4.2

Em uma cidade há duas lojas de doces, loja A e loja B. 30% dos clientes que compram na loja A vão comprar na loja B no próximo mês e 20% dos clientes que compram na loja B vão comprar na loja A no mês seguinte. Encontre o vetor estacionário.

Solução:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Sendo $\bar{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, com $P \cdot \bar{x} = \bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } 0,7A + 0,2B = A$$

$$\text{ii) } 0,3A + 0,8B = B$$

$$\text{i) } 0,2B = A - 0,7A \Rightarrow 0,2B = 0,3A \Rightarrow (0,2B = 0,3A) \cdot 10 \Rightarrow 2B = 3A \Rightarrow B = \frac{3A}{2}$$

Sabemos que $A + B = 1$.

$$A + \frac{3A}{2} = 1$$

Resolvendo a equação temos: $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{3}{5}$

Logo:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.4.3

Em tempos não lucrativos, as corporações às vezes suspendem o pagamento de dividendos. Suponha que após o pagamento de um dividendo, o próximo será pago com probabilidade 0,9, enquanto após a suspensão de um dividendo o próximo será suspenso com probabilidade 0,6. No longo prazo, qual é a fração dos dividendos que serão pagos?

Solução:

Temos uma Cadeia de Markov com dois estados. Estado 1: Dívida Paga. Estado 2: Dívida não paga. Sabendo que a matriz de transição igual a

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

a distribuição estacionária será do tipo:

$$\pi \cdot P = \pi \tag{1.16}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$0,9\pi_1 + 0,4\pi_2 = \pi_1$$

$$0,1\pi_1 + 0,6\pi_2 = \pi_2$$

Pela definição sabemos que:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Resolvendo o sistema temos que:

$$\pi_1 = \frac{4}{5}, \quad \pi_2 = \frac{1}{5}$$

Então, no longo prazo, 80% dos dividendos serão pagos.

1.5. CADEIAS DE MARKOV ABSORVENTE

Definição 1.5. Sejam um espaço de estados finito Ω , e uma matriz de transição P tal que existe um $n > 0$ e $P^n_{x,y} > 0$ com $x, y \in \Omega$. Dizemos que y é acessível por x e escrevemos $x \rightarrow y$, se for possível que em um número finito de passos a cadeia de eventos de mova de x para y . Se também é verdade que x é acessível por y , $y \leftrightarrow x$ então chamamos de classes de estados recorrentes. Uma Cadeia de Markov é absorvente se após a cadeia de eventos alcançar y não é mais possível mudar de estado. Portanto dado um estado absorvente y não há probabilidade de transição para outras classes.

$$P_{ij} = 1 \quad (i = j) \tag{1.17}$$

$$P_{(i \rightarrow n, j)} = 0 \quad (i \neq j) \tag{1.18}$$

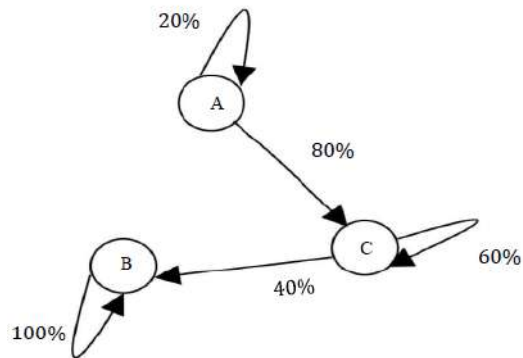


Figura 1.4: Exemplo de figura

Exemplo 1.5.1

Identifique os estados absorventes das seguintes matrizes de transição.

$$\begin{array}{l}
 \text{i)} \\
 P_{ij} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0,8 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Solução: A é um estado absorvente.

$$\begin{array}{l}
 \text{ii)} \\
 P_{ij} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Solução: B é um estado absorvente.

Exemplo 1.5.2

Considere uma cadeia de Markov com dois estados 1,2. Suponha que $P_{1,2} = a, P_{2,1} = b$. Quais os valores de a e b para que seja uma cadeia de Markov absorvente?

Solução:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & a \\ b & - \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Um deles (ou ambos) deve ser zero. Porque, se ambos forem positivos, a cadeia continuará se movendo entre 1 e 2 para sempre.

Exemplo 1.5.3

Considere uma cadeia de Markov com o seguinte diagrama de transição. Quais estados são absorventes?

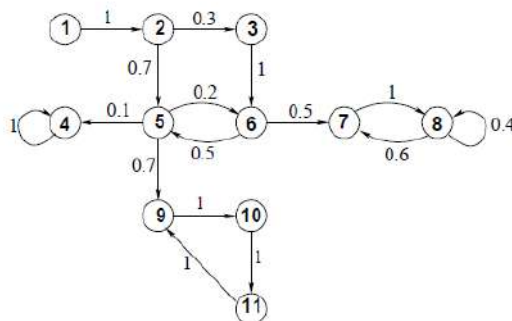


Figura 1.5: One Hundred Solved Exercises for the Subject: Stochastic Processes, p.35

Solução: 4 é o único estado absorvente.

Exemplo 1.5.4

Mostre que a Cadeia de Markov com matriz de transição P abaixo tem mais de um estado de transição estacionária.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução: Sabemos que o vetor estacionário será do tipo.

$$\pi \cdot P = \pi \quad (1.19)$$

$$\left(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \right) \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \pi_1 \cdot 1 + \pi_2 \cdot \frac{1}{4} + \pi_3 \cdot 0 = \pi_1 \\ \text{ii)} \quad & \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot \frac{1}{2} + \pi_3 \cdot 0 = \pi_2 \\ \text{iii)} \quad & \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot \frac{1}{4} + \pi_3 \cdot 1 = \pi_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \pi_1 + \frac{1}{4} \cdot \pi_2 = \pi_1 \\ \text{ii)} \quad & \frac{1}{2} \cdot \pi_2 = \pi_2 \\ \text{iii)} \quad & \frac{1}{4} \cdot \pi_2 + \pi_3 = \pi_3 \end{aligned}$$

Logo $\pi_2 = 0$. E como sabemos que $\sum_{i=1}^3 \pi_i = 1$ temos:

$$\pi_1 + \pi_3 = 1.$$

Podemos definir π_1 como qualquer valor entre 0 e 1 e dizer que $\pi_1 = p$ e que $\pi_3 = 1 - p$. Assim, não há apenas uma distribuição estacionária, mas infinitas. Para cada valor de $p \in [0, 1]$, em que π será da forma.

$$\pi = \left(p \quad 0 \quad 1 - p \right)$$

Observação: A presença de um estado absorvente não garante que matriz de transição P converge para uma matriz limitante P^n quando $n \rightarrow \infty$ nem que as matrizes de estado na cadeia de Markov correspondentes se aproximem do vetor do estacionário.

1.6. CONCLUSÃO

O minicurso apresentou o conteúdo Cadeias de Markov com os principais conceitos e definições de forma introdutória para compreensão inicial do tema. Utilizando também exemplos com aplicações em uma perspectiva mais abrangente.

APÊNDICES

GRAFOS

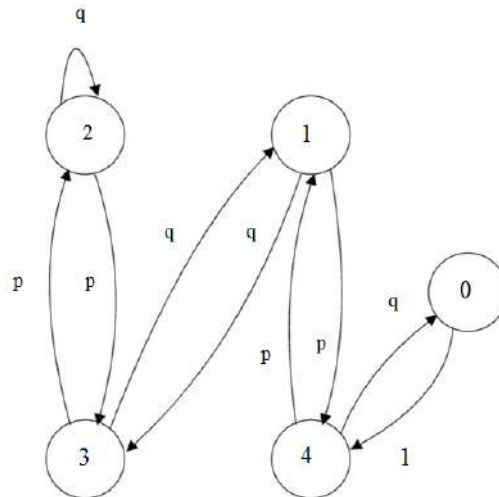


Figura A.1: Grafo. Exemplo 1.2.2

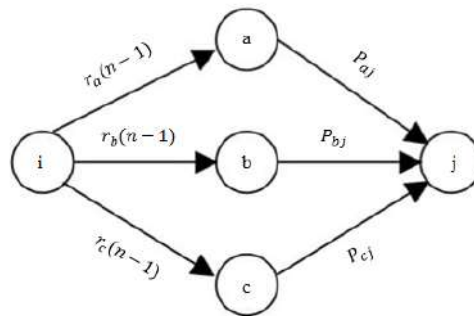


Figura A.2: Grafo. Seção 1.3

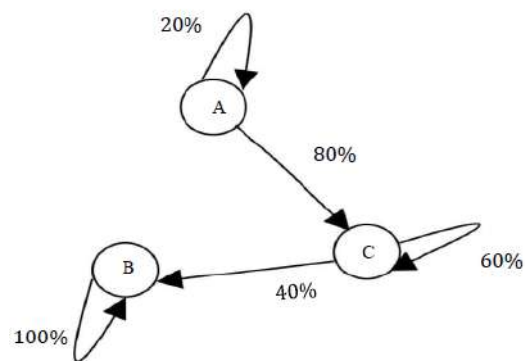


Figura A.3: Seção 1.5

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Stroock. Daniel W. *An Introduction to Markov Processes*. 1^o ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2005.
- [2] OLIVEIRA, Amanda Silvieri Leite de; RIBEIRO, Thaís Saes Giuliani; SILVA, Fabiano Borges da. *Cadeia de Markov: modelo probabilístico e convergência das distribuições de probabilidade*. C.q.d. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, [s.l.], v. 11, p.49-61, dez. 2017. C.Q.D.- Revista Eletronica Paulista de Matematica. <http://dx.doi.org/10.21167/cqdvoll1ic201723169664aslotsgrfbs4961>.
- [3] Tsitsiklis, John. MIT 6.041 *Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability*, Fall 2010, disponível em: <http://ocw.mit.edu/6-041F10> . Acesso 14/11/2019.
- [4] ANTON Howard, RORRES Chris. *Algebra liner com Aplicações*. 8^o edição. Porto Alegre: Bookman, 2001
- [5] SILVA, F. B.; ROTA, I. S. *Convergência de matrizes estocásticas regulares*. C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 8, p. 4-14, dez. 2016. Edição Iniciação Científica.
- [6] Silva, D.S.D. *Convergência em Variação Total de Cadeias de Markov*. (Monografia de Graduação) – Universidade Federal da Bahia . Salvador – BA. 2013.

- [7] (8) Y. Peres] David A. Levin, Yuval Peres, Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 371 páginas. 2009.
- [8] KONSTANTOPOULOS, Takis. *One Hundred Solved Exercises for the Subject: Stochastic Process*, disponível em: https://www.academia.edu/9661795/One_Hundred_1_Solved_2_Exercises_3_for_the_subject_Stochastic_Processes_I_4. Acesso 20/01/2022.



INTRODUÇÃO À FÍSICA-MATEMÁTICA

EMANUEL VIANA
IFCE - *Campus* CAUCAIA

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 Introdução

2 Matemática e Física

2.1 A linguagem matemática em física

2.2 Análise dimensional

2.3 Ordem de magnitude

2.4 Erros e algarismos significativos .

3 Sistemas de Coordenadas

3.1 Coordenadas no espaço

3.2 Sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas e esféricas

3.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas

3.2.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

3.2.3 Sistema de coordenadas esféricas

3.3 Cálculo de áreas e volume

4 Vetores

4.1 Representação vetorial

4.2 Álgebra vetorial

4.3 Vetor unitário e versor

4.4 Versores em coordenadas esféricas e cilíndricas

5 Modelagem Matemática de Fenômenos Físicos

5.1 Modelagem com funções elementares

5.2 Cônicas em Física

5.2.1 Parábolas

5.2.2 Elipses

5.2.3 Hipérboles

6 Equações Diferenciais Ordinárias

6.1 Motivações

6.2 Definições e exemplos

6.3 Equações diferenciais ordinárias separáveis e lineares

6.3.1 EDO's separáveis

6.3.2 EDO's lineares

6.4 Modelagem com EDO's de primeira ordem

6.4.1 Crescimento e Decaimento

6.4.2 Meia-vida

Referências

PREFÁCIO

O objetivo dessas notas de aula é fornecer um texto auto-contido para o minicurso “Introdução à Física-Matemática”, ministrado na X Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, realizada em Belém-PA entre os dias 20 e 24 de junho de 2022. Tais notas tiveram sua produção na disciplina com título homônimo no curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Caucaia-CE do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). As notas de aula do curso ministrado em Caucaia tem como principais referências os livros de Batista & Mozolevski [3] e Rodrigues [14]. No último capítulo, adicionamos como referência o livro de Zill [19].

Fortaleza, Junho de 2022

Emanuel Viana

INTRODUÇÃO

Física-matemática é um ramo da física teórica que estuda desde simetrias até modelos integráveis na área de partículas e campos. Desde a antiguidade, temos exemplos da produtiva interação entre a matemática e as ciências naturais. Arquimedes, por exemplo, ao mesmo tempo que demonstrava teoremas de geometria também cuidava de questões sobre o equilíbrio dos corpos flutuantes. Ptolomeu desenvolveu grande parte da trigonometria esférica para o estudo do movimento dos planetas. Já nos primórdios da ciência moderna, também vimos o surgimento do cálculo diferencial e integral como linguagem matemática para o estudo do movimento dos corpos.

As duas ciências - a Matemática e a Física - andavam juntas em trabalhos de grandes matemáticos dos séculos XVIII e XIX, como os Bernoulli, Euler, Lagrange, Gauss, Hamilton, entre outros grandes filósofos matemáticos, e somente nos primórdios do século XX que a distinção entre matemática pura e ciências físicas ficou mais nítida. Apesar dessa distinção, atualmente dispomos da existência de dois universos quase que paralelos, pois, independentemente do trabalho dos matemáticos em teorias abstratas, sem a preocupação com qualquer tipo de aplicação às ciências, por outro lado, os físicos empregam a matemática como uma ferramenta teórica para modelar seus fenômenos, sem muita preocupação com o rigor e a estrutura lógica da linguagem que eles utilizam.

Dessa forma, é necessário que haja um elo entre estas duas áreas para fomentar o verdadeiro espírito científico, um diálogo entre dois tipos de saber tão enraizados em nossa cultura, isto é, aos físicos é necessário um aprimoramento do rigor matemático e uma melhor compreensão das estruturas matemáticas

necessárias para a descrição dos fenômenos físicos, e aos matemáticos, é necessária uma volta às origens, pois a matemática, acima de tudo, consiste de construções abstratas elaboradas na tentativa de compreender melhor o mundo. A apresentação desse campo epistêmico matemático em textos introdutórios inicia-se modelando o movimento de partículas, ondas em uma dimensão, e outros assuntos correlatos, admitindo como pré-requisitos os cursos básicos de cálculo diferencial, álgebra linear e equações diferenciais. Ressaltamos que há livros clássicos nesta área de estudo tais como o do Butkov [5], de Arfken & Weber [1] e Gondar & Cipolatti [8], estes o aluno precisa de arcabouço teórico bem robusto para iniciar as leituras.

Portanto, neste minicurso iremos abordar o campo matemático e físico intitulado Física-Matemática que se relaciona de modo intrínseco a vários problemas em Matemática e Física, de forma que o professor de Matemática nos ensinos fundamental e médio pode tirar proveito de raciocínios e exemplos oriundos das ciências naturais para introduzir os conceitos matemáticos em suas aulas. E em tal processo, abordaremos tópicos que vão além dos conteúdos presentes no ensino básico, como equações diferenciais ordinárias, mas nossa intenção ao fazê-lo é levar o participante a compreender um pouco mais as dimensões do conhecimento físico e o uso de estruturas matemáticas na modelagem.

MATEMÁTICA E FÍSICA

Neste capítulo vamos mostrar diversos aspectos da importância da matemática na elaboração do conhecimento em física. A seguir, utilizaremos a análise dimensional para a avaliação das dependências funcionais existentes entre as grandezas, discutiremos posteriormente a ordem de magnitude das grandezas presentes em nossa experiência cotidiana e avaliaremos erros em medidas experimentais, bem como calcular sua propagação no cálculo das grandezas derivadas.

2.1. A LINGUAGEM MATEMÁTICA EM FÍSICA

Uma teoria física é uma construção puramente intelectual, que obviamente leva em conta os fenômenos naturais previamente observados, objetivando não apenas explicar o que já é conhecido, como também fornecer elementos que nos guiem a fenômenos ainda não observados. Como construção intelectual, teorias físicas necessitam de linguagem adequada para permitir seu desenvolvimento e transmissão de maneira adequada, e linguagem matemática tem se mostrado a mais adequada para o propósito da elaboração de teorias físicas.

O primeiro e mais básico uso da linguagem matemática em física é o tratamento numérico de grandezas físicas, pois ao tentar descrever fenômenos naturais, precisamos lidar com certas quantidades, como comprimento, tempo, velocidade, temperatura, carga elétrica, etc., e estas caracterizarão o estado do sistema analisado. Da mesma forma, ao realizarmos um experimento, teremos como resultado uma sequência de números, que corresponderão aos valores numéricos das grandezas avaliadas no sistema. É através do comportamento

e da variação desses diversos números, bem como da interrelação entre eles, que podemos inferir leis empíricas de caráter geral sobre o funcionamento de determinado sistema físico.

Exemplo 2.1. A fim de compreendermos a linguagem matemática, para o tratamento de problemas físicos, vamos começar pelo uso dos números e sua interpretação.

Sabemos que experimentos resultam em uma coleção de números os quais representarão as medidas de certas grandezas físicas assumidas pelo sistema no qual estamos estudando. Dessa forma, algumas questões surgem, imediatamente, quando consideramos medidas físicas:

1. Qual o grau de precisão de nossos instrumentos de medida?
2. Que tipo de informação nos traz esse ou aquele número?
3. Nossa modelagem teórica coaduna perfeitamente com as medidas obtidas experimentalmente?
4. E se não, qual o limite entre o previsto teoricamente e o que foi observado na realidade?

Dessa forma, vamos mostrar os diversos aspectos do uso da linguagem e das técnicas matemáticas na modelagem e descrição de sistemas físicos. Na próxima seção, vamos entender o conceito de dimensão e de unidades de medida, isto é, de que trata a análise dimensional.

2.2. ANÁLISE DIMENSIONAL

Em cursos de matemática e física (entre outros), é frequente encontrar afirmações do tipo: “a dimensão de trabalho é ML^2T^{-2} ”, mas a definição do que sejam “dimensões” é raramente, ou nunca, encontrada. O nome que se dá ao estudo das dimensões físicas das variáveis de um problema, e dos parâmetros que o governam, é análise dimensional.

A análise dimensional consiste de um conjunto de técnicas e resultados que nos possibilita:

1. A verificação da homogeneidade de fórmulas físicas.
2. A previsão de equações físicas.
3. A mudança de sistemas de unidades.
4. A consideração de fatores de escalas para o estudo de modelos.

As ideias aqui apresentadas são uma adaptação da introdução à análise dimensional de Barenblatt [2], alguns excertos do trabalho de Batista e Mozolevski [3] e de Calçada & Sampaio [6]. Um texto para uma visão geral das grandezas físicas e análise dimensional, contido na Revista Brasileira de Ensino de Física, é o trabalho de Trancanelli [18].

Na Física existem basicamente dois tipos de grandezas de interesse: grandezas escalares e grandezas vetoriais. **Grandeza escalar** é aquela que fica perfeitamente definida por um número, positivo ou negativo, seguido de uma unidade apropriada. Grandezas como tempo, comprimento, volume, massa, carga elétrica e temperatura, por exemplo, são grandezas escalares, e tais grandezas podem ser somadas, multiplicadas e podemos tomar seus inversos, pois suas medidas tomam valores no corpo dos números reais.

Por outro lado, uma **grandeza vetorial**, é uma grandeza que não pode ser descrita por um único número. Para ficar completamente definida, necessita, além do valor numérico e unidade, de uma informação geométrica que nos dê a orientação exata da grandeza. Dessa forma, uma grandeza vetorial possui módulo, direção e sentido e, sua descrição matemática é dada por elementos de um espaço vetorial. Alguns exemplos de grandezas vetoriais são a força, velocidade, entre outras.

Um **sistema de unidades** é formado por um conjunto de padrões para as suas grandezas fundamentais, em termos das quais todas as demais grandezas do sistema podem ser escritas, e dessa forma, dado o conjunto de grandezas fundamentais, isso define a classe do sistema. Por exemplo, o sistema internacional de unidades (SI) é um sistema de classe MLT (se circunscrito a grandezas mecânicas). As grandezas fundamentais do sistema, bem como seus padrões (unidades), são massa (quilograma - kg), comprimento (metro - m) e tempo

(segundo - s). Duas grandezas derivadas do SI são a velocidade (com unidades ms^{-1}) e a força (com unidades $kg\ ms^{-2}$). Outros sistemas de mesma classe são possíveis. Dois exemplos são o sistema CGS (centímetro - grama - segundo), que é métrico, e o sistema MLT britânico (pé - libra-massa - segundo).

O conjunto de grandezas fundamentais é razoavelmente arbitrário: é necessário apenas que todas as demais grandezas sejam exprimíveis em função das grandezas fundamentais escolhidas, i.e., cada escolha de grandezas fundamentais definirá uma nova classe.

Definição 2.2 (Dimensão). O fator numérico pelo qual uma grandeza muda quando passa de um sistema de unidades para o outro de mesma classe é a sua dimensão.

Por exemplo, considerando a mudança entre os sistemas $CGS \rightarrow MLT$, os fatores numéricos para massa, comprimento e tempo são respectivamente $M = 0,001$, $L = 0,01$ e $T = 1$.

Definição 2.3. As dimensões das unidades fundamentais que definem a classe do sistema são as dimensões fundamentais dessa classe.

No caso acima, as unidades fundamentais são massa, comprimento e tempo, e, portanto, as dimensões fundamentais da classe são M , L e T .

Considere o seguinte princípio: todos os sistemas de uma determinada classe são equivalentes. Por exemplo, para a classe de sistemas MLT, as dimensões de todas as grandezas físicas devem ser expressas apenas em função dessas dimensões fundamentais: se G é uma grandeza qualquer do sistema de unidades, devemos ter

$$[[G]] = \varphi(M, L, T),$$

onde $[[\cdot]]$ representa a “dimensão de” e φ é a *função dimensional* da grandeza G . Dessa forma, como consequência do princípio de equivalência dos sistemas de unidade de uma determinada classe temos o

Teorema 2.4. A função dimensional φ é sempre uma função potência nas dimensões fundamentais:

$$\varphi = M^\alpha L^\beta T^\gamma.$$

Exemplo 2.5. Na Mecânica, adotam-se a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T) como *grandezas fundamentais*. Assim, pode-se expressar qualquer grandeza G , de natureza mecânica, em função de M, L e T, i.e., $[[G]] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$.

Vamos determinar, por exemplo, a equação dimensional da *velocidade*.

No movimento uniforme, a velocidade é dada pelo quociente entre variação de espaço Δs e o correspondente intervalo de tempo Δt , de modo que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Assim,

$$[[v]] = \frac{[[\Delta s]]}{[[\Delta t]]},$$

e desde que $[[\Delta s]] = L$ e $[[\Delta t]] = T$, segue $[[v]] = LT^{-1}$. Portanto,

$$[[v]] = M^0 L^1 T^{-1},$$

i.e., as dimensões físicas da velocidade, em relação às grandezas massa, comprimento e tempo são, respectivamente, 0, 1 e -1 .

Exemplo 2.6. Adotando como grandezas fundamentais a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T) vejamos as equações dimensionais do volume de um corpo e da densidade de um corpo.

O volume de um corpo é dado pelo produto de três comprimentos l_1, l_2 , e l_3 , isto é, $V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$. Assim, $[[V]] = M^0 L^3 T^0$.

A densidade d de um corpo de massa m e de volume V é dada por $d = \frac{m}{V}$. Daí,

$$\begin{aligned} [[d]] &= \frac{[[m]]}{[[V]]} \\ &= \frac{M}{M^0 L^3 T^0} \therefore [[d]] = M^1 L^{-3} T^0. \end{aligned}$$

A seguir vejamos algumas regras básicas para o cálculo com dimensões:

1. Dimensões podem ser multiplicadas e divididas livremente e a multiplicação é comutativa e associativa.

- Existem grandezas sem dimensão, chamadas *adimensionais* e sua “dimensão” é representada nesse contexto pelo número 1. A dimensão de uma grandeza qualquer não muda se multiplicada por uma grandeza adimensional.

Estas duas regras basicamente dizem que as dimensões formam um **grupo abeliano** pela operação de multiplicação.

- A adição somente faz sentido quando os termos possuem estritamente a mesma dimensão, e a dimensão da soma é a mesma dimensão de cada uma de suas parcelas. Sejam, por exemplo, G_1, G_2, \dots, G_n grandezas tais que $[[G_i]] = [[G]]$, com $1 \leq i \leq n$, então $[[G_1 + G_2 + \dots + G_n]] = [[G]]$.
- Uma equação envolvendo grandezas físicas somente pode fazer sentido se ambos os membros da equação tiverem a mesma dimensão e todos os termos das somas envolvidas em qualquer um dos membros tiverem a mesma dimensão (**homogeneidade**).
- Funções transcendentais ($\sin, \cos, \tan, \arccos, \exp, \log, \dots$) só podem ser avaliadas em grandezas adimensionais (pois se observarmos, suas séries de Taylor envolvem potências arbitrárias dos argumentos) e seus valores também são grandezas adimensionais.
- Para grandezas vetoriais, cada uma de suas componentes deve ter a mesma dimensão do módulo do vetor, essa dimensão é definida como a dimensão da grandeza vetorial.
- A dimensão do produto de uma grandeza escalar por uma grandeza vetorial é o produto de suas respectivas dimensões.
- A dimensão do produto escalar de duas grandezas vetoriais é o produto das dimensões das grandezas vetoriais. Isto é facilmente obtido, pois o produto escalar é a soma dos produtos das entradas correspondentes,

isto é, se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, temos que $[[\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle]] = [[\vec{v}]] [[\vec{w}]]$.

9. A dimensão do produto vetorial de duas grandezas vetoriais também é o produto das dimensões individuais das grandezas vetoriais correspondentes.
10. A dimensão é invariante por limites, isto é, se considerarmos uma sequência numérica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para x , tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenhamos $[[x_n]] = [[X]]$, então teremos que $[[x]] = [[X]]$.

Em particular, o cálculo de dimensões de grandezas que envolvem derivadas ou integrais não oferece qualquer complicação adicional.

Outra aplicação da análise dimensional é a previsão de leis físicas. As leis empíricas em geral são obtidas por meio de repetidas observações variando-se todos os parâmetros das grandezas envolvidas. Após cuidadosa análise dos dados experimentais, podemos inferir o comportamento de determinada grandeza em função de outra. A análise dimensional pode nos dar, em alguns casos, pistas sobre qual seria o comportamento dessas grandezas. Às vezes, esta estimativa não fornece o comportamento correto e nesse caso encontramos constantes de proporcionalidade dimensionais, como a constante de Planck ou a constante gravitacional.

Mesmo assim, a análise dimensional pode servir como guia para tentarmos entender os dados oriundos da experiência e elaborarmos corretamente as leis empíricas. Veremos como é feito esse procedimento a partir de exemplos que se seguem.

Exemplo 2.7. Determine o tempo de queda livre de um objeto de massa m caindo de uma altura h , a partir do repouso, com a aceleração da gravidade g .

Seja t o tempo de queda. Então podemos tentar uma fórmula do tipo:

$t = m^\alpha h^\beta g^\gamma$, que dimensionalmente fica

$$\begin{aligned} [[T]] &= [[M]]^\alpha [[L]]^\beta [[g]]^\gamma \\ &= [[M]]^\alpha [[L]]^{\beta+\gamma} [[T]]^{-2\gamma}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade acima usamos o fato que g deve ter a dimensão de aceleração.

Como a equação tem que ser homogênea, então o lado direito tem que ter dimensão somente de tempo. Daí, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = -\frac{1}{2}$, ou seja, t é proporcional à raiz quadrada da razão da altura pela aceleração da gravidade

$$t \propto \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

O símbolo \propto na fórmula acima significa proporcionalidade, isto é, pode ser necessária a introdução de uma constante multiplicativa para que se obtenha uma igualdade. De fato, a fórmula verdadeira é:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Exemplo 2.8. A força centrípeta é a força que mantém um corpo em movimento circular. Determine a dependência da intensidade da força centrípeta F_C em relação à massa m , do corpo, ao módulo velocidade v , e ao raio r da circunferência onde se realiza o movimento.

Novamente, faremos uma expressão da força centrípeta dependendo dos parâmetros em questão: $F_C = m^\alpha v^\beta r^\gamma$, que em termos dimensionais se escreve da forma

$$[[M]] [[L]] [[T]]^{-2} = [[M]]^\alpha [[L]]^{\beta+\gamma} [[g]]^{-\beta}.$$

Dessa equação, inferimos que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = -1$. Portanto, afirmamos que

$$F_C \propto \frac{mv^2}{r},$$

nesse caso em particular, temos, de fato, uma igualdade e não apenas uma proporcionalidade.

Na maioria das vezes, podemos observar que a análise dimensional não fornece uma fórmula exata, com todas as constantes envolvidas, mas seu objetivo é nos fornecer um panorama do comportamento de certas grandezas físicas em função de outras.

A análise dimensional também será útil para estabelecer similaridades físicas. Assim como as semelhanças em geometria, as semelhanças em física também são uma poderosa ferramenta na resolução de problemas. Sua principal função é permitir a construção de modelos e protótipos em escala para a simulação de situações reais. Por exemplo, os fabricantes de aviões não têm como testar um protótipo real em um voo tripulado, a não ser que tenham plena certeza de que seja seguro. A única possibilidade é construir um modelo miniatura, com os mesmos materiais e com a mesma geometria da aeronave real, e submeter a miniatura a condições similares as quais a aeronave real seria submetida em pleno voo, isto é, feito com o auxílio de grandes tubos de vento.

O princípio básico para trabalharmos com questões de similaridade é que, se uma grandeza G é proporcional a um produto de potências de outras grandezas (aqui entra a análise dimensional para determinar esta dependência), isto é, se $G \propto f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$, então, se tomarmos dois sistemas físicos A e B , a razão entre a medida da grandeza G para A , que denotaremos por G_A , e a medida da grandeza G para B , que denotaremos por G_B será igual a

$$\frac{G_A}{G_B} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1B}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{f_{2A}}{f_{2B}}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{f_{nA}}{f_{nB}}\right)^{\alpha_n}.$$

Na expressão acima temos uma igualdade, pois todas as constantes multiplicativas são canceladas.

Exemplo 2.9. Um poste de 6 m de altura tem massa de 600 kg. Determine massa de um poste feito com o mesmo material e 12 vezes menor.

A informação de que o poste é feito do mesmo material significa que ele possui a mesma densidade.

Vamos denotar por ρ essa densidade comum, e por M , L e V , respectivamente, a massa, comprimento e volume do poste grande e por m , l e v a massa,

altura e volume do poste pequeno. Assim,

$$1 = \frac{\rho}{\rho} = \frac{MV^{-1}}{mv^{-1}} \Rightarrow m = \frac{Mv}{V}.$$

Desde que $\frac{v}{V} = \frac{l^3}{L^3} = \left(\frac{l}{L}\right)^3$, segue que

$$m = M \left(\frac{l}{L}\right)^3 = M \left(\frac{1}{12}\right)^3,$$

e, portanto, como $M = 600 \text{ kg}$, temos $m = 0,35 \text{ kg} = 350 \text{ g}$.

2.3. ORDEM DE MAGNITUDE

Em muitas situações do cotidiano, precisamos apenas saber uma estimativa de certas quantidades, não o valor exato. Por exemplo, em um show em praça pública, como a polícia avalia quantas pessoas estão presentes no evento? Você já deve ter ouvido várias vezes: estavam presentes em torno de 20000 pessoas, mas nunca deve ter ouvido algo do tipo: estavam presentes 21534 pessoas. Como se estima a área devastada na floresta amazônica? Ou ainda, qual a frota nacional de veículos automotores? Essas e várias outras perguntas recebem respostas aproximadas. Faz diferença se foram devastados 10000 m^2 ou 100000 m^2 em uma floresta, mas faz pouca diferença se foram devastados 10000 m^2 ou 15000 m^2 . O que se procura nessas situações é estimar a ordem de magnitude da grandeza, ou seja, qual a potência de 10 que mais se aproxima da realidade, isto em unidades de medida de uma grandeza dada, seja ela o número de pessoas, a área de floresta, etc.

Uma ordem de magnitude ou ordem de grandeza é a classe de escala ou magnitude de qualquer quantidade ou grandeza, onde cada classe contém valores de uma razão à classe que a precede. A razão mais comumente usada é 10.

Ordens de magnitude são geralmente usadas para fazer comparações muito aproximadas. Se dois números diferem por uma ordem de magnitude, um é aproximadamente dez vezes maior que o outro. Se eles diferem por duas

ordens de magnitude, eles diferem por um fator de aproximadamente 100. Dois números de mesma ordem tem aproximadamente a mesma escala: o maior valor é menor que dez vezes o menor valor. Esse é o raciocínio que está por trás dos algarismos significativos: a quantidade arredondada é normalmente umas poucas ordens de magnitude menor que o total, e conseqüentemente, insignificante. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.10. A ordem de magnitude de um número é a menor potência de 10 usada para representar aquele número. Dessa forma, a ordem de grandeza de um número n é o número $b \in \mathbb{Z}$ da forma que

$$n = a \times 10^b,$$

onde $1 \leq a < 10$.

Exemplo 2.11. O número 0,2 tem ordem de magnitude -1; o número 5 tem ordem de magnitude 1 e o número 999 tem ordem magnitude 3.

Uma das tarefas de um cientista é aprimorar sua capacidade de fazer estimativas a priori da ordem de magnitude de determinada grandeza, antes de fazer um exame detalhado, seja do ponto de vista teórico ou experimental. Um físico que possuía essa capacidade em seu mais alto grau de eficácia foi Enrico Fermi. Fermi introduziu uma prática muito comum hoje em dia entre os físicos que é a “física do verso de um envelope”, isto é, antes de discutir um fenômeno com mais detalhes, um físico deve ser capaz de fazer estimativas a priori com cálculos que não devem ocupar mais espaço que as costas de um envelope.

Os cálculos necessários para se estimar a ordem de magnitude são, em geral, indiretos e aproximados, levando em conta o mínimo de hipóteses possíveis. A estimativa de ordem de grandeza, juntamente com a análise dimensional pode nos auxiliar na resolução de problemas.

2.4. ERROS E ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Um aspecto complementar da aproximação é a avaliação do erro. De fato, cada vez que realizamos uma estimativa aproximada da medida de uma gran-

deza, fazemos determinada quantidade de hipóteses a priori. Se essas estimativas forem repetidas diversas vezes, sendo que, em cada uma delas as hipóteses forem levemente diferentes, certamente chegaremos a valores diferentes. Esses valores estarão dentro de um intervalo. A determinação da largura desse intervalo numérico é a estimativa do erro. A escolha deste ou daquele valor dentro do intervalo de erro não possui qualquer relevância física, em geral, escolhe-se como medida convencional o ponto médio deste intervalo. Além disso, os erros surgem com a conversão de um número real em um número de máquina de ponto flutuante. Para mais detalhes sobre máquina de ponto flutuante e propagações de erros veja S. D. Conte [7] e Ruggiero & Lopes [15].

Notação 2.1. *A medida de uma grandeza física, em unidades pertinentes, é escrita como*

$$G = (a \cdot 10^b \pm \varepsilon)U,$$

onde $1 \leq a < 10$, $b \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$ e U é a unidade de medida da grandeza G .

A notação $a \cdot 10^b$, é o que se denomina notação científica, e ela é importante porque explicita a ordem de magnitude da grandeza medida. O número positivo ε é comumente chamado de erro absoluto, que a seguir definiremos que modo preciso, a largura do intervalo de erro é igual a 2ε . Para que uma medida possa fazer algum sentido, é necessário que o erro absoluto fique, no máximo, numa ordem de magnitude abaixo da medida, em nosso exemplo, teríamos que ter $0 < \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{b-1}$. Se a ordem de magnitude do erro for a mesma ordem de magnitude da medida, significa que a medida não faz qualquer sentido. Colocamos a desigualdade $\varepsilon \leq 5 \cdot 10^{b-1}$, pois poderíamos efetuar um arredondamento para baixo, resultando em $\varepsilon \approx 10^{b-1}$. Se acontecesse $\varepsilon > 5 \cdot 10^{b-1}$, teríamos que arredondar para cima, obtendo $\varepsilon \approx 10^b$.

Definição 2.12. O erro absoluto é a diferença entre o valor exato de um número x e de seu valor aproximado \bar{x} , i.e.,

$$\Delta_x = x - \bar{x}.$$

Em geral, apenas o valor de \bar{x} é conhecido, e, neste caso, é impossível obter o valor exato do erro absoluto. O que se faz é obter um limitante superior ou

uma estimativa para o módulo do erro absoluto. Por exemplo, sabendo-se que $\pi \in (3,14; 3,15)$ tomaremos para π um valor dentro deste intervalo e teremos, então, $|\Delta_\pi| = |\pi - \bar{\pi}| < 0,01$.

Seja agora o número x representado por $\bar{x} = 2112,9$ de tal forma que $|\Delta_x| < 0,1$, ou seja, $x \in (2112,8; 2113)$ e seja y o número representado por $\bar{y} = 5,3$ de tal forma que $|\Delta_y| < 0,1$, ou seja, $y \in (5,2; 5,4)$. Os limitantes superiores para os erros absolutos são os mesmos. Podemos dizer que ambos os números estão representados com a mesma precisão?

Para responder tal questão é preciso comparar a ordem de grandeza de x e y , de modo que feito isso, é fácil concluir que o primeiro resultado é mais preciso que o segundo, pois a ordem de grandeza de x é maior que a ordem de grandeza de y . Assim, dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos, o erro absoluto não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo. Por esta razão, o erro relativo é amplamente empregado e será definido a seguir.

Definição 2.13. O erro relativo de x é definido como o erro absoluto dividido pelo valor aproximado, i.e.,

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{\bar{x}} = \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}.$$

No exemplo anterior, temos

$$|\delta_x| = \frac{|\Delta_x|}{|\bar{x}|} < \frac{0,1}{2112,9} \approx 4,7 \cdot 10^{-5}$$

e

$$|\delta_y| = \frac{|\Delta_y|}{|\bar{y}|} < \frac{0,1}{5,3} \approx 0,02,$$

confirmando, portanto, que o número x é representado com maior precisão que o número y .

Observação 2.14. O erro relativo é um número entre 0 e 1, portanto quanto mais próximo de 0 for o erro relativo, melhor e mais acurada foi a medida. Em contrapartida, se o erro relativo ficou próximo de 1, então a medida foi gravemente prejudicada e não possui qualquer grau de confiabilidade.

Observação 2.15. O erro relativo sempre é um número adimensional, pois resulta da divisão de duas grandezas com a mesma dimensão.

Finalizaremos o capítulo com o seguinte resultado

Proposição 2.16. *Para a soma e subtração de medidas da mesma grandeza, os erros absolutos são somados. Para a multiplicação de um número arbitrário de grandezas, ou para a divisão de duas grandezas, os erros relativos são somados.*

Um prova bastante direta para esta proposição pode ser encontrada em [3, 7, 15].

SISTEMAS DE COORDENADAS

Neste capítulo vamos mostrar alguns dos principais sistemas de coordenadas que encontramos em matemática e física, bem como as mudanças de coordenadas entre eles. Finalizamos o capítulo com o cálculo de áreas e volumes no sistema de coordenadas cartesianas, finalizando com algumas fórmulas de área e volume nos sistemas apresentados logo a seguir.

3.1. COORDENADAS NO ESPAÇO

Vivemos num espaço tridimensional e para definirmos a posição de um ponto no espaço precisaremos de no mínimo três coordenadas espaciais (latitude, longitude e altura acima do nível do mar). Entendemos por **coordenadas** números que permitem a localização relativa de um ponto no espaço. Além disso, a posição do ponto é *única*, mas os valores das coordenadas deste ponto irão depender do **sistema de coordenadas** adotado e da escolha da origem.

De forma geral, escreveremos estas três coordenadas como x_1, x_2, x_3 (assim como podemos usar no índice o ponto P que estamos tratando). Note que existem diversos sistemas de coordenadas e escolhendo de forma adequada um sistema podemos tornar mais simples a resolução de um problema. Ademais, a escolha da origem também é fundamental para uma solução mais rápida e simples de um determinado problema.

Para o que se segue nos limitaremos a dimensão $n = 3$ no espaço vetorial \mathbb{R}^3 . A seguir, discutiremos alguns sistemas de coordenadas, a saber, o *cartesiano*, o *esférico* e o *cilíndrico*.

3.2. SISTEMAS DE COORDENADAS: CARTESIANAS, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

3.2.1. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Criado por René Descartes, este sistema define um plano cuja origem se situa na interseção entre dois eixos perpendiculares ditos eixo das *abscissas* $0x$ e o eixo das *ordenadas* $0y$. Tal sistema também é conhecido como *sistema de coordenadas retangulares*. Dessa forma, todos os pontos de um plano são definidos por pares ordenados (x, y) com $x, y \in \mathbb{R}$.

Da mesma maneira, considerando três dimensões, os pontos do espaço podem ser identificados por ternos (x, y, z) com $x, y, z \in \mathbb{R}$. Para tal construção, tomemos três eixos de coordenadas passando pelo mesmo ponto 0 , que será dito a origem do sistema, de forma que cada eixo seja perpendicular aos outros dois (veja Figura 3.1). A orientação que tomamos no sistema é a *orientação positiva* ou *dextrogira*.

Seja P o ponto da Figura 3.1. Note que os três planos perpendiculares aos eixos $0x$, $0y$ e $0z$ que passam pelo ponto determinam nestes eixos as coordenadas x_P , y_P e z_P , respectivamente, de modo que o ponto P possui coordenadas (x_P, y_P, z_P) .

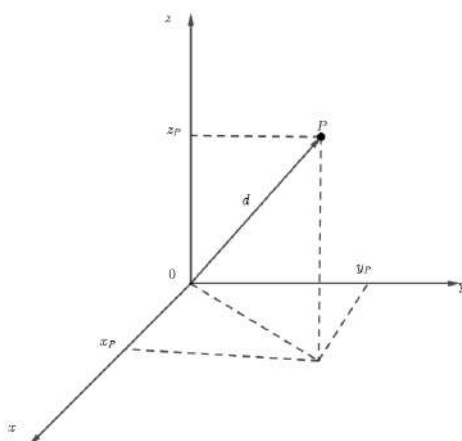


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas cartesianas de dimensão 3

A distância d da origem até um ponto P em tal sistema é dada por

$$d = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}.$$

3.2.2. SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

O sistema de coordenadas cilíndricas ou *sistema de coordenadas circulares cilíndricas* é tal que as coordenadas que definem um ponto são ρ, φ e z . (veja Figura 3.2)

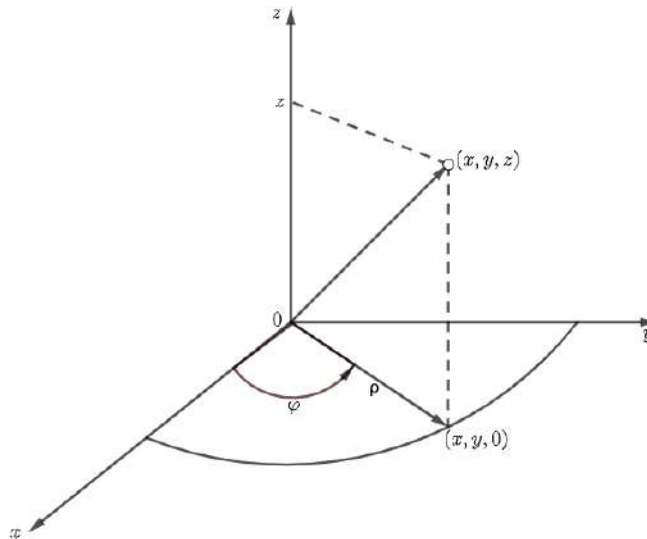


Figura 3.2: Sistema de coordenadas cilíndricas

A mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas obedece às seguintes relações:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi, \end{aligned}$$

de modo que $z \in (-\infty, +\infty)$, $\rho \in [0, +\infty)$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$. Observamos ainda que a componente ρ deve ser perpendicular ao eixo $0z$ e o ângulo φ deve ser medido conforme o sentido indicado na Figura 3.2.

3.2.3. SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

O sistema de coordenadas esféricas ou *sistema de coordenadas polares esféricas* é tal que as coordenadas que definem um ponto são r, θ e φ . (veja Figura 3.3).

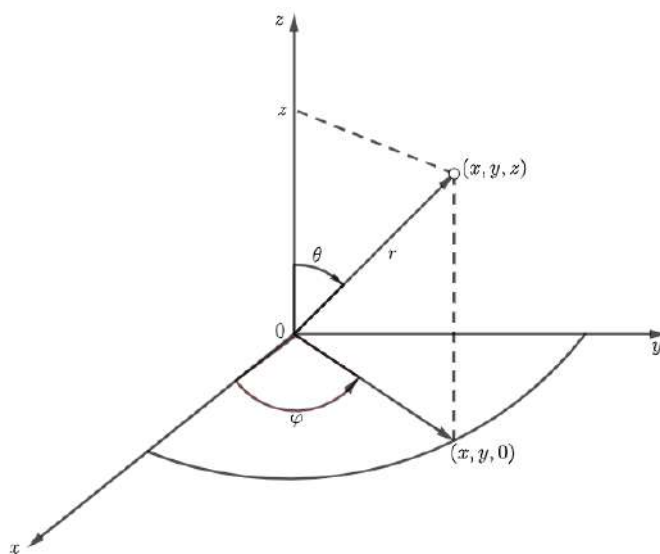


Figura 3.3: Sistema de coordenadas esféricas

Neste sistema a coordenada r vai da origem até o ponto P , sendo óbvio que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

e os ângulos θ e φ devem ser medidos conforme o sentido indicado na Figura 3.3.

De modo análogo ao sistema anterior, podemos mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas usando as seguintes relações:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta,$$

de modo que $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ no sistema esférico, o ponto se encontra no plano xy , pois $z = 0$ e neste caso obtemos as *coordenadas polares* (veja Figura 3.4) no plano xy , e, portanto,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

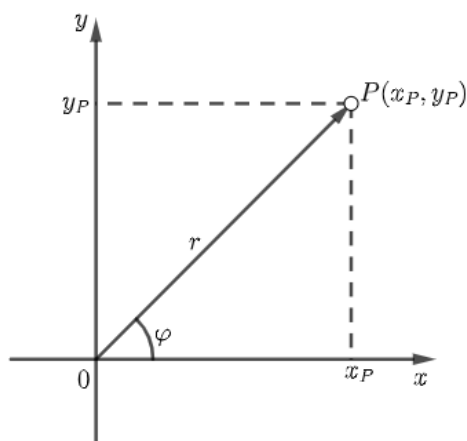


Figura 3.4: Coordenadas polares

Ademais, a escolha do sistema de coordenadas deve ser feita de tal forma que isto venha a trazer alguma simplificação do problema que queremos resolver, e tal simplificação normalmente é devida à *simetria do problema*.

Na seção seguinte, apresentaremos de forma direta algumas ideias para o cálculo de áreas e volumes. Esses conceitos, bem como os demais apresentados no próximo capítulo dará um pequeno arcabouço para o que desejamos fazer no curso.

3.3. CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUME

Considere um pequeno elemento infinitesimal de área retangular dA em um plano cartesiano conforme mostra a Figura 3.5.

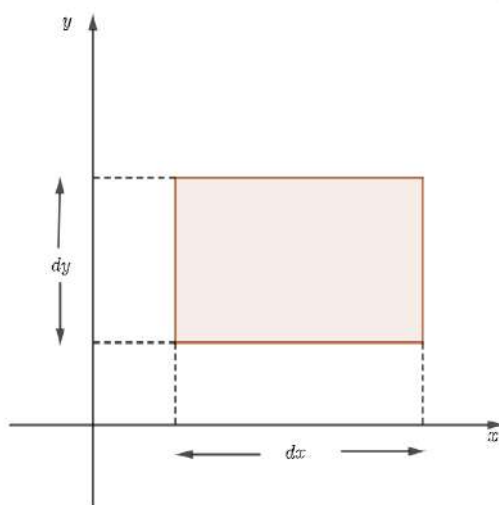


Figura 3.5: Elemento infinitesimal

De forma direta, temos $dA = dx dy$. Pela ideias contidas nos cursos de Cálculo, temos que a área total A de uma superfície S qualquer poderá ser calculada, então, somando-se infinitos elementos de área, ou seja, $A = \sum_i dA_i$, o que pode ser estendido para uma integral, que em coordenadas cartesianas é dado por

$$A = \int_S dA = \int \int dx dy.$$

Por outro lado, podemos calcular a área de uma figura utilizando um sistema de coordenadas que não seja o cartesiano. Para transformarmos as variáveis de integração de um sistema de coordenadas para outro, precisamos calcular o *Jacobiano* que é dado por

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial u & \partial y / \partial u \\ \partial x / \partial v & \partial y / \partial v \end{bmatrix}.$$

Portanto, a relação de transformação generalizada para o cálculo da área é

$$A = \int \int dx dy = \int \int |J| du dv,$$

onde $|J|$ é o determinante do Jacobiano. Dessa forma, em coordenadas polares, a área é dada por

$$A = \int_S dA = \int \int r dr d\varphi.$$

Estendendo o raciocínio da Figura 3.5 para o espaço tridimensional, temos que em coordenadas cartesianas o elemento de volume será dado por $dV = dx dy dz$, e o volume de um sólido S_o qualquer é calculado da forma $V = \sum_i dV_i$, o que pode ser estendido para uma integral, que em coordenadas cartesianas é dado por

$$V = \int_{S_o} dV = \int \int \int dx dy dz.$$

Analogamente, a mudança de variáveis de integração para um sistema de coordenadas diferentes do sistema cartesiano pode ser realizada utilizando novamente o Jacobiano, mas neste caso, teremos três variáveis:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial x/\partial w & \partial y/\partial w & \partial z/\partial w \end{bmatrix},$$

dessa maneira, a relação de transformação generalizada para o cálculo do volume é

$$V = \int \int \int |J| du dv dw.$$

Dessa forma, o volume em coordenadas cilíndricas é dado por

$$V = \int \int \int \rho d\rho d\varphi dz.$$

e, em coordenadas esféricas,

$$V = \int \int \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

VETORES

Neste capítulo vamos trabalhar com vetores e sua estreita relação para caracterizar de forma completa as grandezas vetoriais. No capítulo 2, vimos que há duas espécies distintas de grandezas: as escalares e as vetoriais. De modo a reforçar as ideias apresentadas anteriormente, ratificamos as caracterizações dessas grandezas a seguir.

Uma **grandeza escalar** é uma quantidade que é completamente caracterizada conhecendo-se apenas o seu módulo ou magnitude. Exemplos: tempo, massa, volume, pressão etc. Por outro lado, uma **grandeza vetorial** é caracterizada somente se soubermos além do seu módulo, a sua direção e o seu sentido. Exemplos: aceleração, velocidade, força etc.

Destarte, vejamos a seguir a representação vetorial, um pouco de álgebra vetorial, vetor unitário e versor, algumas equações físicas expressas por produtos vetoriais ou escalares, finalizando tal capítulo com versores em coordenadas esféricas e cilíndricas.

4.1. REPRESENTAÇÃO VETORIAL

Um vetor no espaço é um terno ordenado de números reais (x, y, z) , os quais são as componentes deste vetor. Desta forma, conforme a Figura 4.1, segue que

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z),$$

onde A_x, A_y, A_z são as componentes do vetor \vec{A} .

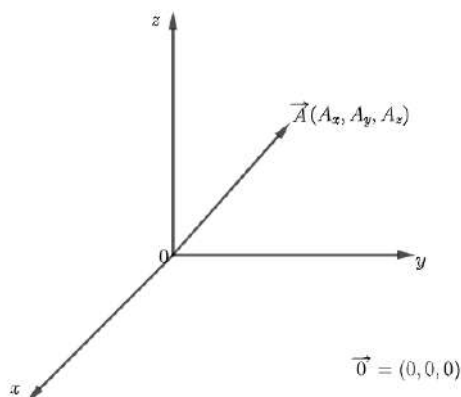


Figura 4.1: Vetor em \mathbb{R}^3

Além disso, o *módulo* ou *magnitude* do vetor é representado por $|\vec{A}|$ de forma que

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Note que o módulo de um vetor é um escalar.

4.2. ÁLGEBRA VETORIAL

Definição 4.1. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vetores em \mathbb{R}^3 . O vetor $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ soma de \vec{A} e \vec{B} é definido por

$$\vec{S} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z).$$

Note que a definição acima é equivalente a utilizarmos a regra do paralelogramo. (veja a Figura 4.2)

Para o que se segue, a menos de menção explícita, trabalharemos sobre escalares reais.

Definição 4.2. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e α um escalar. O produto $\alpha\vec{A}$ é um vetor com as seguintes componentes

$$\alpha\vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z).$$

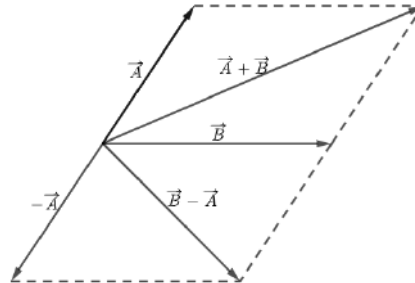


Figura 4.2: Vetor soma e subtração

Observe que um vetor multiplicado por um escalar mantém sua direção inalterada, podendo haver mudança apenas no seu módulo e sentido.

Definição 4.3. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vetores em \mathbb{R}^3 . A subtração vetorial é definida por

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-1)\vec{A} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z).$$

No caso de multiplicação de um vetor por um outro vetor temos duas possibilidades: produto escalar e produto vetorial.

Definição 4.4. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vetores em \mathbb{R}^3 . O produto escalar ou produto interno é definido por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z.$$

Note que o resultado de um produto interno entre dois vetores é um escalar e que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

Um outra definição do produto escalar, equivalente a Definição 4.4, é

Definição 4.5. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vetores em \mathbb{R}^3 . O produto escalar ou produto interno é definido por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo formado entre estes dois vetores.

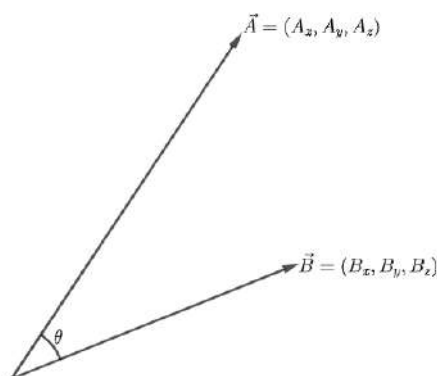


Figura 4.3: Ângulo θ formado por dois vetores

Observação 4.6. Note que o módulo de um vetor é dado por

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}.$$

Além disso, caso os vetores \vec{A} e \vec{B} sejam perpendiculares, temos $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

Vejam a seguir a segunda possibilidade de multiplicação entre vetores.

Definição 4.7. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vetores em \mathbb{R}^3 . O produto vetorial é definido por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x).$$

Note que o resultado de um produto vetorial entre dois vetores é um vetor e que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

Um outra definição do produto escalar, equivalente a definição 4.4, é

Definição 4.8. Sejam $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vetores em \mathbb{R}^3 . O produto escalar ou produto interno é definido por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo formado entre estes dois vetores.

Dessa forma, se dois vetores forem paralelos, teremos $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$. Ademais, ressaltamos que as definições apresentadas acima são *independentes* do sistema de coordenadas adotado.

4.3. VETOR UNITÁRIO E VERSOR

Um vetor \vec{v} é dito *unitário* quando seu módulo é igual a um, i.e., $|\vec{v}| = 1$.

Observação 4.9. Note que para todo vetor \vec{v} podemos encontrar um vetor unitário \vec{u} . De fato, se $|\vec{v}| = 1$, não há o que fazer. Caso contrário, temos que o vetor

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

é tal que $|\vec{u}| = 1$.

Considere uma reta orientada r . Define-se **versor** do eixo um vetor unitário \vec{u} que tem a mesma orientação do eixo, i.e., a mesma direção e sentido do eixo. Na figura 4.4 representamos por \vec{u} o versor do eixo Or .

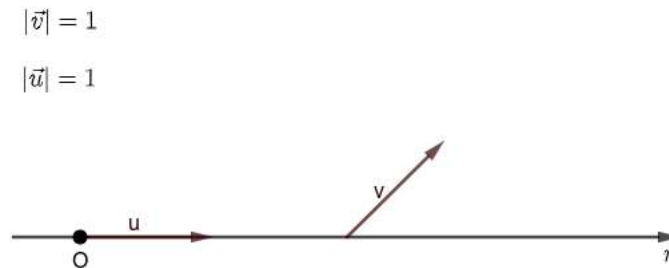


Figura 4.4: Ângulo θ formado por dois vetores

Observação 4.10. Todo versor é um vetor unitário, mas nem todo vetor unitário é um versor. Na Figura 4.4, o vetor \vec{v} é unitário, mas não é um versor do eixo Or .

Dado um *sistema de coordenadas cartesianas* é usual representar por $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (ou em negrito) os versores dos eixos $0x, 0y, 0z$, respectivamente. Dessa forma, fica claro que $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ e que $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$. Além disso, note que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

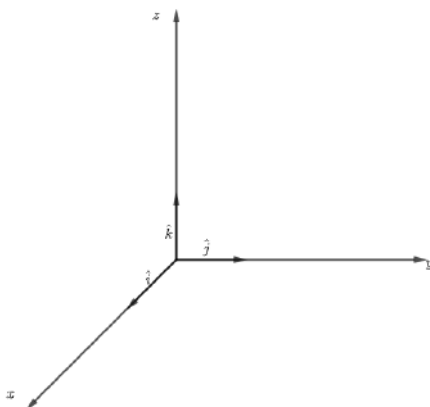


Figura 4.5: Sistema dextrogiro

visto que estes versores são perpendiculares um ao outro. (veja Figura 4.5)

No sistema apresentado na figura acima temos

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \end{aligned}$$

sendo este sistema dito **dextrogiro**. Os sistemas em que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$ é dito **levogiro**.

De posse dos vetores unitários, podemos representar um vetor $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ como sendo

$$\vec{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} \vec{A} = (A_x, A_y, A_z) &= (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z) \\ &= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1) \\ &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Daí, as operações apresentadas anteriormente se reescrevem com o auxílio

dos versores da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \\ \vec{A} - \vec{B} &= (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} \\ \alpha\vec{A} &= \alpha A_x\vec{i} + \alpha A_y\vec{j} + \alpha A_z\vec{k},\end{aligned}$$

onde $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ e α é um escalar.

Utilizando os versores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ podemos definir, de uma forma prática, o produto vetorial entre dois vetores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ como sendo o determinante da seguinte matriz:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

i.e.,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)\mathbf{i} + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z)\mathbf{j} + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x)\mathbf{k}.$$

O procedimento do cálculo do determinante conduz ao mesmo resultado apresentado na definição 4.7, contudo, ressaltamos que, o símbolo a direita da igualdade da equação (4.1) não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores ao invés de escalares, mas pode ser desenvolvido como se fosse um determinante de terceira ordem.

A seguir listamos algumas equações em Física expressas por produtos vetoriais ou escalares.

- Força magnética: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$;
- Momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$;
- Torque: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$;
- Trabalho: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

4.4. VERSORES EM COORDENADAS ESFÉRICAS E CILÍNDRICAS

Além dos sistemas de coordenadas cartesianas, há outros sistemas que são úteis para problemas específicos, dentre eles, os mais utilizados são: o sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema de coordenadas esféricas. Dessa forma, é útil definir também os versores nestes sistemas. Na seção 3.2 definimos tais sistemas e as relações de transformação para coordenadas cartesianas.

Na figura 4.6 mostramos os versores $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, \hat{k} (pode-se usar também a notação em negrito) para o sistema de coordenadas cilíndricas. Como $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, \hat{k} formam um conjunto de versores perpendiculares entre si, podemos expressar um vetor qualquer \vec{A} em coordenadas cilíndricas em termos de suas componentes ao longo de $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, \hat{k} , i.e.,

$$\vec{A} = A_{\rho}\hat{\rho} + A_{\varphi}\hat{\varphi} + A_z\hat{k}.$$

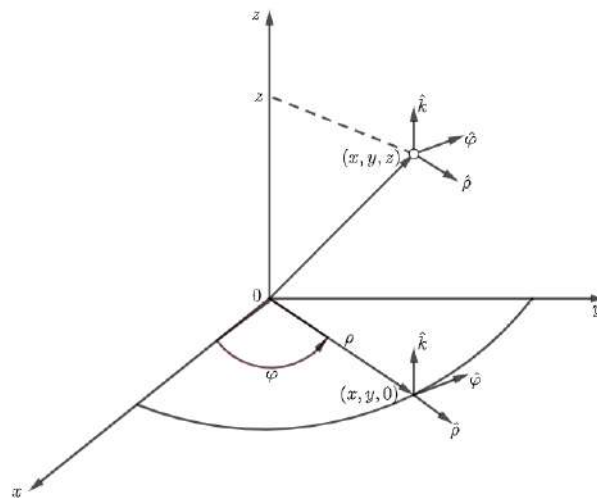


Figura 4.6: Versores num sistema de coordenadas cilíndricas

De forma análoga ao que foi feito acima para o sistema de coordenadas cilíndricas, o sistema de coordenadas esféricas tem os seguintes versores: \hat{r} , $\hat{\varphi}$, $\hat{\theta}$, onde neste sistema de coordenadas utilizamos r , φ e θ .

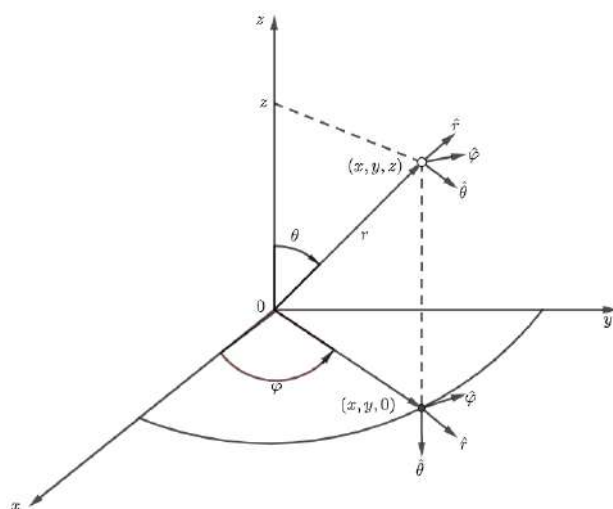


Figura 4.7: Vetores num sistema de coordenadas esféricas

Na Figura 4.7 mostramos os vetores $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}$ do sistema de coordenadas esféricas. Como os vetores $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}$ formam um conjunto de vetores perpendiculares entre si, podemos expressar um vetor qualquer \vec{A} em coordenadas esféricas em termos de suas componentes ao longo de $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}$, ou seja,

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_\theta \hat{\theta}.$$

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS FÍSICOS

Neste capítulo, vamos analisar o processo de modelagem matemática em Física utilizando funções elementares - funções lineares, afins e quadráticas - e o uso das cônicas na descrição de alguns fenômenos físicos.

5.1. MODELAGEM COM FUNÇÕES ELEMENTARES

Ao tentar modelar problemas físicos podemos estranhar certos *procedimentos* utilizados para tratar matematicamente os fenômenos em estudo, de modo que dependendo do tipo de informação que se quer obter de um sistema físico, é possível considerar **aproximações** que simplificam o tratamento matemático. Por exemplo, se o objetivo é determinar o formato da órbita de um planeta em seu movimento de translação ao redor do Sol, então, dadas as distâncias envolvidas no problema, podemos considerar tanto o Sol quanto o planeta simplesmente como pontos. Por outro lado, se o objetivo for estudar os movimentos de rotação e precessão da Terra, então o formato esférico da Terra e a inclinação do eixo de rotação são imprescindíveis nesse desenvolvimento.

Um dos objetivos da Física é produzir ferramentas conceituais que auxiliem na compreensão dos objetos e fenômenos da realidade que nos envolve, e a seguir mostraremos alguns exemplos de modelagem de problemas físicos utilizando apenas ferramentas de *matemática básica* (eventualmente iremos utilizar algum argumento oriundo do cálculo diferencial e integral), e também devemos observar que quanto mais sofisticados forem nossos modelos, melhor e mais acurada será nossa descrição do universo.

Para efetuarmos a modelagem de um sistema físico, devemos observar dois aspectos fundamentais para os quais temos que atentar: A configuração geométrica e a física, propriamente dita. Do ponto de vista da geometria, temos que verificar a distribuição espacial dos objetos envolvidos, fazer considerações de simetria, verificar as escalas de medida envolvidas (que podem determinar, do ponto de vista físico, quais fatores e efeitos poderão ser desprezados na modelagem do sistema) e escolher corretamente o sistema de coordenadas adequado, sem o qual, a descrição dos movimentos envolvidos se torna trabalhosa, quando não impossível.

Quanto ao aspecto físico do problema, devemos atentar para as grandezas envolvidas, a dependência funcional entre elas (isto pode determinar, entre outras coisas, a geometria do problema) e as leis físicas já conhecidas que interrelacionam essas diversas grandezas. As considerações de ordem geométrica e de ordem física, em geral, são feitas simultaneamente e, na maioria das vezes, são interdependentes. A habilidade de fazer modelos é requerida tanto de um físico teórico quanto de um experimental, afinal, um experimento nada mais é do que um modelo concreto (material) de uma situação real da natureza onde parâmetros possam ser controlados por agentes externos (no caso, o próprio cientista). Para os matemáticos, o mais importante é analisar os aspectos matemáticos dos modelos: quais as ferramentas matemática utilizadas, quais os limites de validade dos modelos considerados, qual o erro cometido quando certas aproximações são assumidas, etc. Neste curso, por questões de espaço-temporais e por se tratar de um primeiro contato com estas ideias, nos concentraremos principalmente em um aspecto da modelagem física, a saber, a dependência funcional entre as grandezas envolvidas.

Exemplo 5.1 (Pêndulo Simples). Basicamente, um pêndulo consiste de um objeto com determinada massa preso a uma das extremidades de uma corda, cuja outra extremidade está fixada em um ponto determinado, de forma que o fio se encontre na posição vertical. As grandezas relevantes são, basicamente, o comprimento do fio l e a massa do corpo m , conforme nos mostra a Figura 5.1.

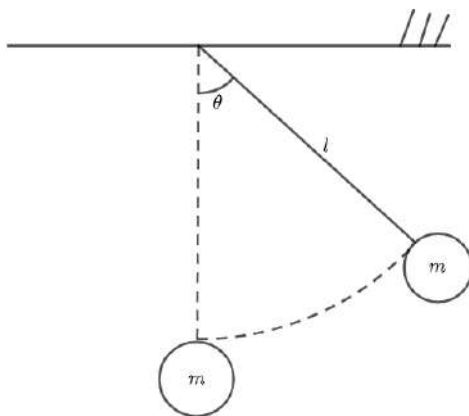


Figura 5.1: Configuração inicial e movimento de um pêndulo simples

O objeto principal de estudo relativo ao pêndulo físico é o movimento do corpo de massa m , quando deslocado de sua posição inicial de equilíbrio e posteriormente solto, movendo-se pela ação da gravidade. Na maioria dos casos, algumas simplificações são bastante razoáveis, a saber, 1- Podemos supor que o fio tenha uma massa muito pequena em relação à massa m do corpo e, portanto, possa ser desprezada; 2- Também, é razoável assumir que a espessura do fio seja desprezível em relação ao seu comprimento l ; 3- Quaisquer considerações relativas à elasticidade e resistência do material do fio devem ser desconsideradas, assim, o fio permanecerá sem se dobrar ou encurvar, nem esticar; diremos que o fio é retilíneo e inextensível; 4- Por último, podemos assumir que as dimensões do corpo de massa m , preso à extremidade do fio, sejam muito pequenas, quando comparadas com o comprimento l do fio. Sendo assim, o corpo pode ser considerado pontual, ou seja, sem graus de liberdade internos, i.e., não serão considerados movimentos de rotação ou precessão do corpo em questão, bem como sua forma geométrica ou possíveis deformações causadas pelo movimento.

Após tal etapa, devemos nos ater à seguinte questão: *Quais forças estão envolvidas no movimento do pêndulo, bem como o sistema de coordenadas que melhor descreve o movimento?* Desde que qualquer sistema de coordenadas

é igualmente lícito na descrição de um sistema físico. Os efeitos observados, o movimento efetuado e as forças envolvidas serão as mesmas, independentemente do sistema de coordenadas escolhido para descrever o sistema. Mas, por outro lado, um sistema de coordenadas que “acompanhe”, de certa forma, a geometria do sistema, em geral se mostra mais adequado e tende a simplificar as equações envolvidas.

Voltando ao pêndulo simples, a única força envolvida no movimento do corpo de massa m é a força gravitacional, cuja aceleração resultante é a mesma para todos os corpos próximos da superfície da Terra; aceleração que vamos denotar por g . Essa força atua na direção vertical, de cima para baixo. Como o fio é considerado retilíneo e inextensível, o único movimento possível é o movimento circular, com o centro no ponto onde o fio está fixado.

A única coordenada relevante no caso do movimento do pêndulo é o ângulo que o fio faz com a reta normal. Assim, podemos tomar um sistema de coordenadas polares, com centro no ponto ao qual o fio está fixado, com eixo polar dado pela semirreta vertical inferior e com o ângulo polar dado pelo ângulo entre essa semirreta e o fio do pêndulo, sendo este ângulo medido no sentido anti-horário e denotado por θ .

O objetivo principal do estudo do movimento do pêndulo é estabelecer uma função que descreva a dependência desta variável ângulo, que propriamente determina a posição do objeto de massa m , em relação ao tempo t . Esse problema será abordado com mais detalhes no Capítulo 6, pois envolve o estudo de equações diferenciais, no entanto, existem certas informações a respeito do movimento do pêndulo que podem ser estudadas mesmo sem o conhecimento das soluções das equações de movimento.

Por exemplo, o *período* T do pêndulo é o intervalo de tempo referente à duração do movimento de uma configuração inicial até o retorno a essa mesma configuração, e podemos expressar o período como uma função de todas as variáveis apresentadas acima:

$$T = T(m, l, g, \theta_0).$$

Vale ressaltar que, nem todas essas variáveis são realmente relevantes para a determinação do período T .

Nas discussões que se seguirão, não iremos empregar métodos experimentais para determinarmos dependências funcionais entre as grandezas físicas existentes nos fenômenos. Seguiremos nessa seção mostrando alguns sistemas físicos que podem ser modelados com funções elementares, sobretudo funções polinomiais de primeiro e segundo grau.

Nos exemplos a seguir, procuraremos elaborar os gráficos de funções e tentaremos visualizar as situações através dos gráficos. O procedimento algébrico é necessário, principalmente quando precisamos determinar uma solução numérica para um problema específico. No entanto, o aspecto gráfico muitas vezes nos leva a uma resposta mais imediata, principalmente quando a informação que desejamos obter é do tipo qualitativa e não quantitativa. Por exemplo, considere o problema a seguir.

Exemplo 5.2. Um alpinista começa a escalar a montanha às 8h da manhã de um dia, alcançando o topo exatamente às 18h do mesmo dia. Após passar a noite no topo da montanha, ele inicia a descida às 8h da manhã, utilizando o mesmo caminho pelo qual havia subido e chegando à base às 18h deste mesmo dia. Mostre que existe um horário entre 8 h e 18 h em que o alpinista esteve no mesmo ponto no caminho, tanto na subida quanto na descida.

Para este problema, note que não temos quaisquer informações sobre o regime de subida ou de descida do alpinista. Não sabemos os horários os quais ele parou para descansar, nem tampouco sabemos a velocidade que desenvolveu na caminhada. As únicas informações que temos são: os pontos de partida e chegada e seus respectivos horários. Também a trajetória do alpinista é uma função contínua em relação ao tempo, desde que é razoável supor que não ocorreram teletransportes. O único recurso que temos é construir gráficos contínuos da altura em função do tempo e sobrepor-los, afinal os domínios dessas funções no tempo são exatamente iguais. Não importam, de fato, quais sejam os formatos dos gráficos, desde que sejam gráficos de funções. A Figura 5.2 ilustra nosso exemplo.

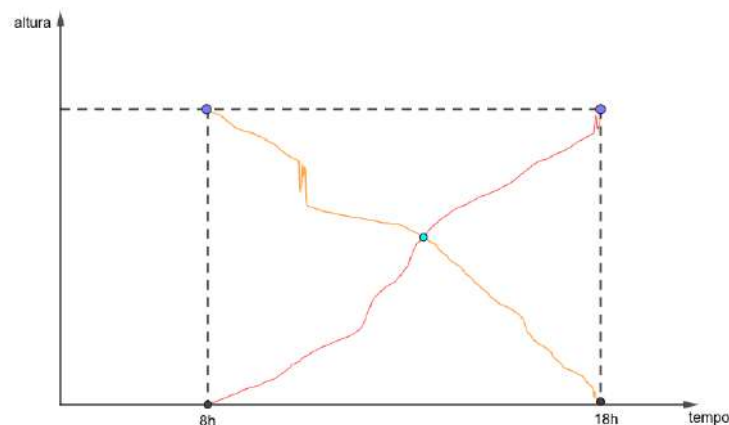


Figura 5.2: Trajetórias de subida e descida do alpinista

Note que há um ponto de intersecção nos dois gráficos, mostrando que, realmente, existe um horário no qual o alpinista esteve no mesmo ponto, tanto na subida quanto na descida. A existência desse ponto é um resultado topológico, e se deve ao fato de que as duas funções são contínuas, definidas em um mesmo intervalo e tomando valores também sobre um mesmo intervalo. Mais precisamente, temos uma versão simples do **Teorema do ponto fixo de Brouwer**, que diz: “Seja $f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo fechado, função contínua. Então existe $x \in I$ tal que $f(x) = x$.” Para uma prova deste resultado veja [9].

As funções polinomiais de primeiro grau surgem basicamente em problemas de taxa de variação constante, ou pelo menos que a variação média seja constante, mesmo que possa sofrer pequenas oscilações em seu valor. Estas funções se dividem basicamente em duas classes, as lineares e as afins. As funções lineares, como sabemos, da álgebra linear, são caracterizadas pelas propriedades: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para qualquer constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, temos: Toda função linear $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Já as funções afins $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são caracterizadas pela propriedade que existe um número real a de forma que $f(x) - f(y) = a(x - y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, se colocarmos

$y = 0$ e denominarmos $f(0) = b$, temos que uma função real afim tem que ser na forma $f(x) = ax + b$. Para mais detalhes sobre tais conteúdos consulte Lima [11].

A seguir vejamos alguns exemplos que utilizam-se funções de primeiro grau para modelarmos problemas elementares de matemática e física.

Exemplo 5.3. Um coelho está com uma vantagem de 100 m em relação a um lobo. Sabemos que o lobo percorre 10 m enquanto o coelho, no mesmo intervalo de tempo, percorre somente 6 m . Calcule quantos metros o lobo terá que percorrer até alcançar o coelho.

Inicialmente, vejamos algumas aproximações que precisamos fazer. Muito embora o regime de movimento, tanto do coelho quanto do lobo, não precisam ser uniformes, vamos assumir que essas velocidades sejam constantes, sendo esta aproximação tanto melhor quanto menor for o intervalo de tempo Δt utilizado entre duas medidas consecutivas. Ademais, precisamos estabelecer que tanto o coelho quanto o lobo se movimentem em linha reta e no mesmo sentido, pois afinal um está perseguindo o outro. A Figura 5.3 ilustra a configuração inicial do problema em questão.



Figura 5.3: Modelo geométrico de perseguição lobo *versus* coelho

Dessa forma, as posições do lobo e do coelho podem ser expressas, respectivamente, como função do tempo da seguinte maneira (assumindo-se que o instante inicial era igual a 0) : $L(t) = 0 + 10t$ e $C(t) = 100 + 6t$. O ponto de onde o lobo alcançará o coelho é dada pela igualdade das duas equações horárias em t_0 , i.e.,

$$L(t_0) = C(t_0) \Rightarrow 10t_0 = 100 + 6t_0 \Rightarrow t_0 = 25\text{ s.}$$

Resultando, portanto, em 250 m percorridos pelo lobo.

Exemplo 5.4. Uma vela vermelha queima inteiramente em quatro horas enquanto uma vela amarela, exatamente do mesmo tamanho que a vermelha, queima inteiramente em cinco horas. Se a vela amarela for acesa ao meio-dia e a vermelha for acesa ao meio-dia e meia, a que horas a vela a vela vermelha terá a metade do tamanho da vela amarela?

Note que as velocidades envolvidas são as taxas de queima das velas. Supondo que ambas tenham o mesmo comprimento L cm, então a vela vermelha queima com taxa $v_1 = \frac{L}{4}$ cm/h enquanto que a vela amarela tem taxa de queima $v_2 = \frac{L}{5}$ cm/h. Dessa forma, o comprimento das duas velas vermelha e amarela, respectivamente, em função do tempo é dado por:

$$\begin{aligned}V(t) &= L - \frac{L}{4} \left(t - \frac{1}{2} \right) \\A(t) &= L - \frac{L}{5} t.\end{aligned}$$

Note que a vela vermelha foi acesa meia hora depois da vela amarela, assim, se a vela amarela tiver queimado por um tempo t , desde que foi acesa, a vela vermelha terá queimado meia hora a menos. Queremos saber quanto tempo terá decorrido até que a vela vermelha atinja a metade do tamanho da vela amarela, ou seja, queremos encontrar t_0 , tal que:

$$V(t_0) = \frac{1}{2}A(t_0) \Rightarrow t_0 = \frac{25}{6}h = 4h10.$$

Portanto, vela vermelha ficará com a metade do tamanho da vela amarela exatamente às 16h10.

Vejamos as funções de segundo grau. As funções quadráticas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ ocorrem na descrição de modelos físicos que possuem segunda variação de uma taxa. Utilizamos tais funções em problemas envolvendo conservação de energia (cinética + potencial) e em problemas de aceleração constante $\frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{constante}$. Integrando tal relação ao tempo obtemos a velocidade em função do tempo, i.e., $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$, e se mais uma vez integramos essa última relação, obtemos a expressão da

posição do corpo em movimento em função do tempo: $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$, onde x_0 e v_0 é a posição inicial e velocidade inicial do objeto, respectivamente.

No estudo da queda livre de corpos sob a ação do campo gravitacional próximo à superfície da Terra, onde por queda livre entenda-se livre de qualquer força de resistência provocada pelo atrito com o ar ou outro meio fluido, ou no lançamento de projetéis as funções quadráticas surgem na modelagem de problemas. Vejamos a seguir um exemplo que ilustra a situação de queda livre. Exemplos para lançamento de projetéis e suas equações envolvidas podem ser encontrados no capítulo 3 de Nussenzveig [12].

Exemplo 5.5 (Lei de Torricelli). Um corpo é solto em queda livre a partir de uma altura h , sendo g a aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra. Calcule a velocidade com que esse corpo atinge o solo.

Neste problema é conveniente adotar um sistema de coordenadas de forma que a origem esteja no ponto de soltura do objeto e crescente para baixo, assim, o solo teria coordenada vertical igual a h .

Como a posição inicial é $y_0 = 0$ e a velocidade inicial é $v_0 = 0$, pois o corpo foi solto a partir do repouso, então, a coordenada vertical em função ao tempo é dada por $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Devemos encontrar t_c de modo que $y(t_c) = h$, e, portanto,

$$\frac{1}{2}gt_c^2 = h \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Como a velocidade do corpo, por sua vez, é dada por $v(t) = gt$, assim, a velocidade do corpo quando atinge o solo é igual a:

$$v(t_c) = gt_c \Rightarrow g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v(t_c) = \sqrt{2hg}.$$

A seguir, faremos um pequeno estudo sobre o uso de cônicas para a modelagem de alguns sistemas físicos, na mecânica clássica e na ótica geométrica.

5.2. CÔNICAS EM FÍSICA

As secções cônicas, como o próprio nome sugere, são curvas obtidas a partir de um cone seccionado por um plano. As curvas cônicas se dividem em três classes: as elipses, as parábolas e as hipérbolas. Basicamente, esses tipos de curva se diferem pela relação entre o ângulo de inclinação do plano que secciona o cone em relação à base do cone e o ângulo da geratriz do cone, também em relação à base. Se o ângulo de inclinação do plano de secção for menor que o ângulo da geratriz do cone, temos uma elipse. Caso o ângulo de inclinação do plano de secção for exatamente igual ao ângulo da geratriz, então temos uma parábola. Finalmente, se o ângulo de inclinação do plano de secção for maior que o ângulo da geratriz, então temos uma hipérbole. Dos três tipos de curvas, as hipérbolas são as únicas que possuem duas componentes conexas, pois o plano que determina uma hipérbole secciona as duas folhas do cone. A Figura 5.4 ilustra os três exemplos de secções cônicas.

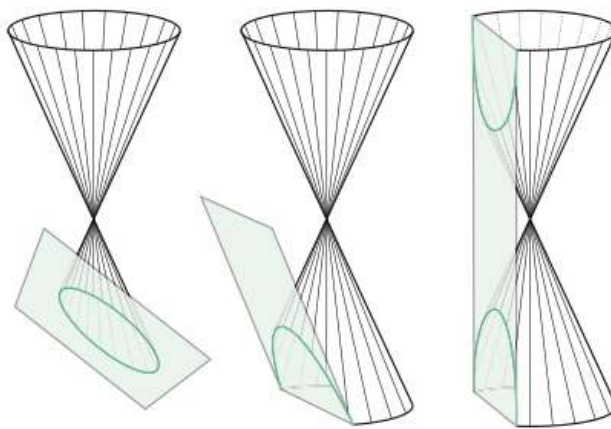


Figura 5.4: Secções cônicas: elipse, parábola e hipérbole

Em cursos de Geometria Analítica as propriedades geométricas das cônicas são, em geral, apresentadas sem fazer referência a como essas propriedades se manifestam no cone. As definições das três cônicas, conforme vistas nesse curso são:

Definição 5.6. A **elipse** é o lugar geométrico dos pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (que são chamados *focos*) é constante.

Definição 5.7. A **parábola** é o lugar geométrico dos pontos no plano cuja distância a um ponto fixo (o *foco*) é igual à distância a uma reta fixada (a *diretriz*).

Definição 5.8. A **hiperbóle** é o lugar geométrico dos pontos no plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos (os *focos*) é constante.

A partir dessas propriedades, pode-se facilmente deduzir as equações das três curvas no plano cartesiano - veja por exemplo Lima [10]. No entanto, essas propriedades geométricas são consequências do fato de que as curvas são secções cônicas. A beleza da interrelação existente entre as propriedades das cônicas vistas como secções e estas mesmas curvas vistas como lugares geométricos do plano dificilmente é mostrada, tanto no ensino médio quanto no ensino superior. As propriedades das cônicas são demonstradas com o auxílio de esferas inscritas no cone que tangenciam o plano que contém a curva, sendo essas esferas conhecidas como **esferas de Dandelin**. Para uma leitura básica sobre tal assunto veja [13].

Mostraremos alguns exemplos de sistemas físicos nos quais as cônicas aparecem naturalmente como os objetos matemáticos apropriados para a modelagem. Iniciaremos com dois exemplos do uso de parábolas. Um oriundo da mecânica clássica e outro da ótica geométrica. Após, estudaremos brevemente um exemplo de uso de elipses em ótica e acústica e também um exemplo de aparição de hipérboles, também em acústica.

5.2.1. PARÁBOLAS

Inicialmente vejamos uma propriedade que em geral é apresentada de forma despreziosa e sem qualquer justificativa quando apresentada em cursos elementares.

Propriedade 5.1. *Todo gráfico de uma função quadrática de uma variável é uma parábola.*

Demonstração. Mostraremos que dados o foco e a diretriz de uma parábola, existe um sistema de coordenadas apropriado a essa configuração, no qual a parábola descreve o gráfico de uma função quadrática.

Considere a reta perpendicular à diretriz da parábola que passa pelo foco. Essa reta será o eixo de simetria da parábola. Devido à propriedade definidora da parábola, o vértice da parábola será o ponto médio entre o ponto de cruzamento do eixo de simetria com a diretriz e o foco da parábola. Vamos escolher os eixos coordenados como a reta perpendicular ao eixo de simetria passando pelo vértice da parábola como o eixo x , e o eixo de simetria como o eixo y . Nesse sistema de coordenadas, o foco será o ponto $F = (0, A)$ e a diretriz será a reta r , de equação $y = -A$ conforme ilustra a Figura 5.5.

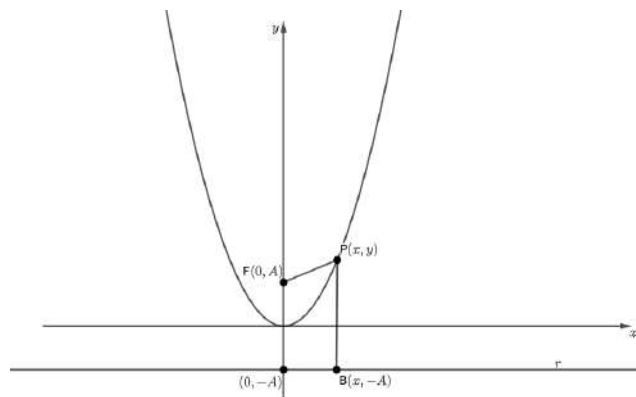


Figura 5.5: Configuração de coordenadas associada a uma parábola, dados seu foco e a diretriz

Considere $P = (x, y)$ um ponto da parábola e pela propriedade da parábola, temos $d(P, F) = d(P, r)$, que em coordenadas nos dá

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y - A)^2} &= |y + A| \\ x^2 + y^2 - 2Ay + A^2 &= y^2 + 2Ay + A^2 \\ 4Ay &= x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4A}x^2,\end{aligned}$$

sendo essa curva o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{4A}x^2$.

Mais geralmente, se tivermos o gráfico de uma função quadrática $f_0(x) = \frac{1}{4A}x^2$, esse gráfico será uma parábola cujo vértice está no ponto $(0, 0)$, o foco se encontra no ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é a reta $y = -\frac{1}{4a}$. Note que o vértice da parábola é o ponto em que a função f_0 se anula. Note, também, que se tivéssemos escolhido $A < 0$, então a parábola estaria com sua concavidade para baixo.

Vejamos o caso geral de uma função quadrática geral.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \end{aligned}$$

que nada mais é do que uma translação horizontal e a translação vertical da função f_0 , portanto, seu gráfico também será uma parábola de modo que restamos descobrir o foco e a diretriz de f .

Desde que o vértice da parábola é o ponto que a função f_0 se anula, o vértice de f terá coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Dessa forma, o foco e a diretriz podem ser facilmente obtidos, conforme a discussão feita para a função f_0 , sendo assim, o foco será o ponto $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ e a diretriz será a reta $y = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}$. □

Uma vez tendo deduzido que o gráfico de uma função quadrática é sempre dado por uma parábola, temos que a trajetória de um projétil lançado obliquamente sujeito à atração gravitacional próximo à superfície da Terra é uma parábola. De fato, se y representa a altura do projétil em relação ao solo e se x representa o deslocamento horizontal do projétil então temos

$$y = \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2,$$

de modo que tal projétil é lançado a partir do solo com velocidade v_0 e com ângulo de inclinação em relação ao solo igual a θ . Note que o coeficiente do termo quadrático da função é negativo, portanto, a parábola que descreve a trajetória do projétil tem a concavidade voltada para baixo, como era de se esperar, tendo em vista a configuração do sistema físico. As equações que tratam sobre lançamentos de projéteis podem ser encontradas em Nussenzveig [12].

Há, ainda no contexto de lançamento oblíquo, outro uso interessante de parábolas.

Exemplo 5.9 (Parábolas de segurança). O problema é o seguinte: imagine que se queira atravessar um avião com segurança através de um território em guerra e que possui no solo muitas baterias antiaéreas. A questão é delimitar a região de alcance de um canhão antiaéreo, além do qual, nenhuma ameaça existiria.

Considere um canhão localizado na origem do sistema de coordenadas do plano. Seja v_0 a velocidade inicial dos projéteis disparados pelo canhão. Sabemos que se o lançamento for vertical, a altura máxima que o projétil pode atingir é $h = \frac{v_0^2}{2g}$ onde g é a aceleração da gravidade. Retornando ao exemplo anterior, temos que o alcance horizontal máximo do projétil é obtido quando o ângulo de lançamento é exatamente igual a $\frac{\pi}{4}$ e nesse caso, o alcance horizontal máximo é igual a $\frac{v_0^2}{g}$. Desde que devemos obter uma curva limítrofe, isto é, uma curva que tangencie todas as trajetórias dos projéteis lançados a partir da origem e que delimite o plano em duas regiões disjuntas, de forma que dado um ponto em uma delas sempre exista algum tiro que possa atingir aquele ponto, enquanto qualquer ponto na outra região nunca seja atingido por qualquer tiro, a partir daquele canhão na origem. A Figura 5.6 ilustra esta situação.

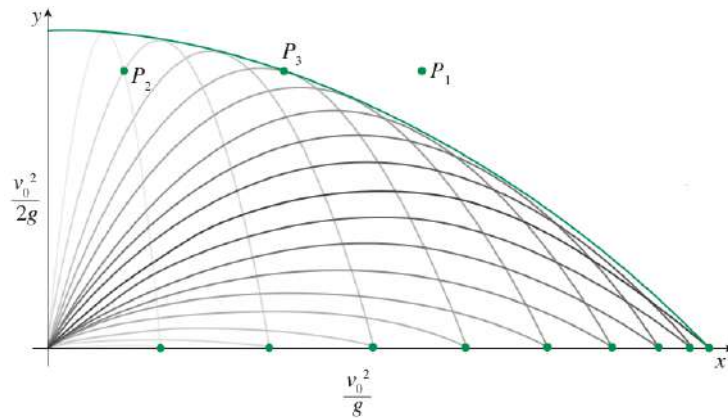


Figura 5.6: Parábola de segurança

Esse tipo de curva é denominado **envoltória de uma família de curvas**. Os métodos de obtenção direta de envoltórias envolvem a resolução de equações diferenciais, portanto está fora do propósito desse capítulo, que é o de utilizar apenas ferramentas de matemática elementar para a modelagem de sistemas físicos. Contudo vamos propor uma curva que seja candidata à solução do problema e posteriormente, por verificação direta, veremos que esta curva possui as propriedades necessárias para esta envoltória.

Proposição 5.10. *A parábola $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ é a envoltória das trajetórias dos projéteis disparados a partir da origem com velocidade inicial v_0 .*

Demonstração. Desde que o alcance horizontal máximo é $\frac{v_0^2}{g}$, então vamos determinar uma parábola que tenha o vértice no ponto de coordenadas $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ e que as raízes da função sejam $\frac{v_0^2}{g}$ e $-\frac{v_0^2}{g}$. Dessa forma,

$$y = a \left(x - \frac{v_0^2}{g}\right) \left(x + \frac{v_0^2}{g}\right) = ax^2 - \frac{av_0^4}{g^2}.$$

Como o ponto $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ pertence à curva, então deduzimos facilmente que

$a = -\frac{g}{2v_0^2}$, e, portanto, $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

Vejam agora que tal curva realmente é a envoltória das trajetórias dadas por $y = \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}x^2$, que pode ser reescrita da forma $\frac{2v_0^2 y}{gx^2} = \tan \theta \frac{2v_0^2}{gx} - \sec^2 \theta$, i.e.,

$$\tan^2 \theta - \tan \theta \frac{2v_0^2}{gx} + \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) = 0 \quad (5.1)$$

O discriminante da equação quadrática acima é

$$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2 x^2} - 4 \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right),$$

e analisemos a seguir o sinal de tal discriminante.

A equação (5.1) possuirá exatamente uma solução quando $\Delta = 0$, o que nos dá $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$, a qual é a equação da parábola de segurança. Caso $\Delta < 0$, temos que $y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$, ou seja, pontos acima da parábola de segurança. Finalmente, a equação possui duas soluções quando o discriminante é positivo, o que equivale a dizer que $y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$, i.e., pontos que estão abaixo da parábola de segurança. Portanto, a parábola de segurança é a envolvente da família de trajetórias. □

Parábolas também são muito utilizadas na manufatura de aparelhos óticos e de antenas de transmissão e captação de ondas eletromagnéticas. Isso se deve a uma importante propriedade ótica das parábolas: Os raios de luz que incidem sobre um espelho parabólico paralelamente ao seu eixo de simetria convergem para o foco da mesma. De igual modo, os raios de luz emitidos a partir do foco de uma parábola, quando refletidos sobre a curva, se propagam paralelamente ao eixo de simetria da parábola. Essa propriedade é ilustrada na Figura 5.7 e a demonstração desta propriedade das parábolas pode ser feita tão somente com o uso de matemática elementar, veja por exemplo Batista [3].

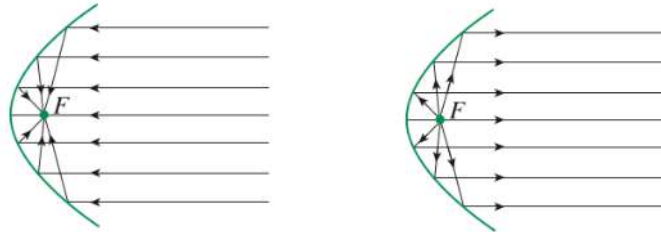


Figura 5.7: Propriedades óticas da parábola

5.2.2. ELIPSES

Elipses, como vimos anteriormente, são secções cônicas obtidas quando o plano de secção intersecta o cone segundo um ângulo com o plano da base menor que o ângulo que a geratriz do cone faz com a base. Também podemos definir elipse como o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (chamados focos) é constante. A equivalência entre essas duas definições, aparentemente sem qualquer relação, pode ser demonstrada utilizando-se as esferas de Dandelin. Podemos, ainda, traduzir essa propriedade de soma das distâncias em termos analíticos, de modo a obtermos a equação da elipse. Na configuração padrão da elipse no plano cartesiano, com os eixos principais paralelos aos eixos coordenados e cujo centro se localiza em um ponto (x_0, y_0) do plano, conforme descrito na Figura 5.8, temos que a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

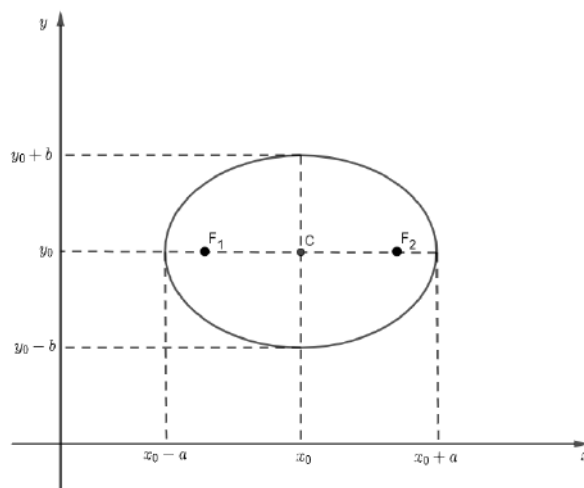


Figura 5.8: Configurações de coordenadas associada a uma elipse

Vamos mostrar nesta subseção uma curiosa aparição de elipses ainda na modelagem de lançamentos balísticos, já discutidos amplamente na subseção anterior.

Propriedade 5.2. *O lugar geométrico das alturas máximas de disparos a partir da origem, com a mesma velocidade inicial, consiste de uma elipse.*

Demonstração. Temos que as coordenadas de um corpo atirado a partir do solo, com velocidade inicial v_0 e segundo um ângulo de disparo igual a θ , são dadas, em função do tempo t , por

$$x(t) = t v_0 \cos \theta \text{ e } y(t) = t v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Dessa forma, podemos calcular as coordenadas do ponto de maior altura que o corpo pode atingir, i.e., o vértice V da parábola que descreve a trajetória. O instante em que o corpo passa pela altura máxima é exatamente o instante onde a velocidade vertical $v_y = v_0 \sin \theta - gt$ se anula, i.e., $t_{\max} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$. Daí,

para esse tempo substituindo nas coordenadas do movimento temos

$$\begin{aligned}x_V &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \\y_V &= \frac{v_0^2(1 - \cos 2\theta)}{4g}.\end{aligned}$$

Ademais, as coordenadas (x_V, y_V) desse ponto satisfazem à relação

$$\frac{x_V^2}{4} + \left(y_V - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{16g^2},$$

ou ainda,

$$\frac{x_V^2}{4b^2} + \frac{(y_V - b)^2}{b^2} = 1,$$

onde $b = \frac{v_0^2}{4g}$. Veja a Figura 5.9 para a ilustração desta elipse.

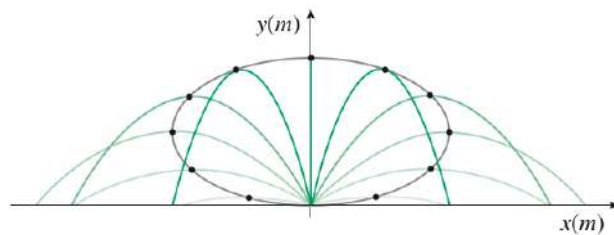


Figura 5.9: LG formada pelos pontos de altura máxima das trajetórias de lançamento a partir da origem com velocidade v_0

□

Elipses também apresentam uma propriedade óptica peculiar: Qualquer raio de luz, emitido a partir de um dos focos, após ser refletido sobre a elipse, passará pelo outro foco, para mais detalhes veja Batista [3]. Essa propriedade de reflexão exibida pelas elipses também é válida se, no lugar da trajetória da luz, fosse considerada a trajetória do som. Essa propriedade “acústica” da elipse inspirou muitos arquitetos a construir edifícios com características

muito peculiares do ponto de vista acústico, por exemplo, o salão oval da Casa Branca, em Washington DC, nos Estados Unidos, possui essa característica.

O último exemplo da ocorrência de elipses na modelagem matemática de fenômenos físicos que vamos mencionar é o das órbitas planetárias. O astrônomo alemão Johannes Kepler, no século XVII, utilizou dados observacionais obtidos ao longo de décadas por seu mestre, o astrônomo Tycho Brahe, para chegar à conclusão de que os planetas do sistema solar se moviam sob órbitas elípticas ao redor do Sol, sendo que o Sol ocupava um dos focos da elipse. Essa conclusão é conhecida como primeira lei de Kepler e é uma lei empírica, isto é, baseada na análise de dados experimentais e fruto de um exercício numérico longo e trabalhoso. A explicação teórica de porque as órbitas planetárias possuíam o formato de uma elipse somente foi possível com a lei da gravitação universal, desenvolvida pelo matemático e físico inglês Sir Isaac Newton.

5.2.3. HIPÉRBOLES

Uma hipérbole é uma secção cônica que é produzida quando o plano de secção faz um ângulo com a base do cone menor que o ângulo entre a geratriz do cone e a base do mesmo. Uma hipérbole também pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos (os focos da hipérbole) é constante. A relação entre essas duas definições, aparentemente desconexas, também pode ser obtida com o auxílio de esferas de Dandelin. Nesse caso, cada uma das esferas estará inscrita em uma das folhas do cone. A partir da definição dada pela diferença entre as distâncias a dois pontos fixos, é possível escrever a equação de uma hipérbole no plano cartesiano. A equação da hipérbole na configuração padrão, que é a configuração com os eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados e com centro de simetria no ponto (x_0, y_0) é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

A Figura 5.10 ilustra a hipérbole.

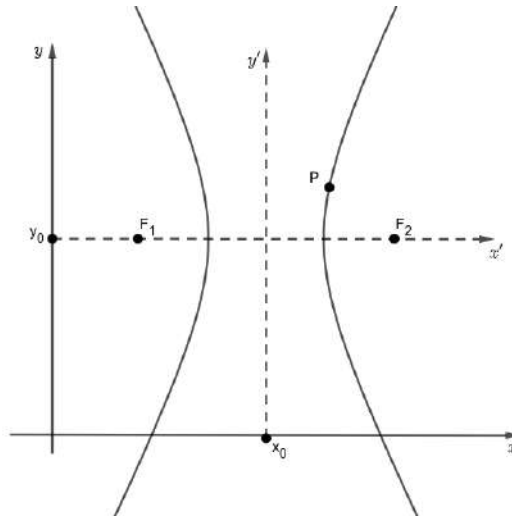


Figura 5.10: Configurações de coordenadas associada a uma hipérbole

A ocorrência de hipérbolas em modelagem de fenômenos ou sistemas físicos é mais sofisticada, em geral envolvendo métodos matemáticos mais avançados, como equações diferenciais. Um exemplo relevante, cujo tratamento matemático foge ao escopo deste capítulo, é o *espalhamento de Rutherford*.

Hipérbolas também possuem uma propriedade de reflexão que pode ser traduzida da seguinte maneira: Se um raio de luz for emitido a partir de um dos focos da hipérbole e refletir sobre o ramo da hipérbole relativo ao outro foco, então o raio refletido seguirá uma trajetória contida na semirreta, originada no segundo foco. Esta propriedade óptica é muito utilizada na construção de telescópios refletores, onde se combina um espelho parabólico e um espelho hiperbólico de forma que o foco da parábola coincida com um dos focos da hipérbole.

Além disso, a propagação de ondas de choques de aviões supersônicos e o limiar de audibilidade, desde que a trajetória da aeronave é uma linha reta paralela ao plano do solo, então a curva do limiar da audibilidade será uma hipérbole, pois o plano de secção do cone de Mach é paralelo ao eixo de simetria. Portanto, o ângulo de inclinação desse plano de secção é maior que o ângulo da geratriz.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo, vamos conceituar equações diferenciais ordinárias e mostrar algumas utilizações na Física: modelar fenômenos envolvendo equações diferenciais lineares de primeira ordem; estudar as propriedades de sistemas mecânicos conservativos, em particular, o oscilador harmônico. Além disso, faremos um estudo de alguns métodos analíticos para resolver equações diferenciais de primeira ordem.

6.1. MOTIVAÇÕES

As equações diferenciais aparecem em importantes aplicações nas áreas da Biologia, da Ecologia, da Sociologia, da Economia, da Termodinâmica, da Física, entre outras. Além disso, muitos problemas reais, tais como, crescimento populacional, movimento de um pêndulo, propagação de doenças, movimento de corpos celestes, circuitos elétricos, corpos em movimento harmônico simples, são modelados por equações diferenciais.

Ao longo deste capítulo, estudaremos alguns problemas de modelização de situações físicas, como o movimento de um pêndulo ou o movimento de uma mola. Nas equações diferenciais que aparecem ligadas a problemas de movimento, a variável independente é usualmente representada por t e a função que desejamos encontrar, a variável dependente, é representada por x .

Vejamos exemplos de alguns modelos físicos que recorrem às equações diferenciais:

- De acordo com a segunda lei de Newton, a força é proporcional à aceleração a de um corpo de massa m

$$F = m.a$$

Esta equação é conhecida, também, como a equação do movimento de Newton e pode ser representada na forma de equação diferencial como

$$mx'' = f(t, x, x'),$$

onde temos um objeto de massa m em movimento ao longo do eixo x na posição $x(t)$ no instante t , com força $f(t, x(t), x'(t))$ que atua no objeto no tempo t .

- No oscilador harmônico a equação do movimento de uma partícula de massa m e constante k , é dada por

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Ademais, vejamos alguns outros exemplos que são modelados por equações diferenciais.

Exemplo 6.1. Considere uma cultura de bactérias em laboratório, de modo que a reprodução das bactérias seja assexuada, i.e., cada indivíduo se divide em dois ou mais indivíduos idênticos (cissiparidade). Dessa forma, quanto maior a população de bactérias, maior será a velocidade de reprodução, visto que existem mais indivíduos reproduzindo, ou seja, a taxa de crescimento populacional é proporcional ao número de indivíduos. Vamos supor ainda que cada indivíduo dessa população possua a mesma capacidade reprodutiva.

Denotando por $N(t)$ o número de indivíduos dessa população em um determinado instante de tempo t , então $N'(t)$ será a velocidade de crescimento dessa população. Supondo que o crescimento da população é proporcional ao número de indivíduos e que cada indivíduo possua a mesma capacidade reprodutiva, então lei de crescimento dessa população é dada por

$$N'(t) = \alpha N(t),$$

onde α é a constante de homogeneidade da capacidade reprodutiva dos indivíduos dessa população.

Para descrevermos a função que indica o número de indivíduos dessa população, em função do tempo, precisamos encontrar uma função real cuja primeira derivada é proporcional à própria função. A função que modela tal problema é $N(t) = e^{\alpha t}$.

Exemplo 6.2. Vejamos o problema do decaimento radioativo. A resolução exata desse problema possui inúmeras aplicações, como por exemplo, o cálculo da idade de uma rocha ou então a datação fóssil.

O fato é que, na natureza, existem certos elementos químicos cujos núcleos atômicos são instáveis e ao longo do tempo emitem partículas eletricamente carregadas (núcleos de Hélio, na radiação alfa, ou elétrons, na radiação beta) e com isto mudam o seu número atômico e se tornam outros elementos químicos mais estáveis, denominados descendentes. Ao examinar uma amostra em uma rocha, são verificadas as porcentagens relativas do elemento químico radioativo e seus descendentes. A taxa de decaimento de uma amostra também depende da quantidade do elemento presente na amostra. Tendo em vista que cada átomo, individualmente, tem a mesma probabilidade de emitir radiação e, portanto, decair em seus elementos descendentes, então se a massa em um determinado momento for igual a $M(t)$, a taxa de decaimento nesse instante de tempo será dada por:

$$M'(t) = -\kappa M(t), \quad (6.1)$$

onde a constante κ discrimina as características próprias do elemento radioativo a ser analisado.

Na prática essa constante de decaimento é determinada experimentalmente através da determinação do tempo de *meia vida* do elemento. O que se faz é colocar uma amostra de massa M_0 do material e medir com precisão o tempo T decorrido para que essa amostra decaia até a metade da massa original do elemento radioativo, isto é, desde que $M(t) = M_0 \cdot e^{-\kappa t}$ é a solução de (6.1) temos então substituindo pelo tempo T tal que $M(T) = \frac{M_0}{2}$,

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-\kappa T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\kappa T},$$

e $\kappa = \frac{1}{T} \ln 2$, i.e.,

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{1}{T} \ln 2\right) t}.$$

Antes de conceituarmos equações diferenciais vejamos um exemplo análogo ao do Capítulo 5, mais precisamente, o Exemplo 5.5.

Exemplo 6.3. Para este exemplo considere a queda livre de corpos sujeitos à resistência do ar. Seja g a aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra. Queremos determinar a função que descreve a velocidade de queda de um corpo de massa m em queda livre, sujeito a uma força de resistência do ar no sentido contrário ao do movimento e com intensidade proporcional à velocidade v do objeto.

Desde que a força resultante agindo sobre o corpo de massa m é igual a diferença entre a força gravitacional $m \cdot g$ e a força da resistência do ar κv , onde κ é uma constante de proporcionalidade que depende, basicamente, da forma do objeto e como essa forma permite que o objeto se mova na atmosfera com mais ou menos resistência, temos

$$m \cdot v'(t) = m \cdot g - \kappa \cdot v(t) \iff m \cdot v'(t) - \kappa \cdot v(t) - m \cdot g = 0.$$

6.2. DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Definição 6.4 (Equação Diferencial Ordinária). Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma relação

$$x^{(k)} = F(t, x, x', x'', \dots, x^{(k-1)}), \quad (6.2)$$

onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, $U \subset \mathbb{R}^{1+kd}$ é um aberto, $t \in \mathbb{R}$ e cada $x, x', x'', \dots, x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^d$.

A *ordem* ou *grau* da EDO é k e a *dimensão* da EDO é d .

Exemplo 6.5. • $y \cdot y''' - \sin t \cdot y' + e^t = 0$ é uma EDO de ordem 3.

• $y^{(4)} + ty'' - t^2 y' + 20 = 0$ é uma EDO de ordem 4.

- $y'' = \sin y$ é uma EDO de ordem 2.
- $y' = (1 - y)y$ é uma EDO de ordem 1.

A ideia da equação (6.2) é que as derivadas de ordem inferior e a evolução no tempo descrevem o comportamento da k -ésima derivada. Dessa forma uma EDO é uma equação *implícita* em que k é a quantidade de derivadas envolvidas. Nosso objetivo é, dada uma função F , encontrar/caracterizar/descrever as soluções x da EDO. Para isso, definiremos a seguir o significado de solução da EDO.

Definição 6.6 (Solução de EDO). Uma solução de (6.2) é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ que é k vezes diferenciável e satisfaz as seguintes condições:

1. I é um intervalo aberto de \mathbb{R} ;
2. $(t, \gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t)) \in U$ para todo $t \in I$;
3. $\gamma^{(k)}(t) = F(t, \gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t))$ para todo $t \in I$.

Resumidamente, apenas substituímos x por $\gamma(t)$ em (6.2). Além disso, essa noção também nos permite definir uma EDO com condições iniciais prescritas.

Definição 6.7 (EDO com condições iniciais). Uma EDO com condições iniciais é um sistema da forma

$$\begin{cases} x^{(k)} = F(t, x, x', x'', \dots, x^{(k-1)}) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, x''(t_0) = x''_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)}, \end{cases}$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^{1+kd} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua no aberto U e $x_0, \dots, x_0^{(k-1)} \in \mathbb{R}^d$ são dados.

Exemplo 6.8. Considere $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x) = 0$. A EDO é $x' = 0$ com $k = d = 1$. Fixado $x_0 \in \mathbb{B}$, seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\gamma(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$. Então γ é a solução da EDO, pois

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma'(t) = 0 = F(t, \gamma(t)).$$

Note que a EDO acima tem infinitas soluções, uma para cada $x_0 \in \mathbb{R}$. Podemos também considerar a versão multidimensional desse exemplo, de forma que tomando $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F(t, x) = 0$. Nesse caso, $k = 1$ e a dimensão é d . As soluções são obtidas de forma análoga.

Exemplo 6.9. Considere $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x) = x$. A EDO é

$$x' = x,$$

novamente com $k = d = 1$. As soluções dessa EDO são $\gamma(t) = ce^t$, onde c é uma constante. De fato,

$$\gamma'(t) = \gamma(t) = F(t, \gamma(t)).$$

Exemplo 6.10. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(t, x, x') = -x$. A EDO é

$$x'' = -x \iff x'' + x = 0,$$

com $k = 2$ e $d = 1$. Dadas as constantes $a, b \in \mathbb{R}$, seja $\gamma(t) = a \cos t + b \sin t$. Temos

$$\gamma'(t) = -a \sin t + b \cos t \implies \gamma''(t) = -(a \cos t + b \sin t) = -\gamma(t) = F(t, \gamma(t), \gamma'(t)),$$

e assim, $\gamma(t)$ é solução da EDO.

Os próximos exemplos são oriundos da mecânica clássica (leis de Newton).

Exemplo 6.11 (Lei de Hooke). Considere uma mola de comprimento l em equilíbrio. Fixe uma de suas pontas a uma parede e a outra ponta a um bloco B . A *lei de Hooke* descreve a força necessária a ser aplicada em B para que a mola seja expandida/comprimida a partir de sua posição de repouso:

$$F = kx,$$

onde k é uma constante que depende apenas da mola e x é a distância da expansão/compressão medida a partir da posição de equilíbrio.

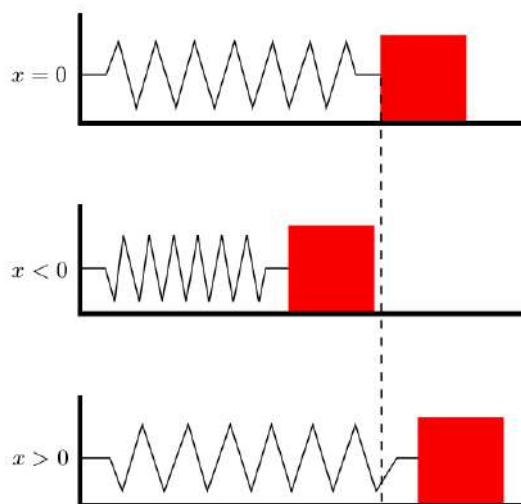


Figura 6.1: Configurações da lei de Hooke

Pela terceira lei de Newton, podemos enunciar a lei de Hooke afirmando que a *força de restauração da mola* é

$$F = -kx.$$

Note que o sinal negativo na expressão acima indica que a força é de restauração, i.e., a mola sempre busca retornar à sua posição de repouso. Veja a Figura 6.1.

Dessa forma, a partir da segunda lei de Newton, devemos ter $ma = -kx$, e assim,

$$mx'' = -kx \Rightarrow x'' = -\frac{k}{m}x.$$

Note que essa EDO é uma variação do exemplo anterior e as soluções dessa EDO são funções da forma

$$\gamma(t) = a \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) + b \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right)$$

Exemplo 6.12 (Pêndulo harmônico). Considere uma haste rígida presa ao teto em uma extremidade e a um corpo de massa m na outra extremidade. A

haste pode girar na extremidade da parede e o movimento que o corpo realiza é dito *pêndulo harmônico*. Afirmamos que tal movimento é descrito por uma EDO. Veja a Figura 6.2.

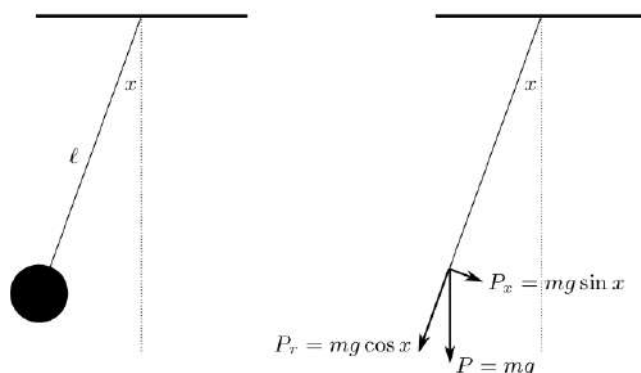


Figura 6.2: Decomposição de forças do pêndulo harmônico

De fato, há duas forças atuando no corpo: seu peso e a força de tensão da haste, e decompondo o peso em duas forças, obtemos a partir da segunda lei de Newton que

$$mx'' = mg \sin x \Rightarrow x'' = g \sin x,$$

que é uma EDO com $k = 2$ e $d = 1$. Infelizmente é impossível fornecer uma fórmula para as soluções dessa EDO utilizando as funções que conhecemos.

Ademais, observe que nos Exemplos 6.9, 6.10 e 6.11 as soluções da EDO utilizam funções bem mais complicadas do que a função F que define a EDO e que no último exemplo, com a função $F(t, x, x') = g \sin x$ relativamente simples, já não é possível descrever as soluções utilizando funções elementares. De fato, essa maior complexidade das soluções em comparação à EDO ocorre com muita frequência, sendo muito improvável, que as soluções possam ser explicitamente descritas.

Dessa maneira, para o que se segue vamos considerar apenas EDO's lineares de 1ª ordem, antes contudo veremos a definição de EDO linear, EDO

homogênea, EDO autônoma e o teorema de existência e unicidade de soluções de uma EDO.

Uma característica das EDO's diz respeito ao *critério de linearidade* e dessa forma, podemos classificar as EDO's em lineares e não-lineares.

Definição 6.13. Uma EDO linear de ordem n é

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)})$$

de forma que a função F seja linear nas variáveis $x, x', \dots, x^{(n)}$, i.e.,

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = g(t).$$

Uma EDO linear é dita *homogênea* quando $g(t) = 0$, caso contrário ela é dita *não-homogênea*.

Definição 6.14. Dizemos que a EDO (6.2) é autônoma se F não depende de t , isto é, se existe $G : V \rightarrow \mathbb{R}^d$, $V \subset \mathbb{R}^{dk}$ aberto, tal que

$$F(t, x_0, x_1, \dots, x_{(k-1)}) = G(x_0, x_1, \dots, x_{(k-1)}),$$

para todo $(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in U$.

Lema 6.15. *Seja $x' = F(t, x)$ uma EDO autônoma. Se $\gamma(t)$ é solução da EDO, então $\beta(t) = \gamma(t + c)$ também é uma solução da EDO para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \gamma'(t + c) \\ &= F(t + c, \gamma(t + c)) \\ &= F(t, \gamma(t + c)) \\ &= F(t, \beta(t)), \end{aligned}$$

onde utilizamos na terceira igualdade que F é autônoma. □

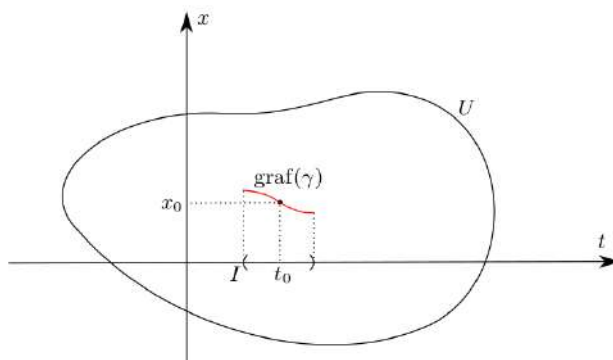


Figura 6.3: Teorema de existência e unicidade

Pelo lema acima, soluções particulares podem ser horizontalmente transladadas no plano (x, y) para gerar novas soluções.

Finalizamos a seção com um teorema de existência e unicidade para as EDO's. Veja a Figura 6.3.

Teorema 6.16 (Existência e unicidade). *Considere a EDO*

$$x' = F(t, x),$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua e localmente Lipschitz na segunda coordenada e U é aberto. Então:

1. **EXISTÊNCIA:** para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ solução da EDO com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$.
2. **UNICIDADE:** Se $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ são ambas soluções da EDO e se existe $t \in I \cap J$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

A primeira parte diz que para toda condição inicial $(t_0, x_0) \in U$, existe uma solução da EDO com essa condição inicial. Esperamos que se (t_0, x_0)

está próximo de ∂U , então o domínio I de definição da solução é pequeno. A segunda parte diz que gráficos das soluções não podem se cruzar.

Uma prova deste resultado bem como as definições das condições requeridas na função F podem ser encontradas em [17] e [16].

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Peano, relaxa uma das hipóteses do Teorema 6.16. Assumindo apenas que F seja contínua, ele garante a existência de solução para a EDO com condições iniciais, porém a unicidade não é garantida se F não for localmente Lipschitz na segunda coordenada.

Teorema 6.17 (Peano). *Considere a EDO*

$$x' = F(t, x),$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua. Para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ solução da EDO com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$.

De forma análoga, uma prova deste resultado pode ser encontrado em em [17] e [16].

6.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS SEPARÁVEIS E LINEARES

Nesta seção, descreveremos dois tipos de EDO's que iremos utilizar no curso. Para o que se segue iremos tratar de EDO's de 1ª ordem de modo que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.3}$$

6.3.1. EDO'S SEPARÁVEIS

Considere a equação diferencial de 1ª ordem (6.3). Quando f não depende da variável y , isto é, $f(x, y) = g(x)$, a equação $\frac{dy}{dx} = g(x)$ pode ser resolvida por integração. Assim, se $g(x)$ é contínua, então

$$\int dy = \int g(x)dx \Rightarrow y = G(x) + c,$$

onde $G(x)$ é a antiderivada de $g(x)$ e c é uma constante.

Exemplo 6.18. Resolva $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$.

Note que temos $dy = (1 + e^{2x})dx$, e integrando obtemos $y = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

Definição 6.19. Uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (6.4)$$

é dita separável ou de variáveis separáveis.

Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{3x+4y} \text{ e } \frac{dy}{dx} = y + \sin x$$

são, respectivamente, separável e não separável.

Da equação (6.4), temos $p(y)dy = g(x)dx$, onde $p(y) = \frac{1}{h(y)}$. Além disso, se $y = \phi(x)$ é solução da EDO acima, então

$$p(\phi(x))\phi'(x) = g(x),$$

e, portanto,

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(x)dx,$$

ou mais geralmente,

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx \iff H(y) = G(x) + c,$$

onde H e G são as antiderivadas de p e g , respectivamente.

Exemplo 6.20. Resolva $(1 + x)dy - ydx = 0$.

Da EDO dada, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{1}{1+x} dx \\ \ln |y| &= \ln |1+x| + c_1 \\ y &= |1+x|.c \end{aligned}$$

ou $y = \pm c(1+x)$, pois $|1+x| = \begin{cases} 1+x, & x \geq -1 \\ -(1+x), & x < -1. \end{cases}$

Exemplo 6.21. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \\ y(4) = -3 \end{cases}$$

De $dy/dx = -x/y$, temos

$$\int y dy = \int x dx \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1,$$

ou $x^2 + y^2 = c$ (família de círculos concêntricos).

Utilizando agora a informação $x = 4$ e $y = -3$, temos $c = 25$, e, portanto,

$$x^2 + y^2 = 25,$$

que é o círculo de origem $(0, 0)$ e raio 5.

Para finalizar esta seção, note que se g é uma função contínua em um intervalo aberto I contendo x_0 , então $\forall x \in I$,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x_0} g(t) dt = g(x).$$

Além disso, uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ e } y(x_0) = y_0$$

é dada por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Exemplo 6.22. Resolva $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$ e $y(3) = 5$.

Note que a função e^{-x^2} é contínua em $(-\infty, +\infty)$, mas sua antiderivada não é uma função elementar. Daí,

$$\begin{aligned} \int_3^x \frac{dy}{dt} dt &= \int_3^x e^{-t^2} dt \\ y(x) - y(3) &= \int_3^x e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

$$\text{i.e., } y(x) = 5 + \int_3^x e^{-t^2} dt$$

6.3.2. EDO'S LINEARES

Definição 6.23. Uma equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

é dita equação linear na variável dependente y .

Quando a_1, a_0 e g forem constantes, a equação é autônoma.

Dividindo a equação acima por a_1 , obtemos uma forma mais conveniente, a *forma padrão*, de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x),$$

de forma que $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Nosso intuito é procurar a solução da EDO acima em um intervalo I no qual as funções P e f são contínuas.

Exemplo 6.24. • $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ é uma EDO linear e separável.

- $\frac{dy}{dx} - y = 5$ é uma EDO linear e separável.
- $\frac{dy}{dx} + y = x$ é uma EDO linear e não separável.

Vejam os a seguir um *método de resolução* para uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{6.5}$$

Note que, sendo $\mu(x)$ uma função, temos

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y.$$

Dessa forma, queremos “transformar” o lado esquerdo de (6.5) numa derivada exata de um produto pela multiplicação de ambos os lados de (6.5) por uma

função “especial” $\mu(x)$. De fato, a função $\mu(x)$ é relativamente fácil de encontrar pois queremos

$$\mu \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx} y = \mu \frac{dy}{dx} + \mu P(x)y,$$

de forma que

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x) \iff \frac{d\mu}{\mu} = P dx \iff \ln |\mu(x)| = \int P(x) dx + c_1,$$

o que nos dá

$$\mu(x) = c.e^{\int P(x) dx}.$$

Mesmo tendo infinitas soluções, podemos simplificar nossa escolha com $c = 1$. Dessa forma, a função

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad (6.6)$$

é dita *fator integrante*.

Daí, sabendo que devemos multiplicar a equação (6.5) por (6.6), obtemos

$$\begin{aligned} e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + P(x) e^{\int P(x) dx} y &= e^{\int P(x) dx} f(x) \\ \frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x) dx} y \right] &= e^{\int P(x) dx} f(x), \end{aligned}$$

o que nos dá

$$e^{\int P(x) dx} y = \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx + c,$$

e, portanto, temos que a expressão abaixo nos dá uma família de um parâmetro de soluções de (6.5):

$$y = e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx + c.e^{-\int P(x) dx}. \quad (6.7)$$

Enfatizamos que não se deve memorizar a fórmula (6.7).

Vejam um exemplo.

Exemplo 6.25. Resolva $\frac{dy}{dx} - 3y = 6$.

Note que o fato integrante desta EDO linear é $\mu(x) = e^{\int -3x dx} = e^{-3x}$.
Daí,

$$e^{-3x} \frac{dy}{dx} - e^{-3x} 3y = 6e^{-3x} \Rightarrow \frac{d}{dx} [e^{-3x} y] = 6e^{-3x},$$

$$e^{-3x} y = 6 \int e^{-3x} + c \Rightarrow e^{-3x} y = -6 \cdot \frac{e^{-3x}}{3} + c,$$

e, portanto, $y = -2 + c \cdot e^{3x}$, $-\infty < x < +\infty$.

Exemplo 6.26. Resolva $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$.

Inicialmente, note que a EDO acima não está na forma padrão. Assim, temos que ela escrita em tal forma é dada por

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^5 e^x.$$

Além disso, note que o fato integrante desta EDO linear é $\mu(x) = e^{-4 \int 1/x dx} = e^{-4 \ln x} = x^{-4}$. Daí,

$$x^{-4} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} x^{-4} y = x^{-4} x^5 e^x$$

$$x^{-4} \frac{dy}{dx} - 4x^{-5} y = x e^x$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-4} y] = x e^x,$$

de forma que

$$x^{-4} y = \int x e^x dx + c \Rightarrow x^{-4} y = x e^x - e^x + c,$$

e, portanto, $y(x) = x^5 e^x - x^4 e^x + c x^4$.

Ressaltamos que o estudo de EDO's de primeira ordem não se encerra nas EDO's lineares, e para mais métodos de resolução desta classe de equações, bem como equações de ordem superior, indicamos o livro de Dennis G. Zill [19] com diversas aplicações e projetos que podem ser visto em um semestre numa disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

6.4. MODELAGEM COM EDO'S DE PRIMEIRA ORDEM

6.4.1. CRESCIMENTO E DECAIMENTO

O problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.8)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade, serve como modelo para diversos fenômenos envolvendo *crescimento* ou *decaimento*. Em aplicações biológicas, a taxa de crescimento de determinadas populações (bactérias, animais pequenos) em curtos períodos é proporcional à população presente no instante t . Dessa forma, conhecendo a população em algum instante inicial arbitrário t_0 , podemos usar a solução de (6.8) para prever a população no futuro, i.e., em instantes $t > t_0$. A constante de proporcionalidade k em (6.8) pode ser determinada com base na solução do problema de valor inicial, usando uma medida de x em um instante $t_1 > t_0$.

Ademais, em física e química, (6.8) é vista com uma *reação de primeira ordem*, i.e., uma reação cuja taxa ou velocidade dx/dt é diretamente proporcional à quantidade x de uma substância não transformada ou remanescente no instante t . A decomposição ou decaimento do U-238 (urânio) por radioatividade em Th-234 (tório) é uma reação de primeira ordem.

Exemplo 6.27 (Crescimento de Bactérias). Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias e em $t = 1 h$, o número de bactérias é de $\frac{3}{2}P_0$. Supondo que a taxa de crescimento seja proporcional ao número de bactérias $P(t)$ presente no instante t , determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

SOLUÇÃO:

Desde que temos uma equação do tipo (6.8), podemos reescrever ela da forma

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0,$$

e pelos dados apresentados temos que $P(0) = P_0$ e $P(1) = 3/2P_0$. Como o

fator integrante é e^{-kt} , temos

$$e^{-kt} \frac{dP}{dt} - e^{-kt} kP = 0$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-kt} P] = 0,$$

o que nos dá $P(t) = c.e^{kt}$. Desde que $P(0) = P_0$, obtemos $c = P_0$, e assim podemos escrever a função da forma $P(t) = P_0.e^{kt}$. Vejamos a seguir o valor da constante de proporcionalidade k . Como $P(1) = 3/2P_0$,

$$P(1) = P_0 e^k$$

$$3/2P_0 = P_0 e^k \Rightarrow e^k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \ln \frac{3}{2} \approx 0,4055.$$

Portanto,

$$P(t) = P_0.e^{0,4055t}.$$

Determinemos o instante t tal que $P(t) = 3P_0$, i.e.,

$$3P_0 = P_0.e^{0,4055t}$$

$$3 = e^{0,4055t}$$

$$\ln 3 = 0,4055t$$

e assim $t = \frac{\ln 3}{0,4055} \approx 2,71 h$.

Observe que, no Exemplo 6.27, o número de bactérias presentes no instante $t = 0$ não desempenha nenhum papel na determinação do tempo necessário para triplicar seu número na cultura. Além disso, a função exponencial e^{kt} cresce à medida que t cresce para $k > 0$ e decresce à medida que t cresce para $k < 0$. Dessa forma, problemas que descrevem crescimento são caracterizados por um valor positivo de k - *constante de crescimento*, enquanto que problemas que envolvem decaimento dão valor negativo de k - *constante de decaimento*.

6.4.2. MEIA-VIDA

Em física, a *meia-vida* é uma medida da estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo necessário para a metade

dos átomos em uma quantidade inicial A_0 desintegrar-se ou transformar-se em átomos de um outro elemento. Quanto maior for a meia-vida de uma substância, mais estável ela será. Por exemplo, a meia-vida do rádio altamente radioativo Ra-226 é mais ou menos 1700 anos, i.e., em 1700 anos a metade de uma quantidade dada de Ra-226 é transformada em Radônio Rn-22. Por outro lado, o isótopo de urânio que ocorre mais frequentemente U-238 tem uma meia-vida de aproximadamente 4,5 bilhões de anos, i.e., em cerca de 4,5 bilhões de anos a metade de uma quantidade de U-238 é transformada em chumbo Pb-206.

Exemplo 6.28 (Meia-vida do plutônio). Um reator regenerador converte urânio 238 relativamente estável no isótopo plutônico 239. Depois de 15 anos determinou-se que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio desintegrou-se. Determine a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração for proporcional à quantidade remanescente.

SOLUÇÃO:

Seja $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente no instante t . Temos que a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = kA \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

é $A(t) = A_0 \cdot e^{kt}$.

Desde que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio desintegrou, restará 99,957% de substância. Daí

$$0,99957A_0 = A(15) = A_0 e^{15k} \Rightarrow k = \frac{1}{15} \ln 0,99957 \Rightarrow k = -0,00002867.$$

Logo,

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-0,00002867t}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 \cdot e^{-0,00002867t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,00002867} \approx 24180 \text{ anos.}$$

Geralmente, quando uma substância decai por radioatividade, em geral não se transforma de um vez em outra substância estável; em vez disso, a primeira substância se desintegra em outra substância radioativa, a qual, por sua vez, se desintegra em uma terceira substância e assim por diante. Esse processo, dito *série de desintegração radioativa*, continua até que o elemento estável seja atingido. Por exemplo, a série de desintegração do urânio é $U-238 \rightarrow Th-234 \rightarrow \dots \rightarrow Pb-206$, onde Pb-206 é um isótopo estável de chumbo.

Há mais alguns exemplos de modelagem com equações diferenciais de primeira ordem:

- Datação por carbono;
- Lei do esfriamento/aquecimento de Newton;
- Misturas de dois fluidos;
- Circuito em séries,

sendo estes exemplos equações diferenciais lineares de primeira ordem, enquanto que podemos ter alguns exemplos de modelos não lineares, por exemplo, podemos trabalhar com dinâmica populacional com a equação logística, e com reações químicas. De modo a completar nossa descrição, podemos ter modelos com mais de uma equação diferencial de tal forma que estas fazem surgir *sistemas de equações lineares e não lineares*. Mais descrições destes e de tantas outras aplicações podem ser encontradas em [19] e [4].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. Mathematical methods for physicists. 1999.
- [2] BARENBLATT, Grigory Isaakovich; SCALING, Self-Similarity; ASYMPTOTICS, Intermediate. Cambridge texts in applied mathematics. **Scaling, Self-Similarity, and Dimensional Analysis**, 1996.
- [3] BATISTA, Eliezer; MOZOLEVSKI, Igor. Métodos de Física-Matemática. **Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: Consórcio ReDiSul**, 2010.
- [4] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de contorno. **Rio de Janeiro**, v. 2, p. 16, 2002.
- [5] BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [6] CALÇADA, Caio Sérgio; SAMPAIO, José Luiz. Física Clássica-Vol. 3. **Atual Editora**, 2012.
- [7] CONTE, Samuel Daniel. **Elementos de análise numérica**. Editora Globo, 1977.
- [8] GONDAR, J. López; CIPOLATTI, R. Iniciação a física matemática; Modelagem de processos e métodos de solução. IMPA, 2009.

- [9] LIMA, Elon Lages. Análise real volume 1. Funções de uma variável, **IMPA, Rio de Janeiro**, 2014.
- [10] LIMA, Elon Lages. Geometria Analítica e Álgebra Linear, 2º ed. **IMPA, Rio de Janeiro**, 2012.
- [11] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. SBM, 1997.
- [12] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)**. Editora Blucher, 2013.
- [13] PASSOS, Gilberto Gil Fidelis Gomes; VIUG, Diego Tranjan. **Anais [...]**. São Carlos: VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2013. Tema: Geometria nas Cônicas.
- [14] RODRIGUES, Clóves Gonçalves. **Tópicos de física matemática para licenciatura**. Editora Livraria da Física, 2017.
- [15] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.
- [16] SOTOMAYOR, Jorge. Equações diferenciais ordinárias. **Sao Paulo: Editora Livraria da Física**, 2011.
- [17] SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [18] TRANCANELLI, Diego. Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica à gravidade quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, 2016.
- [19] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Cengage Learning Editores, 2003.



INTRODUÇÃO AO ESTUDO QUALITATIVO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

KAMILLA PALHARES E UBIRAJARA CASTRO

20/06/2022 - 24/06/2022

*Ao Yuri e à minha pequena Teresa.
À Marisa, à Leonora e ao Leônidas: meu porto seguro.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Introdução

2 O Modelo Populacional Logístico

3 Colheita Constante e Bifurcações

4 Colheita Periódica e Soluções Periódica

5 Calculando a Aplicação de Poincaré

5.1 Exploração: Uma família a dois parâmetros

Referências

PREFÁCIO

O propósito desse minicurso é desenvolver alguns exemplos elementares, porém importantes, de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem. Esses exemplos ilustram algumas das ideias básicas na teoria das EDO's no ambiente mais simples possível.

Os primeiros exemplos podem ser familiares a leitores que tenham tido um curso introdutório sobre a teoria das EDO. Os exemplos finais, tal qual o modelo logístico com colheita, são incluídos para dar um vislumbre de certos tópicos (bifurcações, soluções periódicas e aplicações de Poincaré).

Belém, junho de 2022

Kamilla Palhares
Ubirajara Castro

INTRODUÇÃO

A seguinte equação diferencial é bastante conhecida dos estudantes de cálculo, além de ser uma das mais simples

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Ela é também uma das mais importantes. Mas, o que ela significa? Aqui, $x = x(t)$ é uma função desconhecida de uma variável real t e dx/dt é a derivada (usaremos também x' ou $x'(t)$ para significar a derivada). Consideramos a como um parâmetro; para cada valor de a temos uma equação diferencial diferente. A equação nos diz que para cada valor de t a relação

$$x'(t) = ax(t),$$

é verdadeira.

Do Cálculo sabemos que se k é um número real qualquer, então a função $x(t) = ke^{at}$ é uma solução da equação, uma vez que

$$x'(t) = ake^{at} = ax(t).$$

Além disso, *não existem outras soluções*. Para ver isso, suponhamos que $u(t)$ seja outra solução e calculemos a derivada de $u(t)e^{-at}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u(t)e^{-at}) &= u'(t)e^{-at} + u(t)(-ae^{-at}) \\ &= au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $u(t)e^{-at}$ é constante, digamos, k e, assim, $u(t) = ke^{at}$. Isso prova nossa afirmação. Logo, encontramos todas as soluções possíveis para essa equação diferencial. Chamamos a coleção de todas as soluções de uma equação diferencial de *solução geral* da equação.

A constante k , que aparece nessa solução, é completamente determinada se o valor u_0 de alguma solução, em um ponto t_0 , for especificada. Suponhamos que exijamos da solução $x(t)$, da equação diferencial, que $x(t_0) = u_0$. Então devemos ter $ke^{at_0} = u_0$, de modo que $k = u_0e^{-at_0}$. Assim, determinamos k e, portanto, essa equação possui uma única solução satisfazendo a *condição inicial* $x(t_0) = u_0$. Por simplicidade, geralmente tomamos $t_0 = 0$; então $k = u_0$. Não há perda de generalidade em tomar $t_0 = 0$, pois se $u(t)$ é uma solução com $u(0) = u_0$ então a função $v(t) = u(t - t_0)$ é uma solução com $v(t_0) = u_0$.

É comum reescrever isso na forma de um *problema de valor inicial*:

$$\begin{aligned}x' &= ax, \\x(0) &= u_0.\end{aligned}$$

Uma solução $x(t)$ de um problema de valor inicial além de resolver a equação diferencial, deve também satisfazer a condição inicial, isto é, quando $t = 0$ a função deve assumir o valor u_0 .

Observe que há uma solução especial dessa equação diferencial quando $k = 0$. À saber, a solução constante $x(t) \equiv 0$. Uma solução constante desse tipo é chamada de uma *solução de equilíbrio* ou *ponto de equilíbrio* para a equação. Equilíbrios estão entre as soluções mais importantes de uma equação diferencial.

A constante a na equação $x' = ax$ pode ser considerada um parâmetro. Se a muda, a equação muda, bem como mudam as soluções. Será que podemos descrever, qualitativamente, como as soluções mudam? O sinal de a é crucial aqui:

1. Se $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at}$ é igual a ∞ quando $k > 0$, e igual a $-\infty$ quando $k < 0$;

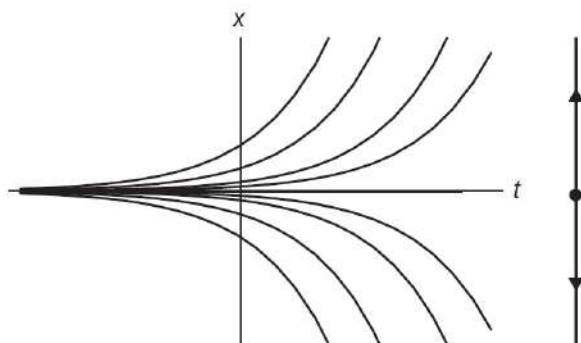


Figura 1.1: Os gráficos das soluções e a linha de fases para $x' = ax$ para $a > 0$. Cada gráfico representa uma solução particular.

2. Se $a = 0$, $ke^{at} = \text{constante}$;
3. Se $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$.

O comportamento qualitativo das soluções é vividamente ilustrado ao desenharmos os gráficos das soluções como na Figura 1.1. Observe que o comportamento das soluções é um tanto diferente quando a é positivo e negativo. Quando $a > 0$, todas as soluções não nulas se afastam do ponto de equilíbrio em 0 conforme t aumenta, enquanto que, quando $a < 0$ as soluções tendem ao ponto de equilíbrio (Figura 1.2). Dizemos que o equilíbrio é uma *fonte* quando soluções próximas se afastam do ponto de equilíbrio. O ponto de equilíbrio é um *sumidouro* quando soluções próximas tendem ao ponto de equilíbrio

Podemos descrever também as soluções desenhando-as sobre uma *linha de fases*. Devido ao fato da solução $x(t)$ ser uma função do tempo, podemos imaginar $x(t)$ como uma partícula movendo-se ao longo da reta real. No ponto de equilíbrio, a partícula se mantém em repouso (indicado por um ponto cheio), enquanto que qualquer outra solução move-se para cima ou para baixo, no eixo x , como indicado pelas flechas mostradas nas Figura 1.1 e Figura 1.2.

A equação $x' = ax$ é *estável* em um certo sentido se $a \neq 0$. Mais precisamente, se a é trocada por qualquer outra constante b que tenha o mesmo sinal que a o comportamento qualitativo das soluções não se altera. Mas se $a = 0$

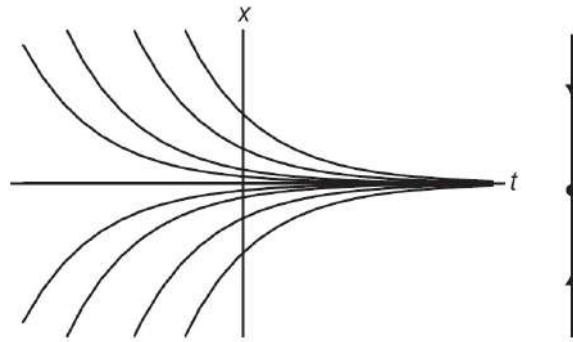


Figura 1.2: Os gráficos das soluções e a linha de fases para $x' = ax$ para $a < 0$.

qualquer pequena mudança em a causa uma mudança radical no comportamento das soluções. Dizemos, portanto, que temos uma *bifurcação* em $a = 0$ da família a um-parâmetro de equações $x' = ax$.

O MODELO POPULACIONAL LOGÍSTICO

A equação diferencial $x' = ax$ acima, pode ser considerada um modelo simples de crescimento populacional quando $a > 0$. A grandeza $x(t)$ representa a quantidade de indivíduos de alguma espécie no tempo t . A afirmação que leva à equação diferencial é a de que a taxa de crescimento da população (à saber, dx/dt) é diretamente proporcional ao tamanho da população. É claro que essa afirmação (até ingênua, diga-se de passagem) omite muitas circunstâncias que governam o crescimento populacional, incluindo, por exemplo, o fato de que populações não crescem ilimitadamente.

Para levar essa restrição em conta, podemos fazer as seguintes suposições sobre o modelo populacional:

1. Se a população é pequena, a taxa de crescimento é quase que diretamente proporcional ao tamanho da população;
2. mas se a população cresce muito, a taxa de crescimento torna-se negativa.

Uma equação diferencial que satisfaz às afirmações acima é o *modelo de crescimento populacional logístico*, que é a seguinte:

$$x' = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right).$$

Aqui, a e N são parâmetros positivos: a dá a taxa de variação do crescimento da população quando x é pequeno, enquanto que N representa um tipo de tamanho "ideal" de população ou "capacidade". Observe que se x é pequeno,

a equação diferencial é essencialmente $x' = ax$ (uma vez que o termo $1 - (x/N) \approx 1$), mas se $x > N$, então $x' < 0$. Assim, essa simples equação satisfaz às suposições acima. Existem muitas outras equações diferenciais que correspondem à essas suposições; essa escolha talvez seja a mais simples.

Sem perda de generalidade, assumiremos que $N = 1$. Isto é, escolheremos unidades tais que a capacidade seja exatamente 1 unidade de população e, $x(t)$ representa a fração da população ideal presente no tempo t . Dessa forma, a equação logística se reduz a

$$x' = f_a(x) = ax(1 - x).$$

Isso é um exemplo de uma equação diferencial não linear, autônoma, de primeira ordem. Ela é de *primeira ordem* uma vez que a primeira derivada de x aparece na equação. É *autônoma* pois o lado direito da equação depende somente de x e não do tempo t . É *não linear* já que $f_a(x)$ é uma função não linear de x . O exemplo anterior, $x' = ax$, é uma equação diferencial linear, autônoma, de primeira ordem.

A solução da equação diferencial logística é facilmente encontrada pelo método de separação das variáveis:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt.$$

O método das frações parciais permite-nos reescrever a integral do lado esquerdo como

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx.$$

Integrando ambos os lados e resolvendo para x obtemos

$$x(t) = \frac{K e^{at}}{1 + K e^{at}},$$

onde K é uma constante arbitrária de integração. Resolvendo essa expressão com $t = 0$ e resolvendo para K obtemos

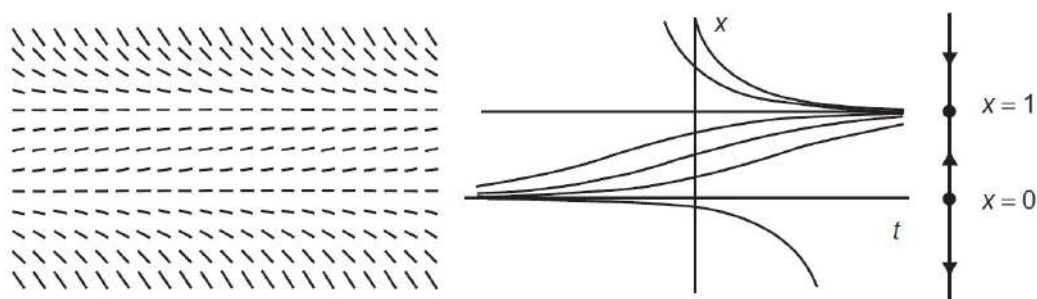


Figura 2.1: O campo de inclinações, os gráficos das soluções e a linha de fases para $x' = ax(1 - x)$.

$$K = \frac{x(0)}{1 - x(0)}.$$

Usando isso, reescrevemos a solução como

$$\frac{x(0)e^{at}}{1 - x(0) + x(0)e^{at}}.$$

Assim, essa solução é válida para qualquer população inicial $x(0)$. Quando $x(0) = 1$, temos uma solução de equilíbrio, uma vez que $x(t)$ reduz-se à $x(t) \equiv 1$. Analogamente, $x(t) \equiv 0$ é também uma solução de equilíbrio.

Assim temos "existência" de soluções para a equação diferencial logística.

Para ter um sentimento do comportamento qualitativo das soluções nós desenhamos o *campo de inclinações* para essa equação. O lado direito da equação diferencial determina a inclinação do gráfico de qualquer solução em cada tempo t . Assim, podemos plotar pequenas retas inclinadas no plano tx , como na Figura 2.1, com a inclinação de cada pequena reta em (t, x) dada por $ax(1 - x)$. Nossas soluções devem, portanto, ter gráficos que sejam tangentes a este campo de inclinações. A partir desses gráficos, vemos imediatamente que, de acordo com nossas suposições, todas as soluções para as quais $x(0) > 0$ tendem à população ideal $x(t) \equiv 1$. Para $x(0) < 0$, soluções tendem para $-\infty$, contudo essas soluções são irrelevantes no contexto do modelo populacional.

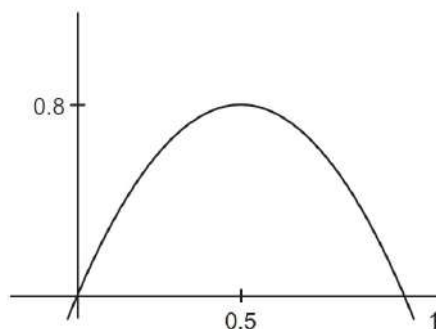


Figura 2.2: O gráfico da função $f(x) = ax(1 - x)$ com $a = 3,2$.

Observe que podemos também "ler" esse comportamento a partir do gráfico da função $f_a(x) = ax(1 - x)$. Esse gráfico, mostrado na Figura 2.2, cruza o eixo x em dois pontos, à saber, $x = 0$ e $x = 1$, portanto esses pontos representam nossos pontos de equilíbrio. Quando $0 < x < 1$, temos $f(x) > 0$. Isso quer dizer que as inclinações são positivas em qualquer ponto (t, x) com $0 < x < 1$, implicando que as soluções são crescentes nessa região. Quando $x < 0$ ou $x > 1$, temos $f(x) < 0$ e as soluções devem, portanto, decrescer, como vemos tanto no gráfico das soluções quanto na linha de fases desenhados na Figura 2.1.

Podemos deduzir o fato de $x = 0$ ser uma fonte e $x = 1$ ser um sumidouro a partir do gráfico de f de maneira similar. Próximo de 0 temos $f(x) > 0$ se $x > 0$, portanto as inclinações são positivas e as soluções crescentes, mas se $x < 0$, então $f(x) < 0$, logo as inclinações são negativas e as soluções decrescem. Assim, soluções próximas se afastam de 0, donde 0 é uma fonte. De modo análogo, 1 é um sumidouro.

Também podemos determinar essa informação analiticamente. Temos que $f'_a(x) = a - 2ax$, de sorte que $f'_a(0) = a > 0$ e $f'_a(1) = -a < 0$. Como $f'_a(0) > 0$, as inclinações devem aumentar conforme x passa por 0. Isto é, as inclinações são negativas para valores menores que $x = 0$ e positivas para valores maiores que $x = 0$. Logo, as soluções tendem a se afastar de $x = 0$. De modo similar, $f'_a(1) < 0$ força as soluções a tenderem para $x = 1$, fazendo desse ponto de

equilíbrio um sumidouro.

Exemplo: Como uma ilustração dessas ideias qualitativas, considere a equação diferencial

$$x' = g(x) = x - x^3.$$

Existem três pontos de equilíbrio, $x = 0$ e $x = \pm 1$. Como $g'(x) = 1 - 3x^2$, temos $g'(0) = 1$, donde deduzimos que o ponto de equilíbrio 0 é uma fonte. Temos também que $g'(\pm 1) = -2$ e, assim, os pontos de equilíbrio ± 1 são ambos sumidouros. Entre esses pontos de equilíbrio, o sinal do campo de inclinações é diferente de 0. A partir dessas informações, conseguimos desenhar a linha de fases como mostrada na Figura 2.3.

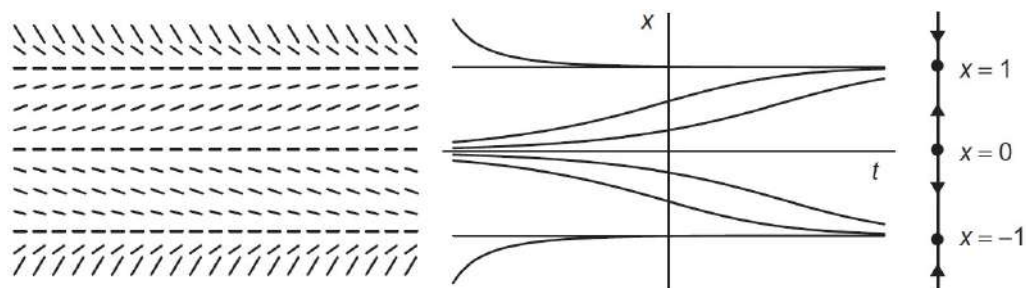


Figura 2.3: O campo de inclinações, os gráficos das soluções e a linha de fases para $x' = x - x^3$.

COLHEITA CONSTANTE E BIFURCAÇÕES

Agora, modifiquemos o modelo logístico para levar em conta a colheita da população. Suponha que a população obedeça às suposições logísticas com parâmetro $a = 1$, mas também seja colheita a uma taxa constante h . A equação diferencial torna-se

$$x' = x(1 - x) - h,$$

onde $h \geq 0$ é um novo parâmetro.

Ao invés de resolver essa equação explicitamente, usaremos os gráficos das funções

$$f_h(x) = x(1 - x) - h,$$

para "ler" o comportamento qualitativo das soluções. Na Figura 3.1 mostramos os gráficos de f_h em três diferentes casos: $0 < h < 1/4$, $h = 1/4$ e $h > 1/4$. É direto verificar que f_h tem duas raízes quando $0 \leq h < 1/4$, uma raiz quando $h = 1/4$ e nenhuma raiz se $h > 1/4$, como ilustrado nos gráficos. Como consequência, a equação diferencial tem dois pontos de equilíbrio x_l e x_r com $0 \leq x_l < x_r$ quando $0 < h < 1/4$. Também é fácil ver que $f'_h(x_l) > 0$, de modo que x_l é uma fonte e $f'_h(x_r) < 0$, fazendo de x_r um sumidouro.

Conforme h passa por $h = 1/4$, encontramos outro exemplo de uma bifurcação. Os dois equilíbrios x_l e x_r se fundem quando h passa por $1/4$ e então desaparecem quando $h > 1/4$. Além disso, quando $h > 1/4$, temos $f_h(x) < 0$

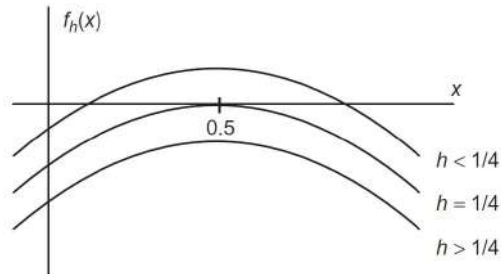


Figura 3.1: Os gráficos da função $f_h(x) = x(1 - x) - h$.

para todo x . Matematicamente, isso significa que todas as soluções da equação diferencial decrescem para $-\infty$ conforme o tempo passa.

Registraremos isso em um *diagrama de bifurcação*. Nesse diagrama plotamos o parâmetro h na horizontal. Para cada valor de h plotamos a linha de fase correspondente. A curva nesse diagrama representa os pontos de equilíbrio para cada valor de h . Isso dá uma outra visão da fonte e do sumidouro fundindo em um único ponto de equilíbrio e então desaparecendo de acordo com que h passa por $1/4$ (ver Figura 3.2).

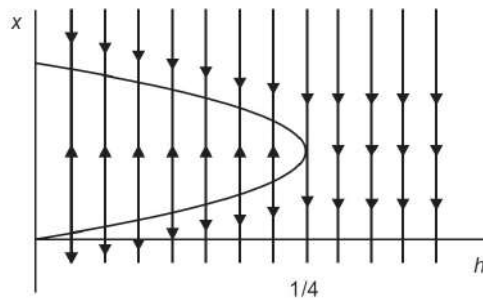


Figura 3.2: O diagrama de bifurcação para $f_h(x) = x(1 - x) - h$.

Ecologicamente falando, essa bifurcação corresponde a um desastre para a espécie em estudo. Para taxas de colheita $1/4$ ou menor, a população persiste, desde que a população inicial seja suficientemente grande ($x(0) > x_l$). Mas uma pequena mudança na taxa de colheita quando $h = 1/4$ leva a uma grande

mudança no destino da população: para qualquer taxa de colheita $h > 1/4$ a população se torna extinta.

Esse fenômeno mostra a importância de detectar bifurcações em famílias de equações diferenciais. Devemos mencionar também que, apesar da simplicidade desse modelo populacional, a previsão de que pequenas mudanças nas taxas de colheitas podem levar a mudanças desastrosas na população tem sido observadas várias vezes em situações reais na Terra.

Exemplo: Como um outro exemplo de bifurcação, considere a família de equações diferenciais

$$x' = g_a(x) = x^2 - ax = x(x - a),$$

que depende de um parâmetro a . Os pontos de equilíbrio são $x = 0$ e $x = a$. Calculando $g'_a(0) = -a$, deduzimos que 0 é um sumidouro se $a > 0$ e uma fonte se $a < 0$. Analogamente, $g'_a(a) = a$, de modo que $x = a$ é um sumidouro se $a < 0$ e uma fonte se $a > 0$. Temos uma bifurcação em $a = 0$ uma vez que só existe um ponto de equilíbrio quando $a = 0$. Além disso, o ponto de equilíbrio em 0 muda de uma fonte para um sumidouro conforme a aumenta passando por 0 . Similarmente, o equilíbrio em $x = a$ muda de um sumidouro para uma fonte conforme a passa por 0 . O diagrama de bifurcação para essa família está representado na Figura 3.3.

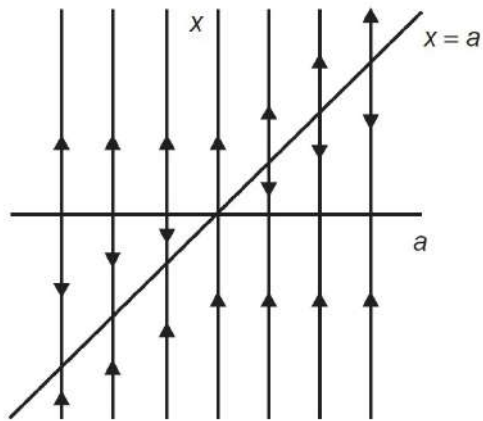


Figura 3.3: O diagrama de bifurcação para $x' = x^2 - ax$.

SOLUÇÕES PERIÓDICA COLHEITA PERIÓDICA E

Agora, vamos mudar nossas hipóteses sobre o modelo logístico a fim de refletir o fato de que a colheita nem sempre ocorre a uma taxa constante. Por exemplo, várias populações de muitas espécies de peixes são pescadas mais durante estações mais quentes do que em estações mais frias. Então vamos assumir que a população seja colhida em uma taxa periódica. Um modelo para isso é o seguinte:

$$x' = f(t, x) = ax(1 - x) - h(1 + \text{sen}(2\pi t)),$$

onde, novamente, h e a são parâmetros positivos. Assim, a colheita atinge sua taxa máxima $-2h$ quando $t = 1/4 + n$, onde n é um número inteiro (representando os anos), e a colheita atinge sua taxa mínima, 0 , quando $t = 3/4 + n$, exatamente um ano e meio depois. Observe que essa equação diferencial agora depende explicitamente do tempo; este é um exemplo de uma equação diferencial *não-autônoma*. Como no caso autônomo, a solução $x(t)$ dessa equação deve satisfazer $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo t . Outra coisa, é que essa equação não é mais separável, logo não podemos gerar uma fórmula analítica para suas soluções usando os métodos usuais do cálculo. Portanto, somos forçados a tomar uma abordagem mais qualitativa.

Para descrever o destino da população nesse caso, primeiro notamos que o lado direito dessa equação diferencial é periódico com período igual a 1 na variável temporal. Isto é, $f(t + 1, x) = f(t, x)$. Esse fato, de certa forma, simplifica a busca por soluções. Suponha que conheçamos a solução de todos

os problemas de valor inicial, não para todo tempo, mas para $0 \leq t \leq 1$. Então, de fato, conhecemos as soluções para *qualquer tempo*. Por exemplo, suponha que $x_1(t)$ é a solução definida para $0 \leq t \leq 1$ e ainda satisfaz $x_1(0) = x_0$. Suponha que $x_2(t)$ é a solução que satisfaz $x_2(0) = x_1(1)$. Então podemos estender a solução x_1 definindo $x_1(t+1) = x_2(t)$ para $0 \leq t \leq 1$. A função estendida é uma solução uma vez que

$$\begin{aligned} x_1'(t+1) = x_2'(t) &= f(t, x_2(t)) \\ &= f(t+1, x_1(t+1)). \end{aligned}$$

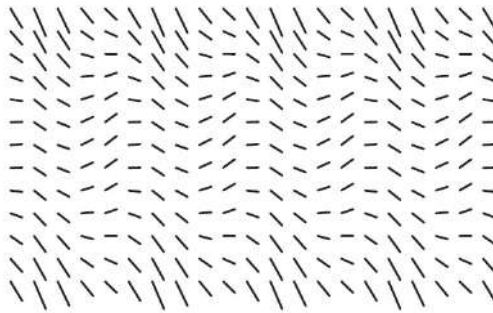


Figura 4.1: O campo de inclinações para $f(x) = x(1-x) - h(1 + \text{sen}(2\pi t))$.

Assim, se conhecemos o comportamento de todas as soluções no intervalo $0 \leq t \leq 1$, então podemos extrapolar, de maneira similar, para qualquer intervalo e, portanto, sabemos o comportamento das soluções para todo tempo.

Segundo, suponha que saibamos o valor no tempo $t = 1$ de alguma solução satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$. Então, para cada condição inicial x_0 , podemos associar o valor $x(1)$ da solução $x(t)$ que satisfaz $x(0) = x_0$. Isso nos dá uma função $p(x_0) = x(1)$. Se compormos essa função com ela mesma, descobrimos o valor da solução que passa por x_0 para $t = 2$; isto é, $p(p(x_0)) = x(2)$. Se compormos essa função consigo mesma n vezes, então podemos calcular o valor da curva solução no tempo n e daí saberemos o destino da curva solução.

A função p é chamada *Aplicação de Poincaré* dessa equação diferencial. Ter em mãos tal função nos permite mover do reino dos sistemas dinâmicos contínuos (equações diferenciais) para o quase-sempre-fácil-de-entender reino dos sistemas dinâmicos discretos (funções iteradas). Por exemplo, suponha que saibamos que $p(x_0) = x_0$ para alguma condição inicial x_0 . Isto é, x_0 é um *ponto fixo* para a função p . Assim, de nossas observações anteriores, sabemos que $x(n) = x_0$ para cada inteiro n . Além disso, para cada tempo t com $0 < t < 1$, também temos $x(t) = x(t+1)$ donde $x(t+n) = x(t)$ para cada inteiro n . Isto é, a solução satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$ é uma função periódica de t com período 1. Tais soluções são chamadas *soluções periódicas* da equação diferencial. A Figura 4.2, mostra várias soluções da equação logística com colheita periódica. Observe que a solução satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$ é uma solução periódica e que temos $x_0 = p(x_0) = p(p(x_0)) \cdots$. De modo similar, a solução satisfazendo a condição inicial $x(0) = \hat{x}_0$ também parece ser uma solução periódica, de modo que devemos ter $p(\hat{x}_0) = \hat{x}_0$.

Infelizmente, é comum o cálculo da Aplicação de Poincaré para uma equação diferencial ser impossível, mas para a equação logística com colheita periódica nós demos sorte.

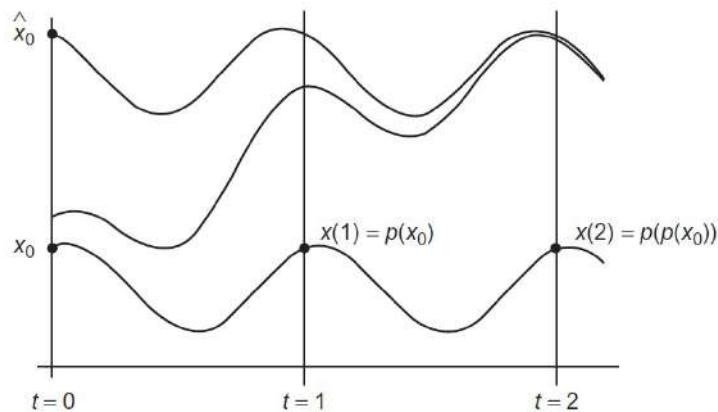


Figura 4.2: A Aplicação de Poincaré para $x' = 5x(1 - x) - 0,8(1 + \text{sen}(2\pi t))$.

CALCULANDO A APLICAÇÃO DE POINCARÉ

Antes de calcularmos a Aplicação de Poincaré para essa equação, introduziremos alguma terminologia importante. Para enfatizar a dependência de uma solução do valor inicial x_0 , denotaremos a solução correspondente por $\phi(t, x_0)$. Essa função $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *fluxo* associado à equação diferencial. Se mantivermos a variável x_0 fixa, então a função

$$t \rightarrow \phi(t, x_0),$$

é somente uma expressão alternativa da solução da equação diferencial satisfazendo à condição inicial x_0 . Algumas vezes, escrevemos essa função como $\phi_t(x_0)$.

Exemplo: Para nosso primeiro exemplo, $x' = ax$, o fluxo é dado por

$$\phi(t, x_0) = x_0 e^{at}.$$

Para a equação logística (sem colheita), o fluxo é

$$\phi(t, x_0) = \frac{x(0)e^{at}}{1 - x(0) + x(0)e^{at}}.$$

Agora, voltamos à equação diferencial logística com colheita periódica,

$$x' = f(t, x) = ax(1 - x) - h(1 + \text{sen}(2\pi t)).$$

A solução satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por $t \rightarrow \phi(t, x_0)$. Embora não tenhamos uma fórmula pra essa expressão, sabemos que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, essa solução satisfaz

$$\phi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi(s, x_0)) ds,$$

uma vez que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_0) = f(t, \phi(t, x_0)),$$

e $\phi(0, x_0) = x_0$.

Se derivarmos essa solução com relação à x_0 , obtemos, usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_0}(t, x_0) = 1 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_0}(s, \phi(s, x_0)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(s, x_0) ds.$$

Agora, seja

$$z(t) = \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(t, x_0).$$

Observe que

$$z(0) = \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(0, x_0) = 1.$$

Derivando z com relação à t , obtemos

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_0}(t, \phi(t, x_0)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(t, x_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_0}(t, \phi(t, x_0)) \cdot z(t). \end{aligned}$$

Novamente, não sabemos $\phi(t, x_0)$ explicitamente, mas essa equação nos mostra que $z(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(t, \phi(t, x_0))z(t),$$

com $z(0) = 1$. Conseqüentemente, via separação das variáveis, podemos calcular que a solução dessa equação é

$$z(t) = \exp \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_0}(s, \phi(s, x_0)) ds,$$

donde temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_0}(1, x_0) = \exp \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_0}(s, \phi(s, x_0)) ds.$$

Uma vez que $p(x_0) = \phi(1, x_0)$, determinamos a derivada $p'(x_0)$ da Aplicação de Poincaré. Note que $p'(x_0) > 0$. Portanto p é uma função crescente.

Derivando uma vez mais, obtemos

$$p''(x_0) = p'(x_0) \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_0}(s, \phi(s, x_0)) \cdot \exp \left(\int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_0}(u, \phi(u, x_0)) du \right) ds \right),$$

que parece bem intimidador. Contudo, como

$$f(t, x_0) = ax_0(1 - x_0) - h(1 + \text{sen}(2\pi t)),$$

temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_0} \equiv -2a.$$

Então, agora sabemos que $p''(x_0) < 0$. Conseqüentemente, o gráfico da Aplicação de Poincaré é côncavo para baixo. Isso significa que o gráfico de p pode cruzar a diagonal $y = x$ no máximo duas vezes. Ou seja, pode existir, no máximo, dois valores de x para os quais $p(x) = x$. Portanto, a Aplicação de Poincaré tem no máximo dois pontos fixos. Esses pontos fixos implicam em soluções periódicas para a equação diferencial original. Essas são soluções que satisfazem $x(t+1) = x(t)$ para todo t . Outra maneira de dizer isso é que o fluxo $\phi(t, x_0)$ é uma função periódica em t com período 1 quando a condição inicial x_0 é um dos pontos fixos. Nós vimos essas duas soluções no caso particular em que $h = 0,8$ na Figura 4.2. Na Figura 5.1 vemos, novamente, duas soluções

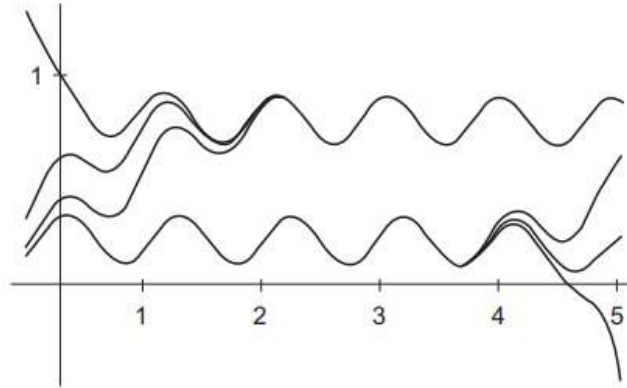


Figura 5.1: Várias soluções de $x' = 5x(1 - x) - 0,8(1 + \text{sen}(2\pi t))$.

que parecem periódicas. Observe que uma dessas soluções parece atrair todas as outras soluções próximas, enquanto que a outra parece repelí-las.

Lembre que a equação diferencial também depende do parâmetro de colheita h . Para pequenos valores de h há dois pontos fixos como mostrado na Figura 5.1. Derivando f com respeito a h , encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial h}(t, x_0) = -(1 + \text{sen}(2\pi t)).$$

Assim, $\partial f/\partial h < 0$ (exceto quando $t = 3/4$). Isso significa que as inclinações das pequenas retas no campo de inclinações, em cada ponto (t, x_0) , diminui conforme h aumenta. Como consequência, os valores da Aplicação de Poincaré diminuem conforme h aumenta. Logo, existe um único valor h_* para o qual a Aplicação de Poincaré tem, exatamente, um ponto fixo. Para $h > h_*$, não p não tem pontos fixos e, portanto, $p(x_0) < x_0$ para todos os valores iniciais. Segue, daí, que a população desaparece novamente.

5.1. EXPLORAÇÃO: UMA FAMÍLIA A DOIS PARÂMETROS

Considere a família de equações diferenciais

$$x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b,$$

que depende de dois parâmetros, a e b . O objetivo dessa exploração é combinar todas as ideias do capítulo e ter uma visão geral do plano de parâmetros (plano ab) para essa equação diferencial. Fique à vontade para usar um computador para ir testando essa equação diferencial e então prove rigorosamente suas observações.

1. Primeiro, fixe $a = 1$. Use o gráfico de $f_{1,b}$ para construir o diagrama de bifurcação para essa família de equações diferenciais dependente de b .
2. Repita o passo anterior para $a = 0$ e então para $a = -1$
3. Qual a "cara" do diagrama de bifurcação para outros valores de a ?
4. Agora fixe b e use o gráfico para construir o diagrama de bifurcação para essa família, que agora depende de a .
5. No plano ab , desenhe as regiões onde a equação diferencial correspondente tem quantidades diferentes de pontos de equilíbrio, incluindo um desenho da fronteira dessas regiões.
6. Descreva, usando linhas de fases e o gráfico de $f_{a,b}(x)$, as bifurcações que ocorrem conforme os parâmetros passam por essas fronteiras.
7. Descreva em detalhes as bifurcações que ocorrem em $a = b = 0$ conforme a e/ou b variam.
8. Considere a equação diferencial $x' = x - x^3 - b \operatorname{sen}(2\pi t)$ onde $|b|$ é pequeno. O que se pode dizer sobre as soluções dessa equação? Existe alguma solução periódica?
9. Experimentalmente, o que acontece conforme $|b|$ aumenta? Observa-se alguma bifurcação? Explique o que você observa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOYCE, W.E e DIPRIMA, R.C. SOBRENOME1, A. e SOBRENOME2, B. C. (2017). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC.
- [2] DOERING, C.I. e LOPES, A.O. (2017). *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA.
- [3] HIRSCH, M.W.; SMALE, S.; DEVANEY, R.L (2004). *Differential equations, dynamical systems an introduction to chaos*. Elsevier.
- [4] SOTOMAYOR, J. M. (1979) *Lições de equações diferenciais ordinárias*. IMPA.



**MATEMÁTICA E DEFICIÊNCIA VISUAL: PROPOSTAS DE ADAPTAÇÕES
DO ENSINO FUNDAMENTAL II AO CÁLCULO DIFERENCIAL E
INTEGRAL COM UMA VARIÁVEL**

JORGE BRANDÃO

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

Provai e vede como o Senhor é bom!

Jesus Cristo, obrigado!

SUMÁRIO

Prefácio

1 Introdução

1.1 Breve revisão da literatura

1.1.1 Deficiência visual

2 Percurso metodológico do minicurso

2.1 Primeiro dia

2.1.1 Primeiro momento

2.1.2 Segundo momento

2.1.3 Terceiro momento

2.1.4 Quarto momento

2.1.5 Quinto momento

2.2 Segundo dia

2.2.1 Primeiro momento

2.2.2 Segundo momento

2.2.3 Terceiro momento

2.2.4 Quarto momento

Conclusões

Referências

PREFÁCIO

Caríssimo leitor e prezada leitora, saibam que ler pode ser perigoso, com efeito, quando estamos lendo um livro, uma revista, entre outros meios escritos, na verdade estamos repetindo os processos mentais daquele(a) que escreveu. Torna-se necessária uma pergunta: quando é que a leitura passa a ser algo construtivo para o(a) leitor(a)?

Ora, quando aquilo que está sendo lido não é ponto de chegada e sim ponto de partida para o ato de pensar, haja vista estarmos lendo os pensamentos dos outros para conseguirmos ter os nossos próprios pensamentos (COSTA, CASCINO e SAVIANI, 2000). A leitura feita com os olhos pode apreciar e associar gravuras ao texto, o que nem sempre ocorre com aqueles que leem com o tato.

A leitura deste artigo não deve ser feita com o propósito de utilizar técnicas e métodos matemáticos para um público alvo e sim o de desenvolver determinado conteúdo de uma maneira participativa. Participação ativa, onde o(a) leitor(a) é convidado(a) a deleitar-se em algumas atividades matemáticas.

De que forma você lê a expressão x^2 ? Se você leu “xis ao quadrado” parabéns, você acertou! Leia agora, por favor, esta expressão $(a + b)^2$. Se você tiver lido “a mais b ao quadrado”, fazendo correspondência com x^2 - que é natural – então como você lê esta outra expressão: $a + b^2$?

Façamos exemplo numérico, supondo que o valor de a seja igual a dois e o valor de b seja igual a três. Assim, em $(a + b)^2$, temos $(2 + 3)^2 = 5^2$. E o que significa 5^2 ? Ora, x^2 é o produto do número x por ele mesmo, assim sendo, 5^2 é igual a cinco vezes cinco, fornecendo 25.

No outro caso, $a + b^2$, temos $2 + 3^2$. Sendo $3^2 = 9$, pelos argumentos anteriores, segue-se que $2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$. Como 25 não é igual a 11, então as expressões $(a + b)^2$ e $a + b^2$ não podem ter a mesma leitura, concorda? Você pode argumentar que são expressões visivelmente distintas... E os cegos, como perceberão a diferença se as mencionadas expressões forem apenas ouvidas?

Deste modo, a forma como o docente (não só de matemática) se expressa verbalmente em uma sala de aula regular pode tornar ou não significativo determinado conteúdo.

Em relação à Orientação e Mobilidade (OM): “Orientação” é o processo de utilizar os sentidos remanescentes para estabelecer a própria posição e o relacionamento com outros objetos significativos no meio ambiente (BRASIL, 2003). Essa habilidade de compreender o ambiente é conquistada pelos deficientes visuais desde seu nascimento e vai evoluindo no decorrer de sua vida. “Mobilidade” é a locomoção independente, com segurança e responsabilidade.

Em nossa prática docente na OM, percebemos que muitas das atividades realizadas estavam intimamente ligadas à Matemática. Por exemplo, em uma postura inicial para uma pessoa com deficiência visual começar uma locomoção independente, o discente fica em pé, na posição vertical, formando entre o braço, o cotovelo e o antebraço um ângulo de 120° , para utilizar a bengala longa. Ela se locomove em uma calçada paralelamente ao meio-fio etc.

Vertical, ângulo e paralelamente são expressões muito utilizadas na Matemática, em particular na Geometria. O que mais de Matemática pode ser “explorada” na OM?

Enfim, este minicurso visa apresentar adaptações não só no conteúdo mas, também, na prática do docente.

Jorge Brandão

INTRODUÇÃO

Há matemáticos cegos, enquanto jovens, que fizeram contribuições para o desenvolvimento desse campo do saber. Iniciando com Lev Semenovich Pontryagin (1908 – 1988), que nasceu em Moscou e ficou cego aos 14 anos em virtude de uma explosão. Foi auxiliado em seus estudos principalmente pelo apoio recebido de sua mãe, Tatyana Andreevna, que lia para Pontryagin.

Muito embora fosse leiga na Matemática, Tatyana descrevia com um linguajar próprio a partir das aparências dos símbolos matemáticos. Por exemplo: para indicar que um conjunto A está contido em um conjunto B , notação $A \subset B$, ela fazia referência do tipo A cauda B (LIRA & BRANDÃO, 2013). A importância da citação de Pontryagin não é só sua capacidade matemática. Seu esforço o tornou um brilhante professor nas áreas de Topologia e Equações Diferenciais. Destaca-se a participação de sua mãe como um apoio em seus estudos, transcrevendo textos.

Outro que pode ser citado, conforme Diderot (2007) é Nicholas Saunderson (1682 – 1739). Com aproximadamente um ano de idade ele perdeu a visão através de varíola, todavia, este ocorrido não o impediu de adquirir um conhecimento de latim e grego, bem como estudar matemática. Amigos liam para ele. Destaca-se a máquina que ele desenvolveu. A mesma máquina era útil tanto para realização dos cálculos algébricos quanto para a descrição de figuras retilíneas, podendo ser comparada a um pré-geoplano.

E um terceiro matemático cego é Bernard Morin. Ele nasceu em 1931 em Shangai, onde o seu pai trabalhava para um banco. Morin desenvolveu glaucoma bem cedo e foi levado para a França para tratamento médico. Ele voltou a Shangai, mas, por ocasião do rompimento das retinas ficou completamente cego aos seis anos de idade.

Depois que ficou cego, retornou para a França sendo educado em escolas para cegos até a idade de quinze anos, quando entrou no ensino regular. Junto ao *Centre National de la Recherche Scientifique* como pesquisador em 1957, Morin desenvolveu pesquisas sob a eversão da esfera. Em 1972 conseguiu o PhD.

As citações desses matemáticos (cegos enquanto jovens, note que Leonard Euler não foi aqui citado) servem para indicar que a Matemática pode ser apreendida por pessoas

com necessidades especiais, e que a participação ativa da família e de amigos (e dos professores especialistas) é de grande importância para uma aprendizagem significativa.

E em relação às adaptações, de que forma um professor de Matemática deve trabalhar este campo do saber em sala de aula quando existem discentes com deficiência visual? Ora, analisando a expressão estudante com deficiência visual, excluindo-se deficiência visual fica estudante e, por conseguinte, têm direitos e deveres iguais aos demais. Logo, o docente pode trabalhar conforme planejou sua atividade. É claro, com adequações.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma relação entre conhecimentos algébricos, analíticos e geométricos que podem ser vivenciados tanto por discentes com deficiência visual incluídos em salas regulares (desde o ensino fundamental até a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com uma variável) quanto por discentes sem deficiência visual.

1.1 BREVE REVISÃO DA LITERATURA

Brandão (2010) trabalhou a formação de alguns conceitos geométricos com discentes cegos congênitos a partir de atividades de Orientação e Mobilidade (OM). Lira e Brandão (2013) fizeram novas observações com 60% do mesmo grupo, cerca de três anos depois, e, a partir dos resultados, ampliaram suas investigações com novos discentes (cegos congênitos).

Albuquerque (2020) usou estratégias de Lira e Brandão (2013) para adaptar conteúdos de Cálculo Diferencial com uma variável contemplando uma turma no curso de Oceanografia que incluía um discente com transtorno de espectro autista e, na mesma turma, havia discente com deficiência visual. Silva (2020) fez um estudo com duas pessoas com deficiência visual, em um curso de Engenharia Química, desta vez adaptando conteúdos de Cálculo Integral.

1.1.1 Deficiência Visual

É do tipo sensorial que abrange desde a cegueira total, em que não há percepção da luz, até a baixa visão (visão subnormal). Cegueira pode ser a perda total da visão e as pessoas acometidas dessa deficiência precisam se utilizar dos sentidos remanescentes

para aprender sobre o mundo que as cerca. Gil (2000) indica que a baixa visão é a incapacidade de enxergar com clareza, mas trata-se de uma pessoa que ainda possui, de alguma forma, sua capacidade visual, que, apesar do auxílio de óculos ou lupas, a visão se mostra baça, diminuída ou prejudicada de algum modo.

Vidente (ou boa visão) é aquela pessoa sem deficiência visual. Para que determinado material seja adaptado é interessante que o próprio sujeito com deficiência visual seja consultado pelo docente. Exemplificando: uma parábola, gráfico da função polinomial do segundo grau, pode ser comparada com uma tiara (ou gigolet). A partir deste objeto concreto, o geoplano pode ser utilizado (BRANDÃO, 2010).

Na ausência da visão, o uso do tato e da audição em maior escala que o uso do olfato e do paladar, caracteriza o desenvolvimento e a aprendizagem das crianças cegas (OCHAITA e ESPINOSA, 2004). As referidas autoras apresentam o sistema háptico ou tato ativo como o sistema sensorial mais importante para o conhecimento do mundo pela pessoa cega. Para essas autoras, é necessário diferenciar o tato passivo do tato ativo ou sistema háptico. Enquanto no primeiro a informação tátil é recebida de forma não intencional ou passiva, no tato ativo a informação é buscada de forma intencional pelo indivíduo que toca.

Orientação e Mobilidade (OM): “Orientação” é o processo de utilizar os sentidos remanescentes para estabelecer a própria posição e o relacionamento com outros objetos significativos no meio ambiente (BRASIL, 2002). Essa habilidade de compreender o ambiente é conquistada pelos deficientes visuais desde seu nascimento e vai evoluindo no decorrer de sua vida.

PERCURSO METODOLÓGICO DO MINICURSO

Este minicurso está programado para quatro horas (4h), a ser realizado, por conseguinte, em dois dias com duas horas por dia. Material que será utilizado será todo disponibilizado pelo ministrante. 30 vagas.

Público alvo são todos aqueles que trabalham com a inclusão de pessoas com deficiência visual em escolas regulares (ou instituições de Ensino Superior). Discentes de graduação (ou pós graduação) que desejarem saber formas de adaptação de conteúdos visando pessoas com e sem deficiência visual também podem ser contemplados neste minicurso.

2.1 PRIMEIRO DIA

2.1.1 Primeiro Momento

Com duração de aproximadamente 30 minutos. Visa caracterizar deficiência visual; Ou seja, participantes serão distribuídos em duplas (caso quantidade seja ímpar, uma pessoa fará dupla com ministrante). Receberão vendas (tecidos de algodão, que serão distribuídos individualmente para cada dupla). Inicialmente será vendada uma pessoa da dupla que caminhará na sala, com apoio e supervisão do outra pessoa da dupla, bem como manipulará e descreverá alguns objetos que serão distribuídos para dupla (após primeiro participante estar usando venda).

Dado que objetos serão distintos para participantes, quando a segundo pessoa da dupla for vendada, objetos serão permutados entre duplas (é claro, após higienização conforme protocolos de segurança, dos mesmos). Após identificação (satisfatória ou não dos objetos, bem como da locomoção guia dentro da sala), participantes descreverão sensações (dificuldades ou não durante locomoção, facilidades ou não na identificação de objetos).

Analisar percepção dos participantes. Tiveram dificuldades durante a caminhada (embora em ambiente fechado)? Identificaram objetos facilmente?

2.1.2 Segundo Momento

Com aproximadamente 30 minutos, objetiva a indicação de como é construído um tangram, Formando outras duplas, com efeito, saber dialogar com a pessoa que está vendada (simulando a deficiência visual) faz parte deste minicurso. Serão disponibilizados tangrans (tradicional de sete peças), um para cada participante. Um ficará usando venda enquanto o outro participante solicitará que (a pessoa que está vendada) forme algumas figuras (que serão distribuídas imagens em folhas de papel para os que estão como “videntes”).

Uma figura plana para cada sujeito. Descrever a figura para quem está vendado. Em seguida, tirar vendas e observar se figuras foram ou não satisfatórias. Trocar posição (ou seja, quem estava sem venda, agora usará). Novas imagens serão dadas (para evitar que a imagem previamente formada auxilie na construção com tangram).

A figura 1 abaixo descreve um pouco o que fora aqui indicado. Algumas imagens (retiradas da internet).

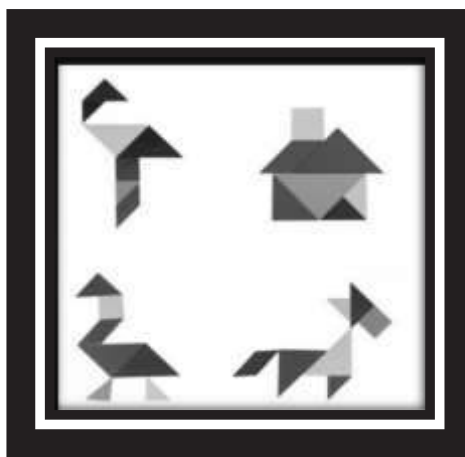


Figura 1: Exemplo de figuras com tangram.

Analisar percepção dos participantes. Tiveram dificuldades durante construção dos objetos? A pessoa que descreveu a imagem fez a descrição de maneira clara e concisa?

2.1.3 Terceiro Momento

Em aproximadamente 20 minutos. Participantes irão “explorar” o tangram (tradicional de sete peças). Novamente outra dupla será formada. Uma pessoa (vendada) receberá uma nova figura (que será descrita pela pessoa que não está usando vendas). Desta vez, trabalhar ideias de área e perímetro, tomando como unidade a medida do lado do triângulo pequeno. Inverter situação.

Após realização das atividades (que teve como pressuposto que participantes entenderam a construção do tangram, relação entre as figuras deste), cada participante indicará suas dificuldades, tanto explicando quanto interpretando a figura.

Um geoplano (de papelão e só com pontos, pois participantes o usarão sem vendas) será entregue para cada participante. Com base em algumas das figuras usadas, desenhará no geoplano. Calcular a área pela fórmula de Pick.

2.1.4 Quarto Momento

Em até 30 minutos para realização deste momento, serão formados grupos com até cinco pessoas, de modo a termos seis grupos (A, B, até F). Entregar material para confecção de um geoplano (material será disponibilizado pelo ministrante). Auxiliados pelo tangram, um grupo formará uma figura no geoplano e a descreverá para outro grupo (sem estar vendo a figura). Grupo A descreve sua figura para o grupo B, que tentará reproduzir no seu geoplano bem como indicando perímetro e área. Prazo: até três minutos. Idem do B para o C, do C para o D e assim por diante.

Objetivos desta atividade: usar uma linguagem concisa (grupo que está descrevendo sua figura) e isenta de erros de modo que o grupo que está ouvindo a descrição consiga construir a figura de maneira (quase) isenta de erros. Assim, este momento é útil para o saber expressar-se matematicamente.

2.1.5 Quinto Momento

Será destinado para participantes darem um feedback em relação às atividades realizadas. Indicar dificuldades, apresentar sugestões, etc.

2.2 SEGUNDO DIA

2.2.1 Primeiro Momento

Com previsão de cerca de 40 minutos, participantes usarão geoplano, farão gráficos (aproximados) de uma função polinomial do 1º grau, bem como uma função polinomial do segundo grau. Idem funções seno ou cosseno. Contextualizar a função (por exemplo, entre todos os retângulos de perímetro dado, por qual motivo o quadrado é o de maior área?).

Formar novos seis grupos, denominados “Grupo A” até “Grupo F”. Grupo A fará proposições para grupo B. B para C e assim sucessivamente. Explorar com participantes aquilo que é essencial para esboçar gráficos das referidas funções. A figura 2 fornece uma ilustração de um gráfico via geoplano.

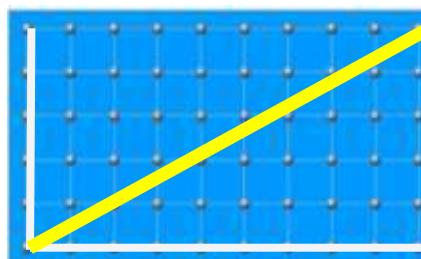


Figura 2: Esboço de gráfico em geoplano

Na figura 2, os eixos x e y estão indicados por barbantes (ou ligas) brancos. O barbante (ou liga) amarelo representa o esboço do gráfico da função $y = x/2$ (que pode ser contextualizado como “uma pessoa caminhando normalmente a cada passo se desloca 50 cm ou 0,5 m”...). Assim, participantes precisam indicar o que significa cada eixo.

2.2.2 Segundo Momento

Iniciaremos estudos contemplando assuntos do ensino superior. Duração de aproximadamente 30 minutos. Explorar o limite fundamental da trigonometria. Como adaptar para cegos? Inicialmente, recordar o significado de limite, etc. figuras de 3 a 5 indicam um passo a passo de como proceder para a dedução do referido limite.



Figura 3: Adaptação de círculo trigonométrico e eixos x e y

Figura 3 indica o passo inicial da adaptação: Material será disponibilizado pelo ministrante após instigar participantes a cerca da demonstração do limite fundamental da trigonometria. Usar, por exemplo, palitos de picolé para representar os eixos x e y no sistema de coordenadas cartesianas. Barbante amarelo para indicar as bordas.



Figura 4: Construção de ângulo

Na figura 4 foi inserido outro palito de picolé, a partir da origem do sistema de coordenadas cartesianas, para gerar o ângulo α . Ministrante continuará instigando participantes para saber o próximo passo na demonstração do referido teorema. Daí, para a construção da figura 5 os participantes precisarão recordar que ao gerar $\text{sen}\alpha/\alpha$ usarão o teorema do confronto.

Deverão ter em mente que será traçada uma reta tangente à circunferência, paralela ao eixo y (vide figura 5).



Figura 5: Traçando uma reta paralela ao eixo y, tangenciando figura

Traçar reta tangente para usar o teorema do confronto.

2.2.3 Terceiro Momento

Com duração de até 40 minutos, ministrante recordará, junto com participantes, situações problemas que envolvam problemas de otimização (bem como esboço de gráficos) e cálculo de áreas (por exemplo, em um M.R.U.V. no gráfico de velocidade x tempo, a área abaixo de $y = v(t)$, acima do eixo da abcissas – o tempo – e limitada lateralmente entre $t = a$ e $t = b$ equivale à função deslocamento). O que é preciso em cada contexto? A partir da “necessidade” gerar estratégias para adaptar.

Por exemplo, derivada de x^n pode ser atrelada aos casos de x^2 (usando quadrados e produtos notáveis, como $x^2 - a^2$) para entender a derivada neste caso. Idem para x^3 (usando cubos e produtos notáveis, no caso $x^3 - a^3$). Entender para estender como ficará fórmula com n natural. Argumentar para n inteiro e, em seguida, real (nem sempre serão possíveis adaptações, daí a necessidade de demonstrar usando material concreto em duas ou três dimensões).

As figuras de 6 a 8 indicam estratégias no caso de uma adaptação para o Teorema Fundamental do Cálculo.

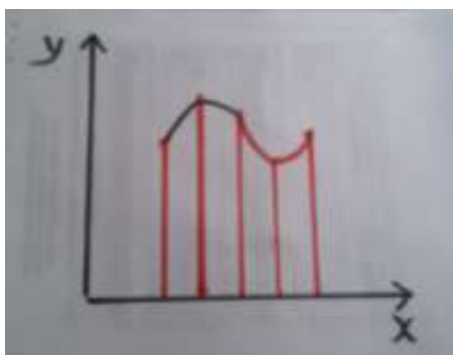


Figura 6: Desenho de uma região no primeiro quadrante

A figura 6 representa um desenho que será adaptado usando barbantes e palitos (de fósforo ou picolé) para indicar os contornos da região estudada.

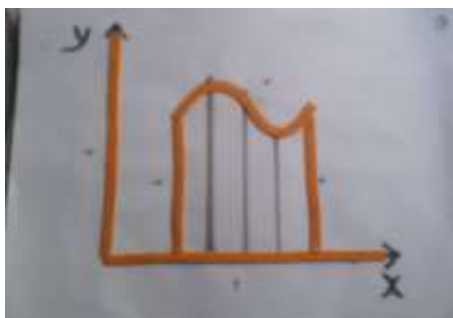


Figura 7: Inserindo barbantes nas bordas

A figura 7 ilustra uso de barbantes para indicar região (no caso, no primeiro quadrante), abaixo de $y = f(x)$ e limitada lateralmente entre $x = a$ e $x = b$.

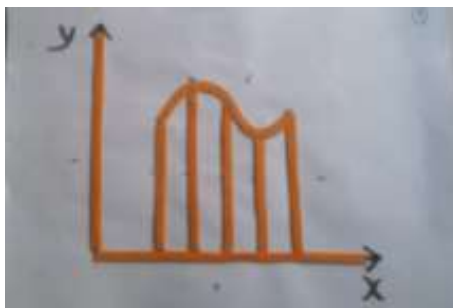


Figura 8: Fazendo partições dentro do intervalo $[a, b]$

Por fim, a figura 8 indica “partições”. Inicialmente partições de mesmo tamanho para recordar, junto aos participantes, uma progressão aritmética.

2.2.4 Quarto Momento

Usar restante do tempo do dia para esclarecer dúvidas gerais sobre os momentos vivenciados ao longo do minicurso e realizar auto-avaliação..

CONCLUSÕES

Espera-se que os participantes compreendam que a presença de um discente com deficiência visual (ou de discentes com dificuldades de aprendizagem em matemática, como discalculia) em sala regular seja motivo para revisão das metodologias de ensino e dos conhecimentos prévios. Ou seja, se, enquanto docente, baseio minha aula no aspecto visual, devo refletir se meus argumentos contemplam ou refutam as imagens utilizadas. Que tenham consciência que nem sempre será possível adaptar determinado assunto, daí a necessidade de saber se expressar de maneira clara e objetiva.

REFERÊNCIAS

- [1] ALBUQUERQUE, R. **Reflexões sobre o ensino de cálculo diferencial e integral para discente com transtorno do neurodesenvolvimento**. 174 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.
- [2] BARROS, A.; ROCHA, C. O uso do geoplano como material didático nas aulas de geometria. In: **VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. 2004, Recife. Anais... Recife, 2004. Disponível em <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC03069646433.pdf>> Acesso em: 30 dez. 2021.
- [3] BRANDÃO, J. **Vivenciando a matemática**. São Paulo: Scortecci, 2009.
- [4] _____. **Matemática e deficiência visual**. Fortaleza: EdUFC, 2010.
- [5] BRASIL. **Programa Nacional de apoio à educação de pessoas com deficiência visual: Orientação e Mobilidade** – Projeto Ir e Vir. Brasília: MEC/SEE, 2002.
- [6] CASCINO, Pasquale; COSTA, Antônio Carlos Gomes da; SAVIANI, Demerval. **Educador: novo milênio, novo perfil?** São Paulo: Paulus, 2000.
- [7] DIDEROT, D. **Carta sobre os cegos: para uso daqueles que veem**. São Paulo: Vega, 2007. GARDNER, M. **Divertimentos matemáticos**. São Paulo: Ibrasa, 1967.
- [8] GIL, M. **Secretaria de Educação a Distância, BRASIL MEC. Deficiência visual, 2000**.
- [9] LIRA, A.K.; BRANDÃO, J. **Matemática e deficiência visual**. Fortaleza: EdUFC, 2013.
- [10] OCHAÍTA, E.; ESPINOSA, M. A. Desenvolvimento e intervenção educativa nas crianças cegas ou deficientes visuais. In: Coll, C.; Marchesi, A.; Palacios, J. **Desenvolvimento psicológico e educação: transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais**. (2ª ed., vol. 3). Porto Alegre: Artmed, 2004.
- [11] SILVA, M. **Cálculo integral e deficiência visual: investigando os conceitos de volumes de cilindro e cone por meio da metodologia aprendizagem baseada em problemas (ABP)**. 196 f. Tese (Doutorado Acadêmico em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.



O CÁLCULO DAS TANGENTES A CURVAS NO SÉCULO XVII

JOÃO BOSCO PITOMBEIRA DE CARVALHO

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 Roberval

- 1.1 O método de Roberval com o emprego de velocidades instantâneas
 - 1.1.1 Roberval e a tangente à espiral de Arquimedes
 - 1.1.2 Roberval e a tangente à cicloide
 - 1.1.3 Roberval e a tangente à Quadratriz

2 Fermat

- 2.1 O método dos máximos e mínimos de Fermat
- 2.2 Um segundo método para achar máximos e mínimos
- 2.3 A tangente à parábola
- 2.4 A tangente à cicloide

3 Descartes

- 3.1 Introdução
 - 3.1.1 O primeiro tratamento das tangentes no *La Géométrie*
 - 3.1.2 O segundo método de Descartes
 - 3.1.3 Exemplos de aplicação do método de Descartes
- 3.2 Schooten e Hudde
- 3.3 A regra de Hudde
 - 3.3.1 Demonstração da regra de Hudde
 - 3.3.2 Exemplo de funcionamento da regra de Hudde
- 3.4 A regra de Hudde e a determinação de tangentes

Referências

PREFÁCIO

Os gregos sabiam determinar as tangentes de algumas curvas. Nos *Elementos* de Euclides, é demonstrado que a tangente a um círculo é perpendicular a seu raio que passa pelo ponto de tangência. Apolônio, em seu tratado sobre as cônicas, mostra como achar tangentes à elipse, hipérbole e parábola, respectivamente. Arquimedes mostrou como determinar tangentes à espiral. O que caracteriza todas essas determinações é que elas usavam propriedades específicas da curva estudada e métodos estritamente geométricos, sem a intervenção de processos infinitos.

Malgrado a qualidade de sua matemática, os árabes não avançaram nas investigações sobre tangentes a curvas. Foi necessário aguardar o século XVII para que fossem feitos progressos significativos sobre o assunto. Um estudo bem abrangente dos vários métodos concebidos pelos matemáticos daquela época para estudar as tangentes a curvas se encontra na monografia *A teoria das Tangentes antes da Invenção do Cálculo Diferencial* de Aníbal Scipione Gomes de Carvalho [4].

No final do século XVI e início do século XVII, dois problemas se destacavam na matemática: o cálculo das tangentes a curvas e o de suas “quadraturas”, isto é, a determinação da área de regiões planas limitadas por curvas. Um dos grandes feitos de Newton e de Leibniz foi perceber que estes dois problemas estão relacionados, o que já tinha sido feito por James Gregory (1638–1675) e Isaac Barrow (1630–1677), ambos em contexto geométrico, sem apresentarem algoritmos que tornassem seus resultados aplicáveis em geral.

Muitos matemáticos trataram dos dois problemas citados, e seria impossível aqui tentar mostrar todas suas contribuições. Como já dissemos, um estudo bem mais abrangente se encontra na monografia de Carvalho [4]. Para mostrar exemplos frutíferos de cálculo de tangentes, escolhemos três dos mais significativos: Gilles Personne de Roberval (1602–1675), Pierre de Fermat (1601–

1675) e René Descartes (1596–1650) os quais, além de trabalhar sobre outros problemas matemáticos, se dedicaram, a elaborar métodos para o cálculo de tangentes a curvas. Alguns dos métodos criados por eles eram bem específicos, funcionavam para uma curva; outros, introduziram novas ideias, como a de velocidade instantânea. Eles permitiram resolver boa parte dos problemas relativos às tangentes das curvas algébricas conhecidas na época, ou seja, aquelas representadas por funções algébricas $f(x, y) = 0$. Fermat, estende seu método a curvas transcendentais, conseguindo, assim, achar a tangente à cicloide e à conchoide de Nicomedes. Roberval conseguiu achar a tangente à cicloide e à quadratriz.

Em geral, os métodos desenvolvidos por esses matemáticos se tornavam mais e mais complicados à medida que os graus das equações das curvas aumentavam e usavam propriedades geométricas específicas das curvas consideradas. Todos tiveram destino comum: seriam abandonados após a formulação abrangente do cálculo por Isaac Newton (1646–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

Agradeço à FAPERJ que, por meio dos processos E26/010.101140/2018 e E26/010.001143/2019, permitiu a realização das pesquisas para a redação deste minicurso e minha participação nesta Bienal e a Patrícia Nunes da Silva que liberou o uso de sua análise de como Roberval determinou a tangente à quadratriz.

ROBERVAL

Algumas das tentativas bem sucedidas no século XVII para atacar problemas de tangentes foram feitas por Gilles Personne de Roberval em data incerta, entre 1630 e 1634. Como ele tinha que garantir sua posição no *Collège Royal* em Paris,¹ guardava ciosamente muitos de seus resultados matemáticos, o que originou inúmeras disputas sobre prioridade, particularmente com Descartes, que o detestava, no que era retribuído à altura.

1.1. O MÉTODO DE ROBERVAL COM O EMPREGO DE VELOCIDADES INSTANTÂNEAS

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) adotou uma perspectiva dinâmica no estudo das curvas e de suas tangentes. Ele considerava que uma curva é gerada pelo deslocamento de um ponto, e que, em cada ponto da curva, a tangente é a direção da velocidade instantânea do ponto móvel. Caso o vetor velocidade em um ponto possa ser decomposto em dois outros vetores velocidade mais simples, que possam ser determinados, então o problema está resolvido. Com este método, Roberval conseguiu determinar, corretamente, as tangentes a várias curvas estudadas em sua época. Ao tratar das cônicas, ele cometeu enganos, pois pensava que os movimentos geradores se afastavam dos focos ou do foco e diretriz, e usou incorretamente a regra do paralelogramo. Ele foi bem sucedido no caso da espiral, da cicloide e da quadratriz.

Roberval estabelece uma conexão explícita entre a reta tangente e a velocidade instantânea de um ponto que se desloca sobre a curva (Skinner, [13]). Ele aplicou seu método inovador às curvas de que ele era capaz de achar os

¹O *Collège Royal* é uma instituição de ensino e pesquisa francesa muito importante, fundada em 1530 pelo rei François I.

vetores componentes da tangente em um ponto, mas não conseguiu formular uma maneira geral que permitisse atacar com sucesso qualquer curva.

Mostremos primeiramente como ele foi bem sucedido no caso da espiral de Arquimedes.

1.1.1. ROBERVAL E A TANGENTE À ESPIRAL DE ARQUIMEDES

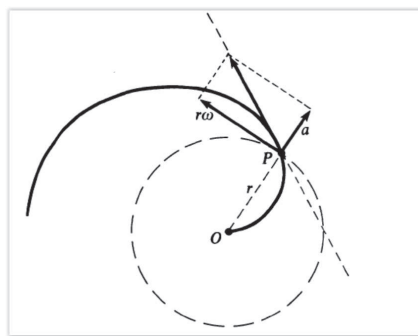


Figura 1.1: Roberval e a tangente à espiral

A espiral da Figura 1.1 tem equação polar $r = at$, $\theta = wt$. O movimento de um ponto $P(ar, wt)$ sobre a espiral pode ser decomposto em uma componente radial (se afastando da origem) e uma componente angular. A fim de achar a tangente à espiral no ponto P , temos o vetor velocidade radial, de módulo a e o vetor velocidade angular, de módulo rw , tangente ao círculo de raio r e que passa por P . A soma destes dois vetores é o vetor velocidade no ponto P , na direção da reta tangente à espiral, no ponto P .

1.1.2. ROBERVAL E A TANGENTE À CICLOIDE

A cicloide foi uma curva muito debatida e estudada no século XVII, época em que ela era denominada *trocoide* e deu origem a discussões acaloradas. Pelo que sabemos, o primeiro matemático a mencioná-la foi Charles de Bouvelles, em 1501, em suas tentativas para fazer a quadratura do círculo ([10]).

Em linguagem moderna, a cicloide pode ser descrita como segue. Seja um círculo de raio a que no instante $t = 0$ é tangente ao eixo dos x , na origem (Figura 1.2). O círculo rola ao longo do eixo com velocidade angular

constante de 1 radiano/seg. A cicloide é a trajetória do ponto P sobre o círculo inicialmente na origem e cujas coordenadas, no instante t são

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen } t) \\ y = a(1 - \text{cos } t) \end{cases}$$

Roberval percebeu que o movimento de um ponto P da cicloide é a composição de uma translação com movimento uniforme de velocidade a , ao longo do eixo dos x , e de um movimento circular uniforme com velocidade angular igual a 1, situado, no instante t , em (at, a) . Os vetores velocidade instantânea correspondentes são,

$$\begin{cases} \bar{u} = (a, 0) \\ \bar{w} = (-a \text{cos } t, \text{sen } t) \end{cases}$$

A soma desses dois vetores é

$$\bar{v} = (a(1 - \text{cos } t), a \text{sen } t),$$

a tangente à cicloide no ponto P .

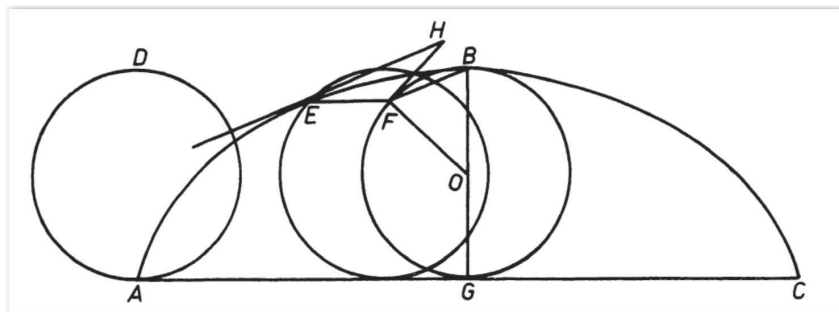


Figura 1.2: Roberval e a tangente à cicloide

Obviamente, Roberval não procedeu como acima. Sua solução está esboçada a seguir, no que seguimos Pedersen ([12], p. 23).

Na Figura 1.2, seja ABC a cicloide gerada pela circunferência AD . O movimento do ponto A , quando a circunferência gira, é a composição de um movimento retilíneo uniforme, na direção de AC e de uma rotação uniforme

em torno do centro da circunferência; a direção deste movimento no ponto E é tangente, por E , à circunferência, ou seja, a direção EH .

Como estes movimentos são uniformes, os espaços percorridos (no mesmo tempo) serão proporcionais às respectivas velocidades. A razão destes movimentos é igual à razão entre AC e o comprimento da circunferência. Assim, se o ponto H for definido por

$$EF : FH = AC : (\text{perímetro da circunferência}),$$

então EH será tangente à cicloide no ponto E . A razão do lado direito é igual à unidade, e Roberval demonstra, geometricamente, que EH é paralela a FB . Para construir efetivamente a tangente pelo ponto E da cicloide, Roberval traça EF , a velocidade ao longo de AC , em seguida a circunferência que passa por F e é tangente a AC , o diâmetro GB e obtém FB , o que lhe permite traçar EH .

Usando a mesma ideia de composição de movimentos, Roberval estuda, corretamente, um caso bem mais complicado, o da tangente à quadratriz. Vejamos como ele procedeu.

1.1.3. ROBERVAL E A TANGENTE À QUADRATRIZ

A quadratriz

Esta curva resolve dois dos problemas clássicos dos gregos: a quadratura do círculo e a trisseção. Para construí-la, suponhamos que no quadrado $ABCD$ o lado AD gira com movimento circular uniforme em torno de A até que coincide com o lado AB . Ao mesmo tempo, o lado DC desce com velocidade constante até coincidir com AB . Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, DC e AD coincidam com AB no mesmo instante.

A *quadratriz* é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis. É a curva DPZ da Figura 1.3. Ela foi inventada por Hípias de Elis (viveu em torno de 420 a.C.), originariamente em suas tentativas para trissectar o ângulo. Tudo indica que foi Dinóstrato (viveu em torno de 350 a.C.) quem pela primeira vez a usou para fazer a quadratura do círculo.

Seguiremos, nesta parte, exposição feita por Patrícia Nunes da Silva no seminário de história da matemática no Instituto de Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro em 2022.

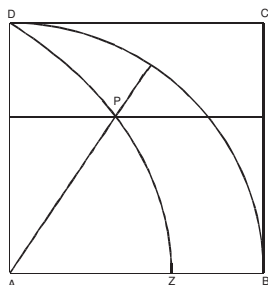


Figura 1.3: A quadratriz

Em primeiro lugar, a fim de seguirmos mais fielmente a apresentação de Roberval, mostraremos a quadratriz como ele o fez. Na Figura 1.4 ela é a curva DFG .

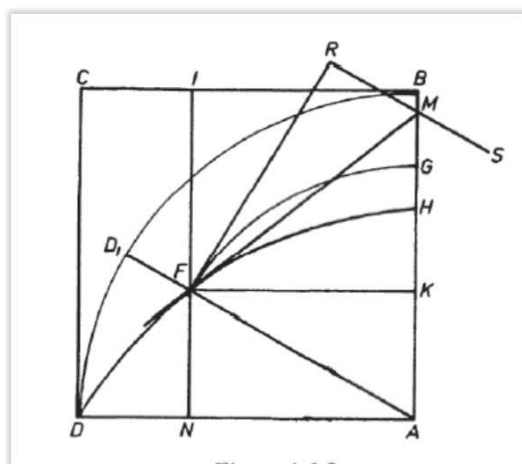


Figura 1.4: Roberval e a tangente à quadratriz-1

Como diz Pedersen [12], a argumentação de Roberval não é muito clara. Para torná-la mais compreensível, nós a traduziremos para o nosso simbolismo algébrico, com o cuidado de que ele corresponda às ideias de Roberval. Usaremos a interpretação feita por Patrícia Nunes da Silva.

Para simplificar a apresentação, suporemos que $AB = 1$ e que a rotação e a

translação alcançam o lado AB em uma unidade de tempo. Escolheremos D como origem do sistema de coordenadas.

Podemos então descrever, de duas maneiras, as duas composições de movimentos indicadas anteriormente, o de rotação e o de translação.

Primeira maneira – Quando o movimento do ponto F é dado pela composição da rotação de AF (curva $\gamma_1(t)$) e pelo deslocamento de F ao longo de AF (curva $\gamma_2(t)$). As parametrizações a seguir garantem a interseção que gera a quadratriz.

$$\gamma_1(t) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right)$$

$$\gamma_2(t) = \left(t - 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), (1-t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Assim, as respectivas velocidades são

$$\gamma_1'(t) = \left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

$$\gamma_2'(t) = \left(1 - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Devemos observar que $\gamma_1'(t)$ e $\gamma_2'(t)$ não são ortogonais.

A quadratriz $\gamma(t)$ é dada por²

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \left(t, (1-t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right), \quad t \in [0, 1].$$

Para $F = \gamma(t)$, $t \in [0, 1)$, a tangente à quadratriz é dada por

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) = \left(1, -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Roberval não dispõe de informações sobre o vetor $\gamma_2'(t)$. Para determinar a direção de $\gamma'(t)$ (tangente à diretriz em F , ele adota um sistema de unidades de

²Na parametrização adotada, o valor para $t = 1$ pode ser obtido por um processo de limite.

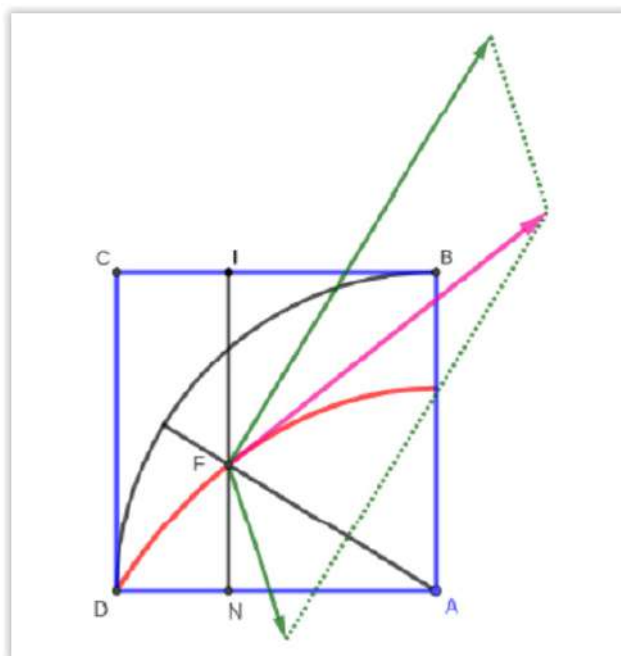


Figura 1.5: Roberval e a tangente à quadratriz-2

tal maneira que a velocidade de deslocamento de F coincida com a medida de FK . Isto permite que ele deduza a medida de FR (a velocidade do movimento circular de F). Observe que

$$\frac{NA}{FA} = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Para compreender que essa construção determina corretamente a direção de $\gamma'(t)$, consideremos uma segunda composição de movimentos (2).

Segunda maneira – Quando o movimento do ponto F é dado pela composição do movimento de IF (curva $\gamma_1(t)$) e pelo deslocamento ao longo de IF (curva $\gamma_2(t)$). Para garantir a interseção devemos ter

$$\gamma_1(t) = (t, 0)$$

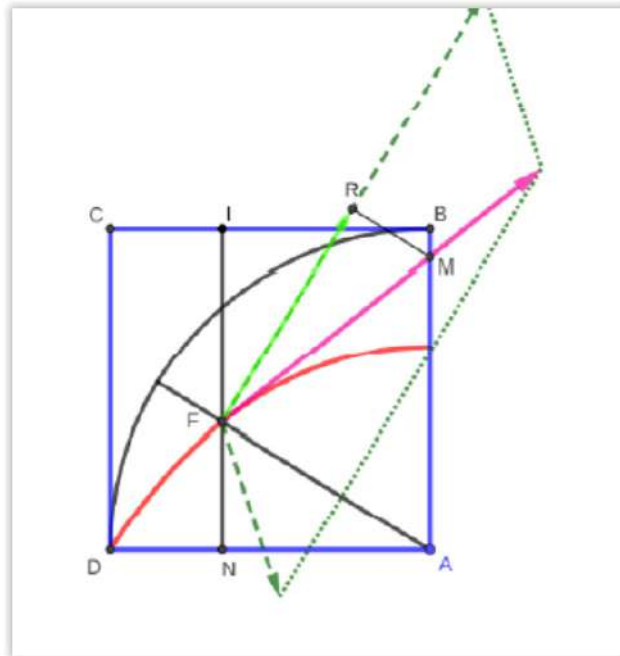


Figura 1.6: Roberval e a tangente à quadratriz-3

$$\gamma_2(t) = \left(0, (1-t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

e

$$\gamma_1'(t) = (1, 0)$$

$$\gamma_2'(t) = \left(0, -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)}{2} \sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Neste caso, $\gamma_1'(t)$ e $\gamma_2'(t)$ são realmente ortogonais.

A quadratriz $\gamma(t)$ é representada por

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \left(t, (1-t)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right), \quad t \in [0, 1).$$

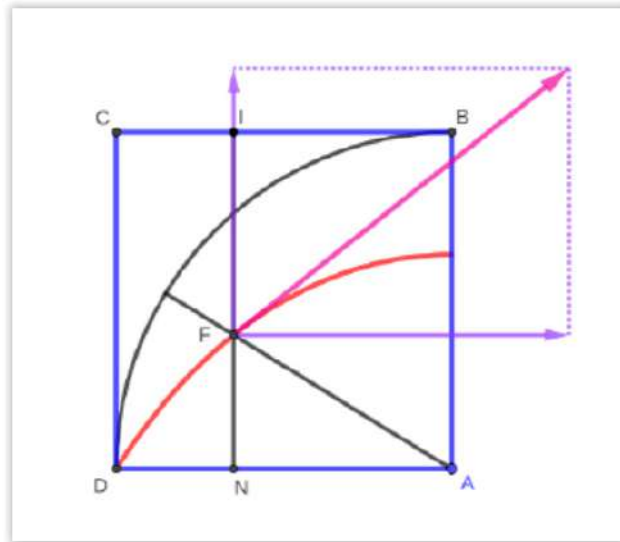


Figura 1.7: Roberval e a tangente à quadratriz-4

Para $F = \gamma(t)$, $t \in [0, 1)$, a tangente à quadratriz é dada por

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) = \left(1, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Procedamos como Roberval, escolhendo um sistema de unidades tal que a velocidade de deslocamento de F para a direita coincide com a medida de FK . Observe que a composição dos movimentos indicados em (©) permite a aplicação da regra do paralelogramo para determinar M' . Isso nos mostra que M' pertence obrigatoriamente à reta suporte de AB . Isso permite que Roberval, ao considerar o movimento (1) determinasse M como descrito anteriormente.

Mostraremos agora que $M = M'$. O vetor correspondente relativo ao deslocamento ao longo de IN satisfaz

$$\frac{FI'}{FK'} = \frac{-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{(1-t)\pi}{2} \sec^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{1}.$$

Como $FK = 1 - t$ obtemos

FERMAT

Pierre de Fermat (1601–1665) notabilizou-se por trabalhos em vários campos da matemática: foi um dos criadores da geometria analítica, fez importantes contribuições à teoria dos números, desenvolveu métodos para achar máximos e mínimos e para determinar as tangentes a curvas e resolveu problemas de quadratura.

Neste capítulo, veremos contribuições de Fermat à determinação de tangentes a curvas.

Para bem entender seu “método das tangentes” é importante começar por seu método de achar máximos e mínimos. É, portanto, o que faremos inicialmente.

2.1. O MÉTODO DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FERMAT

Fermat fundamenta seu método de máximos e mínimos da seguinte maneira ([3], pp. 124–126):

Toda a teoria do cálculo de máximos e de mínimos pressupõe duas quantidades desconhecidas e a seguinte regra:

Seja a qualquer incógnita do problema (que é de uma, duas, ou três dimensões, dependendo da formulação do problema). Indiquemos o máximo ou mínimo por a , em termos que podem ser de qualquer grau. Agora, substituiremos a incógnita original por $a + e$ e exprimamos assim a quantidade que se deseja maximizar ou minimizar em termos de a e de e , envolvendo algum grau. Usando

o termo de Diofanto, *adequaremos*¹ as duas expressões da quantidade a maximizar ou minimizar e eliminaremos seus termos comuns. Então, verifica-se que ambos os lados conterão termos em e ou potências de e . Dividiremos todos os termos por e , ou por uma potência de e , de maneira que e seja totalmente removido de pelo menos um dos termos. Após isso, suprimimos todos os termos em que e ou alguma de suas potências ainda comparecem, e igualaremos os outros; ou, se uma das expressões desaparece, igualaremos, o que é a mesma coisa, os termos negativos e positivos. A solução desta última equação fornecerá o valor de a , o que conduzirá a um máximo ou a um mínimo, usando novamente a expressão original.

Como exemplo, Fermat divide um segmento AC de tal maneira que $AE \times EC$ seja um máximo. Ele procede então da seguinte maneira.



Figura 2.1: Dividir AC de maneira que $AE \times EC$ seja máximo

Escrevamos $AC = b$ e seja a um dos segmentos, de maneira que o outro será $b - a$, e o produto, cujo máximo é procurado, será $ba - a^2$. Seja agora $a + e$ o primeiro segmento de b ; o segundo será $b - a - e$, e o produto dos segmentos será $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$; isso pode ser adequado² com o precedente:

$$ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \text{ adeq } ba - a^2.$$

Eliminando os termos comuns teremos

$$be \approx 2ae + e^2.$$

Eliminando e obtemos enfim $b = 2a$. Assim, para resolver o problema devemos tomar metade de b .

¹Introduzimos o neologismo adequalar para traduzir a palavra em latim usada por Fermat, baseada em Diofanto.

²No seguinte, denotaremos adequalar por “adeq”.

2.2. UM SEGUNDO MÉTODO PARA ACHAR MÁXIMOS E MÍNIMOS

Ao estudar o método de *sincriseos* e *anastrofe* de Viète, e seguir cuidadosamente suas aplicações ao estudo da natureza de equações correlacionadas, ocorreu-me deduzir um processo para achar máximos e mínimos e assim poder lidar facilmente com todas as condições limitadoras que têm causado tantos problemas aos geômetras antigos e modernos.

Máximos e mínimos são, com efeito, únicos e singulares, como disse Pappus e como os antigos já sabiam, embora Comandino afirmasse que não sabia o que o termo *singular* significa em Pappus. Segue-se disso que de um dos lados e do outro do ponto que constitui o limite pode-se tomar uma equação ambígua, e que as duas equações obtidas dessa maneira são respectivamente correlacionadas, iguais e semelhantes.

Por exemplo, seja proposto dividir a reta b de tal maneira que o produto dos segmentos seja máximo. O ponto que resolve este problema é evidentemente o ponto médio da reta, e o produto máximo é igual a $b^2/4$; nenhuma outra divisão dessa reta fornece um produto igual a $b^2/4$.

Mas se for proposto dividir a mesma reta b de tal maneira que o produto dos segmentos seja igual a z'' (supondo-se, além disso, que esta área seja menor do que $b^2/4$), haverá dois pontos que resolvem o problema, e observa-se que eles estarão situados, respectivamente, de um lado e do outro lado do ponto que corresponde ao produto máximo.

De fato, seja a um dos segmentos da reta b , teremos que $ba - a^2 = z''$; uma equação ambígua, pois pode-se tomar para o segmento a cada uma das duas raízes. Portanto, seja $be - e^2 = z''$ a equação correlacionada. Comparando as duas equações pelo método de Viète:

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Dividindo ambos os lados por $a - e$ obtém-se

$$b = a + e;$$

Além disso, os comprimentos de a e de e serão desiguais.

Se, em vez da área z'' , tomarmos outro valor maior, embora sempre menor do que $b^2/4$, os segmentos a e e diferirão menos do que acontecia com os ante-

riores, os pontos de divisão se aproximando do ponto que constitui o máximo do produto. Quanto mais o produto aumentar, mais, ao contrário, diminui a diferença entre a e e até que ela desaparecerá exatamente no ponto de divisão que corresponde ao produto máximo; neste caso, haverá somente uma única e singular solução, as duas quantidades a e e se tornando iguais.

Ora, o método de Viète aplicado às duas equações acima correlacionadas conduz à igualdade $b = a + e$, e portanto se $e = a$ (o que sempre acontecerá no ponto que constitui o máximo ou o mínimo) ter-se-á, no caso proposto, $b = 2a$, o que significa que se for escolhido o meio do segmento b , o produto dos segmentos será máximo.

Tomemos um outro exemplo: dividir o segmento b de tal maneira que o produto do quadrado de um dos segmentos pelo outro seja máximo.

Seja a um dos segmentos; deve-se ter que $ba^2 - a^3$ seja máximo. A equação igual e correlacionada é $be^2 - e^3$. Comparando as duas equações pelo método de Viète:

$$ba^2 - be^2 = a^3 - b^3;$$

dividindo ambos os lados por $a - e$ obtém-se

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

que fornece a forma das equações correlacionadas.

Para obter o máximo, faça $e = a$; obtém-se

$$2ba = 3a^2 \quad \text{ou} \quad 2b = 3a;$$

o problema está resolvido.

2.3. A TANGENTE À PARÁBOLA

Fermat deseja traçar a tangente à parábola no ponto B , ponto em que a perpendicular, BC , ao eixo da parábola corta a curva (Figura 2.2).

Seja K o ponto, não mostrado na Figura, em que a perpendicular ao eixo da parábola que passa por I corta a curva.

Pelas propriedades da parábola, temos que

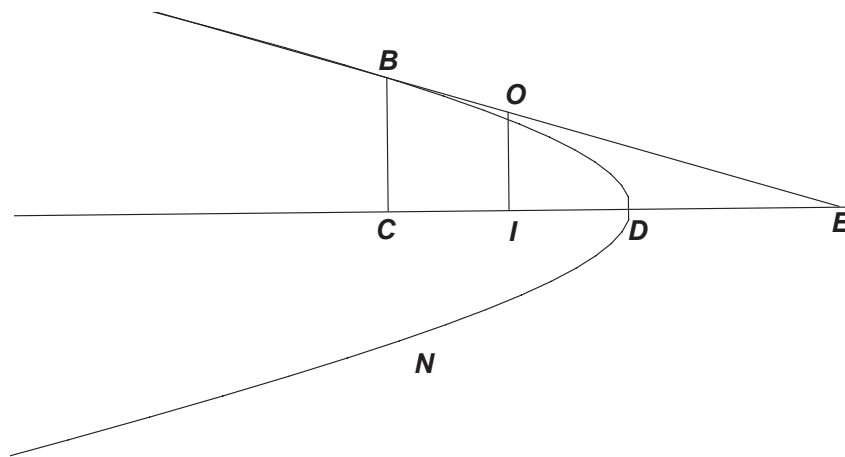


Figura 2.2: Fermat e a tangente à parábola

$$\frac{CD}{DI} = \frac{BC^2}{IK^2}.$$

Como $IO > IK$, segue-se que

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{IO^2}.$$

A semelhança dos triângulos BCE e OIE acarreta que

$$\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}. \quad (2.1)$$

De tudo isso decorre imediatamente que

$$\frac{CD}{DI} \Rightarrow \frac{CE^2}{IE^2}.$$

Fermat introduz a seguinte notação: $CD = d$, que é conhecido; $CE = a$ e $CI = e$.

Então (2.1) transforma-se em:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}.$$

Mas isso é equivalente a escrever

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Agora, Fermat usa seu processo de “adequalização”;³ ele afirma que se temos uma desigualdade válida para qualquer e , então, essa desigualdade se transforma em uma igualdade. Anacronicamente, podemos dizer que Fermat faz uma passagem ao limite para obter uma igualdade.

Em nosso caso, temos

$$da^2 + de^2 - 2dae \approx da^2 - a^2e \implies de^2 + a^2e \approx 2dae.$$

Dividindo por e obtemos

$$de + a^2 \approx 2da.$$

Disso, como e é arbitrário, Fermat obtém que

$$a^2 = 2da.$$

Fermat conclui seu texto afirmando que

Provamos assim que CE é igual ao dobro de CD , o que sabemos ser verdade.

2.4. A TANGENTE À CICLOIDE

Estudaremos como Fermat determinou a tangente a uma cicloide, em um ponto qualquer da curva. Para isso, é necessário, em primeiro lugar, lembrar que Fermat tinha um método geral para achar tangentes a curvas algébricas, o qual ele conseguiu adaptar para algumas curvas transcendentais, como a cicloide.

³Fermat

utilizou uma ideia da obra *Aritmética* de Diofanto, escrita no século III CE. Para Diofanto, este termo significa algo como “aproximadamente” igual. Assim, suporemos que este é o significado de *adequalização* para Fermat.

Para poder fazer esta adaptação, Fermat enunciou dois princípios⁴ afirmando que é permitido:

1 – Substituir as ordenadas das curvas pelas de suas tangentes já determinadas.

2 – Substituir os comprimentos de arco das curvas pelas respectivas partes das tangentes já determinadas.

Veremos como Fermat utiliza esses dois princípios para sua determinação da tangente à cicloide. O que faremos, a seguir, é detalhar a parte do texto da Kirsti Pedersen ([12], pp. 29, 30) que trata do assunto, pois sua leitura é difícil, devido à sua concisão. A Figura 2.3 será nosso guia.

Sejam HGC uma cicloide com vértice em C seu círculo gerador CMF , C seu ponto máximo e RB a tangente em um ponto arbitrário R . Façamos $CD = x$, $RD = f(x)$, $MD = g(x)$ e seja $a = DB$, o que procuramos determinar.

Além disso, faça $DE = e$, e trace NE paralela a RD , e seja N seu ponto de interseção com RB e O seu ponto de interseção com o círculo.

Todo o raciocínio de Fermat se baseia simplesmente na seguinte propriedade da cicloide:

$$f(x) = RM + MD = \text{arco } CM + g(x). \quad (2.2)$$

A única coisa que não é imediata é por que RM é igual ao arco CM . Para perceber isso, observe que quando o círculo gerador se desloca de sua posição inicial, em H , girando para a direita, até que H esteja em R , o círculo terá girado por um arco exatamente igual ao arco CM .

Pela semelhança dos triângulos RDA e NEA temos que

$$\frac{NE}{f(x)} = \frac{(a - e)}{a} \implies NE = \frac{f(x)(a - e)}{a}. \quad (2.3)$$

Então, usando o princípio (1) Fermat conclui que

$$NE \approx f(x - e), \quad (2.4)$$

com

⁴Fermat (Oeuvres 1, p. 162).

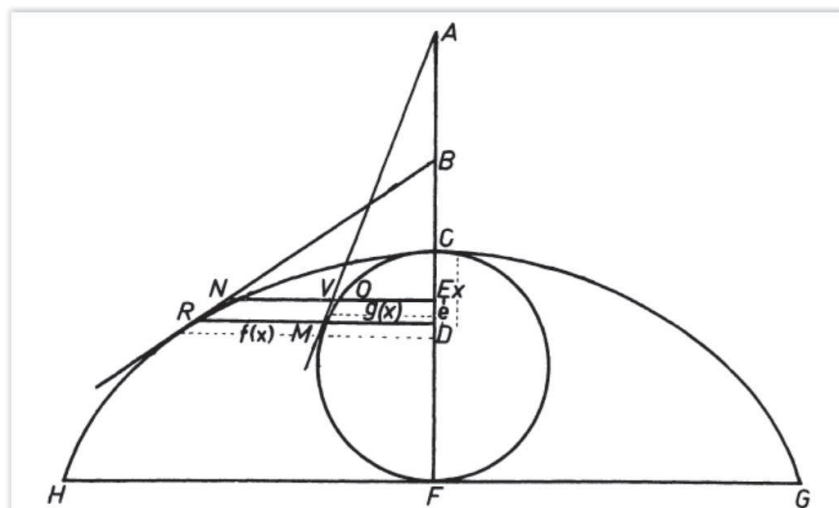


Figura 2.3: A cicloide

$$f(x - e) = \text{arco } CO + g(x - e) = \text{arco } CM - \text{arco } OM + g(x - e). \quad (2.5)$$

Sejam MA a tangente ao círculo V sua interseção com NE e $MA = d$, $AD = b$.

Pelo primeiro princípio Fermat obtém

$$g(x - e) \approx EV \approx \frac{g(x)(b - e)}{b}, \quad (2.6)$$

e do segundo

$$\text{arco } OM \approx MV = \frac{de}{b}. \quad (2.7)$$

Assim,

$$f(x - e) \approx \text{arco } CM - \frac{de}{b} + \frac{gx(b - e)}{b}, \quad (2.8)$$

Ora, 2.8 juntamente com 2.2 e 2.3, permitem escrever

$$\frac{\text{arco } CM + g(x)(a - e)}{a} \approx \text{arco } CM - \frac{de}{b} + \frac{f(x)(b - e)}{b}. \quad (2.9)$$

Assim, pelo processo de adequação,

$$\frac{\text{arco } CM + g(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b}. \quad (2.10)$$

Isso acarreta que

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b}. \quad (2.11)$$

Geometricamente, verifica-se que

$$\frac{d + g(x)}{b} = \frac{g(x)}{x}, \quad (2.12)$$

de maneira que a tangente por R é paralela a MC .

DESCARTES

3.1. INTRODUÇÃO

René Descartes (1596–1650) foi um filósofo, físico e matemático francês que influenciou profundamente a filosofia e a matemática.

Como afirmado por Carvalho [5],

O grande objetivo do trabalho de Descartes era provar que a investigação racional podia gerar conhecimento e seus trabalhos em matemática se destinavam, em parte, a mostrar como isso podia ser feito. Em verdade, para Descartes, a matemática era o paradigma da pesquisa racional [...] (Carvalho [5], p. 71).

Ele expôs seu método para garantir a obtenção de conhecimentos certos, indubitáveis, em seu livro *Discours de la Méthode*. Em um de seus apêndices, intitulado *La Géométrie (A Geometria)* ele mostra como fazer isso em matemática.

O *A Geometria* está dividido em três partes. É na segunda que Descartes ataca o problema de achar a tangente a uma curva. Sobre isso, ele afirma

Eis por que acreditaria ter posto aqui tudo o que se requer para os elementos das linhas curvas, quando, em geral, tiver dado a maneira de traçar as linhas retas que caem em ângulos retos, sobre os tais pontos que se quiser escolher. E ousou dizer que é este o problema o mais útil e o mais geral, não apenas o que eu saiba, mas ainda aquele que jamais desejei saber em geometria. (Descartes, ([6], p. 53)



Figura 3.1: O *Discours de la Méthode*.

A afirmação de Descartes mostra bem a importância que, na época, se dava à procura de tangentes a curvas e sua crença de que seu método era superior aos dos outros matemáticos. Vejamos como ele procedeu.

Neste capítulo, veremos como René Descartes atacou o problema de achar as tangentes de curvas planas.

3.1.1. O PRIMEIRO TRATAMENTO DAS TANGENTES NO *La Géométrie*

Descartes apresenta duas maneiras de achar tangentes em seu livro. A primeira é descrita a seguir

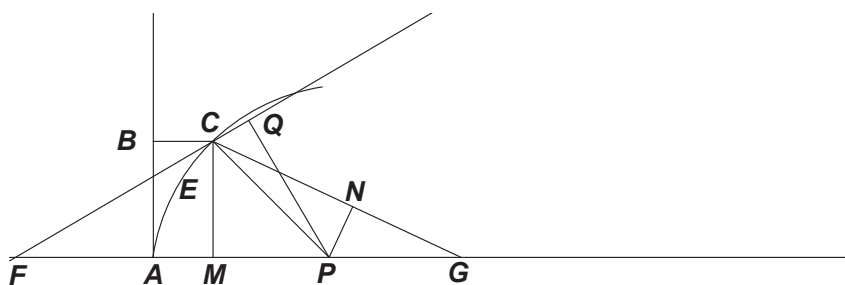


Figura 3.2: A determinação da tangente

Descartes procede da seguinte maneira (Veja a Figura 3.2).

Faça $MB = MA = y$ e $CM = BA = x$ e procuremos uma relação entre x e y . Agora, faça $PC = s$ e $PA = v$, ou $PM = v - y$. Como PMC é um triângulo retângulo temos que $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$. ([6], p. 54).

Assim,

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}.$$

Temos também que

$$y = v + \sqrt{s^2 - x^2}.$$

Pode-se eliminar x ou y nessas duas equações. Fazendo isso, como diz Descartes “resta sempre uma soma na qual não há mais que uma quantidade indeterminada, x ou y ”.

Descartes aplica imediatamente esse roteiro à elipse $x^2 = ry - \frac{t}{q}y^2$ ([6], p. 54).

Eliminando x^2 , obtemos

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

ou seja

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

Observe que, ao acharmos y , estamos obtendo o comprimento de um segmento, como mostrado na Figura 3.2.

3.1.2. O SEGUNDO MÉTODO DE DESCARTES

A segunda maneira apresentada por Descartes é a seguinte ([6], pp. 57-61).

Considere a curva OEC , da Figura 3.3, cuja tangente no ponto C desejamos determinar. Uma circunferência cujo centro esteja sobre o eixo OX e que passe pelo ponto C , em geral intercepta a curva OEC em dois pontos, C e E . Há somente uma exceção, mostrada na Figura 3.4, quando o centro $P = (h, 0)$ da circunferência se encontra exatamente sobre a normal à curva OEC , pelo ponto C . Neste caso, a circunferência é tangente à curva.

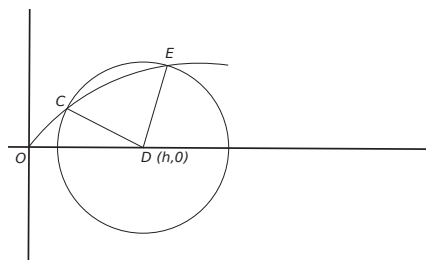


Figura 3.3: Construção de Descartes para achar a tangente a uma curva

Se conseguirmos determinar as coordenadas do ponto P , ou seja, determinar h , é fácil achar a tangente à curva, por C , pois ela será perpendicular à normal pelo mesmo ponto.

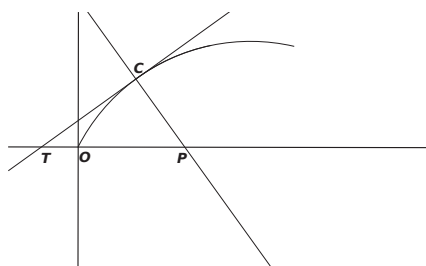


Figura 3.4: A determinação da tangente

Este método de Descartes, exposto no *La Géométrie* é extremamente elegante. Em princípio, ele funciona para curvas descritas por equações algébricas $f(x, y) = 0$. No entanto, rapidamente ele se torna tecnicamente complicado, como será visto na próxima seção.

Vejamos um exemplo mais simples do emprego do segundo método de Descartes.

3.1.3. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DESCARTES

Determinemos o ponto P no caso em que a equação da curva OCE é $y = \sqrt{x}$. Sejam (a^2, a) as coordenadas do ponto C , r o raio da circunferência, e $(h, 0)$ as coordenadas do ponto P . Então, a equação da circunferência é

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0.$$

Os pontos de interseção da curva com a circunferência são determinados resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Eliminando y , obtemos a equação do segundo grau

$$x^2 + (1 - 2h)x + (h^2 - r^2) = 0$$

Em geral, esta equação tem duas soluções para x . Sabemos que a circunferência e a curva se cortam no ponto (a^2, a) , ou seja, $x = a^2$ é uma das raízes da equação. Para ela ser a **única** raiz, é necessário e suficiente que $x = a^2$ seja uma raiz dupla. A fim de que isto aconteça, devemos ter

$$x^2 + (1 - 2h)x + (h^2 - r^2) = (x - a)^2.$$

Desenvolvendo o lado direito e comparando os coeficientes, teremos

$$1 - 2h = -2a^2 \rightarrow h = a^2 + \frac{1}{2}$$

Assim, a circunferência de centro $(x = a^2 + \frac{1}{2}, 0)$ será tangente ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ no ponto (a^2, a) .

Se tentarmos aplicar o método de Descartes para encontrar a tangente à curva de equação $y = x^3$, e que passa pelo ponto de coordenadas (a, a^3) , vemos que a situação se torna tecnicamente enfadonha e longa, embora não apresente dificuldades conceituais.

Com efeito, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

Assim, temos que

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0.$$

Se quisermos achar a tangente que passa pelo ponto (a, a^3) , esta equação deverá ter uma raiz dupla para $x = a$.

Assim, podemos escrever

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = (x - a)^2(x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F).$$

Desenvolvendo o lado direito obtemos

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = x^6 + (B - 2a)x^5 + (a^2 - 2aB + C)x^4$$

$$+(a^2B - 2aC + D)x^3 + (a^2C - 2aD + F)x^2 + (a^2D - 2aF)x + a^2F.$$

Comparando os coeficientes, obtemos o sistema

$$(B - 2a) = 0 \tag{3.1}$$

$$(a^2 - 2aB + C) = 0 \tag{3.2}$$

$$(Ba^2 - 2aC + D) = 0 \tag{3.3}$$

$$(Ca^2 - 2aD + F) = 1 \tag{3.4}$$

$$(Da^2 - 2aF) = -2h \tag{3.5}$$

$$a^2F = h^2 - r^2 \tag{3.6}$$

Com a Equação (3.1) obtemos

$$B = 2a. \tag{3.7}$$

Usando (3.2) e (3.7) temos

$$a^2 - 2a(2a) + C = 0 \rightarrow C = 3a^2. \quad (3.8)$$

Utilizando estes valores de B e C em (3.3) obtemos

$$a^2(2a) - 2a(3a^2) + D = 0 \quad (3.9)$$

o que acarreta

$$D = 4a^3. \quad (3.10)$$

Usando todos estes valores em (3.4) obtemos

$$a^2(3a^2) - 2a(4a^3) + F = 1 \rightarrow F = 1 + 5a^2$$

Enfim, por meio de (3.5) chegamos a

$$a^2(4a^3) - 2a(1 + 5a^4) = -2h \rightarrow h = a + 3a^5,$$

ou seja, as coordenadas do centro do círculo tangente são $(a + 3a^5, 0)$.

Estes valores nos permitem escrever

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = (x - a)^2(x^4 + 2ax^3 + 3a^2x^2 + 4a^3x + 1 + 5a^4).$$

Você observa que os cálculos realmente podem se tornar complicados. Como diminuir o trabalho envolvido na aplicação do método de Descartes para achar tangentes a curvas? É o que veremos a seguir.

3.2. SCHOOTEN E HUDDE

As dificuldades técnicas que surgem na utilização do método de Descartes diminuem bastante se usarmos a chamada “regra de Hudde”, devida ao matemático holandês Hudde, que participou ativamente do círculo de matemáticos reunidos em torno de van Schooten.

Frans van Schooten (1615-1660) foi um matemático competente, lembrado principalmente por ter contribuído fortemente para a difusão das ideias matemáticas de Descartes. Ele foi professor de matemática na Universidade de

Leiden e dentre seus alunos contam-se Christiaan Huygens, Johann van Waveren Hudde e René de Sluze (Hofmann 1981). Já em 1649 publicou uma tradução do *La Géométrie* para o latim, a língua culta da Europa, na época. Com ajuda de seus colegas matemáticos aumentou aos poucos essa tradução, adicionando-lhe apêndices visando a completá-la e a torná-la mais compreensível. Assim, como o latim era a língua dos cientistas da época, as ideias de Descartes puderam se difundir mais facilmente por toda a Europa. A edição do *La Géométrie* em dois volumes, de 1659 e 1661 respectivamente, contém apêndices de Jan de Witt, Johann Hudde e Hendrick van Heuraet. Foi esta a edição que Isaac Newton comprou e leu.

Jan (ou Johann) Hudde (1628 – 1704) formou-se em Direito, e seu envolvimento com a matemática provavelmente se encerra em 1663, data após a qual não se conhece em suas atividades nada relacionado à matemática, tendo ele se dedicado a partir daí à política, chegando a ser prefeito de Amsterdam. Em 1657 ele se correspondeu com Sluze, Huygens e Schooten sobre quadraturas, tangentes e centros de gravidade de curvas algébricas (Haas 1981). Haas considera Hudde o mais brilhante dos alunos de Schooten, tendo sido elogiado por Leibniz, que, em 1697, escreveu que somente se poderia esperar uma solução do problema da Braquistócrona por Newton, L'Hospital, os Bernoullis e Hudde caso este último “não tivesse abandonado tais pesquisas há muito tempo” (Haas 1981).

3.3. A REGRA DE HUDDE

No apêndice, em forma de carta, à edição citada de van Schooten, Hudde afirmou que

Se em uma equação duas de suas raízes são iguais, e ela for multiplicada por uma progressão aritmética arbitrária, obviamente o primeiro termo da equação pelo primeiro termo da progressão, o segundo termo da equação pelo segundo termo da progressão e assim sucessivamente, afirmo que o produto será uma equação em que uma das acima mencionadas raízes se encontrará.

Em outras palavras, suponha que os números $p + qi$ estão em progressão aritmética, para $i = 0, 1, \dots, n - 2$. Então, o polinômio

$$F(x) = \sum_i a_i x^i$$

tem uma raiz dupla no ponto e se e somente se o polinômio

$$F^*(x) = \sum_i a_i (p + qi)x^i$$

tem uma raiz simples em e .

Hudde dá uma demonstração para um polinômio de grau 5, mas que funciona para qualquer grau, como veremos.

3.3.1. DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE HUDDE

Demonstremos agora a regra de Hudde.

Suponha que e é uma raiz dupla do polinômio $f(x) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - e)^2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-2} x^{n-2}) \\ &= (x - e)^2 \left(\sum_{k=0}^{k=n-2} c_k x^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n-2} c_k (x^{k+2} - 2ex^{k+1} + e^2 x^k). \end{aligned}$$

Se esta equação for multiplicada termo a termo por uma progressão aritmética $p + qi$, na qual p e q são números inteiros, e $i = 0, 1, 2, \dots, n - 2$, obtemos o polinômio

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{k=(n-2)} c_k \{ (p + q(k + 2)) x^{k+2} - 2e((p + q(k + 1)) x^{k+1} + e^2(p + qk)) \} \\ &= \sum_{k=0}^{k=(n-2)} c_k (p + qk)(x^2 - 2ex + e^2) + \sum_{k=0}^{k=(n-2)} c_k 2q(x^{k+2} - ebx^{k+1}) \end{aligned}$$

$$= (x - e)^2 \sum_{k=0}^{(n-2)} (p + qk) x^k + 2q(x - e) \sum_{k=0}^{(n-2)} c_k x^{k+1}$$

e vemos obviamente que e é uma raiz de $g(x)$.

Uma demonstração moderna da regra de Hudde seria a seguinte.

É fácil ver que

$$g(x) = pf(x) + qf'(x).$$

Se $f(x) = (x - a)^2 h(x)$,
temos

$$f'(x) = 2(x - a)h(x) + (x - a)^2 h'(x).$$

Assim, se a é uma raiz dupla de $f(x)$, então a é também uma raiz de $f'(x)$ e reciprocamente.

Um exemplo tornará claro o funcionamento da regra.

3.3.2. EXEMPLO DE FUNCIONAMENTO DA REGRA DE HUDDE

Considere o polinômio¹

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

e a progressão aritmética 3, 2, 1, 0.

Disponhamos o procedimento como segue

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -4x^2 \quad +5x \quad -2 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 3x^3 \quad -8x^2 \quad +5x \end{array}$$

Então, a regra de Hudde afirma que e é raiz dupla de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ se e somente se $3x^3 - 8x^2 + 5x$ tem a raiz e .

Ora, como é fácil verificar

¹Vê-se facilmente que este polinômio pode ser fatorado como $(x - 2)(x - 1)^2$.

$$3x^3 - 8x^2 + 5x = x(x - 1)(3x - 5).$$

E vemos assim que $x = 1$ é raiz simples de $3x^3 - 8x^2 + 5x = 0$ e dupla de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

Mas, como isso ajuda a resolver o problema de determinar a tangente a uma curva? É o que veremos na próxima seção.

3.4. A REGRA DE HUDDE E A DETERMINAÇÃO DE TANGENTES

O que esta regra tem a ver com o problema de facilitar os cálculos na utilização do método de Descartes para a determinação das tangentes às curvas? Isto acontece porque a escolha judiciosa da progressão aritmética permite reduzir consideravelmente os cálculos envolvidos.

Relembremos o que foi feito na seção 4 para achar a tangente a $y = x^3$, quando chegamos à equação

$$x^6 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0,$$

com a qual temos que determinar h e r .

Usemos o método de Hudde para determinar suas raízes múltiplas. Para tal, escolhamos a progressão aritmética 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 e disponhamos o procedimento da seguinte maneira

$$\begin{array}{cccccccc} x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +x^2 & -2hx & +h^2 - r^2 & \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 6x^6 & +0^5 & +0x^4 & +0x^3 & 2x^2 & -2hx & 0 & \end{array}$$

Desta maneira, obtivemos, com a aplicação da regra de Hudde, o polinômio

$$6x^6 + 2x^2 - 2hx = 0,$$

que nos permite facilmente calcular o valor de h :

$$h = \frac{6x^5 + 2x}{2}.$$

Como estamos procurando determinar a tangente no ponto (a, a^3) , chegamos a

$$h = \frac{6a^5 + 2a}{2} = 3a^5 + a,$$

resultado que coincide com o que obtivemos anteriormente e vemos que nosso trabalho foi muito facilitado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARBOSA, Bruna F. *A Geometria de René Descartes*. 2ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2017.
- [2] BARBIN, Evelyne. *La Révolution Mathématique au XVII Siècle*. Paris: Ellipses, 2006.
- [3] BESSOT, Didier et al.. *Aux Origines du Calcul Infinitésimal*. Paris: Ellipses, 1999.
- [4] CARVALHO, Aníbal Scipião Gomes de. *A teoria das Tangentes antes da Invenção do Cálculo Diferencial*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1919.
- [5] CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Descartes e o Problema de Pappus. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, vol 7, pp. 71-81, 2020.
- [6] DESCARTES, René. *A Geometria* (tradução e comentários por Bruna F. Barbosa, Clediane M. da Silva, Filipe B. Brant e Raquel A. Sapunaru). 2ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2017.
- [7] *Pierre de Fermat: Oeuvres*, P. Tannery, C. Henry (eds) Paris, 1891-1922, I, pp. 133-135; tr. D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800, Harvard University Press, 1969, pp. 223-224.)
- [8] HAAS, Karl Heinz. Jan Hudde. Charles Coulston Gillispie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 6, pp. 536-538. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

- [9] HOFMANN, J. E.. Frans van Schooten. Charles Coulston Gillispie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 12, pp. 205-207. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.
- [10] MARTIN, John. The Helen of Geometry. *The College Mathematics Journal* 41(1), pp. 17-28. 2010.
- [11] PARADÍS, Jaume; PLA, Josep; PELEGRI, Viader. Fermat's method of quadrature. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14(1), pp. 5-51, 2008.
- [12] PEDERSEN, K. Møller. Techniques of the calculus, 1630-1660. In Grattan-Guinness (ed.). *From the Calculus to Set Theory*, pp. 10-48. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1980.
- [13] SKINNER, Lindsay, *The World Before Calculus: Historical Approaches to the Tangent Line Problem* Western Washington University Honors Program Senior Projects. 13. (2015).
- [14] WIELEITNER, Heinrich. Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 38, pp. 24-35, 1929.



NÚMEROS COMBINATÓRIOS

CARLOS A. GOMES E IESUS C. DINIZ

20/06/2021 A 24/06/2021

SUMÁRIO

Prefácio

1 Números Binomiais

- 1.1 Introdução
- 1.2 Coeficientes Multinomiais e o Polinômio de Leibniz
- 1.3 Exemplos

2 Números de Catalan

- 2.1 Introdução
- 2.2 Exemplos

3 Números de Stirling

- 3.1 Introdução
- 3.2 Números de Stirling Tipo I
 - 3.2.1 Exemplos
- 3.3 Números de Stirling Tipo II
 - 3.3.1 Exemplos

4 Problemas de distribuição

- 4.1 Introdução
- 4.2 Bolas e urnas distinguíveis
- 4.3 Bolas idênticas e urnas distinguíveis
- 4.4 Bolas distinguíveis e urnas idênticas
- 4.5 Bolas idênticas em urnas idênticas

5 Problemas Propostos

5.1 Introdução

Referências

PREFÁCIO

Neste minicurso introduziremos diversos tipos de *Números Combinatórios* (números binomiais, números binomiais generalizados, números de Catalan, números de Stirling de primeira e segunda espécie, números de Bell, entre outros) a partir da teoria, exemplos e exercícios do capítulo de Números Combinatórios do livro [1]. Esses números serão introduzidos a partir de problemas de contagem que são simples de enunciar, mas que nem sempre são tão simples de responder e ao mesmo tempo estimulantes, a ponto de que em alguns momentos visitarmos a fronteira do assunto enunciando com alguns problemas em aberto e de simples compreensão para o público geral. Além disso, demonstraremos diversas propriedades e curiosas relações entre esses tipos de números além de aplicações muito interessantes e relevantes tais como o problema de distribuição de bolas em urnas e a sua relação com a partição de um inteiro positivo, temas que em geral não são apresentados num primeiro curso de combinatória típico de uma graduação em Matemática nas nossas universidades.

Belém, junho de 2021

Carlos Alexandre Gomes
Iesus Carvalho Diniz

NÚMEROS BINOMIAIS

1.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos os chamados **Números Binomiais** que levam esse nome por aparecerem como coeficientes do Binômio de Newton. Esses números também estão intimamente relacionados com o problema de determinar a quantidade de subconjuntos de um conjunto finito, o que os conecta com uma incrível diversidade de problemas de contagem. Daremos uma atenção especial ao chamado **Binomial médio**, um Número Binomial que está intimamente relacionado com os **Números de Catalan**, que são soluções de interessantíssimos problemas de combinatória que serão detalhadamente analisados ao longo do capítulo. Não poderíamos deixar de fora o **Triângulo de Pascal** e suas diversas propriedades e belas relações, como por exemplo com os números de Fibonacci e o número de Euler. Por fim, também abordaremos os chamados **Coeficientes Multinomiais** e suas principais propriedades. Ao final apresentaremos uma gama de interessantes problemas relacionados com o tema assim como as suas respectivas soluções.

Definição 1.1 (Números Binomiais). Sejam n e k inteiros não negativos. Chamamos *números binomiais* ou *coeficientes binomiais* aos números representados por

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & \text{se } n \geq k > 0; \\ 1 & \text{se } k = 0; \\ 0 & \text{se } n < k. \end{cases}$$

Definição 1.2 (Triângulo de Pascal). O quadro abaixo formado pelos números binomiais com a contagem das linhas e colunas a partir do zero em que $\binom{n}{k}$ é um elemento da linha n e coluna k .

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Definição 1.3 (Binômio de Newton). É o polinômio resultante da expansão de $(x + y)^n$ em que $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Considere o desenvolvimento de $(1 + \alpha)^n$ para $n = 0, \dots, 5$. Tem-se que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \alpha)^1 \\ (1 + \alpha)^2 \\ (1 + \alpha)^3 \\ (1 + \alpha)^4 \\ (1 + \alpha)^5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Pascal}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \end{pmatrix}$$

Enumerando as linhas e as colunas da matriz acima a partir do 0, o elemento que aparece na quarta linha e na segunda coluna é $\binom{4}{2} = 6$, o que figura na quinta linha e terceira coluna é $\binom{5}{3} = 10$ e, conforme veremos no decorrer do

capítulo, para qualquer k e $n \in \mathbb{N}$ o elemento que aparece na linha n e coluna k é o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$.

Observação 1.4. Na sequência do capítulo serão apresentadas generalizações das definições 1.1 e 1.3 para, respectivamente, números binomiais e expansões binomiais da forma $\binom{r}{k}$ e $(a + b)^r$ em que $r \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Segundo Stillwell [14], alguns resultados importantes da *teoria dos números* foram descobertos na Idade Média, mas não conseguiram firmar raízes até serem redescobertos a partir do século *XVII*. Dentre esses resultados está o Triângulo de Pascal, redescoberto por matemáticos chineses e utilizado como meio de gerar coeficientes binomiais, isto é, os coeficientes que aparecem nas fórmulas $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, e assim por diante. Outros resultados importantes descobertos na Idade Média e redescobertos posteriormente por Levi Ben Gershon (1321) foram as fórmulas para permutações e combinações.

Os chineses usavam o Triângulo de Pascal como meio de gerar coeficientes binomiais, isto é, os coeficientes que aparecem nas fórmulas

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

e assim por diante, e o tabelavam como segue:

			1					→ coeficientes de $(a + b)^0$
			1	1				→ coeficientes de $(a + b)^1$
		1	2	1				→ coeficientes de $(a + b)^2$
	1	3	3	1				→ coeficientes de $(a + b)^3$
	1	4	6	4	1			→ coeficientes de $(a + b)^4$
	1	5	10	10	5	1		→ coeficientes de $(a + b)^5$
1	6	15	20	15	6	1		→ coeficientes de $(a + b)^6$

Nessa figura, as duas linhas extras adicionadas no topo correspondem aos coeficientes das potências 0 e 1 de $(a + b)$. O triângulo aparece com seis linhas em Yáng Hui (1261) e com oito em Zhú Shìjié (1303). Yáng Hui atribui o

triângulo a Jia Xiàn, que viveu no século XI. Baseados nesses resultados, por que chamamos a tabela dos coeficientes binomiais de Triângulo de Pascal? Claro que não é o único exemplo de um conceito matemático que foi nomeado depois da redescoberta ao invés de depois da descoberta, mas de qualquer forma Pascal merece mais crédito do que apenas por ter redescoberto tal conceito. No seu "Traité du Triangle Arithmétique" (1654), Pascal unificou as teorias Aritmética e Combinatória mostrando que os elementos do triângulo aritmético podiam ser interpretados de duas maneiras: como os coeficientes de $a^k b^{n-k}$ em $(a + b)^n$ e como o número de combinações de n coisas tomadas k a k . De fato, ele mostrou que $(a + b)^n$ é a *função geradora* para os coeficientes binomiais. Pascal juntamente com Fermat desenvolveram muitos estudos em problemas de probabilidade.

Uma das teorias de como surgiu o Triângulo de Pascal é que à época em que Pitágoras viveu, eram atribuídos aos números e às figuras, qualidades; por exemplo, o número 1 era considerado a fonte de todos os outros números e a esfera era considerada a figura mais perfeita. Em particular, o triângulo retângulo possuía toda uma mística em torno dele. Existiam até os chamados *números triangulares*, em que o n -ésimo número triangular poderia ser visto como o número de pontos de uma forma triangular com lado formado por n pontos, o que equivale à soma dos n primeiros números naturais, sendo definido por $T_n = \sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$.

Já que existia uma adoração, digamos até religiosa, aos números triangulares e ao triângulo na sociedade pitagórica secreta, é natural que se tentasse conseguir um símbolo que representasse toda a essência de sua crença. A idéia é começar com um triângulo formado apenas com o número fonte de todos os números e ir montando triângulos formados a partir dos resultados obtidos das somas das linhas dos triângulos já conseguidos. Ilustramos esse procedimento a seguir.

Triângulo inicial:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 = 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 = 2 \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 = 3 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 = 4 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 = 5 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 = 6 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 = 7
 \end{array}$$

A partir desse triângulo, montaremos outro, cujas colunas sejam iguais aos resultados das somas obtidas no triângulo anterior:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 = 1 \\
 & & & & & & 1 & 2 = 3 \\
 & & & & & 1 & 2 & 3 = 6 \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 = 10 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 = 15 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 = 21 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & = 28
 \end{array}$$

Observemos o que está acontecendo: com o primeiro triângulo, conseguimos os números naturais, com o segundo, os números triangulares. Isso pode ter sido considerado um aviso para que eles continuassem e, assim, conseguissem o que foi chamado de números triangulares de segunda, terceira, quarta,... ordens.

Números triangulares de segunda ordem:

						1	=	1
					1	3	=	4
			1	3	6	10	=	20
		1	3	6	10	15	=	35
	1	3	6	10	15	21	=	56
1	3	6	10	15	21	28	=	84

Números triangulares de terceira ordem:

							1	=	1
						1	4	=	5
			1	4	10	20	=	35	
		1	4	10	20	35	=	70	
	1	4	10	20	35	56	=	126	
1	4	10	20	35	56	84	=	210	

Números triangulares de quarta ordem:

							1	=	1
						1	5	=	6
			1	5	15	35	=	21	
		1	5	15	35	70	=	126	
	1	5	15	35	70	126	=	378	

Continuando dessa forma, eles estariam com a coleção dos números triangulares de qualquer ordem e, para finalizar, se montarmos um triângulo com esses números tão preciosos, obteremos:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

que são as oito primeiras linhas e colunas do Triângulo de Pascal, apenas numa forma diferente. Se observarmos mais detalhadamente, poderemos reescrever o triângulo anterior na forma como ele é mais conhecido:

$\binom{0}{0}$							
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$

A seguir apresentamos algumas propriedades do Triângulo de Pascal envolvendo coeficientes binomiais.

Teorema 1.5 (Binomiais Complementares). *Se n e p são naturais, então*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}. \tag{1.1}$$

Demonstração. De fato,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

■

O teorema 1.5 nos diz que em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Teorema 1.6 (Relação de Stifel). *Se n e p são naturais, então*

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

Demonstração. Tem-se que

$$\begin{aligned} \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n!}{(n-p+1)(n-p)!(p-1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p(p-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!(p-1)!} \left[\frac{1}{n-p+1} + \frac{1}{p} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-p)!(p-1)!} \left[\frac{p+n-p+1}{(n-p+1)p} \right] \\ &= \frac{n!}{(n-p)!(p-1)!} \frac{n+1}{(n-p+1)p} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(n-p+1)(n-p)!p(p-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!p!} = \binom{n+1}{p}. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.7 (Teorema das colunas). *Se k e p são naturais, então a soma dos elementos de uma coluna do Triângulo de Pascal, começando do primeiro elemento da coluna, é igual ao elemento situado numa coluna após e numa linha abaixo do último elemento da soma, i.e.,*

$$\sum_{j=0}^k \binom{p+j}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}. \quad (1.2)$$

Demonstração. usando a relação de Stiefel pedemos escrever:

$$\binom{p+1}{p} + \binom{p+1}{p+1} = \binom{p+2}{p+1}$$

$$\binom{p+2}{p} + \binom{p+2}{p+1} = \binom{p+3}{p+1}$$

$$\binom{p+3}{p} + \binom{p+3}{p+1} = \binom{p+4}{p+1}$$

⋮

$$\binom{p+k}{p} + \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+k+1}{p+1}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e cancelando os termos iguais de lados opostos da igualdade, segue que:

$$\binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} \cdots + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}$$

Mas ocorre que $\binom{p+1}{p+1} = \binom{p}{p}$. Portanto,

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} \cdots + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}.$$

■

Visualmente,

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \binom{p}{p} & \vdots & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \binom{p+1}{p} & \dots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \binom{p+k}{p} & \dots & & \\
& & & & & \searrow & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \binom{p+k+1}{p+1} & \dots & \dots
\end{array}$$

Teorema 1.8 (Teorema das linhas). *Se n é natural, então a soma dos elementos da n -ésima linha vale 2^n , i.e.,*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n. \quad (1.3)$$

Demonstração. Utilizaremos o *Princípio da Indução Finita* para demonstrar sua validade.

Para $n = 0$, tem-se que o lado esquerdo se resume a $\binom{0}{0} = 1$ e o lado direito, $2^0 = 1$. Logo, a igualdade é verdadeira.

Hipótese de indução: suponha que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Mostremos agora, utilizando a hipótese de indução, que a proposição continua válida quando temos $n = k + 1$, ou seja,

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Aplicando a relação de Stiefel, podemos reescrever:

$$\binom{k+1}{1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}$$

$$\binom{k+1}{2} = \binom{k}{1} + \binom{k}{2}$$

$$\binom{k+1}{3} = \binom{k}{2} + \binom{k}{3}$$

⋮

$$\binom{k+1}{k} = \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}.$$

Além disso,

$$\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0} \text{ e } \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}.$$

Assim,

$$\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0}$$

$$\binom{k+1}{1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}$$

$$\binom{k+1}{2} = \binom{k}{1} + \binom{k}{2}$$

$$\binom{k+1}{3} = \binom{k}{2} + \binom{k}{3}$$

⋮

$$\binom{k+1}{k} = \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}$$

$$\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}.$$

Adicionando as igualdades acima membro a membro, segue-se que

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+1}{k+1} = 2 \cdot \underbrace{\left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} \right]}_{=2^k \text{ (hipótese da indução)}} \Rightarrow$$

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Portanto, a proposição continua válida para $n = k + 1$ e pelo Princípio da Indução Finita, temos que a fórmula é válida para qualquer n natural. ■

Teorema 1.9 (Teorema das Diagonais). *Se n e p são naturais, então a soma dos elementos de uma diagonal do Triângulo de Pascal, começando do primeiro elemento de cada linha, é igual ao elemento situado na mesma coluna e na linha abaixo do último elemento somado, i.e.,*

$$\sum_{j=0}^p \binom{n+j}{j} = \binom{n+p+1}{p}. \quad (1.4)$$

Demonstração. Reescrevendo a soma dada em (1.4) e usando o fato que binomiais complementares são iguais (teorema 1.5) mais o teorema das colunas (teorema 1.7) segue-se que

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p}{p} \stackrel{\text{(teo 1.5)}}{=} \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+p}{n} \stackrel{\text{(teo 1.4)}}{=} \binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Definição 1.10 (Binomial Médio). Para todo $n \in \mathbb{N}$, chamamos o coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ de binomial médio. ■

Teorema 1.11 (Teorema Binomial). *Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \text{com} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (1.5)$$

Demonstração. A demonstração será feita pelo Princípio da Indução Finita. Para $n = 1$ temos que (1.5) é verdadeira pois

$$\begin{aligned} (x + y)^1 &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^{1-0} y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 \\ &= 1x^1 y^0 + 1x^0 y^1 = x + y. \end{aligned}$$

Hipótese de indução: Suponhamos que (1.5) seja verdadeira para um certo n , i.e.,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Agora vamos provar que (1.5) é válida para $n + 1$, i.e.,

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right] (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k x + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k y \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^\ell \quad (\ell = k+1) \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1-0} y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^\ell + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1-0} y^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1-0} y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1-0} \quad (\text{teo 1.6}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$

■

Observação 1.12. Na demonstração usamos a relação de Stifel (teorema 1.6) e a igualdade entre as somas

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} a^{n+1-\ell} b^\ell.$$

Observação 1.13. (Soma dos Coeficientes e Termo Geral da Expansão Binomial)

- Para obter o valor da soma dos coeficientes de $(x + y)^n$ é suficiente tomarmos $x = y = 1$. De fato, pelo teorema 1.11, fazendo-se $x = y = 1$ em $(x + y)^n$ tem-se que

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \quad (1.6)$$

- Também do teorema 1.11 tem-se que o desenvolvimento de $(x + y)^n$ apresenta $n + 1$ termos em que o $(p + 1)$ -ésimo termo, T_{p+1} , é da forma

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^p y^{n-p} \quad \forall p \in \{0, \dots, n\}. \quad (1.7)$$

Definição 1.14 (Coeficiente Binomial Generalizado). Para todo $r \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ define-se

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{(r)_k}{k!} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} & \text{se } k > 0; \\ 1 & \text{se } k = 0; \\ 0 & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Observação 1.15 (Binômio de Newton Generalizado). É possível estender o resultado do teorema 1.11 para todo $r \in \mathbb{R}$ com x e $y \in \mathbb{R}$ tais que $|\frac{x}{y}| < 1$, de tal modo que $(x + y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$ em que $\binom{r}{k}$ são os coeficientes binomiais generalizados definidos em 1.14.

Algumas relações entre coeficientes binomiais como o teorema 1.8 (teorema das linhas), teorema 1.7 (teorema das colunas) e teorema 1.5 (teorema dos binomiais complementares) são na maioria das vezes utilizadas num contexto combinatório, em que p , k e n são números naturais. Entretanto tais teoremas podem não serem válidos no caso geral da definição 1.14 se em lugar de

números naturais considerarmos números reais quaisquer. Se no teorema 1.7 pudéssemos tomar $p = -1$, então a equação (1.2) deixaria de ser verificada para qualquer k . O exemplo 1.16 mostra que o teorema 1.5 (teorema dos binomiais complementares) pode não ser verdadeiro se na equação (1.1) n não for natural.

Exemplo 1.16. Mostre que $\binom{-1}{k} \neq \binom{-1}{-1-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solução. Note que

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k. \quad (1.8)$$

Por outro lado, tem-se da definição 1.14 que

$$\binom{-1}{-1-k} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Logo, de (1.8) e (1.9) segue-se o resultado. ■

1.2. COEFICIENTES MULTINOMIAIS E O POLINÔMIO DE LEIBNIZ

Definição 1.17 (Coeficiente Multinomial). Sejam n, n_1, \dots, n_k números naturais tais que $n_1 + \dots + n_k = n$. Definimos o *coeficiente multinomial* por

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Uma generalização do teorema 1.11 (teorema binomial) é o *Teorema Multinomial*, também chamado de *Polinômio de Leibniz* ou *Fórmula do Multinômio de Newton*.

Teorema 1.18 (Teorema Multinomial). *Se n, k, n_1, \dots, n_k são inteiros não negativos tais que $n_1 + \dots + n_k = n$, então*

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}. \quad (1.10)$$

Demonstração. Note que os termos do desenvolvimento de

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_k) \dots (x_1 + \dots + x_k)}_{n \text{ vezes}} \quad (1.11)$$

são da forma $C(n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ em que $n_1 + \dots + n_k = n$ e $C(n_1, \dots, n_k)$ indica quantas vezes o termo $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ aparece. Tem-se que o polinômio de Leibniz será dado por

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} C(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}. \quad (1.12)$$

Resta, então, determinar o valor de $C(n_1, n_2, \dots, n_k)$ e, para tanto, consideremos o produto dos n termos dados entre parênteses em (1.11). Para gerar o termo $x_1^{n_1}$ devemos escolher n_1 vezes x_1 entre n parênteses dados, o que pode ser feito de $\binom{n}{n_1}$. Em seguida há $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibilidades para a escolha de termos iguais a x_2 entre os $n - n_1$ parênteses restantes, e assim sucessivamente, até que haja $\binom{n-n_1-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}}$ possíveis escolhas entre os parênteses para escolha de termos iguais a x_{k-1} e apenas uma, $\binom{n-n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$, possibilidade (os parênteses não previamente já escolhidos) para o termo x_k . Logo,

$$\begin{aligned} C(n_1, \dots, n_k) &= \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}} \\ &\cdot \binom{n-n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1, \dots, n_k}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

De (1.13) em (1.12) segue-se o resultado estabelecido em (1.10). ■

Observação 1.19 (Soma dos Coeficientes do Polinômio de Leibniz). De maneira análoga ao que vimos nos números binomiais, para obter a soma dos coeficientes do polinômio de Leibniz é suficiente tomar $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1$. Assim, de (1.10) e (1.11) segue-se que

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = k^n. \quad (1.14)$$

Uma segunda maneira de obter (1.14) é a partir do fato que o coeficiente multinomial $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ corresponde ao número de maneiras de distribuir n objetos (com n_1 do tipo 1, ..., n_k do tipo k) em k gavetas (com n_1 objetos na gaveta 1, ..., n_k objetos na gaveta k). Segue-se então, pelo Princípio Aditivo que a soma dada em (1.14) representa o total de configurações para distribuir os n objetos (bolas) em k gavetas (urnas). Por outro lado há k possibilidades de escolha de urna para cada bola, assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem o total de possibilidades é k^n .

Exemplo 1.20 (Número de Parcelas do Polinômio de Leibniz). O número de parcelas no desenvolvimento de $(x_1 + \dots + x_k)^n$ é $F_{n+k-1}^{n, k-1}$.

Solução. Do teorema 1.18 tem-se que as parcelas são da forma $\binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ com $n_1 + \dots + n_k = n$. Assim, o total de parcelas é o número de soluções inteiras e não negativas de $n_1 + \dots + n_k = n$ que vale

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!n!} = F_{n+k-1}^{n, k-1}. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.21 (Recorrência de Coeficientes Multinomiais). Se n, n_1, \dots, n_k são inteiros não negativos tais que $n_1 + \dots + n_k = n$, então

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_k-1}.$$

Demonstração. A prova será por um argumento combinatório, para tanto considere n objetos e k gavetas numeradas de 1 a k , que conterão, respectivamente, n_1, \dots, n_k objetos. O número de maneiras possíveis de distribuir os n objetos em k gavetas com a configuração dada é

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} \quad (1.15)$$

Por outro lado, contemos o total de possibilidades em relação à presença de um objeto especial, se ele está ou não numa gaveta específica. Assim, se o objeto especial estiver presente na i -ésima gaveta, há $n - 1$ objetos agora a serem distribuídos em k gavetas, sendo $n_i - 1$ objetos na i -ésima gaveta, pois esta já conta com o objeto especial. Logo, o total de possibilidades de distribuir n objetos com o objeto especial na caixa i é $\binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots, n_k}$. Desde que o objeto especial pode ocupar qualquer uma das k caixas, pelo *Princípio Aditivo* tem-se que o total de possibilidades é

$$\binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_k-1}. \quad (1.16)$$

De (1.15) e (1.16) segue-se o resultado. ■

1.3. EXEMPLOS

Exemplo 1.22. Considere o conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : a + b = 2020\}$. Calcule a soma dos números da forma $\frac{2020!}{a!b!}$, para todo $(a, b) \in S$.

Solução. Note que se $a + b = 2020$, então $\frac{2020!}{a!b!} = \frac{2020!}{a!(2020-a)!} = \binom{2020}{a}$. Assim, pelo teorema 1.8 segue-se que

$$\sum_{(a,b):a+b=2020} \frac{2020!}{a!b!} = \sum_{a=0}^{2020} \binom{2020}{a} = 2^{2020}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 1.23. Calcule a soma

$$S = \frac{\binom{11}{0}}{1} + \frac{\binom{11}{1}}{2} + \frac{\binom{11}{2}}{3} + \cdots + \frac{\binom{11}{11}}{12}.$$

Solução. Do exercício 1 item 1a tem-se que

$$\binom{12}{k+1} = \frac{12}{k+1} \cdot \binom{11}{k} \Rightarrow \frac{\binom{11}{k}}{k+1} = \frac{\binom{12}{k+1}}{12}.$$

Assim,

$$k = 0 \Rightarrow \frac{\binom{11}{0}}{1} = \frac{\binom{12}{1}}{12};$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{\binom{11}{1}}{2} = \frac{\binom{12}{2}}{12};$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{\binom{11}{2}}{3} = \frac{\binom{12}{3}}{12};$$

\vdots

$$k = 11 \Rightarrow \frac{\binom{11}{11}}{12} = \frac{\binom{12}{12}}{12}.$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, segue-se que:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\binom{11}{0}}{1} + \frac{\binom{11}{1}}{2} + \frac{\binom{11}{2}}{3} + \cdots + \frac{\binom{11}{11}}{12} \\ &= \frac{\binom{12}{1}}{12} + \frac{\binom{12}{2}}{12} + \frac{\binom{12}{3}}{12} + \cdots + \frac{\binom{12}{12}}{12} \\ &= \frac{1}{12} \left[\binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \cdots + \binom{12}{12} \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[2^{12} - \binom{12}{0} \right] \quad (\text{teorema 1.8}) \\ &= \frac{1}{12} [2^{12} - 1]. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.24 (Fórmula de Lagrange). Mostre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (1.17)$$

Solução. Faremos a prova a partir de um argumento combinatório, para tanto, considere um grupo formado por n homens, n mulheres e que se queira formar uma comissão de n pessoas. O total de possibilidades é $\binom{2n}{n}$. Por outro lado, podemos particionar o conjunto das partições em relação ao total de homens e mulheres presentes em cada uma delas e pelo princípio aditivo e multiplicativo, tem-se que o total de possibilidades é dado por

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{n} \binom{n}{0} \stackrel{\text{(teo 1.5)}}{=} \\ &\binom{n}{0} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.25 (OLIMPIÁDA DE MAIO). Esmeralda passeia pelos pontos de coordenadas inteiras do plano. Se, num dado momento, ela está no ponto (a, b) , com um passo ela pode ir para um dos seguintes pontos:

$$(a + 1, b), (a - 1, b), (a, b + 1) \text{ ou } (a, b - 1).$$

De quantas maneiras Esmeralda pode sair do ponto $(0, 0)$ e andar 2008 passos terminando no ponto $(0, 0)$?

Solução. Note que os movimentos permitidos a cada passo são: uma unidade para cima, uma unidade para baixo, uma unidade para esquerda ou uma unidade para a direita. Como Esmeralda quer sair do ponto $(0, 0)$ e retornar ao mesmo ponto após 2008 passos, durante todo o movimento o número de passos para cima (m) tem de ser igual ao número de passos para baixo, assim como o número de passos para a direita (n), tem de ser igual ao número de passos para a esquerda. Ora, como o total de passos é 2008, segue-se que

$$m + m + n + n = 2008 \Rightarrow m + n = 1004.$$

Cada passo dado para cima vamos representar por (C) ; cada passo para baixo vamos representar por (B) ; cada passo para a direita vamos representar por (D) e finalmente cada passo para a esquerda vamos representar por (E) . Como estamos supondo que no movimento completo foram dados m passos para cima, m passos para baixo, n passos para a direita e n passos para a esquerda, para cada caminho possível formaremos uma sequência de m letras C , m letras B , n letras D e n letras E . (e reciprocamente, i.e., cada sequência de m letras C , m letras B , n letras D e n letras E também correspondem a um único caminho). Diante do exposto há uma bijeção entre o conjunto dos possíveis caminhos e o conjunto das sequências formadas com m letras C , m letras B , n letras D e n letras E . O número de sequências possíveis de formarmos com m letras C , m letras B , n letras D e n letras E é dado pela permutação com elementos repetidos, a saber:

$$\frac{(2m + 2n)!}{m!m!n!n!} = \frac{2008!}{(m!)^2(n!)^2}.$$

Portanto, o número de caminhos possíveis é igual ao número dessas sequên-

cias, que pode ser obtido por

$$\begin{aligned}
 \sum_{m+n=1004} \frac{2008!}{(m!)^2 \cdot (n!)^2} &= \sum_{n=0}^{1004} \frac{2008!}{((1004-n)!)^2 \cdot (n!)^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{1004} \frac{(1004!)^2}{(1004!)^2} \frac{2008!}{((1004-n)!)^2 \cdot (n!)^2} \\
 &= \frac{2008!}{(1004!)^2} \sum_{n=0}^{1004} \frac{(1004!)^2}{((1004-n)!)^2 \cdot (n!)^2} \\
 &= \frac{2008!}{(1004!)^2} \sum_{n=0}^{1004} \binom{1004}{n}^2 \\
 &= \frac{2008!}{(1004!)^2} \left[\binom{1004}{0}^2 + \binom{1004}{1}^2 + \cdots + \binom{1004}{1004}^2 \right] \\
 &\stackrel{\text{(eq (1.17))}}{=} \frac{2008!}{(1004!)^2} \cdot \binom{2008}{1004}.
 \end{aligned}$$

Na última igualdade acima usou-se a Fórmula de Lagrange demonstrada no exemplo 1.24. ■

Exemplo 1.26 (Número de Euler no Triângulo de Pascal). Para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $s_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n-1} s_{n+1}}{s_n^2} = e.$$

Solução. Note-se inicialmente que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \frac{1 \cdot \prod_{k=0}^n \binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}}. \quad (1.18)$$

Ademais,

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \binom{n}{k}. \quad (1.19)$$

De (1.19) em (1.18) segue-se que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1 \cdot \prod_{k=0}^n \frac{n+1}{n+1-k} \binom{n}{k}}{\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n \dots 2 \cdot 1} = \frac{(n+1)^n}{n!}. \quad (1.20)$$

De (1.20) tem-se que para todo $n \geq 1$ que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{s_{n+1}}{s_n}}{\frac{s_n}{s_{n-1}}} &= \frac{\frac{(n+1)^n}{n!}}{\frac{n!}{(n)^{n-1}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}s_{n-1}}{s_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = e. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.27 (AHSME). Quantos fatores primos possui o número abaixo?

$$N = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1$$

Solução. Note que

$$N = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1 = (69 + 1)^5 = 70^5.$$

Como $70 = 2 \times 5 \times 7$, segue-se que

$$N = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1 = (69 + 1)^5 = 70^5 = 2^5 \times 5^5 \times 7^5,$$

e portanto, os únicos fatores primos do número $N = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1$ são 2, 5 e 7.

■

Exemplo 1.28. Na figura abaixo estão exibidas as potências de expoentes inteiros e não negativos do número 11. Atenção! Os coeficientes binomiais que estão representados à direita de cada uma das igualdades estão apenas justapostos, não estão sendo multiplicados.

$$\begin{aligned}
 11^0 &= 1 = \binom{0}{0}; \\
 11^1 &= 11 = \binom{1}{0} \binom{1}{1}; \\
 11^2 &= 121 = \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}; \\
 11^3 &= 1331 = \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}; \\
 11^4 &= 14641 = \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}; \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

É verdade que para todo n inteiro e não negativo, ocorre a igualdade abaixo?

$$11^n = \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}.$$

Solução. Não, pois

$$11^n = (10+1)^n = \binom{n}{0} 10^n + \binom{n}{1} 10^{n-1} + \binom{n}{2} 10^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} 10^1 + \binom{n}{n} 10^0.$$

Assim, quando os coeficientes binomiais $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ são todos menores que 10, eles representam os algarismos do número 11^n na base 10 (lembre-se de que os algarismos na base 10 são $0, 1, 2, \dots, 9$, que são todos menores que 10). Mas, já para $n = 5$ temos $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$, que já não é menor que 10. Portanto $n = 4$ é o maior valor de n para o qual a representação $11^n = \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$ funciona. ■

Exemplo 1.29. Prove que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Solução. Sendo i a unidade imaginária dos números complexos ($i^2 = -1$), segue-se que

$$(1+i)^n = \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \binom{n}{4}i^4 + \dots + \binom{n}{n}i^n.$$

Lembrando que as potências naturais de i são cíclicas módulo 4 (repetem-se ciclicamente de 4 em 4), e que

$$i^1 = 1, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$$

segue-se que

$$(1+i)^n = \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots \right] + i \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots \right].$$

Por outro lado,

$$Z = 1+i = \sqrt{2} \left[\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} \right].$$

Aplicando a fórmula da potenciação de Moivre,

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left[\cos\frac{n\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{n\pi}{4} \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots \right] + i \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots \right] &= \\ &= (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + i (\sqrt{2})^n \text{sen}\frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

Finalmente, igualando-se as partes reais e as partes imaginárias dos dois membros, segue-se que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots = (\sqrt{2})^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}.$$

■

Exemplo 1.30. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se que:

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} (-1)^k \binom{k-x-1}{k} & \text{se } k \in \mathbb{N}_+; \\ 0 & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Solução. Da definição 1.14 tem-se que o resultado é imediato para $k \leq 0$. Para $k > 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} \binom{x}{k} &= \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-(k-1))}{k!} \\ &= \frac{(-1)(-x)(-1)(1-x)(-1)(2-x)\dots(-1)((k-1)-x)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k(-x+(k-1))\dots(-x+2)(-x+1)(-x)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-x+(k-1))_k}{k!} = (-1)^k \binom{-x+k-1}{k}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.31 (British Mathematical Olympiad). Prove que

$$\{[mn]!\}^2 \text{ é divisível por } (m!)^{n+1}(n!)^{m+1} \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Solução. Considere um grupo de mn pessoas que será particionado de duas maneiras, ei-las: Sejam \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , respectivamente, uma partição em que há n grupos de m pessoas cada e uma segunda partição há m grupos de n pessoas

cada. O total de partições de cada uma das maneiras é um inteiro positivo, e portanto o produto também o é, implicando o resultado.

$$|\mathcal{P}_1| = \frac{[mn]!}{(m!)^n n!} \quad \text{e} \quad |\mathcal{P}_2| = \frac{[mn]!}{(n!)^m m!}$$

■

Exemplo 1.32. Se $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, determine, em função de n o valor das somas:

(a) $S = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$;

Solução. Fazendo $x = 1$ em $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, segue-se que:

$$(1+1+1^2)^n = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \dots + a_{2n} \cdot 1^{2n} \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3^n.$$

Fazendo $x = -1$ em $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, segue-se que:

$$(1 + (-1) + (-1)^2)^n = a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + \dots + a_{2n} \cdot (-1)^{2n} \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} = 1.$$

Assim,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3^n \\ a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} = 1. \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as duas últimas igualdades acima, resulta que:

$$2a_0 + 2a_2 + 2a_4 + \dots + 2a_{2n} = 3^n + 1 \Rightarrow 2 \cdot (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = 3^n + 1.$$

Portanto,

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{3^n + 1}{2}.$$

■

(b) $S = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$.

Solução. Subtraindo membro a membro as expressões

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 3^n \\ a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2n} = 1, \end{cases}$$

segue-se que

$$2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + \cdots + 2a_{2n-1} = 3^n - 1 \Rightarrow 2 \cdot (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) = 3^n - 1.$$

Assim,

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

■

NÚMEROS DE CATALAN

2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos os chamados **Números de Catalan**, que levem esse nome em homenagem ao Matemático Belga Eugène Catalan (1814–1894). Esses números aparecem de maneira natural em diversos problemas de combinatória tais como o **problema da eleição**, o **problema dos apertos de mão não cruzados**, o **problema de colocação de parênteses**, o **problema da triangulação de um polígono regular**, entre outros. Discutiremos detalhadamente cada uma dessas problemas e a conexão entre eles. Por fim, também mencionaremos o **Supercatalan**, um interessante número que está associado a um problema ainda em aberto.

Como motivação para estudarmos os Números Catalan, consideremos o problema da eleição em que há somente dois candidatos, A e B , que cada voto é dado sempre a um dos dois candidatos e que a eleição termina empatada, mas com um dos candidatos nunca em desvantagem em relação ao outro.

Exemplo 2.1. Qual o total de possíveis apurações em que o candidato A sempre permanece em vantagem ou empatado com o candidato B num total de $2n$ votos e que a eleição termina empatada?

Solução. O total de possíveis apurações em que um dos candidatos permanece sempre em vantagem ou empatado em relação ao outro candidato é $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Este resultado é obtido a partir da diferença entre o total de apurações possíveis $\binom{2n}{n}$ e o do total de apurações nas quais o candidato A está em algum momento

em desvantagem em relação ao candidato B , que é obtido via *Princípio da Reflexão* [4] e vale $\binom{2n}{n+1}$. Assim o total de apurações pedidas é

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (2.1)$$

■

Definição 2.2 (Número Catalan). O n -ésimo número Catalan é definido para todo $n \in \mathbb{N}$ por $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

A partir do exemplo 2.1 (cada voto é dado somente a um dos candidatos) tem-se que C_n é a cardinalidade do conjunto de grafos com origem $O(0,0)$ e nó terminal em $F(2n,0)$ cujos elos não estão abaixo do eixo das abscissas, pode-se contruir bijeções desse conjunto com outros conjuntos resultando em interpretações combinatórias deveras interessantes para o número Catalan.

2.2. EXEMPLOS

Na figura 2.1 são mostradas todas as configurações de cordilheiras e parênteses para para C_1 , C_2 e C_3 .

Na figura 2.2 mostramos a equivalência entre diferentes interpretações combinatórias (cordilheira, parêntese, "Dyck word", caminhos leste-norte) para uma apuração específica $AABBABAAABABBB$ da sequência de 14 votos, sendo 7 no candidato A e 7 votos no candidato B . Para quaisquer uma das $C_7 = \frac{\binom{14}{7}}{7+1}$ possíveis apurações obtêm-se as correspondentes equivalências.

1. (Parênteses) C_n é o número de associações válidas entre n pares de parênteses.

Considere-se os votos para o candidato A como um parêntese aberto (e os votos para o candidato B como um parêntese fechado), o número Catalan corresponde ao total de configurações válidas de parênteses, i.e, total de configurações em que para cada parêntese aberto há um correspondente parêntese fechado.

$n = 0:$	*
$n = 1:$	()
$n = 2:$	()(), (())
$n = 3:$	()()(), ()(), (())(), (()), ((()))

$n = 0:$	*
$n = 1:$	/\
$n = 2:$	
$n = 3:$	

Figura 2.1:

De fato, observe que há uma correspondência biunívoca entre cada gráfico de apuração e uma configuração de parênteses. Nesta dinâmica, o primeiro parêntese é sempre aberto (primeiro voto é do candidato A) e o último parêntese é sempre fechado (último voto é do candidato B). Note também que no gráfico vantagem de votos do candidato A versus total de votos; cada diagonal para baixo ou voto em B ou parêntese $)$, formará uma configuração válida de parênteses, $()$, com um parêntese imediatamente anterior aberto $($, pois se em um dado instante o candidato B recebeu um voto, é porque no instante anterior o candidato A tinha ao menos um voto a mais que B.

- (Cordilheiras) Considere-se os votos para o candidato A como um $/$ e os votos para o candidato B como um símbolo \backslash , o número de Catalan corresponde ao número de "montanhas/ cordilheiras" formadas;
- ("Dyck words") Considere-se os votos para o candidato A como X e os votos para o candidato B como Y , o número de Catalan corresponde ao total de palavras formadas com n letras X e n letras Y onde em qualquer posição $p \in \{1, \dots, 2n\}$ da palavra, o número de letras X

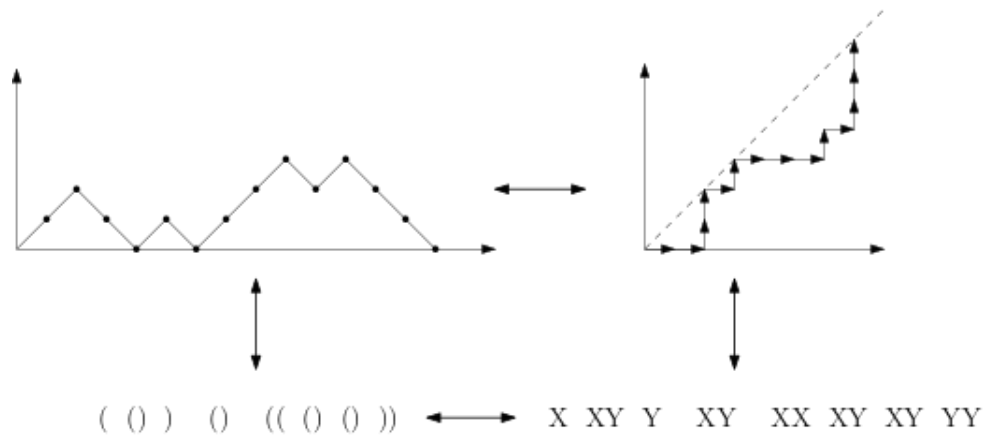


Figura 2.2:

até esta posição p é maior ou igual que o número de letras Y ;

4. (Caminhos Leste-Norte) Seja $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n = \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\}$ e o grafo cujos elos são horizontais ou verticais com nós, respectivamente, de $P(x, y)$ a $Q(x + 1, y)$ ou de $P(x, y)$ a $Q_1(x, y + 1)$. Para cada um dos três exemplos anteriores considere os símbolos "(", "/" ou X a um elo horizontal do grafo e os símbolos ")", "\" ou Y a um elo vertical do grafo. O número Catalan representa o total de grafos que não estão acima da reta $y = x$.
5. (Apertos de Mão) O número de maneiras que $2n$ pessoas podem se comprimir em uma mesa circular sem haver cruzamento dos braços é C_n .

Sem perda de generalidade, consideremos a já mencionada sequência

$$XXYYXYXXXYXYYY \leftrightarrow (\) \ (\) \ ((\ (\) \ (\) \))$$

cuja equivalência também entre cordilheiras e caminhos leste norte foi mostrada nos itens anteriores. O problema que temos agora é como encontrar uma bijeção entre $XXYYXYXXXYXYYY$ e uma representação de apertos de mão sem cruzamento de braços, ou de maneira maneira

geral, mostrar que há uma bijeção entre o conjunto das C_7 seqüências de "Dyck words" (ou configurações válidas de parênteses ou caminhos leste norte) e o conjunto dos apertos de mão sem cruzamento de braços. Para tanto, considere os elementos da seqüência numerados da esquerda para a direita e com a representação circular de que a corda $(i, j), i < j$, significando um cumprimento entre um elemento X da i -ésima posição da seqüência e um elemento Y da j -ésima posição da seqüência. Assim, dada uma representação gráfica de cordas representando os cumprimentos sem cruzamento de braços obtém-se de maneira imediata a "Dyck word" (ou seqüência de parênteses, ou montanhas, ou caminho leste norte) correspondente. Veja a figura 2.3

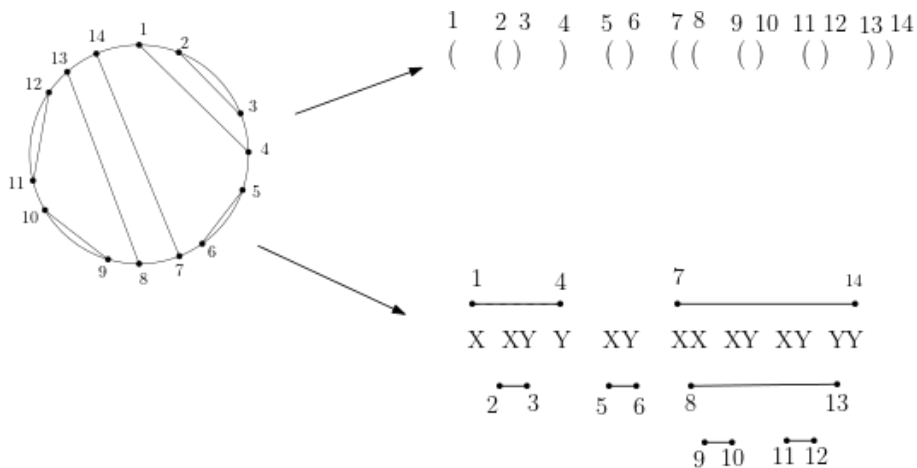


Figura 2.3:

Agora imaginemos a situação em que dada a seqüência

$$XXYYXYXXXYXYYY \leftrightarrow (())((((())))$$

e a partir de uma delas temos que definir uma única configuração de apertos de mão em que não há cruzamento de braços? Da definição tem-se que em qualquer posição da seqüência, o total de letras X é sempre maior ou igual que o total de letras Y e também da definição a primeira e

última letras são, respectivamente, X (parêntese aberto) e Y (parêntese fechado). Definamos então a seguinte regra. Percorrendo a sequência da esquerda para a direita, o primeiro Y que aparecer formará uma corda com o X que o precede. O segundo Y que aparecer formará uma corda com o último X que o precede e que não pertence a nenhuma corda, e assim sucessivamente. Assim, na sequência $XXYYXYXXXYY$ dada formaríamos as cordas (representação dos comprimentos) conforme mostrado na figura 2.4.

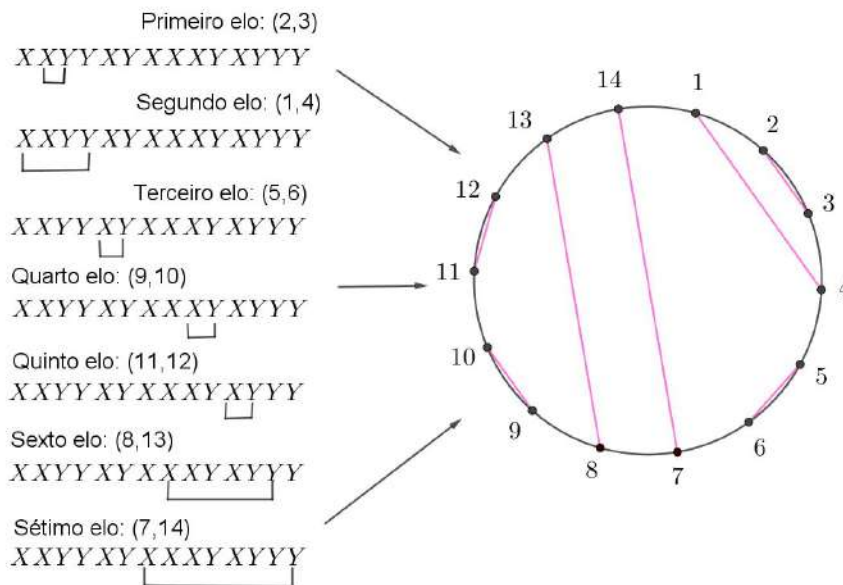


Figura 2.4:

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para determinar o número de Catalan a partir de uma relação de recorrência.

Teorema 2.3. *Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais com $a_0 = 1$.*

$$\text{Se } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1-k}a_k, \text{ então } a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Demonstração. Seja $f(z)$ a função geradora da sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, i.e.,

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots \quad (2.2)$$

De (2.2) segue-se que

$$\begin{aligned} (f(z))^2 &= a_0 a_0 + (a_1 a_0 + a_0 a_1)z + (a_2 a_0 + a_1 a_1 + a_0 a_2)z^2 + \dots \\ &\stackrel{\text{(hipótese)}}{=} a_0 a_0 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Multiplicando (2.3) por z e adicionando a_0 , obtém-se que

$$a_0 + z(f(z))^2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \stackrel{(2.2)}{=} f(z), \quad (2.4)$$

e portanto, de (2.4), desde que $a_0 = 1$, multiplicando por $4z$ e completando os quadrados, segue-se que

$$\begin{aligned} 1 + z(f(z))^2 = f(z) &\Rightarrow 4z^2(f(z))^2 - 4zf(z) + 4z = 0 \Rightarrow \\ (2zf(z))^2 - 2(2zf(z)).1 + 1 - 1 + 4z &= 0 \Rightarrow (2zf(z) - 1)^2 = 1 - 4z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2zf(z) = 1 + \sqrt{1 - 4z} \quad (\star) \quad \text{ou} \quad 2zf(z) = 1 - \sqrt{1 - 4z} \quad (2.5)$$

e desde que (\star) de (2.5) não satisfaz a condição $f(0) = a_0 = 1$, tem-se que

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \quad \forall z \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 1. \quad (2.6)$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}
 (1 - 4z)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k \\
 &= 1 - \frac{\binom{1}{2}}{1} 4z + \frac{\frac{1}{2} \binom{-1}{2}}{2 \cdot 1} (4z)^2 - \frac{\binom{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2}}{3 \cdot 2 \cdot 1} (4z)^3 + \dots \quad (2.7) \\
 &= 1 - \frac{1}{1!} 2^1 z - \frac{1}{2!} 2^2 z^2 - \frac{3 \cdot 1}{3!} 2^3 z^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} 2^4 z^4 - \dots
 \end{aligned}$$

De (2.7) em (2.6) tem-se que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 1 + \frac{1}{2!} 2^1 z + \frac{3 \cdot 1}{3!} 2^2 z^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} 2^3 z^3 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \binom{2^1}{1!} z^1 + \frac{1}{3} \binom{3 \cdot 1 \cdot 2^2}{2!} z^2 + \frac{1}{4} \binom{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^3}{3!} z^3 + \dots \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Note que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$(2k)! = \prod_{j=1}^k (2j - 1) 2^k k! \iff \prod_{j=1}^k (2j - 1) 2^k = \frac{(2k)!}{k!} \quad (2.9)$$

Finalmente de (2.9) em (2.8) segue-se que

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2} \binom{2}{1} z^1 + \frac{1}{3} \binom{4}{2} z^2 + \frac{1}{4} \binom{6}{3} z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} z^k. \quad (2.10)$$

De (2.10), (2.2) e da definição 2.2 tem-se que a_n é o n -ésimo número de Catalan, i.e., é $a_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. ■

Mostraremos a seguir duas aplicações da recorrência estabelecida no teorema 2.3.

- (Parênteses) Sejam $2n$ parênteses nas condições já definidas anteriormente de configurações válidas. Desde que toda configuração válida dos

n pares de parênteses, necessariamente, começa com um parêntese aberto (e termina com um parêntese fechado), podemos particionar o conjunto das configurações válidas em relação a posição do parêntese fechado correspondente ao primeiro parêntese aberto, ao qual poderá ser qualquer posição $p \in \{2, 4, \dots, 2n\}$. Assim, todas as configurações válidas poderão ser representadas da forma $(A)B$, em que A e B são subconjuntos de configurações válidas de parênteses com, respectivamente, k e $n - k - 1$ pares, em que $k \in \{0, \dots, n - 1\}$. Assim, se $|A| = k$ e $|B| = n - k - 1$, então o parêntese que "fecha" o primeiro parêntese aberto está na posição $2k + 2$, havendo C_k possibilidades de configurações válidas para os k pares de parênteses de A que podem ser combinadas com outras C_{n-k-1} pares de configurações válidas de parênteses de B , havendo então pelo Princípio Fundamental da Contagem $C_k \cdot C_{n-k-1}$ possibilidades. Pelo Princípio Aditivo segue-se que o total de configurações válidas para os n pares de parênteses é

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \stackrel{\text{(teo 2.3)}}{=} C_n.$$

- (Triangulações de um polígono) As triangulações de um polígono convexo de $n + 2$ lados correspondem ao número de partições do polígono em n triângulos, i.e., os interiores dos triângulos têm interseção vazia e a soma das áreas dos triângulos é a área do polígono. Se um polígono convexo tem $n + 2$ lados, então há C_n triangulações possíveis.

Na figura 2.5 tem-se que o número de triangulações para um triângulo, quadrado, pentágono e hexágono são, respectivamente, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$ e $C_4 = 14$. Na figura 2.6 contamos o número de triangulações para o heptágono a partir do total de triangulações já conhecidas para o triângulo, quadrado, pentágono e hexágono. Cada um dos triângulos formados com o lado AB do heptágono divide este em até duas regiões cujo número de triangulações é conhecido.

No caso geral de um polígono de $n + 2$ lados, o número de triangulações

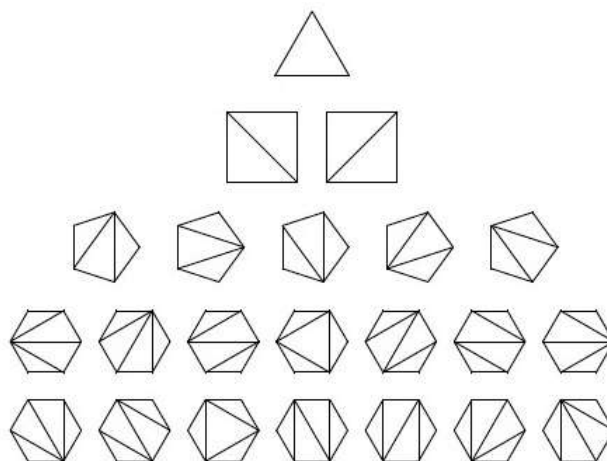


Figura 2.5: triangulações de polígonos com $n = 3, 4, 5$ e 6 lados.

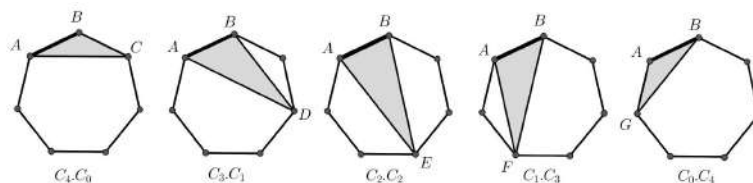


Figura 2.6: $C_5 = C_4C_0 + C_3C_1 + C_2C_2 + C_1C_3 + C_0C_4$.

é obtido seguindo-se o mesmo procedimento descrito para o heptágono, donde resulta que o número de triangulações é dado por

$$C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \dots + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1} \stackrel{\text{(teo 2.3)}}{=} C_n.$$

Outras interpretações combinatórias para o número Catalan determinadas a partir da recorrência estabelecida no teorema 2.3:

- (Árvores Binárias) Considere uma árvore (grafo conexo e sem ciclos) com um nó especial (raiz) e a partir dele todos os nós estão ligados a nenhum ou a dois elos. O número de diferentes árvores desse tipo com n

nós internos (a raiz e mais aqueles que não estão nas extremidades das folhas) é C_n ;

- (Poliminós Inclinados) Um poliminó é um conjunto de quadrados e que são conectados por lados comuns. Um poliminó inclinado é tal que cada linha horizontal ou vertical intercepta um conjunto de quadrados com arestas comuns e que as colunas da esquerda para a direita são tais que o quadrado da base da coluna à esquerda está à mesma altura ou abaixo do quadrado da base da coluna à direita. Se consideramos o lado de cada quadrado igual a 1, o número de poliminós de perímetro de $2n + 2$ é C_n .

Em [5] são apresentadas 214 diferentes interpretações combinatórias do número Catalan determinadas a partir de problemas de contagem.

Definição 2.4 (Supercatalan). Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ define-se o supercatalan $C(m, n)$ por

$$C_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$

Observação 2.5. Historicamente falando o número supercatalan foi apontado por Gessel [9] como sendo estudado em 1874 por E. Catalan, o qual provou que estes números são inteiros, entretanto Aguiar e Hsiao [7] citaram estudos anteriores em que aparecem tais números.

Se na definição 2.4 fizermos $m = 0$, então $C_{0,n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ que é o binomial médio e se $m = 1$, então $C_{1,n} = 2C_n$. Exceto para $m = n = 0$, os números $C_{m,n}$ são pares.

Apesar de muitas propriedades do número Supercatalan já terem sido descobertas, veja Dickson [10] e Gessel [9], ainda não se tem uma prova por *Argumento Combinatório* que $C_{m,n}$ é inteiro. Gessel e Xin [8] mostraram via um argumento combinatório que para $m = 2$ e $m = 3$ que $C_{m,n}$ é inteiro, mas para m e n quaisquer o problema via argumento combinatório ainda segue em aberto.

Exemplo 2.6 (XIV Olimpíada Internacional de Matemática - [6]). Quaisquer que sejam os inteiros naturais m e n , temos:

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

Solução. Seja p um primo arbitrário. A maior potência de p que divide o numerador da fração acima é p^a na qual

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2m}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor \right)$$

ao passo que a maior potência de p que divide seu denominador é p^b com

$$b = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+n}{p^i} \right\rfloor \right).$$

Basta mostrar que $a \geq b$.

Para qualquer k inteiro maior ou igual a 1 podemos escrever $m = m_1k + r$ e $n = n_1k + s$ em que $0 \leq r \leq k - 1$, $0 \leq s \leq k - 1$, m_1 e n_1 são inteiros.

Assim,

$$\left\lfloor \frac{2m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor = 2m_1 + 2n_1 + \left\lfloor \frac{2r}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2s}{k} \right\rfloor \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+n}{k} \right\rfloor &= m_1 + n_1 + (m_1 + n_1) + \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+s}{k} \right\rfloor \\ &= 2m_1 + 2n_1 + \left\lfloor \frac{r+s}{k} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como

$$\left\lfloor \frac{r+s}{k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2 \max\{r, s\}}{k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2r}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2s}{k} \right\rfloor,$$

por (2.11) e (2.12) temos

$$\left\lfloor \frac{2m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+n}{k} \right\rfloor$$

para todo $k \geq 1$ e, em particular, para k da forma $k = p^i$, donde segue imediatamente que $a \geq b$. ■

NÚMEROS DE STIRLING

3.1. INTRODUÇÃO

Os números de Stirling foram introduzidos pelo matemático escocês James Stirling (1692 – 1770) em 1730 na sua obra "Methodus Differentialis"[11]. Os números de Stirling, permutações de Stirling e aproximações de Stirling são alguns dos objetos matemáticos que levam o seu nome. Ele também provou com exatidão a classificação das cúbicas que havia sido iniciada por Newton (1642 – 1727). Coube ao matemático dinamarquês Niels Nielsen (1865 – 1931) denominá-los por Números de Stirling, veja [12]. As notações $[n]$ e $\{n\}$, respectivamente, para os números de Stirling do primeiro e do segundo tipo foram introduzidas pelo matemático sérvio Jovan Karamata em 1935. No clássico livro "Enumerative Combinatorics" [13] de Peter Stanley são usadas as notações $c(n, k)$ e $S(n, k)$ para, respectivamente, os números de Stirling de primeira e segunda ordem.

Os Números de Stirling do primeiro e segundo tipos aparecem em muito problemas combinatórios além de possuírem propriedades bem parecidas às dos *Números Binomiais*.

3.2. NÚMEROS DE STIRLING TIPO I

Nesta subseção estudaremos algumas propriedades dos números de Stirling do tipo I juntamente com problemas combinatórios em que eles são parte da solução.

Definição 3.1 (Números de Stirling tipo I). Dados os inteiros $n, k \geq 0$ e $k \leq n$, definimos os *números de Stirling tipo I* como sendo os números $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ que cumprem a seguinte condição

$$\alpha^{\overline{n}} := \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1) = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \alpha^k. \quad (3.1)$$

com $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ n \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$ se $k > n > 0$.

Exemplo 3.2. Mostre que

$$n! = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

Solução. Se $n = 0$, o resultado é trivialmente verdadeiro pois da definição 3.1 $0! = 1 = (\alpha)^{\overline{0}} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$.

Se $n \geq 1$, segue-se da definição 3.1 que

$$(x)^{\overline{n}} = (x)(x + 1) \dots (x + (n - 1)) = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k, \quad (3.2)$$

e portanto, o resultado segue fazendo-se $x = 1$ em (3.2). ■

Teorema 3.3 (Relação de Recorrência Números de Stirling Tipo I). *Sejam $n \geq 0$ e $k \geq 1$ inteiros para os quais $k \leq n$, tem-se que*

$$\left[\begin{smallmatrix} n + 1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k - 1 \end{smallmatrix} \right] + n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (3.3)$$

Demonstração. Notemos, primeiramente, que $\alpha^{\overline{n+1}} = \alpha^{\overline{n}}(\alpha + n)$ e comparemos o coeficiente de α^k em $\alpha^{\overline{n+1}}$ e $\alpha^{\overline{n}}(\alpha + n)$.

Da definição 3.1 tem-se que o coeficiente de α^k em $\alpha^{\overline{n+1}}$ é $\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

Calculemos agora o coeficiente de α^k em $\alpha^{\overline{n}}(\alpha + n)$. Tem-se que

$$\alpha^{\bar{n}}(\alpha + n) = \left(\binom{n}{0} \alpha^0 + \dots + \binom{n}{k-1} \alpha^{k-1} + \binom{n}{k} \alpha^k + \dots + \binom{n}{n} \alpha^n \right) (\alpha + n),$$

e portanto, os termos contendo α^k serão

$$\binom{n}{k-1} \alpha^{k-1} \alpha + \binom{n}{k} \alpha^k n = \left(\binom{n}{k-1} + n \binom{n}{k} \right) \alpha^k,$$

como queríamos demonstrar. ■

Uma interpretação combinatória para os números de Stirling do tipo I é o número de permutações em ciclos. Por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 11$, significa que em 11 das $4! = 24$ permutações dos elementos do conjunto $1, 2, 3, 4$ existem exatamente 2 ciclos. De fato, essas 11 permutações são: $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(32)$, $(124)(3)$, $(142)(3)$, $(123)(4)$, $(132)(4)$, $(134)(2)$, $(143)(2)$, $(1)(234)$, $(1)(243)$.

Note também que cada permutação dos elementos de um conjunto pode ser representada de forma única a partir de uma configuração em ciclos destes mesmos elementos. Seja, por exemplo, $I_4 := \{1, 2, 3, 4\}$ e uma permutação $\sigma : I_4 \rightarrow I_4$ dada por $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 4$ e $\sigma(4) = 3$ cuja representação em ciclos seria $(1, 2)(3, 4)$.

Teorema 3.4 (Interpretação Combinatória). *Se n e k inteiros não-negativos para os quais $k \leq n$, tem-se que $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ é o número de permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ com exatamente k ciclos.*

Demonstração. A prova será feita por indução em n , considerando-se um $0 \leq k \leq n$ fixo qualquer. Admitamos como hipótese de indução que o resultado é válido para um certo n , fixado k , e mostremos que é válido para $n + 1$. Consideremos um conjunto com $n + 1$ elementos, $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ e vamos particionar o conjunto A das partições com k ciclos, no conjunto A_1 das partições em que o elemento a_1 é o único elemento de um ciclo e A_1^c . Segue-se então, pelo Princípio Aditivo, que $|A| = |A_1 \cup A_1^c| = |A_1| + |A_1^c|$.

Acontece que A_1 ocorre se, e somente se, há um único ciclo contendo o elemento a_1 e os demais n elementos são distribuídos em outros $k - 1$ ciclos, que pela hipótese de indução pode acontecer de $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$. Assim,

$$|A_1| = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Por outro lado A_1^c ocorre se, e somente se, há k ciclos contendo os n elementos a_2, \dots, a_{n+1} e o elemento a_1 pertence a um desses k ciclos. Pela hipótese de indução há $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ partições dos n elementos $\{a_2, \dots, a_{n+1}\}$ em k ciclos. Resta agora determinar de quantas maneiras possível o elemento a_1 pode ser distribuído em cada uma dessas partições. Para tanto, considere para todo $j = 1, \dots, k$ n_j a quantidade de elementos no j -ésimo ciclo, em que $n_1 + \dots + n_k = n$. Há n_1 configurações possíveis para o elemento a_1 ocupar o ciclo de n_1 elementos, n_2 possibilidades para a_1 ocupar o ciclo com n_2 elementos, ..., e n_k possibilidades para a_1 ocupar o ciclo com n_k elementos, logo o total de possibilidades de a_1 figurar em um dos k ciclos é $n_1 + \dots + n_k = n$. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem,

$$|A_1^c| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} n. \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5) segue-se que o número de permutações de $n+1$ elementos em k ciclos é dado por

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} n \stackrel{(3.3)}{=} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}.$$

■

Definição 3.5 (Número de Stirling tipo I Sinalizado). Definimos para todo $n \geq 0$ e $k \geq 0$, números naturais, o número de Stirling tipo I sinalizado $s(n, k)$ por

$$s(n, k) := (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Teorema 3.6 (Interpretação em Teoria dos Números). *Sejam n e k inteiros não negativos para os quais $k \leq n$, tem-se que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é igual a soma de todos os produtos de $n - k$ elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n - 1\}$.*

Demonstração. Da definição 3.1 tem-se que o coeficiente de x^k na expansão de $x^{\overline{n}}$ é $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ e desde que

$$x^{\overline{n}} = (x + 0)(x + 1)(x + 2) \dots (x + n - 1) \quad (3.7)$$

resulta que para obtermos o coeficiente do termo x^k devemos escolher em (3.7) o termo em x em quaisquer k dos n parênteses e dos $n - k$ parênteses restantes os termos independentes. Observe que o termo independente do primeiro parêntese vale zero, assim os produtos com $n - k$ elementos serão escolhidos em $\{1, \dots, n - 1\}$. ■

3.2.1. EXEMPLOS

Exemplo 3.7. Mostre que

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad \forall n \geq 0. \quad (3.8)$$

Solução. Vimos no exemplo 3.2 tem-se que o resultado é verdadeiro para $n = 0$.

Se $n \geq 1$, então o resultado (3.8) segue da recorrência (3.3) com $k = n + 1$ e do fato que $\begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} = 0$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, de fato

$$\begin{bmatrix} n + 1 \\ n + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ n + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 0. \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.8. Mostre que

$$\begin{bmatrix} n \\ n - 1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} \quad \forall n \geq 1.$$

Solução. Da recorrência (3.3) com $k = n - 1$ e de (3.8), tem-se que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} &= (n-1) \cdot 1 + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aplicando sucessivamente a recorrência (3.9) tem-se que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} &= (n-1) + (n-2) + \begin{bmatrix} n-2 \\ n-3 \end{bmatrix} \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + 0 = \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.9. Mostre que

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \quad \forall n \geq 1.$$

Solução. Se $n = 1$, então do exemplo 3.8 tem-se que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 = (1-1)!$.

Se $n \geq 2$, então da recorrência (3.3) aplicada a $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ resulta que

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Iterando a recorrência (3.10) resulta que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (n-1)(n-2) \begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (n-1)(n-2)(n-3) \begin{bmatrix} n-3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 \cdot 1 = (n-1)!.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.10. Sejam m e n números naturais, então mostre que

$$\begin{bmatrix} n+m+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Solução. Faremos a prova por indução em m . Os casos $m = n = 0$ e $n > 0, m = 0$ são trivialmente verdadeiros, de fato; se $m = n = 0$, então tem-se que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e se $n > 0$ e $m = 0$, então $\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = (n+0) \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$.

Se $n > 0$ e $m = 1$, então tem-se que (3.11) é verdadeira, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^m (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} &= n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + (n+1) \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&\stackrel{(3.9)}{=} (n+1)n! = (n+1)! = \begin{bmatrix} n+2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+m+1 \\ m \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Admitamos como hipótese de indução que

$$\begin{bmatrix} n+j+1 \\ j \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^j (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3.12)$$

e mostremos que (3.12) é válida para $j + 1$. Substituindo j por $j + 1$ no lado esquerdo de (3.12) tem-se que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n + j + 1 + 1 \\ j + 1 \end{bmatrix} &\stackrel{(3.3)}{=} \begin{bmatrix} n + j + 1 \\ j \end{bmatrix} + (n + j + 1) \begin{bmatrix} n + j + 1 \\ j + 1 \end{bmatrix} = \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \sum_{k=0}^j (n + k) \begin{bmatrix} n + k \\ k \end{bmatrix} + (n + j + 1) \begin{bmatrix} n + j + 1 \\ j + 1 \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^{j+1} (n + k) \begin{bmatrix} n + k \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.11. Mostre que para $n \geq 1$ e $k \geq 1$

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) - (n - 1)s(n - 1, k). \quad (3.13)$$

Solução. Multiplicando ambos os lados da recorrência (3.3) por $(-1)^{n-k}$ resulta que

$$(-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n - 1 \\ k - 1 \end{bmatrix} + (-1)^{n-k} (n - 1) \begin{bmatrix} n - 1 \\ k \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Da definição 3.5 em (3.14), segue-se

$$\begin{aligned} s(n, k) &= (-1)^{n-1-(k-1)} \begin{bmatrix} n - 1 \\ k - 1 \end{bmatrix} + (-1)^1 (-1)^{n-1-k} (n - 1) \begin{bmatrix} n - 1 \\ k \end{bmatrix} \\ s(n, k) &= s(n - 1, k - 1) - (n - 1)s(n - 1, k). \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.12. Mostre que para $n \geq 0$, então

$$x^n = (x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \quad (3.15)$$

Solução. Se $n = 0$ ou $n = 1$, o resultado é trivialmente verdadeiro pois

$$x^0 := 1 = (-1)^{0-0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^0 = s(0, 0)x^0$$

e

$$x^1 = x = (-1)^{1-0} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=0} x^0 + (-1)^{1-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=1} x^1 = s(1, 0)x^0 + s(1, 1)x^1.$$

Se $n \geq 2$, então

$$(x)_n = (x)_{n-1}(x - (n - 1)) = (x)_{n-1}x - (n - 1)(x)_{n-1} \quad (3.16)$$

Seja $\psi(n, k)$ o coeficiente de x^k em $(x)_n$. De (3.16) tem-se que

$$\psi(n, k) = \psi(n - 1, k - 1) - (n - 1)\psi(n - 1, k) \quad (3.17)$$

De (3.17) e (3.13) tem-se que os números $\psi(n, k)$ e $s(n, k)$ são iguais, pois satisfazem a mesma recorrência com a mesma condição inicial de que $\psi(1, 1) = 1 = s(1, 1) = (-1)^{1-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\psi(1, 0) = 0 = s(1, 0) = (-1)^{1-0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 3.13. O que significa:

(a) $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 0$;

Solução. Conforme vimos na definição 3.1, tem-se que $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ representa a soma dos coeficientes de x^n . ■

(b) $\sum_{k=0}^n s(n, k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, para todo $n \geq 0$;

Solução. Na equação 3.15 tem-se que $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ representa a soma dos coeficientes de x^n . ■

Exemplo 3.14. Determine $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ a partir do teorema 3.6.

Solução. $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.2.3 = 6;$
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1.2 + 1.3 + 2.3 = 11;$
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6;$
 $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1.2.3 + 1.2.4 + 1.3.4 + 2.3.4 = 50.$

■

3.3. NÚMEROS DE STIRLING TIPO II

Definição 3.15 (Números de Stirling Tipo II). O número de Stirling tipo II, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, é o número de maneiras distintas de particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos não vazios, com a convenção de que $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} := 1$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 0$ se $k > n > 0$.

Teorema 3.16 (Interpretação Combinatória). $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em $k \leq n$ urnas idênticas, sem que nenhuma urna fique vazia.

Demonstração. Segue imediatamente da definição 3.15 com os objetos sendo os elementos do conjunto e cada uma das k urnas idênticas fazendo o papel de cada um dos elementos da partição. ■

O próximo teorema nos mostra a relação entre o número de funções sobrejetoras e os números de Stirling do tipo II.

Teorema 3.17 (Números de Stirling Tipo II e Funções Sobrejetoras). *Sejam $0 \leq k \leq n$ números naturais, então*

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \quad (3.18)$$

Demonstração.

Cada partição de n elementos em k subconjuntos não vazios, gera $k!$ funções sobrejetoras. Assim, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ nada mais é que o número de funções sobrejetoras $f : A \rightarrow B$ em que $|A| = n$ e $|B| = k$ dividido por $k!$, ou seja,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{T(n, k)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

■

Teorema 3.18 (Relação de Recorrência Números de Stirling Tipo II). *Sejam $n \geq 0$ e $k \geq 1$ inteiros para os quais $k \leq n$, tem-se que*

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (3.19)$$

Demonstração. Consideremos um elemento especial do conjunto de $n+1$ elementos e particionemos o conjunto de todas as partições \mathcal{P} nos dois seguintes conjuntos de partições: $\mathcal{P}_1 := \{\text{partições nas quais o elemento especial forma um subconjunto unitário}\}$ e $\mathcal{P}_1^c := \{\text{partições nas quais o elemento especial **não** forma um subconjunto unitário}\}$, com $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_1^c$. Segue-se, imediatamente, da definição 3.15 que

$$|\mathcal{P}| = \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \quad (\text{distribuir } n+1 \text{ elementos em } k \text{ subconjuntos}). \quad (3.20)$$

$$|\mathcal{P}_1| = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} \quad (\text{distribuir } n \text{ elementos em } k-1 \text{ subconjuntos}). \quad (3.21)$$

e para o cálculo de $|\mathcal{P}_1^c|$ note que devemos ter n elementos distribuídos em k subconjuntos, o que pode ser feito de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ maneiras e para cada uma dessas há k possibilidades de escolha para o subconjunto ao qual o elemento especial pertence. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem segue-se que

$$|\mathcal{P}_1^c| = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (3.22)$$

Desde que $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_1^c|$, o resultado dado em (3.19) segue de (3.20), (3.21) e (3.22).

■

Teorema 3.19. *Se $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$, então*

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \quad (3.23)$$

Demonstração. A prova será feita por indução. Desde que $\binom{n}{k} = 0$ se $n > k = 0$ e $\binom{n}{n} = 1$ se $n \geq 0$, tem-se para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ que (3.23) é verdadeira, pois

$$x^0 = 1 \cdot x^0 = \binom{0}{0} x^0.$$

$$x^1 = 1 \cdot x^1 = \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1.$$

$$x^2 = 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 = \binom{2}{0} x^0 + \binom{2}{1} x^1 + \binom{2}{2} x^2.$$

$$x^3 = 1 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 = \binom{3}{0} x^0 + \binom{3}{1} x^1 + \binom{3}{2} x^2 + \binom{3}{3} x^3.$$

Suponhamos como hipótese de indução que (3.23) é verdadeira para $n - 1$, i.e.,

$$x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k. \quad (3.24)$$

Precisamos mostrar que

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \quad (3.25)$$

Note que $x^{k+1} = x^k(x - k)$, e portanto

$$xx^k = x^{k+1} + kx^k. \quad (3.26)$$

Da hipótese de indução dada em (3.24) e de (3.26) como $k = n - 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
x^n &= xx^{n-1} \stackrel{(3.24)}{=} x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} xx^k = \\
&\stackrel{(3.26)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x^{k+1} + kx^k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} kx^k \quad \left(\binom{n-1}{n} = 0 \quad \forall n > 0 \right) \\
&= \binom{n-1}{0} x^1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} kx^k \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} kx^k \\
&= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n-1}{k-1} + k \binom{n-1}{k} \right] x^k \\
&\stackrel{(3.19)}{=} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k \quad \left(\binom{n}{0} = 0 \quad \forall n > 0 \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.
\end{aligned}$$

■

3.3.1. EXEMPLOS

Exemplo 3.20. Mostre as seguintes identidades via argumento combinatório:

- (a) $\{n\} = \{n\} = 1 \quad \forall n \geq 1;$
- (b) $\{n-1\} = \binom{n}{2} \quad \forall n \geq 1;$
- (c) $\{n\} = 2^{n-1} - 1 \quad \forall n \geq 1;$
- (d) $\{n-2\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} \quad \forall n \geq 2;$

(e) Para todo $n \geq 0$ e $k \geq 0$

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}.$$

Solução.

- (a) Imediato, desde que dado um conjunto com n elementos, só há uma maneira de particioná-los em um único subconjunto ou em n subconjuntos.
- (b) O caso $n = 1$ é trivialmente verdadeiro, pois $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \binom{1}{2} = 0$. Vejamos o caso para um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Tem-se que $\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix}$ é o número de maneiras de particionarmos n elementos em $n - 1$ subconjuntos e isto ocorre se, e somente se, há um subconjunto com 2 elementos (há $\binom{n}{2}$ escolhas possíveis para isso) e os demais $n - 2$ elementos cada um deles forma um subconjunto unitário (há uma única possibilidade para isso). Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o resultado segue.
- (c) O caso $n = 1$ é verdadeiro, pois $0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{1-1} - 1$. Para o caso $n > 1$, inicialmente para fixarmos as ideias, consideremos o caso $n = 3$ e o conjunto P das partes de $I_3 = \{1, 2, 3\}$, ou seja,

$$P = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{1, 2\}\}.$$

As partições de I_3 com 2 subconjuntos não vazios são apenas 3 : $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ e $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$. Observe que, excetuando-se o \emptyset e o próprio conjunto $\{1, 2, 3\}$, cada subconjunto $A \in P$ tem um único correspondente $A^c \in P$ ao qual formam uma única partição $\{A, A^c\}$ de I_3 . Desde que $\{A, A^c\}$ e $\{A^c, A\}$ formam a mesma partição, segue-se que o total de partições de I_3 com dois subconjuntos não vazios é $\frac{2^3-2}{2} = 2^{3-1} - 1$.

De maneira geral, se um conjunto C tem n elementos, então ele tem $2^n - 2$ subconjuntos excluindo-se o \emptyset e o próprio conjunto C . Desses $2^n - 2$ subconjuntos, desde que para cada $A \in P$, existe um único $A^c \in C$

tal que $\{A, A^c\}$ e $\{A^c, A\}$ formam a mesma partição, segue-se que o total de partições de tamanho 2 de C é

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1. \quad (3.27)$$

- (d) Se $n = 2$ ou $n = 3$, então o resultado é imediato, pois $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ e $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$. Consideremos o caso $n \geq 4$. Para existir uma partição de um conjunto de n elementos em $n - 2$ subconjuntos devemos ter, necessariamente, na partição: um conjunto com 3 elementos e $n - 3$ outros conjuntos unitários ou dois conjuntos da partição com 2 elementos e $n - 4$ conjuntos unitários. A primeira situação ocorre de $\binom{n}{3} \cdot 1$ maneiras e para a segunda situação há $\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}{2} \cdot 1$ possibilidades (Note que quando fazemos o produto das combinações para a escolha dos dois pares de subconjuntos, contamos de forma ordenada cada escolha de par, mas isto deve ser desconsiderado, uma vez que na partição a ordem dos subconjuntos não a altera). Segue-se do Princípio Aditivo que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n - 2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}{2!} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

- (e) Particionemos o conjunto \mathcal{P} de todas as partições de I_{n+1} em $k + 1$ subconjuntos com relação à quantidade j de elementos presentes em k dos $k + 1$ subconjuntos, sendo $n + 1 - j$ a quantidade remanescente no $(k + 1)$ -ésimo subconjunto. Sem perda de generalidade, desde que cada um dos subconjuntos necessariamente conterà ao menos um elemento, consideremos que o $n + 1$ -ésimo elemento se encontra no subconjunto $k + 1$. Segue-se então que devemos escolher j dentre n elementos, $\binom{n}{j}$ possibilidades, a serem distribuídos em k subconjuntos, $\left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}$, em que $k \leq j \leq n$, e os restantes $n - j$ sendo distribuídos no subconjunto que já continha o elemento $n + 1$. O resultado segue do Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo.

■

Exemplo 3.21. Sejam m e n números naturais, então mostre que

$$\binom{n+m+1}{m} = \sum_{k=0}^m k \binom{n+k}{k}. \quad (3.28)$$

Demonstração. Faremos a prova por indução em m . De maneira similar ao exemplo 3.10, tem-se que (3.28) é verdadeira para $(m = n = 0)$ e $(n > 0, m = 0)$.

Se $n > 0$ e $m = 1$, então (3.28) também é verdadeira pois

$$\binom{n+1+1}{1} \stackrel{(3.19)}{=} \binom{n+1}{0} + 1 \binom{n+1}{1} = \sum_{k=0}^1 k \binom{n+k}{k}.$$

Admitamos como hipótese de indução que

$$\binom{n+j+1}{j} = \sum_{k=0}^j k \binom{n+k}{k} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3.29)$$

e mostremos que o resultado é válido para $j+1$. Substituindo j por $j+1$ no lado direito de (3.29) tem-se que

$$\begin{aligned} \binom{n+j+1+1}{j+1} &\stackrel{(3.19)}{=} \binom{n+j+1}{j} + (j+1) \binom{n+j+1}{j+1} = \\ &\stackrel{(3.29)}{=} \sum_{k=0}^j k \binom{n+k}{k} + (j+1) \binom{n+j+1}{j+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{j+1} k \binom{n+k}{k}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.22. Mostre que:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}. \quad (3.30)$$

Solução. A primeira igualdade é o teorema 3.19. De fato,

$$\begin{aligned} x^n &\stackrel{(\text{teo } 3.19)}{=} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k (-x)^{\bar{k}} \Rightarrow (-x)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k (x)^{\bar{k}} \Rightarrow \\ (-1)^n x^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k (x)^{\bar{k}} \frac{1}{(-1)^{2k}} \Rightarrow x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k (x)^{\bar{k}} \frac{1}{(-1)^{2k}} (-1)^n \Rightarrow \\ x^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}. \end{aligned}$$

■

PROBLEMAS DE DISTRIBUIÇÃO

4.1. INTRODUÇÃO

Diferentemente de muitas outras áreas da Matemática, em Combinatória e na Teoria dos números, é possível visitar a fronteira do conhecimento, enunciar problemas difíceis e mesmo em aberto sem a necessidade de uma parafernália de conceitos e teoremas sofisticados. Neste capítulo, consideraremos as quatro situações possíveis de distribuição de bolas em urnas: bolas distintas em urnas iguais, bolas distintas em urnas distintas, bolas iguais em urnas distintas, bolas iguais em urnas iguais. Os dois desses primeiros problemas têm uma solução que utiliza recursos básicos de combinatória básica acessíveis ao nível do Ensino Médio, para o terceiro problema apresentaremos uma solução que utiliza os números de Stirling e os números de Bell. Por fim, o quarto e último problema é o mais difícil; para esse último caso, mostraremos a sua relação com a Teoria das partições de um inteiro positivo n exibindo um resultado assintótico que oferece uma boa aproximação para a solução do problema quando tratamos com números suficientemente grandes. Por fim, exibiremos as ideias de Hardy-Ramanujam e a fórmula do número de partições de um inteiro positivo n .

4.2. BOLAS E URNAS DISTINGUÍVEIS

Como todas as n bolas e as r urnas são distintas vamos enumerá-las por B_1, B_2, \dots, B_n e C_1, C_2, \dots, C_r , respectivamente. Nesse caso, para cada uma das n bolas existem r possibilidades distintas para escolher a urna que ela será depositada. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, a quantidade

de maneiras distintas de distribuir as n bolas distintas nas r urnas distintas é:

$$\underbrace{r \times r \times \dots \times r}_{n \text{ fatores}} = r^n.$$

4.3. BOLAS IDÊNTICAS E URNAS DISTINGUÍVEIS

Como as r urnas são distintas vamos enumerá-las por C_1, C_2, \dots, C_r . Nesse caso, como as bolas são idênticas, uma distribuição será distinguida de outra apenas pela quantidade de bolas presentes em cada urna. Nesse caso, sejam x_1, x_2, \dots, x_r as quantidades de bolas que irão ocupar as urnas C_1, C_2, \dots, C_r , respectivamente. Ora, como o total de bolas é n , segue que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n.$$

Portanto, a quantidade de maneiras distintas de distribuirmos n bolas iguais em r urnas distintas corresponde a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$, que é $\binom{n+r-1}{n}$ ou $\binom{n+r-1}{r-1}$, que são binomiais complementares.

4.4. BOLAS DISTINGUÍVEIS E URNAS IDÊNTICAS

Neste caso, o que difere uma distribuição da outra são duas coisas, a saber: a quantidade de bolas presentes em cada urna e uma vez fixadas essas quantidades, quais bolas estão presentes em cada urna.

Na subseção 3.3 estudamos os números de Stirling do tipo II e $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ foi definido em 3.15 como sendo o número de maneiras distintas de particionar um conjunto de n elementos em k subconjuntos não vazios; ademais, vimos que o total de partições era dado pelo número de Bell $B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ e no teorema 3.17 é mostrado que $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ é dado pelo quociente entre o número de funções sobrejetoras e $k!$.

Se pensarmos os n elementos do conjunto como as bolas e os subconjuntos da partição como urnas indistinguíveis tem-se então que $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ é o número de

maneiras de distribuir n bolas numeradas em k urnas; logo o total de maneiras de distribuir n bolas distinguíveis em r urnas idênticas pode ser particionado em relação ao total $k \in \{1, \dots, r\}$ de urnas não vazias e é dado por

$$B_r = \sum_{k=1}^r \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \stackrel{(3.18)}{=} \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

4.5. BOLAS IDÊNTICAS EM URNAS IDÊNTICAS

Nesta seção trataremos o problema de determinar a quantidade de maneiras distintas de distribuirmos n bolas idênticas em r urnas idênticas.

Esse é o caso mais delicado. Para tratá-lo vamos introduzir a noção de partição de um inteiro positivo n , uma noção que mostraremos está intimamente relacionada com esse problema de distribuir n bolas idênticas em r urnas idênticas.

Definição 4.1 (Partição de um Inteiro). Uma partição de um inteiro positivo n em k parcelas é uma lista de inteiros positivos (n_1, n_2, \dots, n_k) tal que

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Além disso, não consideramos como partições distintas quando permutamos as parcelas n_1, n_2, \dots, n_k .

Por exemplo, o inteiro 6 pode ser particionado em 3 parcelas das 3 maneiras a seguir:

$$6 = 4 + 1 + 1, \quad 6 = 3 + 2 + 1, \quad 6 = 2 + 2 + 2.$$

No exemplo acima, as partições $(4, 1, 1)$, $(1, 4, 1)$ e $(1, 1, 4)$ não são consideradas distintas.

Definição 4.2. Vamos representar por $P(n, k)$ a quantidade de partições de um inteiro positivo n em k parcelas inteiras positivas, isto é, $P(n, k)$ representará a quantidade de maneiras distintas de escrever um inteiro positivo como soma de exatamente k inteiros positivos.

Com essa notação, $P(6, 3) = 3$, como revela o exemplo acima.

Teorema 4.3. *Para n e k e inteiros positivos, os números $P(n, k)$ podem ser calculados a partir da seguinte relação de recorrência*

$$P(n, k) = P(n - k, k) + P(n - 1, k - 1). \quad (4.1)$$

Além disso, $P(n, 1) = P(n, n - 1) = P(n, n) = 1$ e $P(n, k) = 0$, se $n < k$.

Demonstração. Para os casos em que $k = 1$, $k = n$ ou $n < k$ tem-se que (4.1) é trivialmente verdadeira. De fato $P(n, 1) = 1$, pois n é a única maneira de escrever n como a "soma" de uma única parcela. Por outro lado,

$$n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n-2) \text{ parcelas}} + 2,$$

é a única partição de n em exatamente $n - 1$ parcelas, o que revela que $P(n, n - 1) = 1$. Note que

$$n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n,$$

é a única partição de n em exatamente n parcelas, revelando que $P(n, n) = 1$. Por fim, se $n < k$ não há nenhuma maneira de escrevermos o inteiro positivo n como a soma de k parcelas inteiras e positivas, o que justifica a igualdade $P(n, k) = 0$, se $n < k$.

Consideremos agora as partições de n em exatamente k partes com $k \in \{2, \dots, n - 1\}$ e particionemos o conjunto dessas partições nos casos em que (a) algumas delas não possuem o algarismo 1 e (b) as que possuem.

(a) Partições que não possuem o algarismo "1". Tomando uma dessas partições

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

se subtrairmos uma unidade em cada uma dessas parcelas obteremos uma partição de $n - k$, pois

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \Rightarrow n - k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1).$$

(b) O restante das partições de n contém o algarismo 1. Por outro lado, a quantidade de partições do inteiro positivo n com exatamente k parcelas inteiras positivas onde pelo menos uma delas é igual a 1 é $P(n-1, k-1)$, pois dada uma partição de $n-1$ com exatamente $k-1$ inteiros positivos, a saber:

$$n-1 = n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} \Rightarrow n = 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1},$$

o que revela que $(1, n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$ é uma partição de n em exatamente k parcelas. Reciprocamente, se (n_1, n_2, \dots, n_k) é uma partição de n em exatamente k parcelas, onde pelo menos uma delas é igual a 1, isto é, $n_i = 1$ para pelo menos um $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, seque que

$$n = n_1 + n_2 + \underbrace{n_i}_{=1} + \dots + n_k \Rightarrow n - \underbrace{1}_{=n_i} = \underbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_k}_{\text{sem a parcela } n_i},$$

que é uma partição do $n-1$ em exatamente $k-1$ parcelas.

Diante do exposto, para n e k e inteiros positivos, os números $P(n, k)$ podem ser calculados a partir da seguinte relação de recorrência

$$P(n, k) = P(n-k, k) + P(n-1, k-1).$$

■

Corolário 4.4. Para n e k e inteiros positivos, os números $P(n, k)$ podem ser calculados pela relação

$$P(n+k, k) = P(n, 1) + P(n, 2) + \dots + P(n, k).$$

A tabela a seguir mostra alguns valores particulares de $P(n, k)$.

(n, k)	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	1	1				
4	1	2	1	1			
5	1	2	2	1	1		
6	1	3	3	2	1	1	
7	1	3	4	3	2	1	1
8	1	4	5	5	3	2	1
9	1	4	7	6	5	3	2
10	1	5	8	9	7	5	3

Observação 4.5. Há dois casos particulares ($k = 2, 3$) em que podemos calcular $P(n, k)$ utilizando a função parte inteira:

$$P(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{e} \quad P(n, 3) = \left\lfloor \frac{n^2}{12} \right\rfloor,$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função parte inteira. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [?].

Teorema 4.6. *A quantidade de maneiras distintas de distribuirmos n bolas idênticas em r urnas idênticas é $P(n, r)$.*

Demonstração. Basta observar que há uma correspondência biunívoca entre cada maneira de distribuir n bolas idênticas em r urnas idênticas e as partições do inteiro positivo n em exatamente r parcelas. De fato, se n_1, n_2, \dots, n_r representam as quantidades de bolas em cada uma das r urnas, segue que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, que consiste numa partição de inteiro positivo n em exatamente r parcelas. Reciprocamente, dada uma partição $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ do inteiro positivo n em exatamente r parcelas, podemos associar a essa partição a distribuição de n bolas idênticas em r urnas idênticas onde n_1, n_2, \dots, n_r são as quantidades de bolas presentes nas r urnas. ■

A teoria das partições de inteiros positivos é bastante interessante e com uma literatura bem vasta. Apenas para motivar o leitor a seguir mais adiante,

vamos tocar em mais dois pontos dessa teoria, a saber: as partições com parcelas distintas e o número total de partições de um inteiro positivo.

Definição 4.7. Sendo n e k inteiros positivos, representaremos por $Q(n, k)$ o número de maneiras distintas de particionar um inteiro positivo n em exatamente k **inteiros positivos distintos**.

Proposição 4.8. Sendo n e k inteiros positivos, os números $Q(n, k)$ satisfazem a seguinte relação de recorrência:

$$Q(n, k) = Q(n - k, k) + Q(n - k, k - 1),$$

com $Q(n, 1) = Q(1, 1) = 1$ e $Q(n, 0) = 0$. Além disso, $P(n, k)$ e $Q(n, k)$ satisfazem a seguinte relação

$$Q(n, k) = P\left(n - \binom{k}{2}, k\right).$$

Observação 4.9. Um problema mais geral é determinar a quantidade de partições distintas de um inteiro positivo n (sem fixar o número de parcelas). Para o número 6, por exemplo, as quantidades possíveis partições são:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 3 \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 \\ &= 1 + 1 + 4 \\ &= 1 + 2 + 3 \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 1 + 5 \\ &= 2 + 4 \\ &= 3 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Para uma melhor visualização, podemos organizar as partições do número 6 da seguinte forma:

A quantidade de partições de um inteiro positivo n é representada por $p(n)$. Note que um inteiro positivo n pode ser escrito como uma soma de no máximo

n parcelas inteiras positivas, segue que $p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$.

Em 1918, matemático inglês G. H. Hardy em parceria com o matemático indiano S. Ramanujam chegaram a uma fórmula assintótica para $p(n)$. Essa mesma fórmula foi demonstrada independentemente pelo matemático russo J. V. Uspensky.

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

G. H. Hardy, S. Ramanujam e H. Rademacher obtiveram uma fórmula fechada para o número de partições de um inteiro positivo n , a saber:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{senh} \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{1}{24} \right) \right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{24} \right)}} \right)$$

onde

$$A_k(n) = \sum_{h=1}^k \delta_{mdc(h,k),1} \exp \left[\pi i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \left(\frac{hj}{k} - \left\lfloor \frac{hj}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\pi i hn}{k} \right],$$

onde δ é o delta de Kronecker.

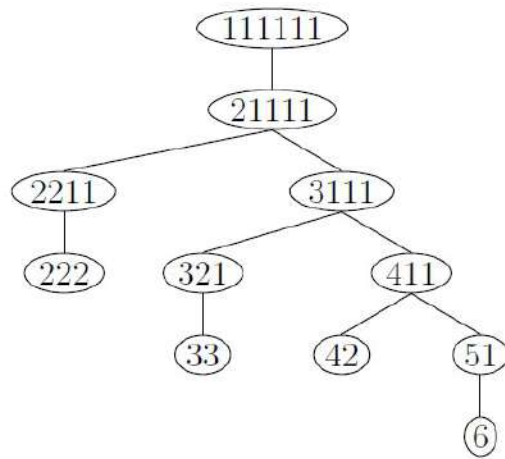


Figura 4.1: G.H. Hardy

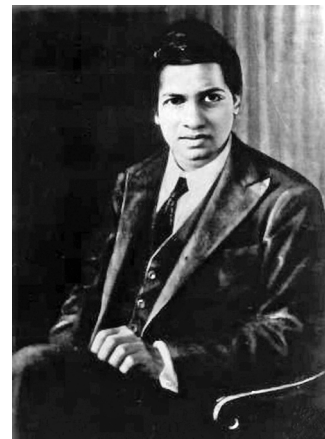


Figura 4.2: S. Ramanujan

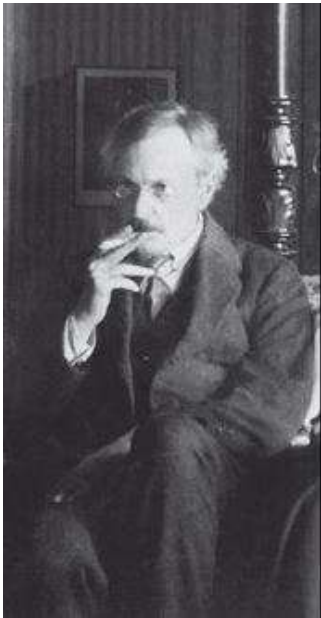


Figura 4.3: J. V. Uspensky



Figura 4.4: H. Rademacher

PROBLEMAS PROPOSTOS

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo colocaremos os exercícios propostos no capítulo de Números Combinatórios do livro *Matemática Discreta* [1] de autoria dos autores do minicurso e o professor Roberto Teodoro. Este livro foi escrito com a finalidade de ser um texto de um primeiro curso de Matemática Discreta. Inicia estabelecendo a linguagem básica dos conjuntos, noções de Lógica e técnicas de demonstração. Em seguida são tratados os temas clássicos de Matemática Discreta: Combinatória, Números Combinatórios (Números Binomiais, Multinomiais, Catalan e Stirling), Probabilidade Discreta, Sequências Numéricas e Relações de Recorrências e finalizando com as Funções Geradoras. Além de uma teoria bastante completa, um outro ponto de destaque do livro é a sua excelente coleção de 297 exemplos detalhadamente resolvidos, que são verdadeiras aulas sobre os assuntos, e a sua enorme coletânea de problemas propostos, um total de 516, que foram extraídos de diversas fontes tais como: livros clássicos sobre o tema, importantes competições matemáticas OBM, OBMEP, IMO, AHSME, AIME, PUTNAN, ..., além de problemas propostos em concursos de professores do PROFMAT, Mestrado em rede nacional.

1. Demonstre as seguintes identidades combinatórias (se possível demonstre via argumento combinatório): (veja [2], [13] e [3]).

(a) $\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*.$

(b) $k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

- (c) $(r - k) \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$
- (d) $\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$
- (e) $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$
- (f) $(-1)^m \binom{-n-1}{m} = (-1)^n \binom{-m-1}{n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$
- (g) $\sum_{k \leq m} \binom{r}{k} (-1)^k = \binom{m-r}{m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$
- (h) $\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p} \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z}$ (Fórmula de Euler).
- (i) $[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}]^2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$
- (j) $\sum_{k \leq m} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m}.$
- (k) $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}.$
- (l) $\sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } r, s \in \mathbb{R}.$
- (m) $\binom{k}{i} (k-i) = k \binom{k-1}{i}.$

2. Mostre que:

$$(a) S = \sum_{k \geq 0} (2k+1) \binom{n}{2k+1} = n2^{n-2}.$$

$$(b) W = \sum_{k \geq 0} 2k \binom{n}{2k} = n2^{n-2}.$$

3. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \dots = \frac{1}{3} \left[2^{n-1} + \cos \frac{n\pi}{3} + (\sqrt{3})^n \cdot \cos \frac{n\pi}{6} \right].$$

4. (IMO-1981) Seja $1 \leq r \leq n$ e considere todos os subconjuntos de tamanho r do conjunto $\{1, \dots, n\}$. Cada um desses subconjuntos tem o menor elemento. Seja $F(n, r)$ a média aritmética destes mínimos. Prove que

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

5. Determine o coeficiente de $x^{12}y^{24}$ em $(x^3 + 2xy^2 + y + 3)^{18}$.
6. Seja $p(x)$ um polinômio cujos coeficientes são números reais, i.e. $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\forall k \in \mathbb{Z}$ tem-se que $p(k) \in \mathbb{Z}$. Mostre que existem $C_0, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p(x) = C_n \binom{x}{n} + C_{n-1} \binom{x}{1} + \dots + C_0 \binom{x}{0}.$$

7. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi\sqrt{3} + 36}{27}$.

8. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

(a) $\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2$.

(b) Use o item anterior e mostre que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

9. Prove que quatro números binomiais consecutivos

$$\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \binom{n}{r+2}, \binom{n}{r+3}$$

não podem ser termos consecutivos de uma progressão aritmética.

10. Prove que para qualquer inteiro não negativo n a quantidade de números ímpares na lista

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$$

é uma potência de 2.

11. Determine, para cada inteiro não negativo n , a soma

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \cdots + \binom{2n}{2n}^2.$$

12. Determine o valor do inteiro não negativo m tal que $\sum_{i=0}^m \binom{10}{i} \binom{20}{m-i}$ seja máxima.

13. Calcule a soma

$$S = \binom{30}{0} \binom{30}{10} - \binom{30}{1} \binom{30}{11} + \binom{30}{2} \binom{30}{12} - \cdots + \binom{30}{20} \binom{30}{30}.$$

14. Se n é um inteiro não negativo e par, determine

$$S = \frac{2 \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}{n!} \left[\binom{2}{0} - 2 \binom{2}{1} + 3 \binom{2}{2} - \cdots + (-1)^n (n+1) \binom{n}{2} \right].$$

15. Para qualquer inteiro positivo n , prove que:

$$\sum_{k=0}^m \frac{\binom{2n-k}{k} (2n-4k+1)}{\binom{2n-k}{n} (2n-2k+1)} 2^{n-2k} = \frac{\binom{n}{m}}{\binom{2n-2m}{n-m}} 2^{n-2m}.$$

16. Prove que:

$$\binom{n}{m} + 2 \binom{n-1}{m} + 3 \binom{n-2}{m} + \cdots + (n-m+1) \binom{n}{m} = \binom{n+2}{m+2}.$$

17. Prove que:

$$2^k \binom{n}{0} \binom{n}{k} - 2^{k-1} \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}.$$

18. Mostre que:

$$\binom{n}{0} - 2^2 \binom{n}{1} + 3^2 \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n (n+1)^2 \binom{n}{n} = 0.$$

19. Seja

$$s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \text{ e}$$

$$S_n = 1 + \frac{q+1}{2} + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+q}{2}\right)^n, \quad q \neq 1.$$

Prove que:

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} s_1 + \binom{n+1}{3} s_2 + \cdots + \binom{n+1}{n} s_n = 2^n S_n.$$

20. Se $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} = \alpha_n$, calcule, em função de α_n , a soma $\sum_{k=0}^n \frac{k}{\binom{n}{k}}$.

21. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de Fibonacci. Prove que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = f_{n+1}.$$

22. Mostre que se $|x| < 1$, então

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

23. Se $1 \leq k \leq n-1$, então prove que:

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}.$$

24. Se f_n é o n -ésimo número de Fibonacci, mostre que:

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n}.$$

25. Se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $n \geq m$, mostre que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}.$$

26. Prove que:

(a)

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{\binom{n}{0}}{x} - \frac{\binom{n}{1}}{x+1} + \frac{\binom{n}{2}}{x+2} - \cdots \pm \frac{\binom{n}{n}}{x+n}.$$

(b) A identidade acima pode ser provada pelo teorema binomial em $(1-x)^{n+1}$ quando $x = 1$.

27. Mostre que todo coeficiente multinomial $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$ pode ser escrito como um produto de coeficientes binomiais.

28. Sendo n, k_1, k_2 e k_3 são inteiros não negativos, definimos o coeficiente multinomial

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} := \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

Mostre que:

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{n}{k_1-1, k_2, k_3} + \binom{n}{k_1, k_2-1, k_3} + \binom{n}{k_1, k_2, k_3-1}.$$

29. Prove que:

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n+j+k}{n, j, k} \left(\frac{1}{3}\right)^{j+k} = 3^n.$$

30. Para cada inteiro $k \geq 0$, defina

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k.$$

(a) Obtenha fórmulas fechadas para $S_0(n), S_1(n), S_2(n), S_3(n)$.

(b) Prove que $S_k(n)$ é um polinômio de grau $k+1$ em n cujo coeficiente dominante é $\frac{1}{k+1}$.

31. Para m, n, i, j, p e $k \in \mathbb{N}^*$, prove que:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \left(\prod_{i=1}^k i! \right) \mid \frac{\left\{ \binom{k+1}{2} \left[n + \frac{(2k+1)r}{3} \right] \right\}!}{\prod_{i=1}^k [(n+ir)!]^i} \\
 \text{(b)} \quad & \prod_{i=1}^k [(i!)!] \mid \frac{\left[\sum_{i=1}^k i(i!) \right]!}{\prod_{i=1}^k (i!)^{i!}} \\
 \text{(c)} \quad & p! \mid \frac{(np)!}{(n!)^p} \\
 \text{(d)} \quad & \prod_{i=1}^k (i^j)! \mid \left[\sum_{i=1}^k i^j \right]! \\
 \text{(e)} \quad & \prod_{i=1}^k (i)! \mid \binom{k+1}{2}! \\
 \text{(f)} \quad & \prod_{i=1}^k (i^2)! \mid \left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \right]!
 \end{aligned}$$

32. Seja $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência dos números de Catalan. Mostre que todas as matrizes da sequência

(a) $a_{i,j} := C_{i+j-2}$ têm determinantes iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{bmatrix} \dots$$

(b) $a_{i,j} := C_{i+j-1}$ têm determinantes iguais a 1;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \\ 14 & 42 & 132 & 429 \end{bmatrix} \cdots$$

- (c) $a_{i,j} := C_{i+j}$ com $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ e de ordem $n-1$ têm determinantes iguais a n .

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \\ 14 & 42 & 132 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_n \\ C_3 & C_4 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} \end{bmatrix} \cdots$$

33. Mostre que o total de permutações de $(1, 2, \dots, n)$ que não contém qualquer subsequência crescente de comprimento 3 é C_n .
34. Quantas são as permutações de (x_1, x_2, \dots, x_n) tais que $x_i \in \mathbb{Z}, x_i < i$ e $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$?
35. Seja um polígono com 28 lados cujos vértices são numerados consecutivamente por P_1, P_2, \dots, P_{28} .
- (a) Quantas são as triangulações nas quais $\triangle P_1 P_8 P_{12}$ está presente?
- (b) Quantas são as triangulações do polígono em que os lados $P_1 P_8$, $P_1 P_5$ e $P_{16} P_{22}$ figuram?

36. Mostre que C_n pode ser dado por:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{ou} \quad C_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}.$$

37. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$(a) \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k};$$

$$(b) (x + y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

38. Prove que $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \geq \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

39. Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcule

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} 2^{-k} k!$$

e mostre que é zero quando n é par.

40. Prove as identidades (veja [2]):

$$(a) \left\{ \begin{smallmatrix} n+k+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{j=0}^k j \left\{ \begin{smallmatrix} n+j \\ j \end{smallmatrix} \right\};$$

$$(b) \left[\begin{smallmatrix} n+k+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{j=0}^k (n+j) \left[\begin{smallmatrix} n+j \\ j \end{smallmatrix} \right];$$

$$(c) \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ l+m \end{smallmatrix} \right\} \binom{l+m}{l} = \sum_{l \leq k \leq n-m} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-k \\ m \end{smallmatrix} \right\} \binom{n}{k};$$

$$(d) \left[\begin{smallmatrix} n \\ l+m \end{smallmatrix} \right] \binom{l+m}{l} = \sum_{l \leq k \leq n-m} \left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} n-k \\ m \end{smallmatrix} \right\} \binom{n}{k};$$

$$(e) \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left[\begin{smallmatrix} m+k \\ k \end{smallmatrix} \right];$$

$$(f) \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-m \end{smallmatrix} \right] = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left\{ \begin{smallmatrix} m+k \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GOMES, C., DINIZ, I.C. e OLIVEIRA, R. T. (2021). *Matemática Discreta*. Editora Livraria da Física.
- [2] Graham L., Knuth D. E., Patashnik O. (1994) *Concrete mathematics: a foundation for computer science* Addison-Wesley.
- [3] Miranda, J.C. S., Diniz, I.C. (2012) *Paridade do Número Binomial Médio* Sociedade Brasileira de Matemática.
- [4] CARVALHO, P. C. P, MORGADO, A. C. O, FERNANDEZ, P. E PITOMBEIRA, J. B. *Análise Combinatória e Probabilidade* Sexta edição - SBM.
- [5] Stanley, Richard P. (2015). *Catalan Numbers* Cambridge University Press.
- [6] *XIV Olimpíada Internacional de Matemática. Cracóvia, Polônia (1972)*.
- [7] Aguiar, M. and Hsiao, S. (2004) *Canonical Characters on Quasi-Symmetric Functions and Bivariate Catalan Numbers*. Electronic Journal of Combinatorics
- [8] Gessel, I. e Xin, G. (2005) *A Combinatorial Interpretation of the Numbers $6(2n)!/n!(n+2)!$* . Journal of Integer Sequences
- [9] Gessel, I. (1992) *Super ballot numbers*. Journal of Symbolic Computation.

- [10] Dickson, L.E.(1999)*History of the Theory of Numbers*AMS Chelsea Publishing
- [11] Tweddle, I. (2003) *James Stirling's Methodus Differentialis : An Annotated Translation of Stirling's Text* Springer-Verlag London
- [12] Nielsen, N. (1965)*Die Gammafunktion*Chelsea, NewYork
- [13] Stanley R.P. (1986)*Enumerative Combinatorics*
- [14] Stillwell, J. (1989)*Mathematics and Its History*Springer New York



O MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO ESFÉRICA E APLICAÇÕES ÀS EDPs ELÍPTICAS

TIAGO L. COELHO COELHO E JOÃO R. SANTOS JÚNIOR

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

Dedicatória do autor Tiago L. Coelho Coelho:

À minha esposa, Valeska Coelho;
Aos meus pais, Djacir e Márcia;
À minha irmã, Tainá Coelho;
Aos meus irmãos e irmãs em Cristo

Dedicatória do autor João R. Santos Júnior:

Às mulheres da minha vida, Clara San Martin e Carolline Palheta;
Aos meus pais, Lourdes Lima e Miguel Lins;
À minha irmã, Juliana Lima

SUMÁRIO

Prefácio

1 O método de minimização esférica

1.1 O Teorema de Minimização Esférica

2 Aplicações

2.0.1 Um problema linear

2.0.2 Um problema de autovalor

2.0.3 Uma não linearidade do tipo potência

2.0.4 Um problema do tipo côncavo e convexo

2.0.5 Um problema de autovalor perturbado

Apêndices

A Resultados importantes

Referências

PREFÁCIO

Este minicurso está baseado na tese de doutorado do autor Tiago L. Coelho Coelho, defendida em Fevereiro de 2022 no Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPa-UFAM, sob orientação do autor João R. Santos Júnior. Na tese em questão é proposto um método alternativo para obtenção de pontos críticos de determinados funcionais de classe C^1 . Para sermos mais específicos, nosso principal interesse nestas notas é estabelecer um método que nos permita encontrar pontos críticos de funcionais que pertencem a uma classe adequada, a qual chamaremos de (\mathcal{J}) . Tal método, o qual denominamos “Método de minimização esférica”, consiste em associar pontos críticos de um funcional a pontos críticos de uma função real de variável real, reduzindo assim a tarefa não-trivial de buscar pontos críticos de funcionais definidos em Espaços de Banach à outra, bem mais tratável e passível de ser executada com técnicas clássicas provenientes do Cálculo Diferencial de funções de uma variável, de obter pontos críticos para uma função real de variável real. Como consequência, somos capazes de resolver alguns problemas de equações diferenciais parciais elípticas, cujo funcional energia associado pertence à referida classe.

O minicurso está dividido em duas partes: 1) Na primeira parte, estabeleceremos o método de minimização esférica, enunciando e demonstrando os conceitos e resultados fundamentais para este fim; 2) Finalmente, com o objetivo de evidenciar vantagens e desvantagens do método que estabelecemos, resolveremos alguns problemas clássicos, comparando os resultados do nosso método com métodos que são comumente utilizados para solucionar esses problemas.

Belém, Junho de 2022

Tiago L. Coelho Coelho

João R. Santos Júnior

O MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO ESFÉRICA

Neste capítulo, desenvolveremos a teoria do Método de Minimização Esférica. Na Seção 1.1, vamos apresentar as definições iniciais, estabelecer hipóteses e demonstrar algumas propriedades. Em seguida, faremos a demonstração do teorema principal.

1.1. O TEOREMA DE MINIMIZAÇÃO ESFÉRICA

Seja E Banach reflexivo e considere um funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$J = \Psi - \Phi,$$

com $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses

(Φ_1) Φ e $u \mapsto \Phi'(u)u$ são fracamente semicontínuos superiormente;

(Φ_2) Se $\Phi'(u) = 0$, então $\Phi(u) = 0$;

(Φ_3) Existe uma sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que $u_n \rightarrow 0$ e

$$\Phi(u_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $\Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ verifica as condições

(Ψ_1) Ψ é radialmente simétrico;

(Ψ_2) Fixado $r \geq 0$, $\Psi'(u)u = r^p$ para todo $u \in S_r$ e para algum $p \geq 1$.

Definição 1.1. Dizemos que o funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ pertence à classe (\mathcal{J}) se

$$J = \Psi - \Phi$$

e $\Psi, \Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazem, respectivamente, (Ψ_1)–(Ψ_2) e (Φ_1)–(Φ_3).

No caso em que J é o funcional energia associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $E = H_0^1(\Omega)$ e $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 1$ ou $N = 2$, veremos que J pertence à classe (\mathcal{J}), sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Proposição 1.2. *Para cada $r > 0$, o funcional Φ é limitado superiormente em B_r e seu valor máximo é atingido na fronteira. Em outras palavras, existe $u_r \in S_r$ tal que*

$$\Phi(u_r) = \max_{\|u\|=r} \Phi(u) = \max_{\|u\|\leq r} \Phi(u).$$

Demonstração:

Por (Φ_1), Φ é fracamente semicontínuo superiormente e, desde que E é um espaço de Banach reflexivo, B_r é um conjunto fracamente compacto. Portanto, aplicando o Teorema A.1, Φ é limitado superiormente em B_r e existe um ponto $u_r \in B_r$ tal que

$$\Phi(u_r) = \max_{\|u\|\leq r} \Phi(u).$$

Agora, vamos supor que u_r pertença ao interior de B_r . Neste caso, u_r seria um ponto crítico de Φ , isto é, $\Phi'(u_r) = 0$, e, por (Φ_3) , existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0} \in B_r$ e

$$0 < \Phi(u_{n_0}) \leq \max_{\|u\| \leq r} \Phi(u) = \Phi(u_r).$$

Entretanto, por (Φ_2) , também teríamos que $\Phi(u_r) = 0$, o que seria um absurdo, provando que $u_r \in S_r$.

□

Observação 1.3. Também podemos trocar (Φ_2) pela hipótese

(Φ'_2) Fixado $r > 0$, $\Phi(u) \leq \Phi'(u)u$ para todo $u \in \mathcal{G}_r$, sendo

$$\mathcal{G}_r := \left\{ u \in B_r; \Phi(u) = \max_{\|v\| \leq r} \Phi(v) \right\}.$$

Quando houver essa mudança ao longo do texto, o leitor será avisado.

De agora em diante, para $r > 0$, usaremos a notação u_r para nos referirmos ao máximo de Φ restrito a S_r . No caso em que $r = 0$, simplesmente teremos que

$$\max_{\|u\|=0} \Phi(u) = \Phi(0).$$

Fixado $r > 0$, por hipótese, temos que $\Phi, \Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'(u)u = r^p, \forall u \in S_r.$$

Além disso, pela Proposição 1.2, u_r é o máximo de Φ restrito a S_r . Logo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Teorema A.2), existe uma constante $\lambda_r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(u_r)v = \lambda_r \Psi'(u_r)v, \forall v \in E.$$

Tomando $v = u_r$ e usando (Ψ_2) , obtemos que

$$\lambda_r = \frac{1}{r^p} \Phi'(u_r)u_r. \tag{1.1}$$

Por outro lado, por (Ψ_1) , o valor de Ψ não se altera para todo $u \in S_r$. Logo, note que u_r é também o mínimo do funcional J restrito a S_r . Em outras palavras,

$$J(u_r) = \Psi(u_r) - \max_{\|u\|=r} \Phi(u) = \min_{\|u\|=r} J(u).$$

Novamente, aplicando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, uma vez que $J, \Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'(u)u = r^p, \quad \forall u \in S_r,$$

existe $\gamma_r \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_r)v = \gamma_r \Psi'(u_r)v, \quad \forall v \in E,$$

ou ainda

$$\Psi'(u_r)v - \Phi'(u_r)v = \gamma_r \Psi'(u_r)v, \quad \forall v \in E.$$

Escolhendo $v = u_r$ e usando (Ψ_2) , segue que

$$r^p - \Phi'(u_r)u_r = r^p \gamma_r.$$

Por fim, dividindo a expressão por r^p e usando (1.1), obtemos a igualdade

$$\gamma_r = 1 - \lambda_r, \tag{1.2}$$

que será de grande importância mais adiante (ver Teorema 1.10).

A partir de agora, estabeleceremos a relação entre o funcional J e uma função real, a qual chamaremos de *função energia*, e provaremos o teorema que nos permitirá obter pontos críticos do funcional a partir do estudo da função energia.

Definição 1.4. A função energia é a função $\zeta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\zeta(r) := \tau(r) - \varphi(r),$$

sendo

$$\tau(r) := \Psi|_{S_r}$$

e

$$\varphi(r) := \max_{\|u\|=r} \Phi(u).$$

Note que a função energia e o funcional J se relacionam pela igualdade

$$\zeta(r) = \min_{\|u\|=r} J(u) = J(u_r).$$

Além disso, fazendo uma mudança de variável, é possível escrever φ na forma

$$\varphi(r) = \max_{\|u\|=1} \Phi(ru),$$

o que nos auxiliará durante as aplicações.

O objetivo agora é mostrar que a existência de um ponto crítico para a função ζ implica a existência de um ponto crítico para o funcional J . Com o intuito de estabelecer essa relação, estudaremos a diferenciabilidade de τ e φ .

Proposição 1.5. *A função τ é contínua.*

Demonstração:

Provaremos primeiro que τ é contínua em 0. De fato, por (Ψ_1) , podemos tomar qualquer representante na esfera S_r para calcular $\tau(r)$. Sendo assim, seja $\{r_n\}$ uma sequência de números positivos convergindo para zero e, para cada n , tome $u_n \in S_{r_n}$ arbitrário. Temos que $u_n \rightarrow 0$, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Pela continuidade de Ψ , segue então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(u_n) = \Psi(0) = \tau(0).$$

Agora, demonstraremos a continuidade no intervalo $(0, \infty)$. Com efeito, fixe $r_0 > 0$ e seja $u_0 \in S_{r_0}$ arbitrário. Logo, por (Ψ_1) e pela continuidade de Ψ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tau(r_0 + r) = \lim_{r \rightarrow 0} \Psi\left(u_0 + \frac{r}{r_0}u_0\right) = \Psi(u_0) = \tau(r_0).$$

□

Proposição 1.6. *A função τ é diferenciável em $(0, \infty)$ e*

$$\tau'(r) = r^{p-1}.$$

Demonstração:

Mais uma vez, devido à hipótese (Ψ_1) , podemos tomar qualquer representante na esfera S_r para calcular $\tau(r)$. Assim, fixe $r_0 > 0$ e tome $u_0 \in S_{r_0}$ arbitrário. Considerando $r \in (-r_0, \infty)$, temos que

$$\frac{\tau(r_0 + r) - \tau(r_0)}{r} = \frac{1}{r} \left[\Psi \left(u_0 + \frac{r}{r_0} u_0 \right) - \Psi(u_0) \right].$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $0 < b_r < 1$ tal que

$$\frac{1}{r} \left[\Psi \left(u_0 + \frac{r}{r_0} u_0 \right) - \Psi(u_0) \right] = \frac{1}{r_0} \Psi' \left(u_0 + b_r \frac{r}{r_0} u_0 \right) u_0.$$

Consequentemente,

$$\tau'(r_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tau(r_0 + r) - \tau(r_0)}{r} = \frac{1}{r_0} \Psi'(u_0) u_0.$$

Pela hipótese (Ψ_2) ,

$$\tau'(r_0) = r_0^{p-1}.$$

□

Proposição 1.7. *A função φ é contínua.*

Demonstração:

Provaremos primeiro que φ é contínua em 0. De fato, note que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \|u_r\| = \lim_{r \rightarrow 0^+} r = 0.$$

Pela continuidade de Φ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(u_r) = \Phi(0) = \varphi(0).$$

Agora, demonstraremos a continuidade em $(0, \infty)$. Com efeito, seja $\{r_n\}$ uma sequência de números positivos tal que $r_n \rightarrow r_0 > 0$. Pela Proposição 1.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $u_n \in S_{r_n}$ tal que

$$\Phi(u_n) = \max_{\|u\|=r_n} \Phi(u) = \max_{\|u\|\leq r_n} \Phi(u).$$

Uma vez que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em E e esse conjunto é um espaço de Banach reflexivo, obtemos, a menos de uma subsequência, que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } E.$$

Segue então que

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0,$$

o que significa que $u_0 \in B_{r_0}$. Sendo assim, observe que

$$\Phi(u_0) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{r_n}{r_0} u_0\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n). \quad (1.3)$$

Além disso,

$$\Phi(u_0) \leq \varphi(r_0). \quad (1.4)$$

Por outro lado, seja $u_* \in S_{r_0}$ tal que

$$\varphi(r_0) = \Phi(u_*).$$

Então

$$\Phi\left(\frac{r_n}{r_0} u_*\right) \leq \Phi(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela hipótese (Φ_1) , obtemos que

$$\varphi(r_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{r_n}{r_0} u_*\right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0). \quad (1.5)$$

Usando (1.4) e (1.5), temos que

$$\Phi(u_0) = \varphi(r_0)$$

e, por (1.3) e (1.5),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u_0).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u_0) = \varphi(r_0).$$

□

Proposição 1.8. *O funcional $u \mapsto \Phi'(u)u$ atinge o máximo no conjunto*

$$\mathcal{G}_r = \{u \in B_r; \Phi(u) = \varphi(r)\}.$$

Demonstração:

Por definição, \mathcal{G}_r é um conjunto limitado, pois $\mathcal{G}_r \subset B_r$. Agora, provaremos que \mathcal{G}_r é fracamente fechado. Com efeito, seja $\{u_n\} \subset \mathcal{G}_r$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } E.$$

Temos que

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = r,$$

o que significa que

$$\Phi(u_0) \leq \varphi(r).$$

Por outro lado, desde que (Φ_1) ocorre e $\{u_n\} \subset \mathcal{G}_r$, segue que

$$\varphi(r) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0).$$

Sendo assim, $u_0 \in \mathcal{G}_r$. Logo, \mathcal{G}_r é fracamente fechado e limitado e, consequentemente, fracamente compacto. E, desde que $u \mapsto \Phi'(u)u$ é fracamente semicontínuo superiormente pela hipótese (Φ_1) , o Teorema A.1 nos garante que o máximo desse funcional é atingido em \mathcal{G}_r .

□

Vale ressaltar que o conjunto \mathcal{G}_r está bem definido, pois, pela Proposição 1.2, já mostramos que existe pelo menos um máximo para o funcional Φ restrito a B_r . Além disso, pela mesma proposição, também temos que $\mathcal{G}_r \subset S_r$.

Proposição 1.9. *A função φ é diferenciável em $(0, \infty)$ e*

$$\varphi'(r) = \frac{1}{r} \max_{u \in \mathcal{G}_r} \Phi'(u)u.$$

Demonstração:

Fixe $r_0 > 0$ e tome $u_{r_0} \in \mathcal{G}_{r_0}$ e $u_{r_0+r} \in \mathcal{G}_{r_0+r}$, com $r \in (-r_0, \infty)$. Por definição,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} &= \frac{1}{r} [\Phi(u_{r_0+r}) - \Phi(u_{r_0})] \\ &\geq \frac{1}{r} \left[\Phi\left(u_{r_0} + \frac{r}{r_0}u_{r_0}\right) - \Phi(u_{r_0}) \right]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $0 < c_r < 1$ tal que

$$\frac{1}{r} \left[\Phi\left(u_{r_0} + \frac{r}{r_0}u_{r_0}\right) - \Phi(u_{r_0}) \right] = \frac{1}{r_0} \Phi' \left(u_{r_0} + c_r \frac{r}{r_0}u_{r_0} \right) u_{r_0}.$$

Consequentemente,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} \geq \frac{1}{r_0} \Phi'(u_{r_0})u_{r_0}, \quad \forall u_{r_0} \in \mathcal{G}_{r_0}.$$

Uma vez que u_{r_0} foi fixado arbitrariamente, a Proposição 1.8 nos permite escolher justamente a função que é um ponto de máximo no conjunto. Em outras palavras,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} \geq \frac{1}{r_0} \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u. \quad (1.6)$$

Por outro lado, pela definição de \mathcal{G}_r , obtemos que

$$\frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{r} \left[\Phi(u_{r_0+r}) - \Phi\left(u_{r_0+r} - \frac{r}{r_0+r}u_{r_0+r}\right) \right].$$

Mais uma vez, existe uma constante $0 < d_r < 1$ tal que

$$\frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{r_0+r} \Phi' \left(u_{r_0+r} - d_r \frac{r}{r_0+r}u_{r_0+r} \right) u_{r_0+r}.$$

Note que

$$\Phi' \left(\left(1 - d_r \frac{r}{r_0+r}\right) u_{r_0+r} \right) u_{r_0+r} = \frac{\Phi' \left(\left(1 - d_r \frac{r}{r_0+r}\right) u_{r_0+r} \right) \left(\left(1 - d_r \frac{r}{r_0+r}\right) u_{r_0+r} \right)}{\left(1 - d_r \frac{r}{r_0+r}\right)}.$$

Ou seja,

$$\frac{\varphi(r_0 + r) - \varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{(r_0 + r) \left(1 - d_r \frac{r}{r_0 + r}\right)} \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0 + r(1-d_r)}} \Phi'(u)u.$$

Provaremos agora que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left[\max_{u \in \mathcal{G}_{r_0 + r(1-d_r)}} \Phi'(u)u \right] \leq \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u.$$

De fato, seja $\{r_n\}$ uma sequência de números positivos convergindo para zero. Para cada n , escolha $u_n \in \mathcal{G}_{r_0 + r_n(1-d_{r_n})}$ tal que

$$\Phi'(u_n)u_n = \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0 + r_n(1-d_{r_n})}} \Phi'(u)u.$$

Desde que $\|u_n\| = r_0 + r_n(1 - d_{r_n})$, $\{u_n\}$ é limitada em E , que é Banach reflexivo. Então existe, a menos de uma subsequência, uma função $u_0 \in E$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } E$$

e

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = r_0,$$

o que significa que

$$\Phi(u_0) \leq \varphi(r_0).$$

Por outro lado, pela continuidade de φ e por (Φ_1) ,

$$\varphi(r_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_0 + r_n(1 - d_{r_n})) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0).$$

Ou seja, $u_0 \in \mathcal{G}_{r_0}$ e $\|u_0\| = r_0$. Por fim, usando novamente (Φ_1) , provamos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0 + r_n(1-d_{r_n})}} \Phi'(u)u = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi'(u_n)u_n \leq \Phi'(u_0)u_0 \leq \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u.$$

Segue então que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r_0 + r) - \varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{r_0} \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u. \quad (1.7)$$

Usando (1.6) e (1.7), concluímos que φ é diferenciável em $(0, \infty)$ e

$$\varphi'(r_0) = \frac{1}{r_0} \max_{u \in \mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u.$$

□

Até aqui, a notação u_r referia-se apenas ao máximo de Φ restrito à esfera S_r , com $r > 0$. Entretanto, a partir de agora, consideraremos que a função u_r é também o máximo de $u \mapsto \Phi'(u)u$ restrito a \mathcal{G}_r .

Teorema 1.10 (Teorema de Minimização Esférica). *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe (\mathcal{J}) . Fixado $r > 0$, uma função u_r é um ponto crítico do funcional J se, e somente se, r é um ponto crítico da função energia ζ .*

Demonstração:

Suponha, primeiramente, que r é um ponto crítico da função energia ζ . Então

$$\varphi'(r) = \tau'(r).$$

Pela Proposição 1.6 e pela Proposição 1.9,

$$\frac{1}{r} \max_{u \in \mathcal{G}_r} \Phi'(u)u = r^{p-1}.$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{r} \Phi'(u_r)u_r = r^{p-1}.$$

Usando (1.1), segue que

$$\lambda_r = 1.$$

Consequentemente, pela igualdade (1.2),

$$\gamma_r = 0.$$

Portanto, u_r é ponto crítico de J , pois

$$J'(u_r)v = \gamma_r \Psi'(u_r)v = 0, \forall v \in E.$$

Agora, suponha que, para algum $r > 0$, u_r é um ponto crítico do funcional J . Pelas definições e resultados anteriores, já sabemos que

$$\zeta'(r) = r^{p-1} - \frac{1}{r} \Phi'(u_r)u_r$$

e

$$J'(u_r)v = \Psi'(u_r)v - \Phi'(u_r)v, \forall v \in E.$$

Sendo assim, escolhendo $v = u_r$, obtemos a relação

$$\zeta'(r)r = J'(u_r)u_r. \quad (1.8)$$

Logo, desde que u_r é um ponto crítico de J e $r > 0$, segue de (1.8) que

$$\zeta'(r) = 0.$$

□

Observação 1.11. Vale ressaltar que $u_r \neq 0$, pois $\|u_r\| = r > 0$. Isso significa que as soluções encontradas pelo Método de Minimização Esférica são não triviais.

Note que o fato de ζ não ter pontos críticos não implica necessariamente que não existam soluções para um determinado problema, porque é possível que exista um ponto crítico de J sem que essa função seja do tipo u_r . Em alguns casos, faz sentido usar o Método de Minimização Esférica em um subconjunto de E , desde que sejamos capazes de mostrar, usando outro raciocínio, que o ponto crítico obtido para o funcional J restrito ao subconjunto é uma solução para o problema (ver capítulo 2).

O próximo resultado nos mostra que o Método de Minimização Esférica também pode ser eficiente em encontrar mínimos globais.

Proposição 1.12. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe (\mathcal{J}) . Se existe $r_0 > 0$ tal que*

$$\zeta(r_0) = \min_{r>0} \zeta(r),$$

então

$$J(u_{r_0}) = \min_{u \in E} J(u).$$

Demonstração:

Por hipótese, temos que existe $r_0 > 0$ tal que

$$J(u_{r_0}) = \zeta(r_0) = \min_{r>0} \zeta(r).$$

Suponha então que exista uma função $u_* \in E$, com $\|u_*\| = r_* > 0$, de modo que

$$J(u_*) < J(u_{r_0}).$$

Entretanto, neste caso, teríamos que

$$\zeta(r_*) \leq J(u_*) < J(u_{r_0}) = \min_{r>0} \zeta(r),$$

o que é um absurdo. Logo,

$$J(u_{r_0}) = \min_{u \in E} J(u).$$

□

APLICAÇÕES

Neste capítulo, utilizaremos o Método de Minimização Esférica para resolver diversos problemas já conhecidos na literatura e obter vantagens significativas em comparação com outros métodos existentes.

Nesta seção, faremos diversas aplicações do Método de Minimização Esférica, considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $E = H_0^1(\Omega)$ e

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2.$$

Claramente, Ψ satisfaz a hipótese (Ψ_1) . Além disso, (Ψ_2) também ocorre, pois

$$\Psi'(u)u = r^2, \quad \forall u \in S_r.$$

Logo, para demonstrar que J é de classe (\mathcal{J}) , verificaremos apenas as hipóteses de Φ . As soluções denotadas por u_r serão funções do espaço $H_0^1(\Omega)$ que maximizam o funcional Φ na esfera S_r e o funcional $u \mapsto \Phi'(u)u$ no conjunto \mathcal{G}_r . Quando estivermos tratando de um subespaço de $H_0^1(\Omega)$, isto será especificado na resolução.

2.0.1. UM PROBLEMA LINEAR

Nesta aplicação, provaremos que o Método de Minimização Esférica, além de garantir a existência de solução a partir de uma função real, também nos fornece uma informação a mais sobre a norma da solução.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $f \not\equiv 0$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Lema 2.1. *O funcional J pertence à classe (\mathcal{J}) .*

Demonstração:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\left| \int_{\Omega} f(x)u_n \, dx - \int_{\Omega} f(x)u \, dx \right| \leq \|u_n - u\|_2 \|f\|_2 \rightarrow 0,$$

o que implica que Φ é fracamente contínuo. Uma vez que $\Phi(u) = \Phi'(u)u$, fica evidente que (Φ_1) e (Φ_2) ocorrem. Com relação à condição (Φ_3) , suponha que

$$\int_{\Omega} f(x)v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Todavia, pelo Teorema A.3, teríamos que $f = 0$ q.t.p. em Ω , o que é uma contradição. Então existe uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(v) = \int_{\Omega} f(x)v \, dx > 0.$$

Tomando $u_n = \frac{1}{n}v$, demonstramos (Φ_3) . Logo, J é de classe \mathcal{J} . Note que acabamos de provar também que

$$\max_{\|u\|=r} \int_{\Omega} f(x)u \, dx > 0.$$

□

Teorema 2.2. *O problema (2.1) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 2.1, fica bem definida a função energia, dada por

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - r \max_{\|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Observe como foi possível, usando o Método de Minimização Esférica, ter a possibilidade de encontrar soluções para (2.1) a partir do estudo de pontos críticos de um simples polinômio do 2º grau. Neste caso, pelo fato do coeficiente de r ser negativo, temos uma parábola com concavidade para cima. Sendo assim, é evidente que há um ponto crítico (denotado no gráfico por r_*) para a função energia. Derivando ζ e igualando a 0, obtemos que

$$r_* = \max_{\|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Portanto, pelo Teorema de Minimização Esférica (ver Teorema 1.10), u_{r_*} é um ponto crítico de J e, conseqüentemente, uma solução do problema (2.1). Na verdade, u_{r_*} é também um ponto de mínimo global de J (ver Proposição 1.12). Apesar do Método de Minimização Esférica não garantir unicidade, ele mostra quem é a norma da solução, pois $\|u_{r_*}\| = r_*$.

□

2.0.2. UM PROBLEMA DE AUTOVALOR

Nesta aplicação, mostraremos que o Método de Minimização Esférica consegue resolver o problema de autovalor do operador laplaciano sem precisar recorrer à teoria espectral de operadores compactos autoadjuntos.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $\lambda > 0$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{\lambda}{2}|u|_2^2.$$

Lema 2.3. *O funcional J pertence à classe (\mathcal{J}) .*

Demonstração:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\Phi(u_n) = \frac{\lambda}{2}|u_n|_2^2 \rightarrow \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 = \Phi(u).$$

Acabamos de provar que Φ é fracamente contínuo e, de forma análoga, é possível demonstrar o mesmo para $\Phi'(u)u$. Então Φ satisfaz (Φ_1) e fica evidente que (Φ_2) também ocorre, porque

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\Phi'(u)u.$$

Por fim, basta considerar uma função positiva $v \in H_0^1(\Omega)$ e a sequência $u_n = \frac{1}{n}v$ para que (Φ_3) ocorra. Logo, J é de classe \mathcal{J} .
□

Teorema 2.4. *O problema (2.2) tem solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 2.3, fica bem definida a função energia ζ_1 , dada por

$$\zeta_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Definindo a constante $\lambda_1 := 1 / \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2$, temos que

$$\zeta_1(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) r^2.$$

Derivando a função ζ_1 , segue que

$$\zeta_1'(r) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)r.$$

Logo, pelo Teorema de Minimização Esférica, se $\lambda \neq \lambda_1$, ζ_1 não admite ponto crítico para $r > 0$ e, assim, nenhuma função do tipo u_r é uma solução de (2.2). Por outro lado, se $\lambda = \lambda_1$, ζ_1 é a função nula e, desta forma, qualquer ponto do domínio é um ponto crítico. Neste caso, u_r é uma solução de (2.2) para todo $r > 0$. Este resultado também nos mostra que a constante λ_1 é um autovalor do operador laplaciano. Chamaremos então de e_1 às funções u_r que são autofunções de λ_1 . Mais adiante, definiremos outros autovalores. Considere o espaço

$$E_1 := V_{\lambda_1}^\perp = \{u \in H_0^1(\Omega); u \perp V_{\lambda_1}\}.$$

Uma vez que $V_{\lambda_1}^\perp$ é um espaço de Banach reflexivo, ainda podemos aplicar o Método de Minimização Esférica e obter a função energia

$$\zeta_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Definindo $\lambda_2 := 1 / \max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2$, segue que

$$\zeta_2(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)r^2.$$

Logo, se $\lambda = \lambda_2$, para todo $r > 0$, u_r é um ponto crítico para o funcional J restrito a E_1 . Desta vez, note que o Teorema de Minimização Esférica não foi suficiente para afirmarmos que as funções u_r são soluções do problema, pois J está restrito a E_1 . Entretanto, usando alguns resultados conhecidos da teoria espectral (ver [6]), podemos provar que cada função $u_r \in E_1$ é também ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, λ_2 é mais um autovalor do laplaciano e chamaremos de e_2 suas autofunções. Por definição,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

Repetindo os mesmos argumentos para o espaço

$$E_2 := (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2})^\perp$$

e definindo $\lambda_3 := 1/\max_{u \in E_2, \|u\|=1} |u|_2^2$, é possível demonstrar que, se $\lambda = \lambda_3$, cada função $u_r \in E_2$ é ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, caracterizando as autofunções e_3 .

De um modo geral, para $n \geq 3$, consideramos o espaço

$$E_{n-1} := (V_{\lambda_{n-2}} \oplus V_{\lambda_{n-1}})^\perp$$

e a constante $\lambda_n := 1/\max_{u \in E_{n-1}, \|u\|=1} |u|_2^2$. Se $\lambda = \lambda_n$, cada função $u_r \in E_{n-1}$ é ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, caracterizando as autofunções e_n . Vale ressaltar que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

□

2.0.3. UMA NÃO LINEARIDADE DO TIPO POTÊNCIA

Nesta aplicação, provaremos que o Método de Minimização Esférica, além de facilitar a resolução de um problema superlinear com crescimento subcrítico, também nos fornece uma informação a mais sobre a norma da solução.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 1$ ou $N = 2$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Lema 2.5. *O funcional J pertence à classe (\mathcal{J}) .*

Demonstração:

Ver Lema 2.3.

□

Teorema 2.6. *O problema (2.3) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 2.5, fica bem definida a função energia, dada por

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{p}r^p \max_{\|u\|=1} |u|_p^p.$$

Definindo a constante $C_p := 1/\max_{\|u\|=1} |u|_p^p$, a qual é a melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, obtemos que

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{pC_p}r^p.$$

Derivando a função ζ e igualando a 0, temos que

$$r - \frac{1}{C_p}r^{p-1} = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos um ponto crítico r_* da função energia, dado por

$$r_* = C_p^{\frac{1}{p-2}}.$$

Logo, pelo Teorema de Minimização Esférica, a função u_{r_*} é uma solução de (2.3), sendo $\|u_{r_*}\| = r_*$.

□

2.0.4. UM PROBLEMA DO TIPO CÔNCAVO E CONVEXO

Nesta aplicação, provaremos que o Método de Minimização Esférica obtém duas soluções não triviais distintas para um problema do tipo côncavo e convexo, sendo uma de energia positiva e outra de energia negativa, enquanto outros métodos só conseguem provar a existência de uma delas.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $\lambda > 0$ e $1 < q < 2 < s < 2^*$ se $N \geq 3$ e $1 < q < 2 < s$ se $N = 1$ ou $N = 2$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{\lambda}{q}|u|_q^q + \frac{1}{s}|u|_s^s.$$

Lema 2.7. *O funcional J pertence à classe (\mathcal{J}) .*

Demonstração:

Usando as imersões compactas de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e em $L^s(\Omega)$, é possível provar (Φ_1) . Além disso, é evidente que (Φ_2) também ocorre, porque

$$0 \leq \Phi(u) \leq \Phi'(u)u, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por último, considerando qualquer função positiva $v \in H_0^1(\Omega)$ e a sequência $\frac{1}{n}v$, demonstramos (Φ_3) .

□

Teorema 2.8. *O problema (2.4) tem duas soluções fracas não triviais.*

Demonstração:

Devido ao Lema 2.7, fica bem definida a função energia, dada por

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \max_{\|u\|=1} \left(\frac{\lambda}{q}r^q|u|_q^q + \frac{1}{s}r^s|u|_s^s \right).$$

Para este problema, também definiremos algumas funções que nos auxiliam a encontrar pontos críticos para a função energia, limitando ζ por baixo e por cima. Para o primeiro caso, seja $\underline{\zeta} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\zeta}(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{q}r^q \max_{\|u\|=1} |u|_q^q - \frac{1}{s}r^s \max_{\|u\|=1} |u|_s^s.$$

Por definição, é evidente que $\underline{\zeta} \leq \zeta$. Agora, com o intuito de limitar a função energia por cima, considere as funções $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\bar{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{q}r^q \max_{\|u\|=1} |u|_q^q$$

e

$$\bar{\zeta}_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{s}r^s \max_{\|u\|=1} |u|_s^s.$$

Definindo as constantes $C_q := 1/\max_{\|u\|=1} |u|_q^q$ e $C_s := 1/\max_{\|u\|=1} |u|_s^s$, as quais são, respectivamente, as melhores constantes das imersões de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)$ em $L^s(\Omega)$, obtemos que

$$\bar{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{qC_q}r^q$$

e

$$\bar{\zeta}_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{sC_s}r^s.$$

Desde que $\zeta \leq \bar{\zeta}_1$, $\zeta \leq \bar{\zeta}_2$ e $q < 2 < s$, note que a função energia atinge valores negativos para r suficientemente pequeno e suficientemente grande, além de que $\zeta(0) = 0$. Resta então verificar se $\underline{\zeta}$ atinge valores não negativos em algum ponto do domínio. Com efeito, fixando

$$r_* = \left(\frac{sC_s}{4} \right)^{1/s-2},$$

observe que

$$\underline{\zeta}(r_*) = \frac{1}{2}r_*^2 - \frac{1}{sC_s}r_*^s - \frac{\lambda}{qC_q}r_*^q = \frac{1}{4}r_*^2 - \frac{\lambda}{qC_q}r_*^q.$$

Desta forma, para que ocorra a desigualdade

$$\underline{\zeta}(r_*) = \frac{1}{4}r_*^2 - \frac{\lambda}{qC_q}r_*^q \geq 0,$$

devemos ter

$$\lambda \leq \left(\frac{qC_q}{4} \right) r_*^{2-q} = \left(\frac{qC_q}{4} \right) \left(\frac{sC_s}{4} \right)^{\frac{2-q}{s-2}}.$$

Sendo assim, definindo

$$\lambda_* := \left(\frac{qC_q}{4} \right) \left(\frac{sC_s}{4} \right)^{\frac{2-q}{s-2}},$$

acabamos de provar que, para $\lambda \in (0, \lambda_*]$, ζ assume um valor não negativo em pelo menos um ponto do seu domínio, possuindo então dois pontos críticos.

Portanto, pelo Método de Minimização Esférica, podemos afirmar que o problema (2.4) tem, pelo menos, duas soluções não triviais para $\lambda \in (0, \lambda_*]$.

□

2.0.5. UM PROBLEMA DE AUTOVALOR PERTURBADO

Nesta aplicação, mostraremos que o Método de Minimização Esférica consegue resolver o problema de autovalor perturbado sem precisar recorrer a resultados mais avançados da teoria espectral.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $\lambda > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Lema 2.9. *O funcional J pertence à classe (\mathcal{J}) .*

Demonstração:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\left| \int_{\Omega} f(x)u_n dx - \int_{\Omega} f(x)u dx \right| \leq |u_n - u|_2 |f|_2 \rightarrow 0.$$

Sendo assim,

$$\Phi(u_n) = \frac{\lambda}{2}|u_n|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)u_n dx \rightarrow \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)u dx = \Phi(u).$$

Esse mesmo resultado é obtido para $\Phi'(u)u$, então Φ satisfaz (Φ_1) . Além disso,

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)u dx \leq \lambda|u|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)u dx = \Phi'(u)u, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Em outras palavras, Φ satisfaz (Φ'_2) (ver Observação 1.3). Agora, provaremos que (Φ_3) ocorre. De fato, note que é possível obter uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(v) = |v|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)v dx \neq 0.$$

Neste caso, ainda que $\Phi(v) < 0$, teremos que $\Phi(-v) > 0$. Escolhendo $u_n = \frac{1}{n}v$, demonstramos a condição (Φ_3) .

□

Teorema 2.10. *Se λ for diferente dos autovalores do laplaciano, o problema (2.5) tem solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 2.9, fica bem definida a função energia ζ_1 , dada por

$$\zeta_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \left(\frac{\lambda}{2}r^2|u|_2^2 + r \int_{\Omega} f(x)u dx \right).$$

Mais uma vez, definiremos algumas funções que nos auxiliarão a encontrar pontos críticos para a função energia, limitando ζ por cima e por baixo. Para o primeiro caso, seja $\bar{\zeta}_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - r \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u dx.$$

Por definição, $\zeta_1 \leq \bar{\zeta}_1$. Outro fato importante é que

$$\max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=r} \int_{\Omega} f(x)u \, dx > 0,$$

pois, usando (Φ_3) , para cada $r > 0$, é possível obter uma função $v \in B_r$ tal que

$$0 < \int_{\Omega} f(x)v \, dx \leq \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=r} \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Logo, a função energia assume valores negativos para r suficientemente pequeno. Agora, buscando limitar ζ_1 por baixo, considere $\underline{\zeta}_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2 - r \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Então

$$\zeta_1(r) \geq \underline{\zeta}_1(r) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \frac{1}{2}r^2 - r \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u \, dx,$$

sendo λ_1 o primeiro autovalor do operador laplaciano, caracterizado como

$$\lambda_1 = 1 / \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Se assumirmos que $0 < \lambda < \lambda_1$, a desigualdade acima nos garante que ζ_1 assume valores positivos para r suficientemente grande e, com isso, possui um ponto crítico r_1 , o que significa, pelo Teorema de Minimização Esférica, que u_{r_1} é solução do problema.

Agora, com o intuito de obter soluções com outros valores de λ , considere o espaço $E_1 = V_{\lambda_1}^{\perp}$, o qual é um espaço de Banach reflexivo e, assim, ainda podemos aplicar o Método de Minimização Esférica e obter a função energia

$$\zeta_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \max_{u \in E_1, \|u\|=1} \left(\frac{\lambda}{2}r^2 |u|_2^2 + r \int_{\Omega} f(x)u \, dx \right).$$

Seja $\underline{\zeta}_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\zeta}_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2 - r \max_{u \in E_1, \|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Recorde que λ_2 é o segundo autovalor do laplaciano, caracterizado como

$$\lambda_2 = 1 / \max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Então

$$\zeta_2(r) \geq \underline{\zeta}_2(r) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \frac{1}{2} r^2 - r \max_{u \in E_1, \|u\|=1} \int_{\Omega} f(x)u \, dx.$$

Logo, para $0 < \lambda < \lambda_2$, o Método de Minimização Esférica nos permite concluir que existe um ponto crítico r_2 de ζ_2 , o que significa que u_{r_2} é um ponto crítico do funcional J restrito a E_1 . Em outras palavras, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_{r_2} \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} u_{r_2} v \, dx + \int_{\Omega} f(x)v \, dx, \quad \forall v \in E_1.$$

Agora, considerando e_1 uma autofunção associada a λ_1 , demonstraremos que, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $u_{r_2} + \alpha e_1$ é um ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, ou seja, queremos que

$$\int_{\Omega} \nabla(u_{r_2} + \alpha e_1) \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} (u_{r_2} + \alpha e_1)v \, dx + \int_{\Omega} f(x)v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Com efeito, tomando $v = e + \gamma e_1$, com $e \in E_1$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, a igualdade acima se escreve da forma

$$\int_{\Omega} \nabla(u_{r_2} + \alpha e_1) \nabla(e + \gamma e_1) \, dx = \lambda \int_{\Omega} (u_{r_2} + \alpha e_1)(e + \gamma e_1) \, dx + \int_{\Omega} f(x)(e + \gamma e_1) \, dx.$$

Note que, pela ortogonalidade e pelo fato de u_{r_2} ser um ponto crítico em E_1 , muitos termos da igualdade serão anulados, restando apenas

$$\alpha \|e_1\|^2 = \alpha \lambda |e_1|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)e_1 \, dx.$$

Desde que e_1 é uma autofunção do laplaciano, segue que

$$\alpha \lambda_1 |e_1|_2^2 = \alpha \lambda |e_1|_2^2 + \int_{\Omega} f(x)e_1 \, dx.$$

Isolando α , temos que

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} f(x)e_1 dx}{(\lambda_1 - \lambda)|e_1|_2^2}.$$

Logo, para $0 < \lambda < \lambda_1$ e para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, o problema tem solução. Seguindo o mesmo raciocínio, aplicamos o Método de Minimização Esférica para o espaço vetorial $E_2 = (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2})^{\perp}$ e obtemos, quando $0 < \lambda < \lambda_3$, que existe um ponto crítico r_3 de ζ_3 , o que significa que u_{r_3} é ponto crítico do funcional J restrito a E_2 , sendo

$$\lambda_3 = 1 / \max_{u \in E_2, \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Considerando as autofunções e_1 e e_2 , demonstraremos que, para algumas constantes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, a função $u_{r_3} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ é um ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, isto é, queremos que

$$\int_{\Omega} \nabla(u_{r_3} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} (u_{r_3} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) v dx + \int_{\Omega} f(x) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Mais uma vez, tomando $v = e + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, com $e \in E_2$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, usando a ortogonalidade entre os espaços e sabendo que u_{r_3} é um ponto crítico do funcional J restrito a E_2 , concluímos que

$$\alpha_i = \frac{\int_{\Omega} f(x)e_i dx}{(\lambda_i - \lambda)|e_i|_2^2}, \quad \text{com } i = 1, 2.$$

Acabamos de provar que, para

$$\lambda \in (0, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup (\lambda_2, \lambda_3),$$

o problema tem solução. Por fim, para $n \geq 3$, considerando o espaço

$$E_{n-1} = (V_{\lambda_{n-2}} \oplus V_{\lambda_{n-1}})^{\perp},$$

com

$$\lambda_n = 1 / \max_{u \in E_{n-1}, \|u\|=1} |u|_2^2,$$

e escolhendo

$$v = e + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i e_i,$$

é possível demonstrar que existe uma constante $r_n > 0$ de modo que u_{r_n} é ponto crítico do funcional J restrito a E_{n-1} e a função

$$u_{r_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$$

é uma solução para o problema (2.5), desde que

$$\alpha_i = \frac{\int_{\Omega} f e_i dx}{(\lambda_i - \lambda) \|e_i\|_2^2}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

e

$$\lambda \in (0, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup \dots \cup (\lambda_{n-1}, \lambda_n).$$

□

APÊNDICES

RESULTADOS IMPORTANTES

Teorema A.1. *Sejam E um espaço topológico compacto e $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo superiormente. Então Φ é limitado superiormente e o supremo é atingido em um ponto $u \in E$.*

Demonstração:

Basta considerar o funcional $-\Phi$ na demonstração de [8], Teorema 1.1.

□

Teorema A.2. *Sejam E um espaço de Banach, $\Phi, \Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e u_0 um extremo do funcional Φ restrito ao conjunto*

$$\mathcal{A} = \{u \in E; \Psi(u) = 0\}.$$

Se $\Psi'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{A}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(u_0)v = \lambda\Psi'(u_0)v, \forall v \in E.$$

Demonstração:

Ver [11], Proposição 14.3 e Observação 14.4.

□

Teorema A.3. *Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} f v \, dx = 0, \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$ q.t.p. em Ω .

Demonstração:

Ver [6], Corolário 4.24.

□

Teorema A.4. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ tal que*

$$f_n \rightarrow f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência $\{f_n\}$ e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tais que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração:

Ver [6], Teorema 4.9.

□

Teorema A.5. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que*

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Se existir uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, dx = \int_{\Omega} f \, dx.$$

Demonstração:

Ver [6], Teorema 4.2.

□

Teorema A.6. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ não negativas. Então*

$$\int_{\Omega} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx.$$

Demonstração:

Ver [5], Lema 4.8.

□

Teorema A.7. *Considere $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis e $g \in L^1(\Omega)$ uma função não negativa de modo que $f_n \leq g$ para cada n . Então*

$$\int_{\Omega} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) dx \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx.$$

Demonstração:

Basta aplicar o Teorema A.6 na sequência não negativa $g - f_n$.

□

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, Journal of Functional Analysis 122(2) (1994), 519-543.
- [2] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [3] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.
- [4] D. Arcoya, J. R. Santos Júnior, A. Suárez, *Positive solutions for a degenerate Kirchhoff problem*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 64(3) (2021), 675-688.
- [5] R. G. Bartle, *The elements of integration*, John Wiley & Sons, 1966.
- [6] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [7] I. Ekeland, *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 47 (1974), 324-353.
- [8] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics 81 (1989).
- [9] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Math. 947 (1982), 34-87.

- [10] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2001.
- [11] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer, 1994.
- [12] J. Mawhin, J. R. Ward, M. Willem, *Variational methods and semilinear elliptic equations*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 95 (1986), 269-277.
- [13] A. Szulkin, T. Weth, *The method of Nehari manifold*, *Handbook of Non-convex Analysis and Applications*, 597-632, International Press, Somerville, 2010.
- [14] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.



OS JOGOS DE BANACH-MAZUR E CHOQUET

ENATHIELLE THIALA SOUZA DE ANDRADE
E SAMUEL GOMES DA SILVA

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 O jogo de Banach-Mazur

1.1 Fatos Básicos

1.2 Definição e estratégias

1.2.1 Existência de estratégia vencedora para DOIS

1.2.2 Existência de estratégia vencedora para UM

2 O jogo de Choquet

3 Conjuntos de Bernstein e Indeterminação

PREFÁCIO

O jogo de Banach-Mazur apareceu no famoso Livro Escocês [?] , [?] , onde sua versão inicial foi formulada como o Problema 43 pelo matemático polonês S. Mazur: Dados o espaço de números reais \mathbb{R} , um subconjunto não-vazio E e dois jogadores, A e B , que jogam da seguinte forma: A começa escolhendo um intervalo não-vazio I_0 de \mathbb{R} , em seguida, B responde, escolhendo um subintervalo não-vazio I_1 de I_0 . Então, o jogador A seleciona um intervalo não-vazio $I_2 \subset I_1$ e B continua tomando um subintervalo não-vazio I_3 de I_2 . Esse procedimento é repetido infinitas vezes. A sequência infinita resultante de intervalos encaixados $\{I_n : n < \omega\}$ é chamada de jogo. Por definição, o jogador A vence esta partida se a interseção $\bigcap_{n < \omega} I_n$ tiver um ponto em comum com E . Caso contrário, B ganha. Mazur havia observado dois fatos:

- Se o complemento de E com relação a algum aberto não-vazio é magro, então o jogador A tem uma estratégia vencedora; e
- Se E for magro, então B possui uma estratégia vencedora.

A questão originalmente colocada por Mazur no Problema 43 do Livro Escocês (cujo o prêmio era uma garrafa de vinho) era se as recíprocas das implicações nas duas afirmações acima são verdadeiras. Em 4 de agosto de 1935, S. Banach, matemático polonês, escreveu no mesmo livro que “a conjectura de Mazur é verdadeira”. No entanto, a prova desta declaração de Banach nunca foi publicada. O jogo tornou-se posteriormente conhecido como o jogo de Banach-Mazur.

Apresentaremos versões dos jogos de Banach-Mazur e Choquet (e versões dos

teoremas acima) num ambiente topológico um pouco mais geral do que na versão original.

Belém, Junho de 2022

Enathielle Thiala Souza de Andrade
Samuel Gomes da Silva

O JOGO DE BANACH-MAZUR

A versão original do jogo apareceu no famoso Livro Escocês, como um Problema proposto pelo matemático polonês S. Mazur. O jogo foi proposto na reta com dois jogadores, A e B , e um subconjunto não-vazio E como alvo. Os jogadores jogam, alternadamente, intervalos não-vazios da reta, começando por A que joga I_0 , ao qual B responde jogando $I_1 \subseteq I_0$, e assim sucessivamente:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

A sequência infinita resultante de intervalos encaixados $\{I_n : n < \omega\}$ é chamada de jogo. Por definição, o jogador A vence esta partida se a interseção $\bigcap_{n < \omega} I_n$ tiver um ponto em comum com o conjunto E . Caso contrário, B ganha.

Mazur havia observado dois fatos:

- Se existe algum aberto não-vazio U tal que $U \setminus E$ é magro, então o jogador A tem uma estratégia vencedora; e
- Se E for magro, então B possui uma estratégia vencedora.

Mazur perguntou se valiam as recíprocas, Banach respondeu que SIM, mas nunca publicou sua demonstração desse fato. Vamos apresentar esses resultados clássicos num ambiente um pouco mais geral do que a reta.

1.1. FATOS BÁSICOS

Seja X um conjunto.

- Se $\langle U_n : n < \omega \rangle$ é sequência decrescente de subconjuntos de X , então

$$\bigcap_{n < \omega} U_n = \bigcap_{n \geq \kappa} U_n, \quad \forall \kappa \in \omega$$

- Se $\langle U_n : n < \omega \rangle$ e $\langle V_n : n < \omega \rangle$ são sequências de subconjuntos de X satisfazendo

$$U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots$$

então,

$$\bigcap_{n < \omega} U_n = \bigcap_{n < \omega} V_n$$

1.2. DEFINIÇÃO E ESTRATÉGIAS

O **Jogo de Banach-Mazur** é disputado por dois jogadores, UM e $DOIS$, em um espaço topológico. Seja X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subconjunto, que será chamado de **conjunto-alvo**. Os lances dos jogadores são abertos não-vazios de X que devem cumprir as seguintes regras:

- O jogador UM inicia o jogo escolhendo um aberto não-vazio U_0 e o jogador $DOIS$ responde com um aberto não-vazio $V_0 \subseteq U_0$.
- Na n -ésima rodada para $n \geq 1$, UM escolhe $U_n \subseteq V_{n-1}$ e $DOIS$ responde com $V_n \subseteq U_n$.

Uma sequência de abertos não-vazios

$$(U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots),$$

nessas condições, é uma **instância** do jogo (ou uma **partida** do jogo, ou, se não houver risco de confusão, um **jogo**).

O jogador UM vence se

$$\bigcap_{n < \omega} U_n \cap Y \neq \emptyset.$$

DOIS vence em caso contrário.

O jogo de Banach-Mazur descrito acima é denotado por $\mathbf{BM}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Este é um jogo de **informação perfeita**: Os dois jogadores conhecem o conjunto-alvo, os lances anteriores feitos pelos dois jogadores e sabem em qual rodada estão. Se $Y = X$, escrevemos $BM(X)$.

Definição 1.1. Consideremos o jogo $BM(Y, X)$. Uma **estratégia σ para o jogador UM** é uma função

$$\sigma : \bigcup_{n \text{ é par}} {}^n \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \mapsto \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}.$$

tal que

$$\sigma(\emptyset) = U_0$$

E se $\langle U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1} \rangle$ é uma sequência de lances realizados nas i -ésimas rodadas, onde $i \leq n - 1$, então

$$\sigma(\langle U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1} \rangle) = U_n, \text{ tal que } U_n \subseteq V_{n-1}$$

Definição 1.2. Consideremos o jogo $BM(Y, X)$. Uma **estratégia γ para o jogador DOIS** é uma função

$$\gamma : \bigcup_{n \text{ é ímpar}} {}^n \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \mapsto \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}.$$

tal que se $\langle U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n \rangle$ é uma sequência de lances realizados nas i -ésimas rodadas, onde $i \leq n$, então

$$\gamma(\langle U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n \rangle) = V_n, \text{ tal que } V_n \subseteq U_n$$

Observação 1.3. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que a estratégia σ “depende apenas dos V 's” e a estratégia γ “depende apenas dos U 's”, isto é,

$$U_n = \sigma(\langle V_0, V_1, \dots, V_{n-1} \rangle) \text{ e } V_n = \gamma(\langle U_0, U_1, \dots, U_n \rangle)$$

Definição 1.4. Dada uma estratégia σ para o jogador UM , uma **sequência vencedora de lances que derrota** σ é uma sequência de comprimento ω , $\langle V_0, V_1, \dots, V_n, \dots \rangle$ tal que existe uma partida $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, \dots \rangle$ na qual UM jogou segundo σ , porém

$$\bigcap_{n < \omega} V_n \cap Y = \emptyset$$

Definição 1.5. Dizemos que uma estratégia σ para o jogador UM é uma **estratégia vencedora** se σ não pode ser derrotada.

Definição 1.6. Dada uma estratégia γ para o jogador $DOIS$, uma **sequência vencedora de lances que derrota** γ é uma sequência de comprimento ω , $\langle U_0, U_1, \dots, U_n, \dots \rangle$ tal que existe uma partida $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, \dots \rangle$ na qual $DOIS$ jogou segundo γ , porém

$$\bigcap_{n < \omega} U_n \cap Y \neq \emptyset$$

Definição 1.7. Dizemos que uma estratégia γ para o jogador $DOIS$ é uma **estratégia vencedora** se γ não pode ser derrotada.

1.2.1. EXISTÊNCIA DE ESTRATÉGIA VENCEDORA PARA DOIS

Antes de falar em estratégias vencedoras para DOIS, vamos relembrar os conceitos de **raro** ("nowhere dense") e de **magro** ("meager").

Definição 1.8. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. A é dito ser **raro** se $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Notar que A é raro, se, e somente se, A está contido num fechado de interior vazio.

Definição 1.9. Sejam X um espaço topológico e $M \subseteq X$. M é dito ser **magro** se está contido numa reunião enumerável de raros, i.e., existe uma família $\{A_n : n < \omega\}$ de raros tais que $M \subseteq \bigcup_{n < \omega} A_n$.

Equivalentemente, A é magro se A está contido numa reunião enumerável de fechados de interior vazio.

Teorema 1.10. *Se Y é magro, então DOIS possui estratégia vencedora para $BM(Y, X)$.*

Demonstração. Seja $\langle U_n \rangle_{n < \omega}$ sequência lances de UM e suponha que $DOIS$ joga de acordo com γ . Teremos que

$$\left(\bigcap_{n < \omega} V_n \right) \cap Y = \emptyset,$$

pois se $y \in \bigcap_{n < \omega} V_n$, então $y \notin F_n$, para todo $n < \omega$. Portanto, γ é estratégia vencedora para $DOIS$ em $BM(X, Y)$. \square

Suponha que X possua uma base enumerável \mathcal{B} , e seja γ uma estratégia para $DOIS$.

Definição 1.11. Uma sequência finita $p = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle$ é uma γ -**posição correta** se $U_i \in \mathcal{B}, \forall i \leq n$ e $V_0 = \gamma(\langle U_0 \rangle), V_1 = \gamma(\langle U_0, U_1 \rangle), \dots, V_n = \gamma(\langle U_0, U_1, \dots, U_n \rangle)$.

Assumiremos que, por vacuidade, a sequência vazia é uma γ -posição correta.

Notação: Se $p = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle$, o aberto V_n será denotado por V_p . Se $p = \emptyset$, por convenção colocaremos $V_\emptyset = X$.

Observação 1.12. $\Gamma = \{p : p \text{ é } \gamma\text{-posição correta}\}$ é enumerável.

Pois cada $p = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle$ depende da sequência $\langle U_0, U_1, \dots, U_n \rangle \in {}^{<\omega}\mathcal{B}$.

A partir de agora γ é um estratégia vencedora para $DOIS$ em $BM(Y, X)$ onde X possui base enumerável.

Definição 1.13. Sejam $y \in Y$ e p uma γ -posição correta. Dizemos que p **exclui y** se $y \in V_p$, mas para qualquer $q \in \Gamma$ com $q \supsetneq p$, tem-se que $y \notin V_q$.

Note que “ \emptyset exclui y ” vai ser: $y \notin V_p, \forall p \in \Gamma \setminus \{\emptyset\}$.

Definição 1.14. Para $p \in \Gamma$, $F_p = \{y \in Y : p \text{ exclui } y\}$

Fato 1.15. Seja $x \in X$ tal que $\forall p \in \Gamma$

$$(*) \quad x \in V_p \Rightarrow \exists q \in \Gamma, q \supsetneq p, \text{ tal que } x \in V_q$$

Então $x \notin Y$.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $p = \emptyset$, já sabemos que por vacuidade, $p \in \Gamma$ e que $V_p = X$. Desse modo sempre existe pelo menos um $p \in \Gamma$ tal que $x \in V_p$, a partir daí aplicando (*) indutivamente, podemos obter o jogo $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, \dots \rangle$ que é uma união de γ -posições corretas (sendo, portanto, uma instância do jogo) e é tal que

$$x \in \bigcap_{n < \omega} V_n.$$

Como *DOIS* jogou de acordo com a estratégia γ que é vencedora, vence o jogo e portanto, $\bigcap_{n < \omega} V_n \cap Y = \emptyset$, o que implica em $x \notin Y$. \square

Fato 1.16. $Y \subseteq \bigcup_{p \in \Gamma} F_p$

Demonstração. Seja $y \in Y$. Suponha que $y \notin \bigcup_{p \in \Gamma} F_p$. Temos então que para todo $p \in \Gamma$, p não exclui y - i.e, existe $q \in \Gamma$ com $q \supsetneq p$ e $y \in V_q$. Portanto para todo $p \in \Gamma$ vale (*) e pelo Fato anterior, $y \notin Y$, um absurdo. \square

Proposição 1.17. *Seja $A \subseteq X$. A é raro em X se, e somente se, para todo $U \subseteq X$ aberto não-vazio, $A \cap U$ não é denso em U .*

Demonstração. Sejam A raro e U aberto não-vazio de X . Como $int(\overline{A}) = \emptyset$ e $U \not\subseteq \overline{A}$, segue que $U \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. Daí $U \setminus \overline{A}$ é um aberto não-vazio de U tal que $(U \setminus \overline{A}) \cap (A \cap U) = \emptyset$. Portanto, $A \cap U$ não é denso em U . Suponha agora que A não seja raro e seja $U = int(\overline{A}) \neq \emptyset$.

Afirmção: $A \cap U$ é denso em U .

Primeiro note que $U \subseteq \overline{(A \cap U)}$: Seja $u \in U$ e V uma vizinhança aberta de u . Note que $U \subseteq \overline{A}$ e assim $u \in \overline{A}$. Desse modo, como $V \cap U$ é uma vizinhança aberta de u e $u \in \overline{A}$ segue

$$\emptyset \neq A \cap (V \cap U) = V \cap (A \cap U).$$

E assim $u \in \overline{(A \cap U)}$. Note agora que

$$\overline{(A \cap U)}^U = \overline{(A \cap U)} \cap U = U,$$

pois verificamos que $U \subseteq \overline{(A \cap U)}$.

Portanto provamos que existe U aberto não-vazio tal que $A \cap U$ é denso em U . Logo, provamos o desejado por contraposição. \square

Fato 1.18. $\forall p \in \Gamma$, F_p é um subconjunto raro de X .

Demonstração. Seja $p = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_p \rangle \in \Gamma$. Suponhamos por absurdo que F_p não é raro. Pela Proposição anterior, existiria W aberto não-vazio tal que $F_p \cap W$ é denso em W . Note que por definição $F_p \subseteq V_p$, conseqüentemente $F_p \cap W \subseteq V_p \cap W$ e $V_p \cap W$ é aberto denso em W . Suponhamos que UM jogue o aberto básico $U_{n+1} \subseteq V_p \cap W$ e que $DOIS$ responda jogando $V_{n+1} = \gamma(U_{n+1}) \subseteq U_{n+1}$, obtemos assim

$$q = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_p, U_{n+1}, V_{n+1} \rangle$$

uma γ -posição correta tal que $q \supsetneq p$ e $V_q = V_{n+1}$ é um aberto não-vazio de W . Portanto,

$$V_q \cap (F_p \cap W) \neq \emptyset$$

e assim $V_q \cap F_p \neq \emptyset$ o que é um absurdo, pois se $y \in F_p \subseteq V_p$, então p exclui y , e como $q \supsetneq p$ teríamos $y \notin V_q$. \square

Teorema 1.19. *Seja X espaço de base enumerável. Dado $Y \subseteq X$, vale que Y é magro se, e somente se, $DOIS$ possui estratégia vencedora para $BM(Y, X)$.*

Demonstração. Já sabemos que se Y é magro então $DOIS$ possui estratégia vencedora para $BM(Y, X)$. Suponha agora que $DOIS$ possua estratégia vencedora para $BM(Y, X)$, como X possui base enumerável podemos utilizar os resultados anteriores e o fato de Γ ser enumerável para concluir que Y é magro ("pois vai estar contido naquela união de F_p 's, cuja quantidade é enumerável e são todos raros"). \square

1.2.2. EXISTÊNCIA DE ESTRATÉGIA VENCEDORA PARA UM

Proposição 1.20. *Se X é métrico completo e $Y \subseteq X$ tem interior não-vazio, então UM possui estratégia vencedora para $BM(Y, X)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{f_n : n \geq 1\}$ família de funções tal que para todo $n \geq 1$,

$$f_n : \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$$

e $\overline{f_n(W)} \subseteq W$ e $\text{diam}(f_n(W)) < \frac{1}{n}$ para todo aberto não-vazio W .

Considere σ estratégia para UM da seguinte forma:

- $\sigma(\emptyset) = U_0 = \text{int}(Y)$;
- $\sigma(\langle V_0, \dots, V_{n-1} \rangle) = U_n = f_n(V_{n-1})$.

Seja $\langle V_n \rangle_{n < \omega}$ sequência de lances de $DOIS$ e suponha que UM joga de acordo com σ . Como X é métrico completo,

$$\bigcap_{n < \omega} \overline{f_n(V_{n-1})} \neq \emptyset.$$

Note que

$$\bigcap_{n < \omega} \overline{f_n(V_{n-1})} = \bigcap_{n < \omega} U_n$$

e que

$$\bigcap_{n < \omega} U_n \subseteq U_0 = \text{int}(Y).$$

Portanto,

$$\left(\bigcap_{n < \omega} U_n \right) \cap Y \neq \emptyset$$

e, conseqüentemente, UM vence o jogo. Logo, σ é uma estratégia vencedora para UM em $BM(Y, X)$. \square

Atenção para os dois casos mais simples!!! Estamos apresentando separadamente as questões envolvendo estratégias para DOIS e UM no jogo de Banach-Mazur – mas pensemos nos **dois casos mais simples** apresentados! Seja M um métrico completo e $Y \subseteq X$. Então vimos que:

- Se Y tem interior não-vazio, então UM tem estratégia vencedora.
- Se Y é magro, então $DOIS$ tem estratégia vencedora.

A conjunção destas duas observações acima **prova alguma coisa**, não ?

Exercício. Mostre que os dois casos mais simples acima, de estratégias vencedoras para UM e DOIS no jogo de Banach-Mazur, fornecem uma prova praticamente imediata do Teorema de Baire para métricos completos.

Teorema 1.21. *Seja X um espaço métrico completo. Suponha que exista um aberto não-vazio U tal que $U \setminus Y$ é magro, então UM possui estratégia vencedora para $BM(Y, X)$.*

Demonstração. Se existe U aberto não-vazio tal que $U \setminus Y$ é magro, por um resultado anterior $DOIS$ possui estratégia vencedora para $BM(U \setminus Y, U)$. Sejam γ tal estratégia e $\mathcal{F} = \{f_n : n \geq 1\}$ família de funções onde para todo $n \geq 1$,

$$f_n : \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$$

tal que $\overline{f_n(W)} \subseteq W$ e $\text{diam}(f_n(W)) < \frac{1}{n}$ para todo aberto não-vazio W . Considere σ estratégia para UM em $BM(Y, X)$ da seguinte forma:

- $\sigma(\emptyset) = U_0 = U$;
- $\sigma(\langle V_0, \dots, V_{n-1} \rangle) = U_n = f_n(\gamma(\langle V_0, \dots, V_{n-1} \rangle))$.

Seja $\langle V_n \rangle_{n < \omega}$ sequência de lances de $DOIS$ e suponha que UM joga de acordo com σ . Assim teremos

$$U_0 \supseteq V_0 \supseteq \gamma(\langle V_0 \rangle) \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \gamma(\langle V_0, \dots, V_n \rangle) \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots$$

Observe que

$$V_0 \supseteq \gamma(\langle V_0 \rangle) \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n \supseteq \gamma(\langle V_0, \dots, V_n \rangle) \supseteq V_{n+1} \supseteq \dots$$

é uma instância de $BM(U \setminus Y, U)$ em que $DOIS$ joga de acordo com γ que é uma estratégia vencedora. Com isso, $(\bigcap_{n < \omega} V_n) \cap (U \setminus Y) = \emptyset$, ainda temos

que $\bigcap_{n < \omega} V_n \neq \emptyset$ e $\bigcap_{n < \omega} V_n \subseteq U$, logo $(\bigcap_{n < \omega} V_n) \cap Y \neq \emptyset$. Dessa forma, σ é uma estratégia vencedora para UM em $BM(Y, X)$. \square

Teorema 1.22. *Seja X um espaço polonês (i.e. completamente metrizável e separável). Existe U aberto não-vazio tal que $U \setminus Y$ é magro se, e somente se, UM possui estratégia vencedora em $BM(Y, X)$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior já sabemos que se existe U aberto não-vazio tal que $U \setminus Y$ é magro, então UM possui estratégia vencedora em $BM(Y, X)$. Suponha agora que UM possua estratégia vencedora em $BM(Y, X)$ e seja σ tal estratégia vencedora. Seja agora $U = \sigma(\emptyset)$ e considere o jogo $BM(U \setminus Y, U)$. Seja $\mathcal{F} = \{f_n : n \geq 1\}$ família de funções onde para todo $n \geq 1$,

$$f_n : \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$$

tal que $\overline{f_n(W)} \subseteq W$ e $\text{diam}(f_n(W)) < \frac{1}{n}$ para todo aberto não-vazio W . Considere γ estratégia para $DOIS$ em $BM(U \setminus Y, U)$ do seguinte modo:

$$\gamma(\langle U_0, \dots, U_n \rangle) = V_n = f_{n+1}(\sigma(\langle U_0, \dots, U_n \rangle)).$$

Seja $\langle U_n \rangle_{n < \omega}$ sequência de lances de UM e suponha que $DOIS$ joga de acordo com γ . Assim teremos

$$U_0 \supseteq \sigma(\langle U_0 \rangle) \supseteq V_0 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \sigma(\langle U_0, \dots, U_n \rangle) \supseteq V_n \supseteq \dots$$

Comos os lances de UM são abertos de U temos que

$$U \supseteq U_0 \supseteq \sigma(\langle U_0 \rangle) \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \sigma(\langle U_0, \dots, U_n \rangle) \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots$$

é uma instância de $BM(Y, X)$ em que UM joga de acordo com σ que é uma estratégia vencedora. Com isso, $(\bigcap_{n < \omega} U_n) \cap Y \neq \emptyset$, como o espaço é polonês

sabemos que $\bigcap_{n < \omega} U_n$ é um conjunto unitário e assim concluímos que $\bigcap_{n < \omega} U_n \cap (U \setminus Y) = \emptyset$. Dessa forma, γ é uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $BM(U \setminus Y, U)$. Dado que o espaço possui base enumerável, por resultado anterior concluímos que $U \setminus Y$ é magro. \square

O JOGO DE CHOQUET

O **Jogo de Choquet** é disputado por dois jogadores, *UM* e *DOIS*, em um espaço topológico. Seja X um espaço topológico. Os lances dos jogadores são abertos não-vazios de X que devem cumprir as seguintes regras:

- O jogador *UM* inicia o jogo escolhendo um aberto não-vazio U_0 e o jogador *DOIS* responde com um aberto não-vazio $V_0 \subseteq U_0$.
- Na n -ésima rodada para $n \geq 1$, *UM* escolhe $U_n \subseteq V_{n-1}$ e *DOIS* responde com $V_n \subseteq U_n$.

Uma sequência de abertos não-vazios

$$(U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_{n-1} \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots),$$

nessas condições, é uma instância do jogo.

O jogador *UM* vence se

$$\bigcap_{n < \omega} U_n = \emptyset.$$

DOIS vence em caso contrário.

O jogo de Choquet descrito acima é denotado por **Ch(X)**

Obs: As estratégias são definidas analogamente ao jogo de Banach-Mazur.

Lema 2.1 (1). *Sejam X um espaço de Hausdorff e $O \subseteq X$ aberto não-vazio. Seja τ_O a família de todos os abertos de O . Se $f : \tau_O \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \tau_O \setminus \{\emptyset\}$ é função tal que $f(V) \subseteq V, \forall V \in \tau_O \setminus \{\emptyset\}$, então existe uma família celular $\mathcal{U} \subseteq \{f(V) : V \in \tau_O\}$, tal que $\bigcup \mathcal{U}$ é densa em O .*

Demonstração. Sejam X, O, τ_O e f como nas hipóteses do Lema e suponha que O possui mais de um elemento, caso tenha apenas um o Lema vale imediatamente.

Seja $\mathcal{P} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \{f(V) : V \in \tau_O\} \text{ e é família celular}\}$ e considere a ordem parcial dada por $\langle \mathcal{P}, \subseteq \rangle$. Note que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, pois como O possui pelo menos dois elementos e sendo X Hausdorff, existem abertos não-vazios e disjuntos U e V de O ; pela definição de f , $\{f(U), f(V)\} \in \mathcal{P}$.

Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ cadeia, vamos mostrar que \mathcal{C} é limitada superiormente.

Afirmção: $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$.

Seja $W \in \bigcup \mathcal{C}$, logo existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ tal que $W \in \mathcal{F}$ e assim $W \in \{f(V) : V \in \tau_O\}$. Portanto $\bigcup \mathcal{C} \subseteq \{f(V) : V \in \tau_O\}$. Vamos verificar agora que $\bigcup \mathcal{C}$ é uma família celular; sejam então W_1 e W_2 em $\bigcup \mathcal{C}$. Assim existem $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}$ tais que $W_1 \in \mathcal{F}_1$ e $W_2 \in \mathcal{F}_2$. Como \mathcal{C} é cadeia, então $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$, ou seja, W_1 e W_2 pertencem a uma mesma família celular e desse modo são disjuntos.

Obviamente qualquer elemento de \mathcal{C} está contido em $\bigcup \mathcal{C}$, portanto $\bigcup \mathcal{C}$ é um limitante superior para \mathcal{C} . Concluimos que toda cadeia de $\langle \mathcal{P}, \subseteq \rangle$ é limitada superiormente e assim pelo Lema de Zorn, $\langle \mathcal{P}, \subseteq \rangle$ possui um elemento maximal \mathcal{U} . Note que \mathcal{U} é uma família maximal celular em O , pois se existisse um aberto W disjunto de todos os abertos de \mathcal{U} teríamos que $\mathcal{U} \cup \{f(W)\} \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cup \{f(W)\}$ o que contraria a maximalidade de \mathcal{U} em \mathcal{P} . Temos assim que $\bigcup \mathcal{U}$ é densa em O (caso contrário teríamos $O \not\subseteq \overline{\bigcup \mathcal{U}}$ e poderíamos considerar o aberto não-vazio $O \setminus \overline{\bigcup \mathcal{U}}$, e com isso $\mathcal{U} \cup \{O \setminus \overline{\bigcup \mathcal{U}}\}$ contradizeria a maximalidade de \mathcal{U} em \mathcal{P}). \square

Lema 2.2 (2). *Se \mathcal{U} é família celular tal que $\bigcup \mathcal{U}$ é densa em X e para cada $U \in \mathcal{U}$ existe uma família celular \mathcal{V}_U tal que $\bigcup \mathcal{V}_U$ é densa em U , então $\mathcal{V} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_U$ é família celular e $\bigcup \mathcal{V}$ é densa em X .*

Demonstração. Seja \mathcal{U} e $\{\mathcal{V}_U : U \in \mathcal{U}\}$ como nas hipóteses do Lema. Vejamos que $\mathcal{V} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_U$ é família celular. Sejam W_1 e W_2 pertencentes a $\mathcal{V} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_U$. Existem $U_1 \in \mathcal{U}$ e $U_2 \in \mathcal{U}$ tais que $W_1 \in \mathcal{V}_{U_1}$ e $W_2 \in \mathcal{V}_{U_2}$. Se $U_1 = U_2$, como \mathcal{V}_{U_1} é família celular, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Caso $U_1 \neq U_2$, dado que \mathcal{U} é família

celular $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, pois caso contrário $W_1 \cap W_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Vamos verificar agora que $\bigcup \mathcal{V}$ é densa em X . Seja V aberto não-vazio de X , como $\bigcup \mathcal{U}$ é densa em X existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cap U \neq \emptyset$. Note agora que $V \cap U$ é um aberto não-vazio de U e como $\bigcup \mathcal{V}_U$ é densa em U , existe $W \in \mathcal{V}_U$ tal que $(V \cap U) \cap W \neq \emptyset$. Observe que provamos que para todo aberto não-vazio V existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $V \cap W \neq \emptyset$ e assim $\bigcup \mathcal{V}$ é densa em X . \square

Definição 2.3. Seja X espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Baire** se para toda família de abertos densos $\{O_n : n < \omega\}$ temos que $\bigcap_{n < \omega} O_n$ é densa em X .

Proposição 2.4. X é um espaço de Baire se, e somente se, todo magro possui interior vazio.

Proposição 2.5. Sejam X espaço topológico, $Y \subseteq X$ subespaço e $A \subseteq Y$ um fechado de interior vazio em Y . Então \overline{A} (i.e., o fecho de A tomado em X) é um fechado de interior vazio em X .

Demonstração. Vamos argumentar pela contrapositiva. Suponha que U seja um aberto não-vazio de X contido em \overline{A} . Então $U \cap A \neq \emptyset$ (já que todo ponto de U é aderente a A). Como $A \subseteq Y$ temos

$$\emptyset \neq U \cap A \subseteq U \cap Y \subseteq \overline{A} \cap Y = \overline{A}^Y = A$$

onde a última igualdade se deve ao fato de A ser fechado em Y . Note então que $U \cap Y$ é um aberto não-vazio de Y que está contido em A , assim A não tem interior vazio em Y . \square

Corolário 2.6. Magro num subespaço é magro no espaço – i.e., se X é espaço topológico, $Y \subseteq X$ é subespaço e $A \subseteq Y$ é magro em Y , então A é magro em X .

Proposição 2.7. Sejam X espaço topológico, $U \subseteq X$ um aberto não-vazio e $A \subseteq U$. Se A é raro em U , então A é raro em X .

Demonstração. Novamente argumentaremos pela contrapositiva. Suponha que V é um aberto não-vazio de X tal que $V \subseteq \bar{A}$. Então $V \cap A \neq \emptyset$ e, de $A \subseteq U$, temos que $V \cap U$ é um aberto não-vazio de U tal que

$$\emptyset \neq V \cap U \subseteq \bar{A} \cap U = \bar{A}^U.$$

Segue que $V \cap U$ é um aberto não-vazio de U que está contido em \bar{A}^U , o que mostra que A não é raro em U . \square

Proposição 2.8. **Aberto em um espaço de Baire é um espaço de Baire** – i.e., se X é espaço de Baire e $Y \subseteq X$ é um subespaço aberto e não-vazio, então Y é um espaço de Baire.

Demonstração. Basta mostrar que todo magro de Y possui interior vazio em Y . Seja então $M \subseteq Y$ um magro de Y . Nessas condições existe uma família enumerável $\{A_n : n < \omega\}$ tal que cada A_n é um raro de Y e $M \subseteq \bigcup_{n < \omega} A_n$.

Porém, pelo que provamos no slide anterior temos que cada A_n é, também, um raro de X , logo M é magro em X . Como X é espaço de Baire, o interior de M em X é vazio. Porém, Y é um subespaço aberto de X , e como “aberto num aberto é aberto” segue que o interior de M em Y está contido no interior de M em X . Como este último é vazio, mostramos o desejado. \square

Teorema 2.9. *Seja X um espaço de Hausdorff. X é Baire se, e somente se, UM não possui estratégia vencedora para $Ch(X)$.*

Demonstração. Seja X um espaço de Baire e σ uma estratégia para UM em $Ch(X)$. Vamos mostrar que σ pode ser derrotada. Seja $U_0 = \sigma(\emptyset)$. Para cada $V_0 \subseteq U_0$ temos que $\sigma(V_0) \subseteq V_0$, assim aplicando o Lema 1 obtemos a família celular \mathcal{U}_0 cujos elementos são da forma $\sigma(V_0)$ (com $V_0 \subseteq \sigma(\emptyset)$) e é tal que $\bigcup \mathcal{U}_0$ é densa em U_0 . Para cada $U_1 = \sigma(V_0) \in \mathcal{U}_0$ definimos, $\sigma(V_0, \cdot)$ como no Lema 1. Aplicando novamente o Lema 1 para U_1 e $\sigma(V_0, \cdot)$ obtemos a família celular \mathcal{U}_{1,U_1} cujos elementos são da forma $\sigma(V_0, V_1)$ (com $V_1 \subseteq \sigma(V_0)$) e é tal que $\bigcup \mathcal{U}_{1,U_1}$ é densa em U_1 . Como \mathcal{U}_0 é família celular tal que $\bigcup \mathcal{U}_0$ é densa em U_0 e para cada $U_1 \in \mathcal{U}_0$ existe uma família celular \mathcal{U}_{1,U_1} tal que $\bigcup \mathcal{U}_{1,U_1}$ é densa em U_1 , então $\mathcal{U}_1 = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_0} \mathcal{U}_{1,U_1}$ é família celular e $\bigcup \mathcal{U}_1$ é densa em U_0

pelo Lema 2. Aplicando indutivamente o processo obtemos para cada $n \geq 1$ a família celular \mathcal{U}_n cujos elementos são da forma $\sigma(V_0, \dots, V_n)$ (com $V_n \subseteq \sigma(V_0, \dots, V_{n-1})$) e é tal que $\bigcup \mathcal{U}_n$ é densa em U_0 . Seja agora $O_n = \bigcup \mathcal{U}_n$. $\{O_n : n < \omega\}$ uma família de abertos densos em U_0 , que é um espaço de Baire, logo $\bigcap_{n < \omega} O_n \neq \emptyset$. Seja $x \in \bigcap_{n < \omega} O_n$. Note que para todo $n < \omega$ $x \in \bigcup \mathcal{U}_n$, logo existe um único V_n tal que $x \in \sigma(V_0, \dots, V_n)$ (\mathcal{U}_n é família celular), o que implica em $x \in V_n$. Podemos utilizar x como guia de modo a construir um jogo onde UM joga de acordo com σ e é derrotado. O jogo fica sendo o seguinte

$$\langle \sigma(\emptyset), V_0, \sigma(\langle V_0 \rangle), V_1, \sigma(\langle V_0, V_1 \rangle), \dots, V_n, \sigma(\langle V_0, V_1, \dots, V_n \rangle), \dots \rangle$$

Ou seja, UM jogou de acordo com a σ e $DOIS$ jogou V_i na i -ésima rodada com $i \in \omega$, onde V_i é o único aberto tal que $x \in \sigma(V_0, V_1, \dots, V_i) \subseteq V_i$. Claramente $\bigcap_{n < \omega} V_n \neq \emptyset$ e portanto a estratégia σ foi derrotada. Suponha agora que X não seja Baire, assim existiria U aberto não-vazio magro, i.e, $U \subseteq \bigcup_{n < \omega} F_n$, em que cada F_n é um fechado de interior vazio. Seja σ uma estratégia para UM da seguinte forma:

- $\sigma(\emptyset) = U_0 = U$;
- $\sigma(\langle V_0, \dots, V_{n-1} \rangle) = U_n = V_{n-1} \setminus F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Seja $\langle V_n \rangle_{n < \omega}$ sequência de lances de $DOIS$ e suponha que UM joga de acordo com σ .

Afirmção: $\bigcap_{n < \omega} U_n = \emptyset$.

De fato, $x \in \bigcap_{n < \omega} U_n$ implica que $x \in U$ e $x \notin F_n$ para todo $n < \omega$, um absurdo.

Portanto, concluímos que a estratégia σ é vencedora e conseqüentemente UM possui estratégia vencedora para $Ch(X)$. \square

CONJUNTOS DE BERNSTEIN E INDETERMINAÇÃO

A partir de agora, vamos estudar os chamados **conjuntos de Bernstein**. Esses conjuntos são importantes no contexto da seguinte Pergunta: Existem subconjuntos Y da reta para os quais **nenhum dos jogadores** possui estratégia vencedora no jogo $BM(Y, \mathbb{R})$? A mesma pergunta pode ser feita para o jogo $Ch(Y)$.

Definição 3.1. Seja $x \in X$. Dizemos que x é um ponto isolado de X se $\{x\}$ é aberto.

Definição 3.2. Seja $x \in A \subseteq X$. Dizemos que x é um ponto isolado de A se existe aberto U de X tal que $U \cap A = \{x\}$.

Notar que, para pontos de A , “ser isolado” é equivalente a “não ser ponto de acumulação de A ”.

Definição 3.3. Um subconjunto P da reta é dito ser **perfeito** se é fechado e não possui pontos isolados (i.e., todo os seus pontos são de acumulação).

Vamos mostrar a seguir que $|P| = 2^{\aleph_0}$ para todo P perfeito. O argumento a ser utilizado aparecerá muitas vezes, com pequenas variações, até o final do trabalho. Do argumento seguirá, também, que qualquer conjunto perfeito contém uma cópia homeomorfa fechada do Conjunto de Cantor.

Fato 3.4 (Fato 1). Seja A um fechado da reta, suponha que $A \cap]a, b[\neq \emptyset$, então $\forall z \in A \cap]a, b[$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists J$ intervalo fechado, $J \subseteq]a, b[$ com $z \in J$, $J \cap A$ fechado e $\text{diam}(J) \leq \varepsilon$.

Fato 3.5 (Fato 2). Seja P um conjunto perfeito e $]a, b[$ intervalo aberto tal que $]a, b[\cap P \neq \emptyset$. Então dado $\varepsilon > 0$ fixado, existem intervalos fechados disjuntos J_0 e J_1 contidos em $]a, b[$ tais que $\text{int}(J_0) \cap P \neq \emptyset$, $\text{int}(J_1) \cap P \neq \emptyset$ com $\text{diam}(J_0) \leq \varepsilon$ e $\text{diam}(J_1) \leq \varepsilon$.

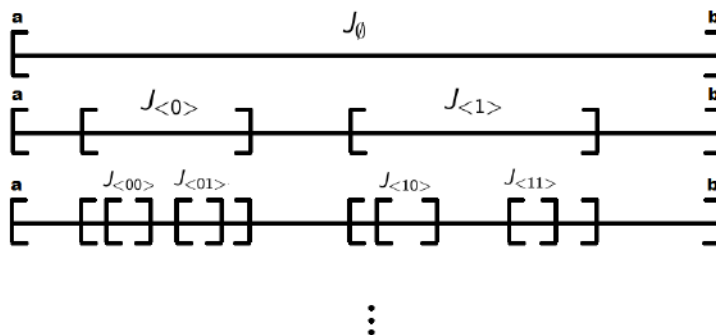
Notar que o segundo fato nada mais é do que uma “aplicação dupla” do primeiro fato, o que vai ser sempre possível de se fazer no caso em que P é perfeito. Estamos usando também o fato de que **infinito maior ou igual a 2** ...

Proposição 3.6. *Se $P \subseteq \mathbb{R}$ é perfeito, então $|P| = 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Seja $P \subseteq \mathbb{R}$ perfeito. Definamos $J_0 = [a, b]$ em que $b - a = 1$ e $]a, b[\cap P \neq \emptyset$. Pelo Fato 2 anterior, existem intervalos fechados disjuntos J_0 e J_1 contidos em $]a, b[$ tais que $\text{int}(J_0) \cap P \neq \emptyset$, $\text{int}(J_1) \cap P \neq \emptyset$ com $\text{diam}(J_0) \leq \frac{1}{3}$ e $\text{diam}(J_1) \leq \frac{1}{3}$. Chamaremos J_0 de $J_{\langle 0 \rangle}$ e J_1 de $J_{\langle 1 \rangle}$. Para cada $s \in {}^{<\omega}2$ definiremos, por indução no comprimento da sequência, um intervalo fechado não vazio J_s tal que

- (i) $\text{int}(J_s) \cap P \neq \emptyset$
- (ii) $\text{diam}(J_s) \leq \frac{1}{3^{\text{dom}(s)}}$
- (iii) $J_{s \frown 1}$ e $J_{s \frown 0}$ são subintervalos de J_s , fechados e disjuntos que satisfazem (i) e (ii).

Em cada passo da construção, basta aplicar o Fato 2...



Em formalizações do argumento indutivo apresentado (principalmente em momentos onde será necessário exibir uma estratégia), usaremos explicitamente o **Axioma da Escolha** para exibir os pares de fechados disjuntos. Definimos então a função

$$\begin{aligned} \gamma : {}^\omega 2 &\rightarrow P \\ f &\mapsto x_f \end{aligned}$$

Em que $\bigcap_{n < \omega} J_{f \upharpoonright n} \cap P = \{x_f\}$.

Note que a função γ é claramente injetora. Portanto, $2^{\aleph_0} = |{}^\omega 2| \leq |P| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, assim $|P| = 2^{\aleph_0}$. \square

A proposição anterior é muito importante no contexto do chamado **Teorema de Cantor-Bendixson**, do qual segue, como corolário, que qualquer fechado não-enumerável da reta real possui cardinalidade 2^{\aleph_0} .

Teorema 3.7 (Teorema de Cantor-Bendixson). *Se F é um fechado não-enumerável da reta, então existem P perfeito e S enumerável tais que $F = P \cup S$.*

Um dos interesses do teorema acima é que ele mostra que “**contra-exemplos para a Hipótese do Contínuo não podem ser fechados**”.

Vocês podem encontrar uma demonstração do Teorema de Cantor-Bendixson em nossa apresentação prévia **Conjuntos Perfeitos e o Teorema de Cantor-Bendixson**, disponível no ResearchGate.

Definição 3.8. Um subconjunto G de um espaço topológico é dito ser um G_δ se G é uma intersecção enumerável de abertos.

Proposição 3.9. *Seja $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. \mathbb{P} é um G_δ denso.*

Demonstração. $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$. Cada $\mathbb{R} \setminus \{q\}$ é um aberto e dado que \mathbb{Q} é enumerável, \mathbb{P} é G_δ . E Obviamente \mathbb{P} é denso. \square

Proposição 3.10. *Sejam X espaço de Baire, T1 e sem pontos isolados e $D \subseteq X$ denso enumerável. Então D não é um G_δ .*

Demonstração. Seja X espaço de Baire, T1 e sem pontos isolados e suponha que $D \subseteq X$ seja G_δ , i.e, $D = \bigcap_{n < \omega} U_n$ em que cada U_n é um aberto não-vazio de X . Note que como D é denso, cada U_n também é denso, pois para todo $n < \omega$ $D \subseteq U_n$. Como X é T1 e não possui pontos isolados, $X \setminus \{d\}$ é um aberto denso para todo $d \in D$. Assim,

$$A = \left(\bigcap_{n < \omega} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{d \in D} X \setminus \{d\} \right) = D \cap (X \setminus D) = \emptyset.$$

Note que chegamos a um absurdo uma vez que A é uma intersecção enumerável de abertos densos em um espaço que, por hipótese, é um espaço de Baire. Desse modo $A = \emptyset$ não poderia ocorrer. \square

Portanto em um espaço de Baire, T1 e sem pontos isolados, qualquer G_δ denso é não-enumerável !!

Proposição 3.11. *Se $M \subseteq \mathbb{R}$ é magro, então $\mathbb{R} \setminus M$ possui um subconjunto G_δ .*

Demonstração. Seja M magro, $M \subseteq \bigcup_{n < \omega} F_n$, em que cada F_n é um fechado de interior vazio. Para todo $n < \omega$, $\mathbb{R} \setminus F_n$ é um aberto denso, assim $\bigcap_{n < \omega} \mathbb{R} \setminus F_n$ é um G_δ . Note agora que

$$\bigcap_{n < \omega} \mathbb{R} \setminus F_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n < \omega} F_n \subseteq \mathbb{R} \setminus M.$$

Portanto, $\mathbb{R} \setminus M$ contém um G_δ denso. \square

Proposição 3.12. *Sejam M espaço métrico e $f : 2^\omega \rightarrow M$ função contínua e injetora. Então $f[2^\omega]$ é um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa fechada do conjunto de Cantor.*

Demonstração. Sejam M e f como nas hipóteses. Como bijeção contínua de um compacto em um espaço T_2 é homeomorfismo, concluímos que $f[2^\omega]$ é homeomorfo a 2^ω que por sua vez é homeomorfo ao conjunto de Cantor e assim $f[2^\omega]$ é homeomorfo ao conjunto de Cantor. Uma vez que 2^ω é compacto e f é contínua, então $f[2^\omega]$ é compacto e sendo $f[2^\omega]$ um compacto em um espaço T_2 , $f[2^\omega]$ é um fechado. Para verificarmos que $f[2^\omega]$ é um conjunto perfeito resta checarmos que qualquer ponto de $f[2^\omega]$ não é ponto isolado. Sejam $x \in f[2^\omega]$ e V vizinhança aberta de x em M . Seja agora $W = V \cap f[2^\omega]$, um aberto não vazio de $f[2^\omega]$. Como 2^ω é um conjunto perfeito temos que $f^{-1}(x)$ não é ponto isolado de 2^ω e assim

$$2^\omega \cap (f^{-1}[W] \setminus \{f^{-1}(x)\}) \neq \emptyset.$$

Com isso,

$$f[2^\omega] \cap (W \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

E como $W \subseteq V$,

$$f[2^\omega] \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

E conseqüentemente, x não é ponto isolado de $f[2^\omega]$. Portanto $f[2^\omega]$ é um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa fechada do conjunto de Cantor. \square

É fácil checar que, na demonstração que apresentamos para o fato de que todo conjunto perfeito possui cardinalidade igual a 2^{\aleph_0} , a função apresentada era contínua e injetora ! Caso não esteja visualizando os motivos para isso, não se preocupe pois verificações semelhantes serão realizadas até o final deste trabalho. Portanto, aquela demonstração tem o seguinte

Corolário 3.13. *Todo conjunto perfeito contém uma cópia homeomorfa fechada do Conjunto de Cantor.*

Os fatos abaixo são versões ainda mais simples dos dois fatos utilizados para provar que qualquer conjunto perfeito tem cardinalidade 2^{\aleph_0} .

Fato 3.14 (1). Seja $]a, b[$ intervalo aberto. Para todo $\epsilon > 0$ e para todo $z \in]a, b[$, existe J intervalo fechado tal que $J \subseteq]a, b[$, $z \in \text{int}(J)$ e $\text{diam}(J) \leq \epsilon$.

Fato 3.15 (2). Para cada aberto não-vazio $V \subset \mathbb{R}$ e para cada $\epsilon > 0$, existem intervalos fechados e disjuntos não-vazios J_0 e J_1 tais que $J_0 \subseteq V$ e $J_1 \subseteq V$ e de modo que $\text{diam}(J_0) \leq \epsilon$ e $\text{diam}(J_1) \leq \epsilon$.

Notar, novamente, que o Fato (2) consiste simplesmente numa espécie de “aplicação dupla” do Fato 1.

Proposição 3.16. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um G_δ denso. Então D contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor.*

Demonstração. Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um G_δ denso. $D = \bigcap_{n < \omega} U_n$ em que cada U_n é um aberto denso de \mathbb{R} . Seja $\mathcal{F} = \{J \subseteq \mathbb{R} : J \text{ é um intervalo fechado limitado e não-vazio}\}$. Utilizando o Axioma da Escolha e Fato 2, fixe para cada $n \geq 1$

$$f_n : \tau \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F}$$

$$U \mapsto (f_{n,0}(U), f_{n,1}(U))$$

tal que $f_{n,0}(U)$ e $f_{n,1}(U)$ são intervalos fechados e disjuntos tais que $f_{n,i} \subseteq U$ e $\text{diam}(f_{n,i}(U)) < \frac{1}{3^n}$ para cada $i \in 2$.

Para cada $s \in {}^{<\omega}2$ definiremos, por indução no comprimento da sequência, um intervalo fechado e não-vazio J_s tal que:

$$(i) \ J_s \subseteq U_{\text{dom}(s)} \cap \text{int}(J_{s \upharpoonright \text{dom}(s)-1})$$

$$(ii) \ \text{diam}(J_s) \leq \frac{1}{3^{\text{dom}(s)}}$$

(iii) $J_{s \smallfrown 0}$ e $J_{s \smallfrown 1}$ são subintervalos de J_s fechados e disjuntos que satisfazem (i) e (ii).

Se $\text{dom}(s) = 0$, pelo Fato 1, existe intervalo fechado não-vazio J_\emptyset tal que $J_\emptyset \subseteq U_0$ e $\text{diam}(J_\emptyset) < 1$. Definimos $J_{\emptyset \smallfrown 1}$ e $J_{\emptyset \smallfrown 0}$ do seguinte modo:

$$J_{\emptyset \smallfrown i} = f_{1,i}(U_1 \cap \text{int}(J_\emptyset)) \ \forall i \in 2.$$

A construção se justifica pois U_1 é um aberto denso e portanto $U_1 \cap \text{int}(J_\emptyset)$ é um aberto não-vazio.

Suponha que para sequência s de comprimento menor do que n J_s foi construído adequadamente. Sejam $p \in {}^{<\omega}2$ tal que $\text{dom}(p) = n$, $s = p \upharpoonright_{n-1}$ e $j = p(n-1)$. Temos então:

$$J_p = J_{s \hat{\ } j} \text{ e } J_{p \hat{\ } i} = f_{n+1,i}(\text{int}(J_p) \cap U_{n+1}), \forall i \in 2.$$

Seja $f \in {}^{<\omega}2$. Note que para todo $n < \omega$, $J_{f \upharpoonright_n} \subseteq U_n$. Desse modo $\bigcap_{n < \omega} J_{f \upharpoonright_n} \subseteq$

$\bigcap_{n < \omega} U_n = D$. Seja então

$$\sigma : {}^\omega 2 \rightarrow D$$

$$f \mapsto x_f$$

em que $\{x_f\} = \bigcap_{n < \omega} J_{f \upharpoonright_n}$.

A função σ é claramente injetiva, vejamos que também é contínua. Sejam $f \in {}^\omega 2$ e V vizinhança aberta de x_f em \mathbb{R} . Existe $\epsilon > 0$ tal que $x_f \in]x_f - \frac{\epsilon}{2}, x_f + \frac{\epsilon}{2}[\subseteq V$. Como $\langle \frac{1}{3^n} \rangle_{n < \omega}$ converge para 0, existe m tal que $x_f \in J_{f \upharpoonright_m} \subseteq]x_f - \frac{\epsilon}{2}, x_f + \frac{\epsilon}{2}[\subseteq V$. Portanto, $f \in [f \upharpoonright_m]$ e $\sigma([f \upharpoonright_m]) \subseteq V$, pois se $g \in [f \upharpoonright_m]$, então $\sigma(g) = x_g \in J_{g \upharpoonright_m} = J_{f \upharpoonright_m} \subseteq V$. Pela proposição que tratava de funções injetoras e contínuas de domínio 2^ω com imagens num espaço métrico, $\sigma[{}^\omega 2] \subseteq D$ é um conjunto perfeito homeomorfo ao conjunto de Cantor. \square

Corolário 3.17. *Se $M \subseteq \mathbb{R}$ é magro, então $\mathbb{R} \setminus M$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor.*

Definição 3.18. Um subconjunto Y contido \mathbb{R} é dito ser um **conjunto de Bernstein** se para todo fechado não-enumerável G da reta vale que tanto Y como $\mathbb{R} \setminus Y$ intersectam G .

Repetindo o argumento da prova de que "todo G_δ denso contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor" mas com um cuidado adicional de em cada etapa considerar a intersecção com um aberto não-vazio fixado, temos a seguinte

Proposição 3.19. *Se $D \subseteq \mathbb{R}$ é um G_δ denso e $U \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto não-vazio. Então $D \cap U$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor.*

Proposição 3.20. *Y é Bernstein se, e somente se, nem Y nem $\mathbb{R} \setminus Y$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa fechada do Conjunto de Cantor.*

Demonstração. Suponha que Y contenha um conjunto perfeito P que é uma cópia homeomorfa fechada do conjunto de Cantor. Como P é um conjunto perfeito, então P é um fechado não-enumerável e é tal que $P \cap (\mathbb{R} \setminus Y) = \emptyset$, pois $P \subseteq Y$. Desse modo, Y não poderia ser Bernstein. De maneira análoga concluímos que $\mathbb{R} \setminus Y$ não contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa fechada do Conjunto de Cantor. Suponha agora que nem Y nem $\mathbb{R} \setminus Y$ contenham um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa fechada do conjunto de Cantor. Seja F um fechado não-enumerável da reta. Pelo Teorema de Cantor-Bendixson, existe P conjunto perfeito tal que $P \subseteq F$. Sabemos que todo conjunto perfeito contém uma cópia homeomorfa ao conjunto de Cantor. Portanto, de posse da hipótese, $P \not\subseteq Y$ e $P \not\subseteq \mathbb{R} \setminus Y$, conseqüentemente $F \not\subseteq Y$ e $F \not\subseteq \mathbb{R} \setminus Y$. Assim $F \cap Y \neq \emptyset$ e $F \cap (\mathbb{R} \setminus Y) \neq \emptyset$, logo Y é um conjunto de Bernstein. \square

Teorema 3.21. *Existem conjuntos de Bernstein.*

A demonstração deste teorema usa de maneira bastante essencial o Axioma da Escolha, pois vamos assumir que a família de todos os subconjuntos perfeitos da reta pode ser bem-ordenada (e assim, ser indexada por um ordinal), e, aproveitando dessa boa ordenação, realizar um procedimento de **indução transfinita**. Mais ainda, como a reta possui base enumerável, é fácil ver que a cardinalidade da topologia da reta (i.e., a quantidade de abertos) é $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, logo existem também \mathfrak{c} fechados e, como também é fácil exibir uma família de \mathfrak{c} subconjuntos perfeitos, então sabemos que a família de todos os subconjuntos perfeitos da reta possui cardinalidade \mathfrak{c} . Seja então $\mathcal{C} = \{P \subseteq \mathbb{R} : P \text{ é perfeito}\} = \{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ (i.e., enumeramos todos os subconjuntos perfeitos pela sua cardinalidade, que é um ordinal – logo estamos

assumindo que a família é bem ordenada !).

Também sabemos que $\alpha < \mathfrak{c}$, $|P_\alpha| = \mathfrak{c}$.

A idéia agora é construir duas famílias disjuntas de números reais dois-a-dois distintos, $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ e $Y = \{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, sempre tomando **dois pontos distintos** de cada conjunto perfeito – i.e., $x_\alpha \in P_\alpha$ e $y_\alpha \in P_\alpha$ para todo $\alpha < \mathfrak{c}$, com $x_\alpha \neq y_\alpha$.

Iniciamos tomando x_0, y_0 distintos no perfeito P_0 .

Quando chegarmos na hora de construir x_α, y_α no conjunto perfeito P_α para $\alpha < \mathfrak{c}$, assumimos como hipótese de indução que x_ξ e y_ξ são pontos distintos que foram tomados no perfeito P_ξ para todo $\xi < \alpha$ e que todos os pontos escolhidos até então são distintos (logo, em particular, os x 's e y 's anteriores formam conjuntos disjuntos). Então $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{y_\xi : \xi < \alpha\}$ é um conjunto de cardinalidade $|\alpha| \leq \alpha < \mathfrak{c}$, logo $P_\alpha \setminus (\{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{y_\xi : \xi < \alpha\})$ tem cardinalidade \mathfrak{c} e podemos escolher x_α e y_α distintos em P_α .

Seja agora $Y = \{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Então Y é de Bernstein ! Note que dado um perfeito qualquer P , como enumeramos todos os perfeitos temos que $P = P_\zeta$ para algum ζ , e Y não pode conter P_ζ – pois $x_\zeta \in P_\zeta \setminus Y$! Da mesma forma, $\mathbb{R} \setminus Y$ não pode conter P_ζ , pois $y_\zeta \in P_\zeta \cap Y$.

Fato 3.22. Seja $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjunto de Bernstein. Se $U \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto não-vazio, então $U \setminus Y$ não é magro.

Demonstração. Sejam $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjunto de Bernstein e $U \subseteq \mathbb{R}$ um aberto não-vazio. Suponha que $U \setminus Y$ seja magro. Por resultado anterior, $\mathbb{R} \setminus (U \setminus Y)$ contém um G_δ denso G e por outro resultado, $G \cap U$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor.

Afirmção: $G \cap U \subseteq U \cap Y$

Seja $x \in G \cap U$. Note que $x \in U = (U \setminus Y) \cup (U \cap Y)$. Note agora que como $x \in G \subseteq \mathbb{R} \setminus (U \setminus Y)$, então $x \notin U \setminus Y$. Portanto, $x \in U \cap Y$.

Assim $G \cap U \subseteq U \cap Y \subseteq Y$ e desse modo Y contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor, absurdo. \square

Proposição 3.23. *Seja $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjunto de Bernstein. Então:*

1. *Y não é magro.*
2. *Y é denso.*
3. *O subespaço Y não possui ponto isolados.*
4. *Y é espaço de Baire.*

Demonstração. Seja Y conjunto de Bernstein.

Y não é magro: Se Y fosse magro, $\mathbb{R} \setminus Y$ conteria um conjunto perfeito que seria uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor.

Y é denso: Suponha que Y não seja denso, assim existe U aberto não-vazio tal que $U \cap Y = \emptyset$ e conseqüentemente, $U \subseteq \mathbb{R} \setminus Y$. Note que $\mathbb{P} \cap U$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor. Agora note que $\mathbb{P} \cap U \subseteq U \subseteq \mathbb{R} \setminus Y$ e portanto $\mathbb{R} \setminus Y$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor, um absurdo.

O subespaço Y não possui ponto isolados: Suponha que exista y ponto isolado de Y , assim existe U aberto não-vazio de \mathbb{R} tal que $U \cap Y = \{y\}$. Como $U \setminus \{y\}$ é um aberto e Y é denso, então $U \setminus \{y\} \cap Y \neq \emptyset$, uma contradição já que $U \cap Y = \{y\}$.

Y é espaço de Baire: Suponha por absurdo que Y não seja Baire, vamos provar que $\mathbb{R} \setminus Y$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor. Como Y não é Baire, existe $U \subseteq Y$ aberto não-vazio de Y tal que U é magro em Y . Seja U^* um aberto não-vazio de \mathbb{R} tal que $U = Y \cap U^*$. Como "magro de um subespaço é magro no espaço", U também é magro em \mathbb{R} e como \mathbb{R} é Baire, U não é aberto em \mathbb{R} e logo $U \neq U^*$. Nessas condições, temos que $\mathbb{R} \setminus U$ contém um G_δ denso G (pois U é magro) e teremos então que $G \cap U^*$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do conjunto de Cantor.

Afirmção: $G \cap U^* \subseteq \mathbb{R} \setminus Y$

Seja $x \in G \cap U^*$, vamos provar que $x \notin Y$. Suponha que $x \in Y$. Como $x \in U^*$, $x \in U^* \cap Y = U$, isto é um absurdo, pois $x \in G \subseteq \mathbb{R} \setminus U$.

Portanto, $\mathbb{R} \setminus Y$ contém um conjunto perfeito que é uma cópia homeomorfa do

conjunto de Cantor, o que é um absurdo pois Y é de Bernstein. Segue então que Y é Baire. ■ □

Proposição 3.24. *Seja M espaço métrico. Se $U \subseteq M$ é um aberto finito não-vazio, então todos os pontos de U são isolados em M .*

Demonstração. Seja $U = \{a_1, \dots, a_n\}$ um aberto. Note que

$$\{a_i\} = U \setminus (U \setminus \{a_i\}), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Como X é T_1 , todo finito é fechado e assim $U \setminus \{a_i\}$ é fechado. Sabemos ainda que $U \setminus (U \setminus \{a_i\})$ é um aberto menos um fechado, portanto aberto. Desse modo, $\{a_i\}$ é um aberto para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e assim todo ponto de U é isolado. □

Como Corolário temos que se M é um espaço métrico sem pontos isolados, todo aberto não-vazio é infinito.

No seguinte fato, estamos usando esse fato anterior, i.e. que os abertos de um espaço métrico sem pontos isolados são infinitos – e que **infinito maior ou igual a 2...**

Fato 3.25. Seja X espaço métrico sem pontos isolados. Para cada aberto não-vazio $V \subseteq X$ e para cada $\epsilon > 0$, existem bolas abertas e disjuntas não-vazias U_0 e U_1 tais que $U_0 \subseteq V$ e $U_1 \subseteq V$ e de modo que $diam(U_0) \leq \epsilon$ e $diam(U_1) \leq \epsilon$.

Teorema 3.26. *Seja M espaço métrico sem pontos isolados. Se DOIS possui estratégia vencedora para $Ch(M)$, então M contém uma cópia homeomorfa do Conjunto de Cantor.*

Demonstração. Seja M espaço métrico sem pontos isolados e suponha que DOIS possua estratégia vencedora γ em $Ch(M)$. Seja $\mathcal{A} = \{U \subseteq M : U \text{ é uma bola aberta não-vazia}\}$ Utilizando o Axioma da Escolha e adaptando procedimentos anteriores, fixe para cada $n \geq 1$

$$f_n : \tau \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

$$U \mapsto (f_{n,0}(U), f_{n,1}(U))$$

tal que $f_{n,0}(U)$ e $f_{n,1}(U)$ são bolas abertas e disjuntas tais que $f_{n,i} \subseteq U$ e $\text{diam}(f_{n,i}(U)) < \frac{1}{3^n}$ para cada $i \in 2$.

Seja $U_\emptyset = M$. Para cada $s \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\emptyset\}$ definiremos, por indução no comprimento da sequência, um aberto não-vazio U_s tal que

$$(i) U_s \subseteq \gamma(\langle M, U_{s \upharpoonright 1}, \dots, U_{s \upharpoonright \text{dom}(s)-1} \rangle)$$

$$(ii) \text{diam}(U_s) \leq \frac{1}{3^{\text{dom}(s)}}$$

(iii) $U_{s \frown 0}$ e $U_{s \frown 1}$ são bolas abertas e disjuntas que satisfazem as condições anteriores.

Suponha que para toda sequência s de comprimento menor do que n U_s foi construída adequadamente. Sejam $p \in {}^{<\omega}2$ tal que $\text{dom}(p) = n$, $s = p \upharpoonright_{n-1}$ e $j = p(n-1)$. Temos então:

$$U_p = U_{s \frown j} \text{ e } U_{p \frown i} = f_{n+1,i}(\gamma(\langle M, U_{p \upharpoonright 1}, \dots, U_p \rangle)), \forall i \in 2.$$

Seja $f \in {}^\omega 2$ arbitrária. Considere o jogo

$$\langle M, \gamma(\langle M \rangle), U_{\langle f(0) \rangle}, \gamma(\langle M, U_{\langle f(0) \rangle} \rangle), U_{\langle f(0), f(1) \rangle}, \gamma(\langle M, U_{\langle f(0) \rangle}, U_{\langle f(0), f(1) \rangle} \rangle), \dots \rangle$$

Ou seja, UM jogou na rodada inicial M e nas i -ésimas rodadas jogou $U_{f \upharpoonright i}$ para $i \geq 1$ e $DOIS$ jogou de acordo com a estratégia γ . Como γ é vencedora, $\bigcap_{n < \omega} U_{f \upharpoonright n} \neq \emptyset$ (notar que em todas as outras situações deste trabalho utilizávamos argumentos de **completude** de um espaço métrico para garantir que uma intersecção desse tipo é não-vazia, aqui usamos apenas que a estratégia de $DOIS$ é vencedora !!!). Seja então

$$\sigma : {}^\omega 2 \rightarrow M$$

$$f \mapsto x_f$$

em que $\{x_f\} = \bigcap_{n < \omega} U_{f \upharpoonright n}$.

A função σ é claramente injetiva, vejamos que também é contínua. Sejam $f \in {}^\omega 2$ e V vizinhança aberta de x_f em M . Existe $\epsilon > 0$ tal que $x_f \in B(x_f, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq V$. Como $\langle \frac{1}{3^n} \rangle_{n < \omega}$ converge para 0, existe m tal que $x_f \in U_{f \upharpoonright m} \subseteq B(x_f, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq V$. Portanto, $f \in [f \upharpoonright m]$ e $\sigma([f \upharpoonright m]) \subseteq V$, pois se $g \in [f \upharpoonright m]$, então $\sigma(g) = x_g \in$

$U_{g_{|m}} = U_{f_{|m}} \subseteq V$. Portanto, $\sigma^{[\omega 2]} \subseteq M$ é um conjunto perfeito homeomorfo ao conjunto de Cantor. \square

Definição 3.27. Seja G um jogo de informação perfeita disputado por dois jogadores. G é dito ser **indeterminado** se nenhum dos dois jogadores possui estratégia vencedora nesse jogo.

Recapitulando...

Teorema 3.28 (Teorema A). *Seja X espaço de base enumerável. Dado $Y \subseteq X$, vale que Y é magro se, e somente se, DOIS possui estratégia vencedora para $BM(Y, X)$.*

Teorema 3.29 (Teorema B). *Seja X um espaço polonês (i.e. completamente metrizável e separável). Existe U aberto não-vazio tal que $U \setminus Y$ é magro se, e somente se, UM possui estratégia vencedora em $BM(Y, X)$.*

Teorema 3.30 (Teorema C). *Seja X um espaço de Hausdorff. X é Baire se, e somente se, UM não possui estratégia vencedora para $Ch(X)$.*

Teorema 3.31 (Teorema D). *Seja M espaço métrico sem pontos isolados. Se DOIS possui estratégia vencedora para $Ch(M)$, então M contém uma cópia homeomorfa do Conjunto de Cantor.*

Fato 3.32 (Fato E). Se $Y \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de Bernstein, Y não é magro.

Fato 3.33 (Fato F). Se $Y \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de Bernstein, então o subespaço Y não possui pontos isolados.

Fato 3.34 (Fato G). Se $Y \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de Bernstein, Y é um espaço de Baire.

Fato 3.35 (Fato H). Seja $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjunto de Bernstein. Se $U \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto não-vazio, então $U \setminus Y$ não é magro.

Teorema 3.36. *Se $Y \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto de Bernstein, então tanto $BM(Y, \mathbb{R})$ como $Ch(Y)$ são indeterminados.*

Demonstração. Seja $Y \subseteq \mathbb{R}$ conjunto de Bernstein. Analisemos primeiro o $Ch(Y)$. Como Y é espaço de Baire (Fato G), segue do Teorema C que UM não possui estratégia vencedora. Já pelo Teorema D, e usando que Y não possui pontos isolados (Fato F), $DOIS$ não possui estratégia vencedora. Analisemos agora o $BM(Y, \mathbb{R})$. Pelo Teorema A, como \mathbb{R} possui base enumerável e Y não é magro (pelo Fato E), $DOIS$ não possui estratégia vencedora. Finalmente, observando que a reta é um espaço polonês, podemos usar o Teorema B e mais o fato de que para todo aberto não-vazio U tem-se que $U \setminus Y$ não é magro (Fato H) para concluir que UM não possui estratégia vencedora. \square



Problemas de otimização: da Matemática Básica ao Cálculo Diferencial e Integral

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues e Caio Tomás
de Paula

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

Aos PETianos do PET Matemática da UnB.

Sumário

Prefácio

1 Problemas de otimização

- 1.1 Desigualdade das médias aritmética e geométrica entre dois números
- 1.2 Desigualdade das médias aritmética e geométrica entre n números
- 1.3 Desigualdades com a média quadrática
- 1.4 Soluções usando Cálculo

Referências

Prefácio

O presente trabalho é um dos resultados da pesquisa coletiva realizada pelo grupo do Programa de Educação Tutorial (PET) em Matemática da Universidade de Brasília, em que estudamos problemas de otimização tendo como referência principal o livro *Stories about Maxima and Minima*, [1]. O objetivo deste minicurso é considerar problemas clássicos do Cálculo que podem ser resolvidos usando desigualdades entre médias, apresentando também as soluções clássicas, que utilizam o ferramental do Cálculo. Inicialmente, introduzimos o conceito de problema de otimização para, nas seções seguintes, enunciarmos e demonstrarmos as desigualdades entre as médias juntamente com problemas que podem ser resolvidos utilizando essas desigualdades. Ao final, apresentamos soluções para os mesmos problemas usando as técnicas aprendidas na disciplina do Cálculo. Esperamos que o(a) participante deste minicurso possa apreciar a beleza e elegância das soluções utilizando as desigualdades entre médias!

Belém, Junho de 2022

Luciana Ávila Rodrigues
Caio Tomás

Problemas de otimização

Um problema de otimização é aquele onde procura-se encontrar, entre todas as soluções possíveis, a solução “ótima”, onde o sentido preciso da palavra “ótima” depende do contexto: em algumas situações, a solução ótima pode ser a que minimiza uma determinada quantidade, enquanto em outras pode ser a solução que maximiza uma outra quantidade.

Problemas deste tipo são comuns em nossa vida diária e aparecem não só em Matemática, mas também em Teoria da Computação e Economia, por exemplo, e não existe um método universal que resolva todos os problemas de otimização existentes.

Entretanto, existem métodos específicos para certas classes de problemas. Esse é o caso dos problemas apresentados nas seções seguintes: são problemas de máximo e mínimo, cujas soluções podem ser encontradas seguindo os seguintes passos:

1. entender como a quantidade que se deseja otimizar depende dos parâmetros que descrevem o problema;
2. relacionar os parâmetros, obtendo uma função que descreva a quantidade que se deseja otimizar;
3. encontrar o(s) ponto(s) crítico(s) de interesse utilizando a primeira derivada da função e aplicar o Teorema de Weierstrass para determinar se o ponto crítico maximiza/minimiza a função desejada.

As etapas 1 e 2 acima não são exclusivas dos problemas de máximos e mínimos. De fato, a busca por solução de qualquer problema de otimização necessaria-

mente passa por essas etapas. Elas, juntas, são o que chamamos de processo de formalização do problema ou simplesmente formalização do problema. Dependendo da classe de problemas em que estamos, diferentes métodos podem ser mais adequados.

Por exemplo, para encontrar máximos e mínimos de funções reais de uma variável real, podemos utilizar o conceito de convexidade e aqui podemos definir diferentes noções de convexidade como convexidade em pontos médios e convexidade no sentido de Jensen, enquanto que para encontrar máximos e mínimos de funções reais de várias variáveis reais, o princípio de Lagrange é muito usado [1, cap. 11,12].

Neste minicurso, vamos trabalhar com problemas de otimização clássicos do Cálculo Diferencial e Integral. Além das técnicas do Cálculo, veremos que é possível usar desigualdades entre médias para encontrar as soluções.

Ademais, adotaremos as seguintes notações a menos que mencionado o contrário.

A, B, C, \dots	pontos no plano ou espaço
\overline{AB}	distância euclidiana entre A e B
AB	segmento que liga os pontos A e B
a, b, c, \dots	retas ou medidas de segmentos
\overleftrightarrow{AB}	reta pelos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	semirreta de origem A que passa por B
$\triangle ABC$	triângulo de vértices A, B e C
\cong	congruência
\sim	semelhança
∇f	gradiente da função f

1.1. Desigualdade das médias aritmética e geométrica entre dois números

Começaremos abordando uma das desigualdades mais antigas da história, que afirma que a média geométrica não excede a média aritmética. Como veremos na demonstração, neste caso, a igualdade ocorre. Desigualdades deste tipo, onde a igualdade ocorre, são chamadas exatas. Podemos enunciar este resultado de maneira formal do seguinte modo.

Proposição 1.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$ quaisquer, temos*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad (1.1)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Provaremos este resultado de duas formas distintas.

1. A primeira maneira é puramente algébrica:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2 \\ \implies 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ \implies 4ab &\leq (a+b)^2 \\ \implies \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

2. A segunda maneira é geométrica: tomamos um segmento AC , de comprimento fixo $a+b$, e D entre A e C tal que $\overline{AD} = a$ e $\overline{DC} = b$, como ilustrado na Figura 1.1.

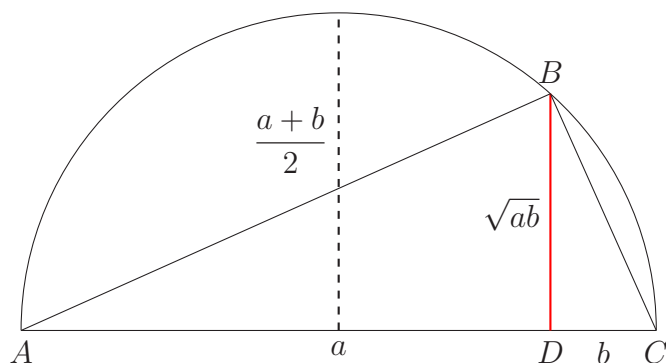


Figura 1.1: Demonstração geométrica de (1.1).

Construímos uma semicircunferência de diâmetro AC e traçamos a perpendicular a \overleftrightarrow{AC} por D . Seja B a interseção da semicircunferência com a perpendicular. Temos, então, $\triangle ABD$ semelhante a $\triangle BCD$ pelo critério ângulo-ângulo, donde segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \implies \overline{BD} = \sqrt{ab}.$$

Assim, observando que $\overline{BD} \leq \overline{AC}/2$, fica demonstrada a desigualdade. Note que a igualdade ocorre se, e somente se, D é ponto médio de AC , ou seja, se, e somente se, $a = b$.

□

Nas aplicações que faremos de (1.1) ao longo do texto, usaremos com mais frequência a forma alternativa:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

A desigualdade (1.1) pode ser utilizada para resolver problemas de maximização como os dois a seguir.

Problema 1.1. *Encontrar o máximo do produto de dois números $x, y > 0$ cuja soma é constante e igual a $S \in \mathbb{R}_+$.*

Solução. Note que maximizar o produto é o mesmo que maximizar a raiz do produto, já que x e y são não negativos. Logo, (1.1) nos diz

$$\sqrt{xy} \leq \frac{S}{2},$$

ou seja, que o máximo da raiz ocorre quando x e y são iguais e vale

$$\frac{x+x}{2} = x,$$

de modo que o máximo do produto é

$$\left(\frac{x+x}{2}\right)^2 = x^2,$$

ou seja, o quadrado da metade da soma. □

Problema 1.2. *Encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.*

Solução. Basta notar que a área do triângulo retângulo com catetos de medidas x e y é $xy/2$. Fixando $x + y = S$, temos, por (1.1), que

$$\frac{xy}{2} \leq \frac{S^2}{8},$$

de modo que a área é máxima quando x é igual a y , ou seja, quando o triângulo é isósceles. □

1.2. Desigualdade das médias aritmética e geométrica entre n números

Podemos generalizar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica como na proposição a seguir.

Proposição 1.2. Dado um conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ qualquer, vale

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \quad (1.2)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Como no caso $n = 2$, também há várias maneiras de demonstrar a desigualdade no caso geral. Apresentaremos duas formas: a primeira, formulada por Cauchy, é considerada uma das mais bonitas; a segunda, formulada por Ellers¹, é mais sucinta e direta.

1. Para o primeiro método, começaremos provando (1.2) para $n = 4$ e, em seguida, “desceremos” para $n = 3$, usando a técnica de *forward-backward induction*.

Para $n = 4$ a desigualdade (1.2) segue se aplicarmos (1.1) como a seguir:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= (x_1 \cdot x_2)(x_3 \cdot x_4) \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right]^2 \\ &\leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)^4. \end{aligned}$$

Usando essa desigualdade auxiliar, temos

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3} &= [x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3}]^{1/4} \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 x_2 x_3)^{1/3}}{4}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\frac{3}{4}(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}$$

¹O autor de [1] cita apenas o sobrenome deste matemático. Ao que nossas pesquisas indicaram, se trata de Erich Werner Ellers, professor emérito da Universidade de Toronto.

e, portanto,

$$\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Note que, usando o método acima, podemos provar (1.2) para todo n da forma 2^k , com $k \geq 2$.

Para concluir a indução, suponhamos que a desigualdade seja válida para $n = m + 1$. Por hipótese, temos

$$\begin{aligned} (x_1 \cdots x_m)^{1/m} &= [(x_1 \cdots x_m)(x_1 \cdots x_m)^{1/m}]^{1/(m+1)} \\ &\leq \frac{x_1 + \cdots + x_m + (x_1 \cdots x_m)^{1/m}}{m+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(x_1 \cdots x_m)^{1/m} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m+1},$$

ou seja,

$$\sqrt[m]{x_1 \cdots x_m} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m},$$

e concluímos a demonstração.

2. O argumento de Ellers consiste em mostrar, por indução, que se

$$x_1 \cdots x_n = 1$$

com $x_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, então

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n.$$

Provada esta implicação, seguirá que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq 1 = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

que é o que queremos provar. Vamos, então, mostrar a validade da implicação.

Para $n = 1$ vale a implicação acima. Suponha que ela seja válida para $n = m$. Ora, então se

$$x_1 \cdots x_{m+1} = 1,$$

sabemos que há dois números no conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\}$ tais que um deles é maior ou igual a 1 e outro é menor ou igual a 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 \geq 1$ e $x_2 \leq 1$. Essas duas desigualdades são equivalentes a

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0,$$

isto é,

$$x_1 x_2 + 1 \leq x_1 + x_2.$$

Com isso e usando a hipótese de indução, temos

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} \geq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} \geq 1 + m,$$

como queríamos. □

Nas soluções usaremos mais frequentemente a forma equivalente de (1.2)

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n.$$

A seguir, faremos uma interpretação geométrica de (1.2) e, em seguida, resolveremos alguns problemas relacionados.

Interpretação geométrica. A desigualdade (1.2) possui uma interpretação geométrica interessante. Para $n = 2$, (1.2) nos diz que

$$2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \iff 4\sqrt{x_1 x_2} \leq 2(x_1 + x_2),$$

ou seja, que um retângulo de dada área tem perímetro mínimo se ele é um quadrado. Para n qualquer, (1.2) é uma generalização dessa ideia.

De fato, cada vértice de um ortotopo n -dimensional, que é a generalização de paralelepípedo reto retângulo para dimensões maiores que 3, é ligado a n arestas, com comprimentos x_1, x_2, \dots, x_n . Como há 2^n vértices, podemos estimar o número de arestas por $n2^n$. Mas como cada aresta liga 2 vértices, essa estimativa contará o número de arestas duas vezes. Portanto, concluímos que há $2^{n-1}n$ arestas neste ortotopo n -dimensional. Agora, como há a mesma quantidade de arestas de cada comprimento e há n comprimentos possíveis, sabemos que há 2^{n-1} arestas de cada comprimento, e a soma dos comprimentos de todas as arestas é

$$2^{n-1}(x_1 + \dots + x_n).$$

Multiplicando (1.2) por $n2^{n-1}$, podemos escrever

$$2^{n-1}(x_1 + \dots + x_n) \geq n2^{n-1} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

O lado esquerdo desta desigualdade é o análogo, para dimensões maiores, do perímetro em dimensão 2, enquanto que o lado direito é uma constante multiplicada pela raiz n -ésima do volume do ortotopo. Portanto, como a igualdade é válida somente quando todos os x_k são iguais, podemos concluir que entre todos os ortotopos de dimensão n com mesmo volume, o n -cubo tem a menor soma de comprimentos das arestas ligadas a cada vértice.

Problemas. Para terminar esta seção, vamos discutir três problemas estereométricos, isto é, envolvendo volume de sólidos, que podem ser resolvidos usando (1.2).

Problema 1.3. *Numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo.*

Solução. Sejam R o raio da esfera, O o centro da esfera, r o raio da base do cone e h a altura do cone. Aqui temos dois casos para lidar.

Caso 1: $0 \leq h \leq R$. Neste caso, a seção vertical do cone com a esfera é algo como ilustrado na figura abaixo.

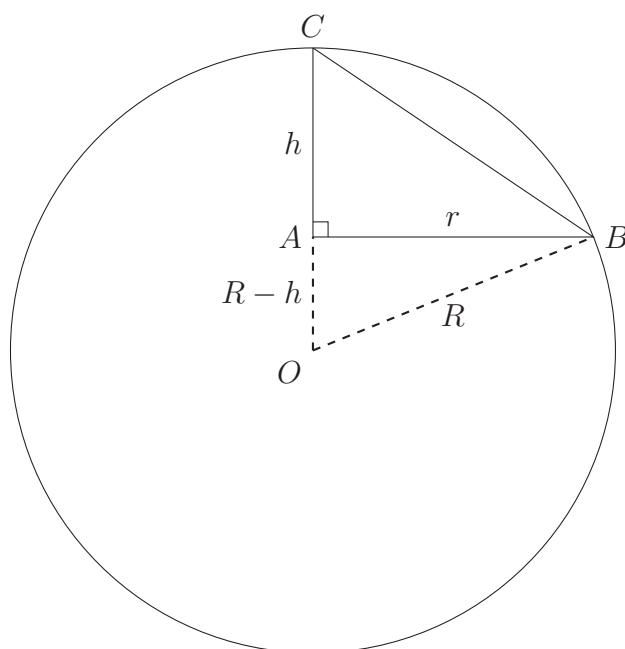


Figura 1.2: Seção vertical do cone com a esfera no Caso 1.

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (R - h)^2 \iff r^2 = R^2 - (R - h)^2,$$

e, substituindo na fórmula do volume V do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3} [R^2 - (R - h)^2] = \frac{\pi h^2}{3} (2R - h).$$

Daí, usando (1.2), temos

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} (2R - h) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade é válida quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

o que é absurdo, pois estamos supondo $h \leq R$. Portanto, o máximo não ocorre para $0 \leq h \leq R$.

Caso 2: $R \leq h \leq 2R$. Neste caso, a seção vertical do cone com a esfera é como mostrada abaixo.

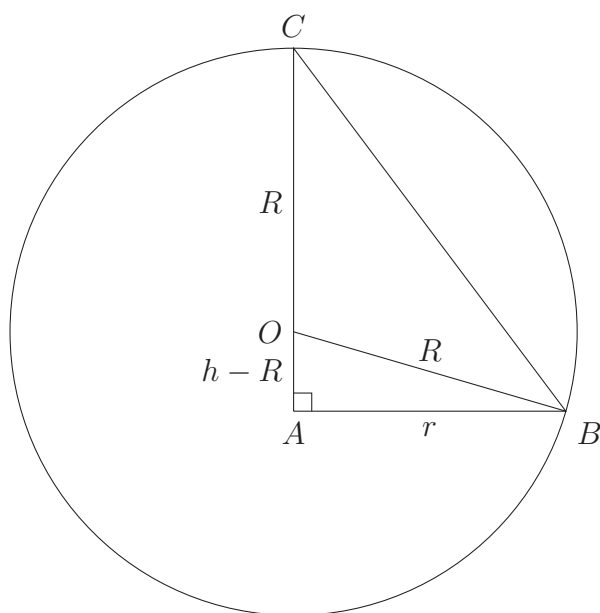


Figura 1.3: Seção vertical do cone com a esfera no Caso 2.

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (h - R)^2 \iff r^2 = R^2 - (h - R)^2,$$

e, substituindo na fórmula do volume V do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3} [R^2 - (h - R)^2] = \frac{\pi h^2}{3} (2R - h).$$

Usando (1.2) como no Caso 1, temos

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} (2R - h) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade, novamente, ocorre quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

ou seja, $h = (4/3)R$ maximiza $3V/(4\pi)$ e, portanto, maximiza V . \square

Problema 1.4. Num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo.

Solução. Sejam R o raio do cone, H a altura do cone, r o raio do cilindro e h a altura do cilindro. Observe a seção vertical do cilindro com o cone abaixo.

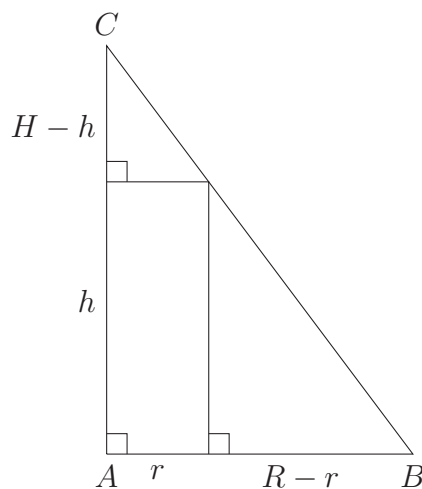


Figura 1.4: Seção vertical do cilindro com o cone.

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H},$$

ou seja,

$$h = H \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Daí, o volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{H}{R} (R - r).$$

Logo, temos

$$\frac{RV}{4\pi H} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} (R - r) \leq \left(\frac{R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade vale quando

$$\frac{r}{2} = R - r \iff r = \frac{2R}{3}.$$

Portanto, $r = (2/3)R$ maximiza $RV/(4\pi H)$ e, portanto, maximiza V . \square

Problema 1.5. *Dada uma folha quadrada $a \times a$, cortar quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tenha volume máximo.*

Solução. Seja x a medida do lado dos quadrados retirados. Observe a Figura 1.5.

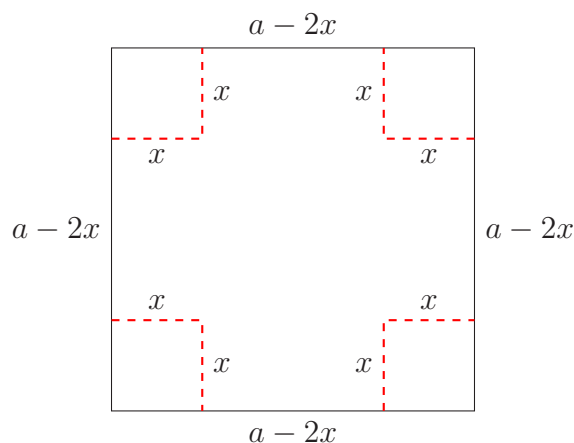


Figura 1.5: Quadrado de lado a com pequenos quadrados de lado x removidos.

O volume da caixa é $V = (a - 2x)(a - 2x)x$. Daí, temos

$$4V = (a - 2x)(a - 2x)4x \leq \left(\frac{2a}{3}\right)^3,$$

donde segue que V é máximo quando $a - 2x = 4x$, ou seja, quando $x = a/6$. \square

1.3. Desigualdades com a média quadrática

Nesta seção, vamos demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática e a desigualdade entre as médias geométrica e quadrática e, em seguida, aplicá-las em problemas de otimização. As desigualdades são enunciadas e demonstradas nas duas proposições a seguir.

Proposição 1.3. *Dado um conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ qualquer, vale*

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (1.3)$$

A igualdade é válida se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. Dados $a, b \geq 0$ quaisquer com $a > b$, temos que

$$0 \leq (a - b)^2 \iff 2ab \leq a^2 + b^2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 &= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \\ &\leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2}{n^2} \\ &= n \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n^2} \\ &= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}, \end{aligned}$$

e (1.3) segue. □

Proposição 1.4. *Dado um conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ qualquer, vale*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (1.4)$$

A igualdade é válida se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. Basta justapor (1.2) com (1.3):

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \stackrel{(1.2)}{\leq} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \stackrel{(1.3)}{\leq} \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

□

Com (1.4), vamos resolver os dois problemas de otimização a seguir.

Problema 1.6. *Encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, o de maior área.*

Solução. Usando (1.4) com $n = 2$, temos

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Daí, se o retângulo tem lados x_1 e x_2 e está inscrito numa circunferência de raio r , então

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = r\sqrt{2},$$

como ilustra a figura abaixo.

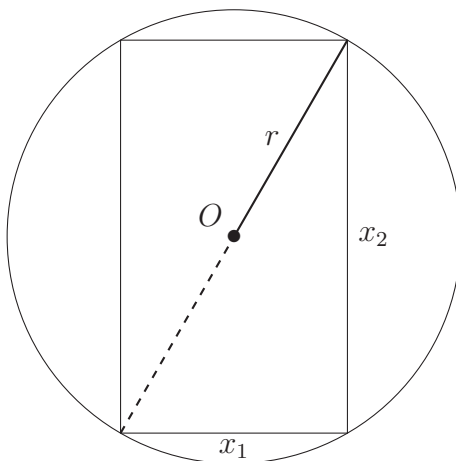


Figura 1.6: Retângulo de lados x_1 e x_2 inscrito na circunferência de raio r .

Portanto, a área é máxima quando $x_1 = r\sqrt{2} = x_2$, ou seja, quando o retângulo é um quadrado. □

Problema 1.7. *Encontrar, dentre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume.*

Solução. Podemos resolver esse problema com uma aplicação direta de (1.4). O paralelepípedo de maior volume será um cubo cujos lados têm medida $2R/\sqrt{3}$, sendo R o raio da esfera. De fato, sendo x_1, x_2, x_3 as medidas dos lados do paralelepípedo, temos por (1.4) que

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

ou seja, o volume do paralelepípedo é máximo quando $x_1 = x_2 = x_3$ e, nesse caso, temos

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

□

1.4. Soluções usando Cálculo

Nesta seção resolveremos os problemas apresentados nas seções anteriores usando as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Enunciaremos cada problema novamente antes de resolvê-lo.

Problema 1.1. Encontrar o máximo do produto de dois números $x, y > 0$ cuja soma é constante e igual a $S \in \mathbb{R}_+$.

Solução. Sejam x e y os números considerados, com soma constante e igual a $S \in \mathbb{R}_+$ fixa. Temos, então,

$$x + y = S \iff y = S - x.$$

A área do retângulo é dada por

$$f(x) = xy = x(S - x), \quad x \in [0, S].$$

Derivando e igualando a zero, temos

$$f'(x) = S - 2x = 0 \iff x = \frac{S}{2}.$$

Portanto, $S/2$ é ponto crítico de f . Como f é contínua em $[0, S]$ e

$$f(0) = 0 = f(S), \quad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{4} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $x = S/2$ maximiza f , como esperado. \square

Problema 1.2. Encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.

Solução. Sejam x e y as medidas dos catetos do triângulo, e suponhamos que $x + y = S$, com $S \in \mathbb{R}_+$ fixo. A área do triângulo é dada por

$$f(x, y) = \frac{xy}{2},$$

que pode ser escrita em termos de x como

$$f(x) = \frac{x(S-x)}{2}, \quad x \in [0, S].$$

Derivando f , temos

$$f'(x) = \frac{S}{2} - x.$$

Igualando a derivada a zero, temos que $S/2$ é ponto crítico de f . Como f é contínua em $[0, S]$ e

$$f(0) = 0 = f(S), \quad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{8} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $x = S/2$ maximiza f , como esperado. \square

Problema 1.3. Numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo.

Solução. Observando a Figura 1.3, vimos que

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2.$$

Substituindo na fórmula do volume do cone, obtivemos

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h), \quad h \in [0, 2R],$$

ou seja, escrevemos V em função de h ; derivando, temos

$$V'(h) = \frac{2\pi h}{3}(2R - h) - \frac{\pi h^2}{3} = \frac{4\pi Rh}{3} - \pi h^2 = \pi h \left(\frac{4R}{3} - h \right).$$

Igualando a primeira derivada a zero temos que 0 e $4R/3$ são pontos críticos de V . Como V é contínua em $[0, 2R]$ e

$$V(0) = 0 = V(2R), \quad V\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $h = 4R/3$ maximiza a função volume, como esperado. \square

Problema 1.4. Num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo.

Solução. Observando a Figura 1.4, foi visto que

$$h = H \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

Daí, o volume do cilindro é dado, em função de r , por

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi \frac{H}{R} r^2 (R - r), \quad r \in [0, R].$$

Derivando V , temos

$$V'(r) = \pi \frac{H}{R} [2r(R - r) - r^2].$$

Igualando a derivada a zero, temos que 0 e $2R/3$ são pontos críticos de V . Como V é contínua em $[0, R]$ e

$$V(0) = 0 = V(R), \quad V\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4\pi HR^2}{27} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $r = 2R/3$ maximiza a função volume, como esperado. \square

Problema 1.5. Dada uma folha quadrada $a \times a$, cortar quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tenha volume máximo.

Solução. Vimos que o volume da caixa é dado, em função de x , por

$$V(x) = x(a - 2x)^2, \quad x \in [0, a/2].$$

Derivando V , temos

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Portanto, igualando V' a zero temos que os pontos críticos de V são $x = a/2$ e $x = a/6$. Como V é contínua em $[0, a/2]$ e

$$V(0) = 0 = V\left(\frac{a}{2}\right), \quad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27} > 0.$$

Logo, pelo Teorema de Weierstrass, temos que $x = a/6$ maximiza a função volume, como esperado. \square

Problema 1.6. Encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, o de maior área.

Solução. Da Figura 1.6, sabemos que

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \iff x_2 = \sqrt{4r^2 - x_1^2},$$

pois $x_1, x_2 > 0$. Daí, a área do retângulo é dada por

$$A(x_1) = x_1 \sqrt{4r^2 - x_1^2}, \quad x_1 \in [0, 2r].$$

Derivando, temos que

$$A'(x_1) = \sqrt{4r^2 - x_1^2} - \frac{x_1^2}{\sqrt{4r^2 - x_1^2}}.$$

Igualando a derivada a zero, obtemos que $r\sqrt{2}$ é o ponto crítico de A . Daí, como A é contínua em $[0, 2r]$ e

$$A(0) = 0 = A(2r), \quad A(r\sqrt{2}) = 2r^2 > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $x_1 = r\sqrt{2}$ maximiza a área. Portanto, o retângulo de área máxima tem dimensões $x_1 = r\sqrt{2} = x_2$, ou seja, é um quadrado, como esperado. \square

Problema 1.7. Encontrar, dentre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume.

Solução. Neste problema, queremos encontrar, entre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume. Para tanto, vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. O problema então se traduz em maximizar a função

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3,$$

com a condição de que

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sendo

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4R^2,$$

pois a diagonal do paralelepípedo retângulo é um diâmetro da esfera. Como x_1, x_2 e x_3 são as medidas dos lados de um paralelepípedo, vamos supor que $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, sabemos que, no ponto de máximo, temos

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, x_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculando os gradientes, temos

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2), \quad \nabla g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3).$$

Portanto, no ponto de máximo temos

$$\begin{cases} x_2x_3 = 2\lambda x_1 \\ x_1x_3 = 2\lambda x_2 \\ x_1x_2 = 2\lambda x_3 \end{cases}.$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \iff x_1^2 = x_2^2.$$

Analogamente, dividindo a segunda equação pela terceira, temos

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \iff x_2^2 = x_3^2.$$

A condição $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ implica que

$$3x_1^2 = 4R^2 \implies x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

pois $x_1 > 0$. Logo, temos

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

ou seja, o paralelepípedo retângulo que tem volume máximo é o cubo de lado $2R/\sqrt{3}$, como esperado. \square

Observação. Como mencionamos no início, não existe um método universal para se resolver todo e qualquer problema de otimização. Neste texto, apresentamos alguns problemas cujas soluções utilizaram as desigualdades entre médias e mostramos, também, formas de resolvê-los utilizando as ferramentas do Cálculo. O leitor interessado em conhecer outras técnicas e outros problemas de otimização é convidado a consultar [1] e também [3].

Referências Bibliográficas

- [1] TIKHOMIROV, V. M. (1991). *Stories about Maxima and Minima*. American Mathematical Society.
- [2] THOMAS, G. B. (2012). *Cálculo: Volume 1*. Pearson, 12^a edição.
- [3] PETMAT. (2022). *Notas da Pesquisa Coletiva*. Disponível em <http://pet.mat.unb.br/Publica%C3%A7%C3%B5es.html>



RESULTADOS SURPREENDENTES EM PROBABILIDADE

PHILIP COOLEY JUNIOR

JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

1 Introdução

2 Problemas

- 2.1 O Problema da Caixa de Bertrand
- 2.2 O Problema de Monty Hall
- 2.3 O Jogo de Penney Ante
- 2.4 O Problema das Sequências Verdadeiras e Forjadas de Moedas
- 2.5 O Problema do Aniversário
- 2.6 O Problema do Amigo Oculto

Referências

INTRODUÇÃO

Vamos considerar as seguintes questões apresentadas a um certo número de pessoas:

1- No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de saírem dois números diferentes?

2- Num grupo de 23 pessoas, qual a probabilidade de pelo menos duas delas fazerem aniversário no mesmo dia?

Suponha que você peça que as pessoas respondam de forma intuitiva de acordo com as opções: probabilidade baixa, alta ou por volta de 50%. Provavelmente, para a primeira pergunta, boa parte das pessoas responderá probabilidade alta e para a segunda, probabilidade baixa. A intuição da maioria falhará na segunda pergunta. Ao contrário do que as pessoas pensam, a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia num grupo de 23 pessoas não é baixa, é por volta de 50%.

A probabilidade é um assunto fascinante e nela existem diversos problemas e situações em que os resultados se mostram surpreendentes. Esse minicurso tratará desse tema. Nele apresentaremos problemas onde a nossa intuição costuma falhar, problemas onde o resultado traz relações de números famosos da Matemática e também situações, em jogos por exemplo, onde podemos ser induzidos a pensar que teremos partidas justas ou vantajosas, mas na verdade estaremos em desvantagem.

Esse minicurso é direcionado principalmente a estudantes de graduação dos cursos de Matemática que queiram diversificar o conhecimento sobre probabilidade. Também se destina aos professores que procuram material suplementar

para uso em suas aulas e aos aficionados da matemática recreativa que apreciam problemas intrigantes que envolvem o acaso.

O minicurso foi planejado para uma carga horária de quatro horas, dividida em duas aulas de duas horas. Nele serão apresentados vários problemas e quando possível o desenvolvimento da respectiva solução. Para entendimento da maioria das soluções será necessário um conhecimento básico de Probabilidade e Análise Combinatória. A ideia é apresentar as soluções que são curtas e fáceis utilizando os conhecimentos indicados. Se uma solução for muito longa ou conter tópicos mais avançados da probabilidade, serão fornecidas citações da literatura para verificar as respostas indicadas. Sempre que possível apresentaremos o contexto histórico do problema: quando e como surgiu o problema e a solução, qual a importância e contribuição do problema para a probabilidade.

PROBLEMAS

Nesta seção apresentaremos os principais problemas que serão explorados no minicurso. A ordem em que aparecem reflete uma visão particular, não se tratando de ordem cronológica ou de grau de importância. Alguns dos problemas que serão apresentados são tidos como problemas clássicos, por exemplo, o problema do aniversário que foi citado anteriormente. A maior parte se enquadra nos chamados problemas de natureza contraintuitiva.

2.1. O PROBLEMA DA CAIXA DE BERTRAND

Imagine três caixas onde uma contém duas moedas de ouro, uma outra duas moedas de prata e a terceira uma moeda de prata e outra de ouro. Escolhe-se uma caixa ao acaso. Retiramos uma moeda da caixa escolhida e verificamos que é de ouro. Qual é a probabilidade de que, ao retirar a outra moeda da caixa, esta seja de ouro?

O tratado *Calculs des Probabilités* publicado em 1889 por Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) é uma coletânea de vários problemas interessantes da probabilidade. O problema da caixa é o segundo problema que o livro trata. O enunciado do problema que foi apresentado aqui, está ligeiramente diferente do problema original.

A solução pode ser apresentada amparada na análise do espaço amostral. Quando retiramos uma moeda da caixa escolhida e verificamos que é de ouro, temos que a caixa escolhida não pode ser a que contém duas moedas de prata (caixa B). Logo, terá de ser a caixa A ou a caixa C. Precipitadamente, podemos pensar que, para a escolha da segunda moeda, temos dois casos possíveis (ouro

na caixa A ou prata na caixa C) e um caso favorável (ouro na caixa A) e daí concluir que a probabilidade da segunda moeda ser ouro é de 50%. O erro nesse raciocínio está no fato de que há três, e não dois casos prováveis. A caixa A contém duas moedas que são de ouro, mas que não são iguais. Podemos nomeá-las de M1 e M2, por exemplo. Há, portanto, dois casos a considerar quando a caixa A é escolhida: a primeira moeda escolhida é M1 e a segunda M2 ou a primeira é M2 a segunda M1. Dessa forma teremos três e não dois casos prováveis. Dos três casos prováveis, dois serão favoráveis, logo a probabilidade da segunda moeda ser ouro é $2/3$.

Uma solução mais formal desse problema pode ser dada usando o Teorema de Bayes. Vamos chamar de A a caixa que contém duas moedas de ouro, de B a caixa com duas moedas de prata e de C a caixa com uma moeda de prata e outra de ouro. Seja A o evento “caixa A é escolhida”, e similarmente para os eventos B e C. Seja O o evento “uma moeda de ouro é retirada de uma das caixas escolhida”. Então

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3,$$

$$P(O|A) = 1, P(O|B) = 0$$

e

$$P(O|C) = 1/2.$$

Usando o Teorema de Bayes, temos

$$\begin{aligned} P(A|O) &= \frac{P(O|A)P(A)}{P(O|A)P(A) + P(O|B)P(B) + P(O|C)P(C)} \\ &= \frac{(1)(1/3)}{(1)(1/3) + (0)(1/3) + (1/2)(1/3)} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

A solução desse problema é contraintuitiva e existem várias versões similares ao problema proposto por Bertrand, como a versão apresentada por Warren Weaver no artigo Probability na revista Scientific American de outubro de 1950. A importância do problema da caixa de Bertrand não se limita apenas

por ter uma solução contraintuitiva, mas também por ser um gerador de boas discussões e por ser um precursor do famoso Problema de Monty-Hall que será apresentado a seguir.

2.2. O PROBLEMA DE MONTY HALL

Em um jogo de prêmios de TV, existem três portas (A, B e C). Uma delas esconde um carro enquanto as outras duas portas escondem uma cabra cada. Um convidado escolhe uma das portas, digamos A. O apresentador do jogo, que sabe qual porta esconde o carro, abre uma porta, digamos B, que tem uma cabra atrás dela. Agora o competidor sabe que o carro está ou na porta A ou na porta B. O apresentador então dá ao competidor as opções de seguir sua escolha original (porta A) ou mudar para a outra porta fechada (porta C). É mais provável o competidor ganhar o carro se trocar de porta (nesse caso de A para C) ou permanecer com a porta A? Ou é indiferente?

Este problema foi apresentado pela primeira vez pelo bioestatístico americano Steve Selvin em 1975 na seção Carta ao Editor no jornal *American Statistician*. Foi inspirado nas regras do programa de televisão *Let's Make a Deal* da década de 1960 e 70 apresentado por Monty Hall.

Aparentemente parece ser um problema bastante simples, pois podemos pensar da seguinte forma: temos duas portas, se abrirmos a premiada, ganharmos, se abrirmos a outra, perdemos, portanto, parece ser indiferente permanecer ou trocar de porta. Por parecer um problema simples, quando a resposta correta desse problema é anunciada costuma contrariar e trazer reação das pessoas, incluindo matemáticos famosos.

Uma solução técnica pode ser dada usando o Teorema de Bayes. Seja V_A , o evento em que o carro (veículo) está escondido na porta A e, da mesma forma V_B e V_C para os eventos em que as portas B e C escondem o carro, respectivamente. Seja M_B o evento em que o apresentador abre a porta B. Agora, como a questão assume que o competidor inicialmente escolhe a porta A e o apresentador abre a porta B, a troca será uma estratégia vencedora somente se o carro estiver atrás da porta C. Ou seja, a probabilidade de ganhar

o carro se o competidor trocar é $P(V_C|M_B)$, onde

$$\begin{aligned} P(V_C|M_B) &= \frac{P(M_B|V_C)P(V_C)}{P(M_B|V_A)P(V_A) + P(M_B|V_B)P(V_B) + P(M_B|V_C)P(V_C)} \\ &= \frac{(1)(1/3)}{(1/2)(1/3) + (0)(1/3) + (1)(1/3)} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2.3. O JOGO DE PENNEY ANTE

Se você lançar uma moeda três vezes, há oito resultados igualmente prováveis: CCC, CCK CKC, CKK, KCC, KCK, KKC e KKK (onde C indica cara e K coroa). Considere um jogo em que um primeiro jogador(A) seleciona uma dessas ternas, e o segundo jogador(B) seleciona uma diferente. A moeda é, então, lançada várias vezes até que uma das ternas escolhidas apareça na sequência indicando quem ganha o jogo. Por exemplo, a Ana e a Beatriz vão disputar uma partida lançando repetidamente uma moeda. A Ana foi a que escolheu primeiro e escolheu a sequência “cara-coroa-coroa” (CKK). Em seguida, a Beatriz escolheu a sequência “coroa-coroa-cara” (KKC). Suponha que a moeda foi sendo lançada repetidamente até que formou a sequência CKCCCKK. Nesse momento a partida foi interrompida, pois os últimos três arremessos mostram que a Ana foi proclamada vencedora.

Este jogo é derivado de um problema proposto pelo matemático Walter Penney no Journal of Recreational Mathematics (Outubro de 1969, p. 241) e foi nomeado posteriormente de jogo de Penney Ante. Intuitivamente as pessoas pensam que se trata de um jogo honesto, já que separadamente as ternas que cada jogador escolhe são igualmente prováveis. Mas, dependendo das escolhas, um dos jogadores terá mais chances que sua terna apareça primeiro e vença o jogo.

No caso da disputa entre Ana e Beatriz, vamos calcular a probabilidade p de Ana vencer, ou seja, da terna CKK aparecer antes que KKC. A probabilidade, $1 - p$, de Beatriz vencer o jogo está condicionada à obtenção de qualquer

seqüência do tipo KKC ou KKKC ou KKKKC etc, portanto

$$\begin{aligned} 1 - p &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \\ &= \frac{1/8}{(1 - 1/8)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Esse resultado mostra que a Ana tem mais chance de vencer o jogo com probabilidade de 75%.

Há muitas maneiras de calcular a probabilidade de que uma terna precede uma outra. Para casos gerais, você pode calcular as probabilidades pela soma de uma série infinita (como já foi visto), diagramas da árvore, técnicas iterativas que produzem conjuntos de equações lineares, cadeias de Markov e assim por diante. Seja qual for a maneira utilizada para calcular a probabilidade das várias disputas que podem ocorrer, se nós continuarmos os cálculos, podemos construir o quadro geral mostrado na Figura 2.1, que fornece a probabilidade de B, o segundo jogador, vencer o primeiro jogador A para todos os emparelhamentos possíveis. Por exemplo, suponha que A escolheu KCK e B escolheu CCK, pelo quadro, a probabilidade de B vencer A é de $5/8$ (62,5%). Observe que nessa disputa o jogador B poderia ter sua chance aumentada para $2/3$ (66,7%) se tivesse escolhido a terna KKC.

Note que para encontrar a melhor resposta de B para uma terna escolhida por A, devemos encontrar a terna de A no topo, percorrer a coluna até encontrar a maior probabilidade, em seguida, mover-se para a esquerda ao longo da linha para obter a terna que B deve escolher. Quando examinamos as probabilidades dos vários emparelhamentos, descobrimos algo muito interessante: não importa que seqüência o primeiro jogador toma, o segundo jogador pode escolher uma melhor. Essa crucial informação para o segundo jogador é indicada na Tabela 2.1.

	KKK	KKC	KCK	KCC	CKK	CKC	CCK	CCC
KKK		1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
KKC	1/2		2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
KCK	3/5	1/3		1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
KCC	3/5	1/3	1/2		1/2	1/2	3/4	7/8
CKK	7/8	3/4	1/2	1/2		1/2	1/3	3/5
CKC	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2		1/3	3/5
CCK	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3		1/2
CCC	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	

Figura 2.1: Quadro de probabilidades

Note que o segundo jogador tem, na pior das hipóteses, probabilidade de $2/3$ de vencer a disputa, podendo chegar ao valor mais alto de $7/8$. Observe também que nesse jogo, não existe uma melhor terna para se escolher, porém sempre existe uma terna melhor para vencer a escolhida primeiramente. Outra questão muito interessante com o jogo de Penney Ante é que ele é um jogo não transitivo. Para entender melhor o que é um jogo não transitivo, vamos recorrer a um exemplo que é bastante conhecido das crianças: o clássico jogo pedra-papel-tesoura. Sabemos que a pedra vence a tesoura, a tesoura vence o papel. Se o jogo pedra-papel-tesoura fosse um jogo transitivo, então a pedra venceria o papel. Definitivamente, este não é o caso, pois sabemos que o papel vence a pedra. Portanto, pedra-papel-tesoura é um jogo não-transitivo. Isso também ocorre com o Penney Ante game. Por exemplo, de acordo com a Figura 2.1, temos que CKK vence KKC. Além disso, CCK vence CKK. Num jogo transitivo, isto sugeriria que CCK venceria KKC, mas isso não ocorre. Portanto, as sequencias CKK, CCK e KKC são não transitivas. De maneira

Tabela 2.1: Sua melhor resposta para a escolha do adversário.

Escolha do adversário	Sua escolha	Chance de vencer
KKK	CKK	7/8
KKC	CKK	3/4
KCK	KKC	2/3
CKK	CCK	2/3
KCC	KKC	2/3
CKC	CCK	2/3
CCK	KCC	3/4
CCC	HCC	7/8

geral, se tivermos quaisquer três sequências de ternas s_1 , s_2 e s_3 , em que s_1 vence s_2 e s_2 vence s_3 , então s_1 não vence s_3 .

A regra básica de como o segundo jogador deve fazer a sua escolha para maximizar sua chance de vitória é a seguinte: o 2º jogador sempre deve terminar sua sequência com os dois símbolos que começam a sequência escolhida pelo primeiro jogador e nunca escolher um palíndromo (palavra que se pode ler, indiferentemente, da esquerda para a direita ou vice-versa). Por exemplo, suponha que o 1º jogador escolheu KCK. Nesse caso, o 2º jogador faz das duas primeiras letras (KC) as suas duas últimas, tendo que decidir entre CKC e KKC, mas CKC é palíndromo e logo é descartada, resta assim, ao 2º jogador escolher KKC para maximizar sua chance de vitória. Intuitivamente, essa estratégia significa que sempre que o padrão do 1º jogador está prestes a chegar, há uma boa chance de que o padrão do 2º jogador já surgiu.

2.4. O PROBLEMA DAS SEQUÊNCIAS VERDADEIRAS E FORJADAS DE MOEDAS

Qual a probabilidade de obtermos uma série de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas quando lançamos uma moeda 200 vezes?

Este problema mostra como a mente humana desconhece os padrões da aleatoriedade. O professor Theodore P. Hill no seu primeiro dia de aula em seu curso de Probabilidade pede aos seus alunos de Matemática do Instituto de Tecnologia da Georgia que façam em suas casas a seguinte experiência: Se o nome de solteira de suas mães começar com qualquer uma das letras de A a L, eles devem lançar uma moeda 200 vezes e registrar os resultados. Caso contrário, devem forjar uma sequência de 200 caras e coroas. No dia seguinte, quando os alunos trazem os resultados, para espanto de todos, em pouco tempo o professor Hill é capaz de separar as sequências verdadeiras das forjadas com ótima precisão.

O segredo de Hill é o fato de que numa sequência de 200 lançamentos de uma moeda, existe uma grande probabilidade de ocorrer uma série de pelo menos seis caras ou seis coroas consecutivas. Por outro lado, quando as pessoas têm que inventar uma sequência de lançamentos de uma moeda, dificilmente acreditam que exista uma sequência como esta.

A estratégia aqui apresentada para determinar essa probabilidade é baseada na recursão. Para isso, denotaremos por $P(6, n)$ a probabilidade de que uma série de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas apareça em uma sequência de n arremessos de uma moeda perfeita. Essa probabilidade pode ser dividida em dois casos. Probabilidade de que exista uma série de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas em n arremessos e o último arremesso não é essencial na criação da série, denotada por $P_{NE}(6, n)$. E probabilidade de que exista uma série de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas em 200 arremessos e o último arremesso é essencial na criação da série, denotada por $P_E(6, n)$. Usando as notações, temos

$$P(6, n) = P_{NE}(6, n) + P_E(6, n). \quad (2.1)$$

Começaremos calculando o caso em que o último arremesso não é essencial. A probabilidade de que exista uma série de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas em n arremessos e o último arremesso não é essencial na criação da série é igual a probabilidade de que exista uma série de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas nos primeiros $n - 1$ arremessos e o último arremesso ou

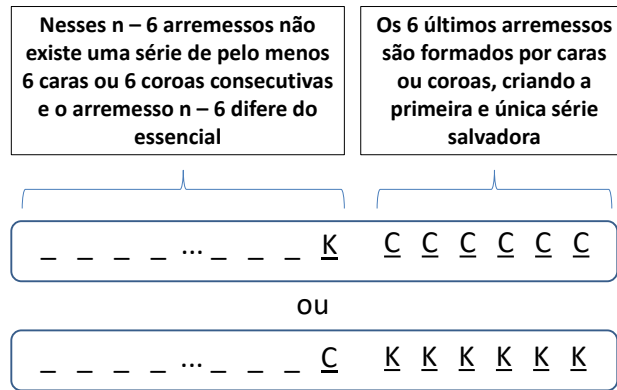


Figura 2.2: Esquema

é cara ou é coroa, ou seja,

$$P_{NE}(6, n) = P(6, n - 1)P(\text{cara ou coroa})$$

. e

$$P_{NE}(6, n) = P(6, n - 1). \tag{2.2}$$

Agora investigaremos o caso em que o último arremesso é essencial. O último arremesso essencial pode ser cara ou coroa. Para que o último arremesso seja essencial, devemos ter os 6 últimos arremessos formados por caras ou coroas, antecedido de uma sequência onde não exista pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas, e além disso, o arremesso $n - 6$ deve diferir do arremesso essencial (veja o esquema da Figura 2.2 onde C indica cara e K coroa).

Representaremos por $\bar{P}(6, n - 6)$ a probabilidade de que não exista uma sequência de pelo menos 6 caras ou 6 coroas consecutivas em $n - 6$ arremessos. Essa probabilidade pode ser dividida em dois casos: caso em que o arremesso $n - 6$ é coroa, indicado por $\bar{P}_K(6, n - 6)$ e caso em que o arremesso $n - 6$ é cara, indicado por $\bar{P}_C(6, n - 6)$.

Assim, de acordo com o esquema anterior, temos

$$P_E(6, n) = \overline{P}_K(6, n - 6)(1/2)^6 + \overline{P}_C(6, n - 6)(1/2)^6.$$

Ou ainda,

$$P_E(6, n) = [\overline{P}_K(6, n - 6) + \overline{P}_C(6, n - 6)](1/2)^6. \quad (2.3)$$

Observe que

$$\overline{P}_K(6, n - 6) + \overline{P}_C(6, n - 6) = \overline{P}(6, n - 6) = 1 - P(6, n - 6).$$

Dessa forma, a equação (2.3) se torna

$$P_E(6, n) = [1 - P(6, n - 6)](1/2)^6. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.2) e (2.4) em (2.1), temos

$$P(6, n) = P(6, n - 1) + [1 - P(6, n - 6)](1/2)^6. \quad (2.5)$$

Esta é uma relação de recorrência simples de grau 6, ou seja, se pudermos determinar as condições iniciais $P(6, 0)$, $P(6, 1)$, ..., $P(6, 6)$, então poderemos começar a usar a recursão. Felizmente, essas condições iniciais são fáceis de calcular. De fato, $P(6, n) = 0$ quando $n < 6$ e $P(6, 6) = 2/2^6$.

Para $n > 6$, usamos a equação (2.5) e obtemos:

$$P(6, 7) = P(6, 6) + [1 - P(6, 1)](1/2)^6 = 3/2^6 = 0,046875,$$

$$P(6, 8) = P(6, 7) + [1 - P(6, 2)](1/2)^6 = 4/2^6 = 0,0625, \dots$$

Como esses cálculos manuais se tornam muito trabalhosos, prosseguiremos usando o Excel que é uma ótima ferramenta para trabalhar com as recursões. Inicialmente, preenchemos as células B2 até B8 com as condições iniciais correspondentes ao número de lançamentos que são indicados na coluna A. Na célula B9, devemos traduzir a relação de recorrência para a linguagem do Excel. Isto é conseguido através da digitação da fórmula $=B8+(1-B3)*(1/2)^6$. Veja Figura 2.3.

	A	B
1	n	$P(6,n)$
2	0	0
3	1	0
4	2	0
5	3	0
6	4	0
7	5	0
8	6	$=2*(1/2)^6$
9	7	$=B8+(1-B3)*(1/2)^6$

Figura 2.3: Início da planilha

Em seguida, selecionamos e depois arrastamos para baixo as células A9 e B9 até obtermos o valor de n desejado, que no caso desse problema vale 200. A Figura 2.4 dá uma ideia dos resultados encontrados.

Assim, $P(6, 200) \approx 0,9653$. De fato, um valor bastante alto. O que faz assegurar, na grande maioria das vezes, o surgimento de pelo menos 6 caras ou 6 coroas agrupadas em 200 lançamentos de uma moeda perfeita.

2.5. O PROBLEMA DO ANIVERSÁRIO

Qual é o menor número de pessoas que devem estar em uma sala para que a probabilidade de que algumas compartilhem um aniversário seja de pelo menos 50%? Suponha que haja 365 dias por ano e que os nascimentos tenham a mesma probabilidade de ocorrer em qualquer dia.

O problema foi proposto pela primeira vez por von Mises (1939). A solução é encontrada usando os recursos usuais da probabilidade. Vamos considerar n pessoas e calcular a probabilidade p de pelo menos duas fazerem aniversário no mesmo dia. Como cada pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos

2.6. O PROBLEMA DO AMIGO OCULTO

Seja uma brincadeira de “amigo oculto”, na qual n pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam em um recipiente, de onde cada uma pega aleatoriamente um dos pedaços de papel. Qual a probabilidade de alguém pegar seu próprio nome? O problema apresentado é uma versão popular de um problema bem antigo que aparece na obra *Essay d’Analyse sur les Jeux de Hazard* (1708) do matemático francês Pierre Remond de Montmort (1678-1719). O problema original estava sob o título do jogo do Treize e também é conhecido como o *Problème des Rencontres* (Problema das coincidências). O problema recebeu atenção de vários matemáticos renomados da época. Montmort apresenta a solução na segunda edição de 1713, onde dá créditos às contribuições dos matemáticos John (1667- 1759) e Nicholas Bernoulli (1687-1759).

A probabilidade de pelo menos uma pessoa pegar o seu próprio nome é

$$p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

A Tabela 2.2 mostra p_n para alguns valores de n .

Tabela 2.2: Alguns valores de p_n .

<u>n</u>	<u>p_n</u>
1	1,0000
2	0,5000
3	0,6666
4	0,625
5	0,6333
6	0,6319
7	0,6321
8	0,6321

Se a tabela apresentar mais valores de p_n para n cada vez maior, p_n tenderá a um certo valor por volta 0,6321. Isso ocorre pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - e^{-1} = 0,632120558\dots$$

É surpreendente o valor relativamente grande de p_n em si, para $n \geq 7$. Se o experimento do sorteio do amigo oculto com $n = 7$ for repetido muitas vezes, em um pouco menos de 2 de 3 repetições, pelo menos uma pessoa irá, em média, sortear o próprio nome. A probabilidade do sorteio do amigo oculto ser bem sucedido fica por dos 37% e de ser mal sucedido por volta de 63%.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ACZEL, A.D. (2007). *Quais são suas chances*. BestSeller.
- [2] BENNETT, D.J. (2003). *Aleatoriedade*. Martins Fontes.
- [3] GARDNER, M.(2003) *Ah, Descobri*. Gradiva.
- [4] GARDNER, M.(2003) *Time travel and other mathematical bewilderments*. W. H. Freeman and Company.
- [5] GARDNER, M.(1993) *Ah, Apanhei-te*. Gradiva.
- [6] GORROOCHURN, P. (2012) *Classic Problems of Probability*. John Wiley Sons.
- [7] MLODINOW, L. (2009) *O andar do bêbado: Como o acaso determina nossas vidas*. Zahar
- [8] STEWART, I. (1998). *Título*. Editora.
- [9] TIJMS, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life*. Cambridge University Press,
- [10] TIJMS, H. (2007) *Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life*. Cambridge University Press,
- [11] VIANA, J.P. (2000) *Desafios/7*. Afrontamento.
- [12] VIANA, J.P. (1996) *Desafios/5*. Afrontamento.



SEQUÊNCIA FEDATHI E H5P PARA A PROMOÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA

CARLOS DELMIRO, MILÍNIA FELÍCIO E HERMÍNIO
BORGES NETO

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

*Esse texto é uma das culminâncias das discussões realizadas no Laboratório
de Pesquisa Multimeios
Dedicamos então, a todos os colaboradores da Família MM.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Ferramenta H5P

2 Sequência Fedathi: uma proposta de ensino

3 Situações Generalizáveis para a Educação Básica

3.1 Ensino Fundamental: anos iniciais

3.2 Ensino Fundamental: anos finais

3.3 Ensino Médio

4 Licenciatura em Matemática no Contexto Fedathiano

4.1 Cálculo Diferencial e Integral

4.2 Álgebra Linear

4.3 Teoria dos Números

4.4 Estruturas Algébricas

4.5 Análise na Reta

Apêndices

A nome do primeiro apêndice

A.1 Primeira seção do Apêndice

Referências

PREFÁCIO

O presente texto apresenta ensaios para uma nova postura do professor em sala de aula, em diversos formatos de ambiente educacional: presencial, virtual ou híbrido. As ideias aqui apresentadas são debatidas na vertente da Educação Matemática, com foco na Sequência Fedathi. Essa proposta de ensino é idealizada por um cearense, o Matemático e Professor Hermínio Borges Neto, e com berço no Ceará. São apresentados uma breve explanação de H5P, ferramenta digital aplicada no minicurso, e da Sequência Fedathi.

Por ser uma forma de criar, reutilizar ou remodelar conteúdo para propiciar interação assíncrona, o H5P possui afinidade com a Sequência Fedathi. Ambos, ferramenta e metodologia de ensino, buscam colocar o estudante em um ambiente que ele coloque a mão na massa.

Esse minicurso propõe a reflexão em relação ao ensino de Matemática com o auxílio de ferramentas digitais, com a apresentação de exemplos aqui construídos, outros já aplicados em contextos escolares.

Belém, junho de 2022

Carlos Henrique Delmiro de Araújo
Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício
Hermínio Borges Neto

FERRAMENTA H5P

O conteúdo H5P pode ser incorporado em qualquer plataforma que suporte conteúdo incorporado (iframes). O H5P.com também oferece integrações para LMSs como Canvas, Brightspace, Blackboard, Moodle e outros sistemas que suportam o padrão LTI. Além disso, o H5P possui plugins para WordPress, Moodle, Drupal e vários outros sistemas de publicação.

Nesse minicurso, teremos o H5P integrado no ambiente virtual de ensino Moodle Multimeios. Esse moodle é instalado no servidor do Laboratório de Pesquisas Multimeios (MM), inserido na Faculdade de Educação (FACED) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

O H5P é uma ferramenta de criação de conteúdo que permite aprimorar o conteúdo por meio de interações. Essas interações podem ser perguntas de múltipla escolha, perguntas de preenchimento de lacunas, perguntas de arrastar e soltar, *links*, imagens, pergunta do tipo de verdadeiro ou falso, entre outras (LOFTUS; LOWNEY, 2020).

É possível realizar interações com vídeos existentes no *YouTube* ou realizar o *upload* para o ambiente e realizar interações em vídeos autorais. É possível realizar esse tipo de ações em slides.

O H5P capacita todos a criar, compartilhar e reutilizar conteúdo interativo. Os objetivos do projeto H5P são atrair uma grande comunidade mundial de pessoas qualificadas que criam, usam e compartilham bibliotecas H5P entre si; facilitar o compartilhamento mundial de uma grande variedade de conteúdo e tecnologias baseados em HTML; facilitar para os criadores de conteúdo entregar e publicar conteúdo HTML em diferentes CMS, LMS, LCMS e outras estruturas; Contribuir para um melhor conteúdo HTML5, tornando ainda mais

fácil cooperar e reutilizar uma excelente tecnologia da *web*.

O H5P teve seu início em fevereiro de 2015 com a integração da ferramenta com o YouTube. Desde então, a comunidade H5P insere melhorias e recursos. Além disso, H5P é uma tecnologia totalmente gratuita e aberta, com a licença MIT.

O uso do H5P no ensino de Matemática permite que o professor desenvolva módulos de aprendizagem interativa, pois é um recurso intuitivo, com fácil manuseio em *smartphones*, *notebooks* e *tablets*.

SEQUÊNCIA FEDATHI: UMA PROPOSTA DE ENSINO

As ideias da Sequência Fedathi tiveram origem na preocupação do Professor Hermínio Borges Neto enquanto docente no curso de bacharelado em Matemática na UFC, como relata Sousa (2015).

As concepções da Sequência Fedathi tiveram o seu início de construção na década de 1980 quando o Professor Hermínio lecionava a disciplina de Fundamentos da Matemática nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática na UFC. Nesse período, o Professor Hermínio era matemático puro, de carreira (com doutorado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada), pesquisador em Matemática.

Veja que, a grosso modo, a Matemática possui duas fases. A primeira fase é anterior ao século XX e a segunda fase, do século XX aos dias atuais. De meados do século XIX para o início do século XX, os trabalhos de Georg Cantor (1845-1918), teve o começo da fundamentação da Matemática. Essa corrente são: platonismo ou logicismo, formalismo e o construtivismo ou intuicionismo.

O platonismo, a grosso modo, a Matemática é uma área da Lógica. Filósofos do período clássico da Grécia Antiga (Sócrates e Platão), diziam que Matemática, na realidade, nada se inventava, tudo estava em "caixinhas" e que é papel do sujeito utilizar as "caixinhas" para ter acesso as verdades matemáticas, sendo a redução da Matemática à Lógica. As pessoas que debruçaram sobre essa corrente eram Bertrand Russel (1872-1970), Alfred North Whitehead (1861-1947) e Kurt Friedrich Gödel (1906-1978).

Em meados do século XX, Gödel introduziu os princípios básicos de Computação e consistiu em realizar algo formal para o logicismo aplicado. Por outro

lado, Russel e Whitehead produziram 3 volumes do *Principia Mathematica*, sendo os defensores da corrente filosófica da Matemática Logicismo.

Baseada em sistemas formais e dissociada de contextos reais, tem-se a corrente do Formalismo. Para tanto, David Hilbert (1862-1943), Georg Cantor, Felix Christian Klein (1849-1925) e Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) defendiam que a Matemática tinha vida própria, não necessitava de sua gênese na Lógica, com técnicas de demonstração para provar suas verdades e afirmações. Esse sujeitos foram para o positivismo e começaram a trabalhar os sistemas formais. Com isso, passaram a ter objetos e o primeiro exemplo desses trabalhos foi a axiomatização da Geometria Euclidiana.

Dos 5 postulados de Euclides, os pioneiros do formalismo foram em busca da axiomatização. Para tanto, houve fundamentação teórica na Teoria dos Conjuntos de Cantor, com a criação de objetos matemáticos, mostrando que não necessitava de contexto real, com o contexto virtual. Porém, Russel mostrou que esse modelo criado era com uma teoria "furada", pois, com o princípio do terceiro excluído, tinha-se o paradoxo do barbeiro de Russel.

A produção matemática do século XX aos dias atuais pautaram, em maioria, no formalismo. Por outro lado, para o professor de Matemática, é possível que não seja a maneira mais satisfatória para promover o ensino. É comum a produção de Matemática ser dissociada de contextos reais. Não é necessária as pesquisas em Matemática serem aplicadas. Veja que, a tese de doutorado do Professor Hermínio não partiu, a sua lacuna, de problema de contexto real, mas sim, foi realizado um estudo de corpos de funções algébricas de gênero 2 com o intuito de determinar suas classes de isomorfia (BORGES NETO, 1979).

Por outro perspectiva, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), Leopold Kronecker (1823-1891) e Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) refletiram da seguinte forma: o pensamento humano é algo finito. Dessa forma, o pensamento humano não segue infinitos passos, em que consegue pensar um número finito de vezes (ou etapas). Diante disso, as técnicas formais de validação na Matemática não funciona com o ser humano. Além disso, o intuicionismo não abria mão do formalismo, mas com uma linguagem contextualizada.

Para quem está no início dos estudos em Matemática, é necessário por a mão na massa. Por isso, em sua tese de Professor Titular, ele apresenta uma

proposta lógica-dedutiva construtiva (BORGES NETO, 2016), em que realiza-se a construção lógica, com deduções. Dessa forma, essa proposta une as três correntes filosóficas da Matemática

Veja que existem dois tipos de profissionais: o Matemático e o Professor de Matemática. Saber do conteúdo de Matemática não implica ser um bom Professor de Matemática, apesar de ser uma condição pertinente. É possível o Matemático ser um professor bom, mas não necessariamente será um bom professor (MENEZES, 2018).

A ideia de que ser um bom Matemática implica ser um bom professor, significaria baixos índices de reprovação nos cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática nas universidades ou institutos. Então, a abordagem para otimizar a performance de ensino do professor pode ser partindo do intuicionismo.

Após o seu pós-doutorado em Educação Matemática, em Paris VII, o Professor Hermínio amadurece as ideias da Sequência Fedathi para formalizá-la como proposta metodológica de ensino. Em 1997, ele ingressa na FACED e inicia o desenvolvimento de pesquisas no ensino de Matemática, formando o então chamado Grupo FEDATHI (SOUSA, 2015).

Uma das ideias da Sequência Fedathi é de o professor propiciar um ambiente em que o estudante vivencie o papel de um pesquisador da área. Nesse caso, estima-se em propor atividades em que o estudante exerça o papel de um matemático.

A palavra "Fedathi" representa uma homenagem que o Professor Hermínio faz aos seus três filhos, **Felipe**, **Daniel** e **Thiago** (SOUZA, 2013). A Sequência Fedathi, hoje, atua em diversos projetos de ensino, pesquisa e extensão ligados ao MM, nas áreas de Tecnologia Educacional, Ensino de Matemática, Ensino de Ciências, Formação de Professores, Educação a Distância, entre outras.

Inicialmente, a Sequência Fedathi era uma proposta de ensino ligada e com origens diretas para o Ensino de Matemática, porém, ao longo dos anos (de 1997 aos dias atuais), os pesquisadores do MM aprimoraram a metodologia, por meio de orientações em dissertações e teses do Professor Hermínio, de modo que tem-se a aplicação em várias áreas do conhecimento (BORGES NETO, 2017).

Um dos diferenciais da Sequência Fedathi para outras metodologias de ensino é de possuir aplicações além do ensino de Matemática. São alguns exemplos os trabalhos de Pereira (2004), Lisboa (2011), Batista (2015), Lisboa (2015), Santanta (2019), Barbosa (2020), Felício (2020) e Xavier (2020).

Retomando ao ensino de Matemática, o Professor Hermínio possui em sua linha de pensamento que a Matemática serve, desde os anos escolares, para desenvolver o raciocínio do indivíduo. Dessa forma, trabalha-se partindo de problemas, corroborando com a heurística de Lakatos (2015).

Corroborando com a ideia de que para ser professor de Matemática, é necessário ter conhecimento e entender a Matemática. Com isso, o princípio básico da Sequência Fedathi é falar daquilo que entende.

O professor que fundamenta suas ações na Sequência Fedathi, uma das impressões é que o espaço de ensino torna-se um ambiente de pesquisa. A investigação não é realizada pelo professor, e sim pelo estudante. Por exemplo, em aulas de Matemática, o professor fedathiano coloca os estudantes em posições de serem matemáticos.

As palavras-chaves da Sequência Fedathi são plateau, situação generalizável, postura mão no bolso, mão na massa, pergunta, contraexemplos, gambiarra, simplificação (mas nem tanto), exercitar o erro (não evitá-lo) (BORGES NETO, 2018).

O plateau é um termo matemático, que significa o ponto de equilíbrio. No ensino, é o ponto para partir com o intuito de estudar um novo conteúdo. São os pré-requisitos necessários para um bom andar durante a sessão didática, de acordo com as construções cognitivas. Se algum pré-requisito o estudante não domina, durante a sessão didática o professor mediará para alcançar esse equilíbrio.

Trabalhar com situação generalizável é você não trabalhar com situações específicas. Veja que isso oportuniza em "enxugar" gorduras do currículo, em que se alcança a simplificação. Por exemplo, no estudo de métodos para solução de sistemas lineares, a regra de Cramer não é generalizável (pois exige que se tenha o número de equações igual o número de incógnitas), bem como o método da adição. Para se ter uma situação generalizável para solução de sistemas lineares, o professor deve propor um problema que trabalhe de forma intuitiva

o método de Gauss (também conhecido como método do escalonamento).

Dessa forma, trabalhando com situações generalizáveis que utilizem a intuição, no nível adequado para o estudante (plateau), é propício a ele colocar a mão na massa, ou seja, se envolver com o problema em busca da solução. O estudante é o sujeito que manuseará o instrumento (objeto de estudo) e o professor já deve dominar esse instrumento (falar daquilo que entende).

Durante essa mão na massa, o professor tem que ter a postura mão no bolso, ou seja, não resolver ou dar dicas para resolver o problema. No entanto, a mediação do professor deve ser pautada por meio de perguntas e contraexemplos. Além disso, quando o estudante fornece a resposta, o professor evita a fala de certo ou errado, mas utiliza de perguntas e contraexemplos para o estudante realizar a autoavaliação e concluir a validade de seu raciocínio (e solução do problema).

A postura do professor perante algum erro do estudante deve ser de ver como uma alavanca meta para aprendizagem (FONTENELE, 2013). Dessa forma, o erro não será julgado para punição, mas como um novo caminho para a aprendizagem.

E tudo isso são estímulos para o estudante realizar a gambiarra. A grosso modo, com ferramentas de álgebra o estudante transpõe essa habilidade para resolver problemas de geometria. Assim, realizando a gambiarra, ele possui o raciocínio para uso de ferramentas algébricas e constrói um novo saber e conhecimento na transposição dessas habilidades em problemas em geometria.

Por fim, a sessão didática pautada na Sequência Fedathi é organizada em quatro etapas, denominadas de Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

De forma breve, a Tomada de Posição é o momento em que o professor apresenta a situação generalizável para o estudante. A Maturação é a circunstância que o estudante toma posse do problema, busca a compreensão para criar uma solução. Na Solução, o estudante apresenta a solução do problema proposto na Tomada de Posição, podendo ser o resultado esperado ou não. A Prova é a etapa que o professor sistematiza a solução do estudante e formaliza o conteúdo (MENEZES, 2017).

SITUAÇÕES GENERALIZÁVEIS PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

O H5P fornece vários tipos de conteúdo interativo no intuito de contemplar diversas necessidades.

3.1. ENSINO FUNDAMENTAL: ANOS INICIAIS

No ensino fundamental, tem-se o documento norteador: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Para exemplificar o uso do H5P, a situação será no 3º ano, em que, pela BNCC, um dos objetos de conhecimento que deve ser trabalhado na unidade temática Números é "Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações"(BRASIL, 2017, p. 286).

A habilidade que aborda esse objeto de conhecimento é a (EF03MA13), que avalia a capacidade do estudante em "Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras"(BRASIL, 2017, p. 287).

Dessa forma, pode ser utilizado o "Image Choice", recurso de interação presente no H5P.

3.2. ENSINO FUNDAMENTAL: ANOS FINAIS

3.3. ENSINO MÉDIO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO CONTEXTO FEDATHIANO

Algumas dissertações, teses e artigos, sob a orientação do Professor Hermínio, tiveram suas pesquisas envolvendo Sequência Fedathi no ensino de Matemática a nível de graduação.

4.1. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

4.2. ÁLGEBRA LINEAR

4.3. TEORIA DOS NÚMEROS

4.4. ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

4.5. ANÁLISE NA RETA

APÊNDICES

A

NOME DO PRIMERO APÊNDICE

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo.

Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

A.1. PRIMEIRA SEÇÃO DO APÊNDICE

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo.

Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARBOSA, Jéssica de Castro. Raízes: concepções teóricas, pedagógicas e tecno-práticas de um objeto educacional digital (OED) baseado na. 2020. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/52836>. Acesso em: 20 ago. 2020.
- [2] BATISTA, Janete Barroso. PRÁTICAS E SABERES DA DOCÊNCIA VIRTUAL. 2015. 93 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: http://blogs.multimeios.ufc.br/wp-content/blogs.dir/33/files/2021/01/2015_tese_jbbatista.pdf. Acesso em: 02/06/2022.
- [] BORGES NETO, Hermínio. Mudança de Gênero e Classificação de Corpos de Gênero 2. 1979. 57 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [] BORGES NETO, H. Uma proposta lógico-constructiva-dedutiva para o ensino de Matemática. 2016. 28f. Tese (Ascensão a Professor Titular) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- [3] BORGES NETO, Hermínio (org.). Sequência Fedathi: além das ciências duras. Curitiba: CRV, 2017.

- [] BORGES NETO, H. Sequência Fedathi: uma proposta de ensino. UFC, 2019. (1h33m42s). Publicado pelo canal Multimeios UFC. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MICDEBrWPYw&t=1147s>. Acesso em: 1 jun. 2022.
- [] FELÍCIO, Milínia Stephanie Nogueira Barbosa; MENEZES, Daniel Brandão; BORGES NETO, Hermínio. FORMAÇÃO FEDATHI GENERALIZÁVEL. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S.L.], v. 7, n. 19, p. 24-40, 11 abr. 2020. Boletim Cearense de Educacao e Historia da Matematica - BOCEHM. <http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v7i19.2906>. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2906>. Acesso em: 15 abr. 2020.
- [] FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. A Sequência Fedathi no ensino da álgebra linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/7521>. Acesso em: 04 fev. 2020.
- [] LAKATOS, Imre. Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery. 16. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. 183 p. Edited by John Worrall and Elie Zahar.
- [4] LISBOA, Rafaela Ponte Lisboa. INTERATIVIDADE E EDUCAÇÃO: OS USOS DA METODOLOGIA PEDAGÓGICA-SEQUÊNCIA FEDATHI NA TELEVISÃO DIGITAL INTERATIVA. 2011. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <http://blogs.multimeios.ufc.br/wp-content/blogs.dir/33/files/2020/10/Dissertacao-Rafaela-Ponte-Lisboa.pdf>. Acesso em: 02/06/2022.

- [5] LISBOA, Rafaela Ponte. MASF: MODELO DE REFERÊNCIA PARA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI NA FORMAÇÃO PROFISSIONAL E NA PRODUÇÃO DE CONTEÚDO CARDOSO. 2015. 178 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: http://blogs.multimeios.ufc.br/wp-content/blogs.dir/33/files/2020/10/2015_tese_rplcardoso.pdf. Acesso em: 02/06/2022.
- [] LOFTUS, Maria; LOWNEY, Rob. From cloning to self-authoring video content in the language classroom: a reflection on practice. Call For Widening Participation: short papers from EUROCALL 2020, [S.L.], v. 0, n. 0, p. 195-200, 14 dez. 2020. Research-publishing.net. <http://dx.doi.org/10.14705/rpnet.2020.48.1188>. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED611118.pdf>. Acesso em: 19 maio 2022.
- [] MENEZES, Daniel Brandão. Uma Sessão de Taxa de Variação no Ensino de Cálculo: como não fazer. In: BORGES NETO, Hermínio. Sequência Fedathi no Ensino de Matemática. Curitiba: CRV, 2017. p. 57-73.
- [] MENEZES, Daniel Brandão. O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização do comportamento de um bom professor. 2018. 127 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/37124>. Acesso em: 08 set. 2019.
- [6] PEREIRA, Viviane de Oliveira. BATE-PAPO NA INTERNET: ALGUMAS PERSPECTIVAS EDUCATIVAS. 2004. 190 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2004. Disponível em: <http://blogs.multimeios.ufc.br/sitemmproducaocientifica/teses-e-dissertacoes>. Acesso em: 02/06/2022.

- [7] SANTANA, Ana Carmen de Souza. Uma proposta de ciclos formativos em educomunicação baseados na práxis fedathiana: o case do CRID. 2019. 254 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/49097>>. Acesso em: 09 jan. 2020.
- [8] SOUSA, Francisco Edison Eugenio de. A PERGUNTA COMO ESTRATÉGIA DE MEDIAÇÃO DIDÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DA SEQUÊNCIA FEDATHI. 2015. 282 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14363>. Acesso em: 01 out. 2019.
- [9] SOUZA, Maria José Araújo. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. In: BORGES NETO, Hermínio et al. Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza: Edições UFC, 2013. p. 15-48.
- [10] XAVIER, Daniele de Oliveira. Raízes: postura docente virtual a partir de uma perspectiva fedathiana. 2020. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/52835>. Acesso em: 27 maio 2022.



TEORIA DOS NÚMEROS - UMA INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS p -ÁDICOS

BRUNO DE PAULA MIRANDA E JEAN LELIS

20 - 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

- 1 Introdução aos Números p -ádicos**
- 2 Introdução ao Cálculo Ultramétrico**
 - 2.1 Sequências e Séries
 - 2.2 Limite, Continuidade e Diferenciabilidade
 - 2.3 Séries de Potência e Funções Analíticas
 - 2.4 Teorema de Strassman
 - 2.5 Interpolação p -ádica e Base de Mahler
- 3 Introdução a Teoria Algébrica p -ádica**
 - 3.1 Valor absoluto p -ádico de uma extensão algébrica K de \mathbb{Q}_p
 - 3.2 Estrutura algébrica de K

Referências

INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS p -ÁDICOS

O conjunto dos números primos $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ cumpre um papel de destaque na Matemática e em especial na Teoria dos Números. Essa importância tem chamado a atenção dos matemáticos desde antes da Grécia antiga. Euclides dedicou uma boa parte dos seus *Elementos* para discutir resultados sobre números primos. Entre eles vale destacar a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que todo número natural pode ser escrito de maneira única (a menos de ordenação) como produto de primos, e também o agora conhecido como Teorema de Euclides que prova a infinitude dos números primos.

No final do século XIX, o matemático alemão K. Hensel mostrou que, fixado um número primo p , é possível definirmos no conjunto dos números racionais \mathbb{Q} uma métrica (maneira de medir distância entre dois racionais quaisquer) associada ao conceito de divisibilidade de inteiros por potências do primo p . Essa métrica é chamada *métrica p -ádica*. Dispondo dessa métrica, Hensel mostrou que é possível copiar as ideias utilizadas na construção dos números reais por meio de sequências de Cauchy de números racionais e construir um novo corpo \mathbb{Q}_p chamado o *corpo dos números p -ádicos*. Assim como \mathbb{R} , esse novo corpo é um completamento dos racionais tendo \mathbb{Q} como subconjunto denso. A importância do resultado de Hensel foi reforçada quando, anos mais tarde, o matemático ucraniano A. Ostrowski provou que se \mathbb{Q} é um subconjunto denso de um *corpo completo* K , então K é o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números p -ádicos para algum número primo p .

Para definir os números p -ádicos de forma natural, vamos inicialmente considerar a expansão na base 10 de um número real. Sabemos que dado um número real $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \cdots,$$

com $0 \leq a_i \leq 9$ para todos $-\infty < i \leq n$. Definimos ainda a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$ como sendo $[x] = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 10^0$ que sempre é finita, e a parte fracionária de $x \in \mathbb{R}$ como sendo $\{x\} = a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \cdots$ que pode ou não ser finita. Note que podemos trocar as potências de 10 na expansão de um número real por qualquer número inteiro maior que 1 e, em particular, por potências de qualquer número primo p , exemplo na base $p = 2$ temos que $5 = 101$, pois

$$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

tal expansão pode ser feita para qualquer número real, onde os coeficientes $a_i \in \{0, 1\}$ para todo $-\infty < i \leq n$.

Expansões semelhantes a essas também surgem naturalmente na resolução de equações módulo potências de um número primo p . Para isso, diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo um número natural m se, e somente se, m divide $a - b$, em outras palavras se a e b deixam o mesmo resto na divisão por m . Escrevemos

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Considere então as equações dadas pelas congruências abaixo,

$$x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$$

com $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, uma solução da equação acima é dada por $x \equiv 3 \pmod{7}$ (note que $x \equiv -3 \pmod{7}$ também é uma solução módulo 7). Logo, temos que

$$x^2 \equiv (3 + a_1 \cdot 7)^2 \equiv 2 \pmod{7^2} \iff x^2 \equiv 9 + a_1 \cdot 6 \cdot 7 + a_1^2 7^2 \equiv 2 \pmod{7^2},$$

segue daí que

$$7 + a_1 \cdot 6 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7^2} \iff 1 + a_1 \cdot 6 \equiv 0 \pmod{7},$$

logo $a_1 \equiv 1 \pmod{7}$, temos então que $x \equiv 3 \cdot 7^0 + 1 \cdot 7^1 \pmod{7^2}$. Procedendo de maneira análoga, obtemos que

$$x \equiv 3 \cdot 7^0 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^2 \pmod{7^3}.$$

Continuando esse processo, obtemos uma sequência de números inteiros

$$x_i = a_0 \cdot 7^0 + a_1 \cdot 7 + \dots + a_{i-1} \cdot 7^{i-1}$$

com $a_i \in \{0, 1, \dots, 6\}$ para todo inteiro $i \geq 0$ tai que

$$x \equiv x_i \pmod{7^i}.$$

Contudo, é evidente que a sequência $(x_i)_{i \geq 0}$ não converge para um número real, pois existem infinitos coeficientes $a_i \neq 0$, uma vez que não existe um número inteiro x tal que $x^2 = 2$. Foi o matemático K. Hensel que, no final do século XIX, deu sentido a séries formais do tipo

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$$

ao introduzir a norma p -ádica de um número racional. De forma mais geral, Hensel deu sentido a séries do tipo

$$x = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n$$

para todo $N \in \mathbb{Z}$.

Para isso, dado um número primo p e um inteiro n , Hensel considerou a chamada *valorização p -ádica* $\nu_p(n)$ definida como sendo o maior inteiro tal que $p^{\nu_p(n)}$ divide n (denotamos por $p^{\nu_p(n)} \mid n$), por conveniência definimos $\nu_p(0) = \infty$. A definição de valorização p -ádica pode ser estendida para os

números racionais de maneira natural considerando que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ temos

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Com isso Hensel observou que a função $\|\cdot\|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por

$$\left\|\frac{a}{b}\right\|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(a)+\nu_p(b)} & \text{se } \frac{a}{b} \neq 0 \\ 0 & \text{se } \frac{a}{b} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

para todo $a/b \in \mathbb{Q}$ possui propriedades semelhantes às da função módulo (ou valor absoluto) $|\cdot| : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$. De fato, segue das propriedades do módulo que

- $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$;
- $|xy| = |x| \cdot |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ (essa propriedade é chamada de *desigualdade triangular* devido ao fato de que a soma de dois lados de um triângulo é sempre maior ou igual ao terceiro lado na geometria euclidiana, sendo que a igualdade só acontece no “triângulo degenerado”, ou seja, um segmento de reta).

Uma função definida em \mathbb{Q} satisfazendo as propriedade acima é chamada de *norma* sobre \mathbb{Q} . Hensel provou que para todo número primo p , temos

- $\|0\|_p = 0$ se e somente se $x = 0$;
- $\|xy\|_p = \|x\|_p \cdot \|y\|_p$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;
- $\|x + y\|_p \leq \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ (por ser uma desigualdade mais forte que a desigualdade triangular, essa desigualdade é chamada de *desigualdade ultramétrica*).

Logo, $\|\cdot\|_p$ é uma norma sobre \mathbb{Q} e pode ser usada para medir distância entre dois números racionais, assim como a norma do valor absoluto. Ou seja, associada à norma p -ádica podemos definir a distância entre dois números racionais x, y como sendo $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$, tal função é chamada de métrica

p -ádica. O conceito de distância está naturalmente associado ao conceito de *convergência*. Por exemplo, ao procurar uma solução real para a equação $x^2 = 2$, podemos usar o método da bisseção, ou seja, se $x^2 = 2$ então $1 < x < 2$, chamando $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$, podemos definir

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

para $n \geq 2$, de forma que a solução da equação $x^2 = 2$ esteja sempre entre x_{n-1} e x_n . Note que em cada passo, temos que $x_n \in \mathbb{Q}$ e além disso,

$$d(x_n, x_{n-1}) = |x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Assim quando $n \rightarrow \infty$ a distância $d(x_n, x_{n-1}) \rightarrow 0$. Dizemos então que a sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ é convergente e podemos mostrar que ela converge para $\sqrt{2}$. Porém, é fácil mostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, isso acontece porque \mathbb{Q} não é *completo* com relação a métrica $d(x, y) = |x - y|$. Na verdade, no curso de Análise Real aprendemos que \mathbb{R} é exatamente o *complemento* de \mathbb{Q} com relação a métrica do valor absoluto, ou seja, dada uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ de números racionais tais que $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$ o limite dessa sequência é sempre um número real, e além disso \mathbb{R} é ele mesmo completo.

Então a pergunta que surge é, completando \mathbb{Q} com relação a métrica p -ádica, ou seja, considerando o conjunto formal que contém todos os limites de sequências $(x_n)_{n \geq 0}$ de números racionais tais que $d_p(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_p \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$, obtemos novamente o conjunto \mathbb{R} ? A resposta para essa pergunta é **não!** De fato, ao considerar a sequência de expansões como as obtidas resolvendo a congruência $x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, verificamos que essa sequência é convergente na métrica 7-ádica, mas não é convergente na métrica do valor absoluto real. De fato, se $n > m$

$$d_7 \left(\sum_{i=0}^n a_i 7^i, \sum_{i=0}^m a_i 7^i \right) = \left\| \sum_{i=m+1}^n a_i 7^i \right\|_7 = \frac{1}{7^{m+1}}$$

fazendo $n, m \rightarrow \infty$ essa distância vai a zero.

Desta forma, Hensel introduziu o conjunto dos números p -ádicos como sendo o completamento de \mathbb{Q} com relação a métrica p -ádica. Hensel também provou que tal completamento é formado todas as séries da forma

$$x = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n$$

com $N \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Esse conjunto é chamado de *corpo dos números p -ádicos*, pois nele podemos definir uma soma e uma multiplicação que são associativas, comutativas, possuem elemento neutro, todo elemento tem oposto aditivo e todos elemento não nulo possui inverso multiplicativo. Essas operações são definidas da seguinte maneira

$$x + y = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n + \sum_{n=-M}^{\infty} b_n p^n = \sum_{n=-\max\{N,M\}}^{\infty} (a_n + b_n) p^n$$

e

$$x \cdot y = \left(\sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n \right) \left(\sum_{n=-M}^{\infty} b_n p^n \right) = \sum_{n=-(N+M)}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) p^n.$$

Algumas propriedades interessantes sobre a norma p -ádica e os números p -ádicos:

- Para todo número inteiro n , temos que $\|n\|_p \leq 1$. De fato, $\|n\|_p = p^{-\nu(n)} \leq 1$. O conjunto de todos os números p -ádicos x tais que $\|x\|_p \leq 1$ é chamado de *anel dos inteiros p -ádicos* e denotado por \mathbb{Z}_p . O anel dos inteiro p -ádicos possui propriedades aritméticas semelhantes às do anel dos números inteiros \mathbb{Z} e podemos mostrar que \mathbb{Z} (assim como \mathbb{N}) é denso em \mathbb{Z}_p , ou seja, \mathbb{Z}_p é o completamento de \mathbb{Z} com respeito à norma p -ádica. Os inteiros p -ádicos são representados por séries do tipo

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n,$$

ou seja, não possuem potências negativas de p na sua representação p -ádica.

- Se $a/b \in \mathbb{Q}$ é um número racional tal que $p \nmid b$, então $a/b \in \mathbb{Z}_p$. Segue daí que para todo $a/b \in \mathbb{Q}$ podemos escrever $a/b = p^{-t}(a/b_0)$ tal que $p \nmid b_0$, logo

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{p^t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n,$$

para algum inteiro $t \geq 0$.

- Uma consequência da valorização p -ádica é que dados $x, y \in \mathbb{Q}_p$ tais que $\|x\|_p \neq \|y\|_p$, diga que $\|x\|_p < \|y\|_p$, então $\|x+y\|_p = \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\} = \|y\|_p$. Segue desse fato é que em \mathbb{Q} todo triângulo é isósceles e todo ponto de uma bola é centro dela.

Voltando nossa atenção para as equações módulo p que usamos para motivar o estudo dos números p -ádicos, é devido ao próprio Hensel o resultado que nos permite encontrar zeros p -ádicos para equações polinomiais.

Teorema 1.0.1 (Lema de Hensel). *Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes em \mathbb{Z}_p e $P'(x)$ a derivada formal de $P(x)$. Se existe $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p$ com*

$$\|P(\alpha_1)\|_p < \|P'(\alpha_1)\|_p^2$$

então existe um único $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ com

$$P(\alpha) = 0 \quad e \quad \|\alpha - \alpha_1\|_p < \frac{\|P(\alpha_1)\|_p}{\|P'(\alpha_1)\|_p}.$$

Enquanto esse resultado nos permite garantir solução p -ádica para equações módulo p , usando a completude de \mathbb{Q}_p um importante resultado devido a Hasse e Minkowski reforça a importância dos corpos p -ádicos no estudo de equações diofantinas.

Teorema 1.0.2 (Hasse-Minkowski). *Seja $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma forma quadrática de grau 2 com coeficientes racionais, isto é*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} a_{ij} x_i x_j.$$

Então a equação $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ possui uma solução racional se, e somente se, possui solução sobre \mathbb{R} e sobre \mathbb{Q}_p para todo p primo.

O Teorema de Hasse-Minkowski é um exemplo onde vale o chamado *Princípio Local-Global* que tenta obter informações para problemas sobre \mathbb{Q} considerando o problema nos completamentos de \mathbb{Q} , global (\mathbb{R}) e locais (\mathbb{Q}_p para todo p primo).

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO ULTRAMÉTRICO

Vimos que o conjunto dos números p -ádicos é o complemento de que \mathbb{Q} com relação a métrica p -ádica e pode ser representado pelo conjunto de todas às somas formais

$$x = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Assim, surge uma pergunta natural: podemos “fazer Cálculo” nesse conjunto? Isto é, faz sentido estudar limite, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade e outros conceitos de Cálculo no conjunto dos número p -ádicos?

Uma vez que o conjunto dos números p -ádicos é completo, muitos desses conceitos do cálculo real fazem sentido em \mathbb{Q}_p , pois eles dependem essencialmente da existência de uma métrica e da completude de \mathbb{R} . Nesta seção iremos introduzir o Cálculo Ultramétrico, que é o análogo do cálculo real, nos corpos p -ádicos.

2.1. SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Começaremos estudando sequências e séries de números p -ádicos. Note que na introdução dos números p -ádicos já utilizamos os conceitos de sequências e séries. De fato, a representação canônica de um número p -ádico é uma série p -ádica. Uma sequência de números p -ádicos é uma função $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ associamos um número p -ádico u_n . São exemplos de

seqüências de números p -ádicos

$$a_n = n^2; b_n = (p-1)p^n; c_n = 1 + 2 + \dots + n; d_n = n!; e_n = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n. \quad (2.1)$$

Assim como no caso de seqüências de números reais, queremos saber quando essas seqüências são convergentes. Intuitivamente, queremos saber se os termos u_n da seqüência se aproximam indefinidamente de algum número $x \in \mathbb{Q}_p$ fixado conforme n é fica muito grande. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma seqüência $(u_n)_{n \geq 1}$ de números p -ádicos converge para $x \in \mathbb{Q}_p$ se, e somente se, para todo número real $\varepsilon > 0$ existir um número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que sempre que $n \geq N$, temos

$$\|u_n - x\|_p < \varepsilon.$$

Nesse caso, dizemos que $x \in \mathbb{Q}_p$ é o limite da seqüência $(u_n)_{n \geq 1}$ e denotamos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x.$$

Caso contrário, diremos que a seqüência é divergente.

EXEMPLO Considerando os exemplos $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$, $(d_n)_{n \geq 1}$ e $(e_n)_{n \geq 1}$ em (2.1) temos que $(a_n)_{n \geq 1}$ não é convergente. De fato, quando $p \mid n$ temos que $p \mid a_n$, porém quando $p \nmid n$, é fácil notar que $p \nmid a_n$. Como $\|z\|_p = p^{-\nu_p(z)}$ para todo $z \in \mathbb{Q}_p$, temos que não existe um $x \in \mathbb{Q}_p$ tal que a_n converge para ele, já que existe uma subsequência infinita de termos da seqüência $(a_n)_{n \geq 1}$ com norma p -ádica menor que 1 dada pelos termos com índice múltiplo de p e uma subsequência com norma igual a 1 dada pelos termos a_n tais que $p \nmid n$. Note que algo semelhante acontece na seqüência $(c_n)_{n \geq 1}$. De fato, usando a soma da P.A. temos que

$$c_n = \frac{n(n-1)}{2},$$

assim temos que $\|c_n\|_p < 1$ se e somente se $p \mid n(n-1)$ (para p ímpar. O que acontece com $p = 2$?). Logo essa seqüência também não é uma seqüência

convergente. Por outro lado, temos que $\|b_n\|_p = \|p^n\|_p = p^{-n}$. Desta forma, quando n cresce, temos que a norma p -ádica de b_n tende a 0. Assim, podemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Analogamente, usando que

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

tende ao infinito quando n tende ao infinito, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira do número real x , podemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

Observe que essas duas últimas sequências não são convergentes quando consideramos a norma do valor absoluto real. Por fim, temos que a sequência $(e_n)_{n \geq 1}$ é divergente. De fato, temos que

$$\left\| \left(\frac{p-1}{p} \right)^n \right\|_p = p^{-\nu_p((p-1)^n) + \nu_p(p^n)} = p^n.$$

Neste caso, temos um exemplo de sequência que diverge na norma p -ádica, porém converge na norma do valor absoluto real.

Além das sequências, outro objeto clássico que é estudado no Cálculo Diferencial e Integral e nos cursos de Análise Real são as *Séries*. Formalmente uma série é um somatório infinito. Por exemplo

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (p-1)p^n; S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!; S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}; S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n!; S_5 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n}. \quad (2.2)$$

Porém, assim como no caso real, essas somas infinitas só fazem sentido quando a sequência das suas somas parciais são convergentes. Isto é, dada uma série formal

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{Q}_p$ para todo $n \geq 0$, definimos a sequência

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i,$$

que está bem definida uma vez que trata-se de uma soma finita. Dizemos então que a série S é convergente se a sequência $(s_n)_{n \geq 0}$ é convergente. Essa é a mesma definição usada no caso real, porém no caso p -ádico o critério de convergência é muito mais simples do que no caso dos reais. No caso p -ádico vale o que podemos chamar de “sonho de todo aluno de Cálculo”.

Proposição 2.1.2. *Seja $(a_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de números p -ádicos. Temos que*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

converge se, e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Demonstração: Que a condição $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ é necessária é evidente. Por outro lado, dados $n \geq m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|s_n - s_m\|_p = \left\| \sum_{i=m+1}^n a_i \right\| \leq \max\{\|a_{m+1}\|_p, \dots, \|a_n\|_p\}.$$

Usando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

temos que a sequência das somas parciais é convergente. □

EXEMPLO: Pela proposição acima e usando o exemplo anterior, podemos mostrar que as séries S_1 , S_2 e S_4 são convergentes. De fato, temos que $S_1 = -1$ (verifique!). Além disso, usando que

$$\sum_{n=0}^N n \cdot n! = (N+1)! - 1,$$

podemos mostrar que S_4 também vale -1 . Em contraste com esses dois casos, apesar de saber que S_2 é convergente para todo primo p , não sabemos para qual valor essa série converge. Na verdade, não sabemos nem mesmo se S_2 é um número racional ou não. Por outro lado, S_3 que no caso real representa a constante de Euler e , que é a base do logaritmo natural, não é convergente para nenhum p primo. O mesmo vale para S_5 .

2.2. LIMITE, CONTINUIDADE E DIFERENCIABILIDADE

Ao introduzir o conjunto dos números p -ádicos, é natural estudar funções definidas nesses novos conjuntos. Algumas funções bem conhecidas podem ser consideradas sobre o conjunto dos números p -ádicos, por exemplo, podemos considerar funções polinomiais, ou seja, $P : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ tal que

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

para todo $x \in \mathbb{Q}_p$ onde $a_i \in \mathbb{Q}_p$ para todo inteiro $0 \leq i \leq n$. Note que podemos considerar os coeficientes de $P(x)$ como números inteiros, racionais, ou p -ádicos. Daí, podemos pensar se existem funções análogas às demais funções clássicas que estudamos sobre \mathbb{R} para o conjunto dos números p -ádicos. Antes de estudar essa questão iremos considerar uma outra, igualmente interessante. Vamos entender como podemos estender os conceitos do cálculo diferencial e integral para funções p -ádicas.

Definição 2.2.1. *Dada uma função $f : X \subseteq \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x \in X$ tende a $x_0 \in \mathbb{Q}_p$ é $L \in \mathbb{Q}_p$ e denotamos por*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se para todo número real $\varepsilon > 0$ existe um número real $\delta > 0$ satisfazendo

$$x \in X, \quad 0 < \|x - x_0\|_p < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_p < \varepsilon$$

Formalmente essa é a mesma definição usada para as funções reais e intuitivamente significa, assim como no caso de funções reais, que quando x se

aproxima de x_0 indefinidamente, o valor de $f(x)$ também se aproxima indefinidamente de L . Note que apenas mudamos a forma de medir distância. Ainda em analogia com o caso real, dizemos que a função $f : X \subseteq \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ é contínua em $x_0 \in X$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

EXEMPLO: Além das funções polinômiais e das funções racionais (quocientes de polinômios) que podemos definir sobre \mathbb{Q}_p de maneira natural. Existem muitas outras funções contínuas definidas sobre os números p -ádicos, algumas com propriedades bem diferentes das encontradas nas funções contínuas reais. Por exemplo, dado um número inteiro positivo $d \geq 2$ e escrevendo o número $z \in \mathbb{Z}_p$ na sua expansão p -ádica temos que a função $f_d : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ dada por

$$f_d(z) = f_d\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{dk}$$

é contínua (verifique!).

Ainda na linha de generalizar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, o próximo tópico que iremos abordar é a diferenciabilidade de funções p -ádicas. Dada uma função $f : X \subseteq \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, dizemos que f é diferenciável no ponto $x_0 \in X$, se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

existir. Nesse caso esse limite é chamado de derivada da função f em x_0 e denotado por $f'(x_0)$. A derivada das funções polinômiais e racionais p -ádicas existem e coincidem com a derivada formal dessas funções, ou seja, valem as mesmas regras de derivação das funções polinômiais e racionais sobre \mathbb{R} .

Contudo, resultados clássicos do Cálculo Diferencial Real não se aplicam às funções p -ádicas. Um importante exemplo de resultado que não vale para as funções p -ádicas diferenciais é o Teorema do Valor Médio. Para verificar isso, note que as funções f_d definidas acima satisfazem a desigualdade

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq \|x - y\|_p^d,$$

para todo $d \geq 2$. Segue daí que, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}_p$, porém f_d não é constante, na verdade f_d é uma função injetiva. As funções f_d são exemplos de funções Lipschitz de ordem $d \geq 2$. É fácil ver que no caso de funções reais, toda função com tal propriedade é constante.

Também é possível definir a integral de uma função p -ádica, inclusive de mais de uma forma. Porém tal estudo exige conhecimentos de teoria da medida, e conceitos que fogem ao escopo deste minicurso.

2.3. SÉRIES DE POTÊNCIA E FUNÇÕES ANALÍTICAS

Como no caso das funções analíticas reais, nós também podemos considerar séries de potências da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

com $a_n \in \mathbb{Q}_p$ e determinar seus raios de convergência. Usando o critério para convergência de séries que vimos anteriormente, podemos mostrar que o raio de convergência de uma série de potências é dado por

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_p^{1/n}},$$

onde usamos a convenção quando o limite é 0 ou ∞ , então $0 \leq \rho \leq \infty$. Com isso, queremos dizer que se $\rho = 0$ então $f(x)$ só converge para $x = 0$ e se $\rho = \infty$ então $f(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{Q}_p$. Note que se $a_n \in \mathbb{Z}_p$ para todo $n \geq 0$, então $f(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\|x\|_p < 1$.

Usando séries de potências, podemos considerar o problema de determinar se outras funções além das funções polinomiais e racionais possuem análogas em \mathbb{Q}_p . O primeiro exemplo que podemos considerar é a série exponencial,

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Já vimos que $\exp(1)$ não existe para nenhum p primo. Usando a fórmula para calcular ρ e a valorização p -ádica do fatorial, podemos mostrar que o raio de

convergência da série exponencial sobre \mathbb{Q}_p é $\rho = p^{-1/(p-1)}$. Por outro lado, a série

$$-\log_p(1-x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

converge para todo $x \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\|x\|_p < 1$. Vale que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{e} \quad \log_p(xy) = \log_p(x) + \log_p(y).$$

Uma curiosa consequência disso é que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n},$$

converge em \mathbb{Q}_2 . Mais do que isso, essa série converge para $-\log_2(-1)$, porém $-2\log_2(-1) = -\log_2(-1)^2 = -\log_2(1) = 0$. Daí, para todo $M > 0$ inteiro, existe um inteiro positivo n tal que o numerador da soma parcial

$$2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}$$

é divisível por 2^m . Em outras palavras,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{Q}_2.$$

Vamos considerar agora a série

$$B_a(x) := (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n.$$

Lembramos que quando x e a são números reais ou complexos, essa série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. No caso p -ádico a convergência depende do valor de a . Temos que se $\|a\|_p > 1$, então $\|a-i\|_p = \|a\|_p$ para todo inteiro i . Então segue do estudo da série exponencial que o raio de convergência da série acima é $\rho_a = p^{-1/(p-1)}/\|a\|_p$. Se $\|a\|_p < 1$, é fácil verificar que

$$\left\| \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \right\| \leq 1$$

e a série converge para $\|x\|_p < 1$.

Podemos usar essa observação para construir a “exponencial de Artin-Hasse” que é similar à exponencial que definimos anteriormente, mas possui um raio de convergência maior. Ela é baseada em uma observação elementar, note que a função de Möbius da teoria elementar dos números é definida como $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ se $q^2|n$ para algum primo q , e $\mu(n) = (-1)^r$ se n é livre de quadrados e produto de r primos distintos. Essa função tem a propriedade

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definindo

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\mu(n)/n}$$

e expandindo formalmente $\log f(x)$ como uma série de potências, rearranjando os termos, podemos mostrar que $f(x) = \exp(x)$ como uma identidade formal. O fator n -ésimo no produto converge na região $\|x\|_p < 1$ desde que n seja primo com p . Isso sugere que consideremos

$$\text{Exp}_p(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} (1 - x^n)^{-\mu(n)/n}.$$

Agora a série binomial $B_{-\mu(n)/n}(-x)^n$ converge para $\|x\|_p < 1$ e o produto infinito faz sentido visto que todos os coeficientes estão em \mathbb{Z}_p . Assim a série obtida do produto para $\text{Exp}_p(x)$ converge em $\|x\|_p < 1$. Procedendo formalmente como antes, encontramos

$$\text{Exp}_p(x) = \exp \left(x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots \right).$$

Uma curiosa consequência desse resultado é o Teorema de Wilson. Como todos os coeficientes de Exp_p são p -inteiros, ou seja, números racionais com denominador primo com p , o coeficiente de x^p em particular é um p -inteiro.

Esse coeficiente, que podemos mostrar ser

$$\frac{1}{p!} + \frac{1}{p} = \frac{1 + (p-1)!}{p!}$$

é um p -inteiro, conseqüentemente $1 + (p-1)!$ é um múltiplo de p .

2.4. TEOREMA DE STRASSMAN

Existe um importante teorema sobre séries de potências p -ádicas chamado Teorema de Strassman que nos dá um limitante superior para o número de \mathbb{Z}_p -zeros de uma série de potências p -ádica. Em realidade, o argumento pode ser generalizado para tratar de zeros em discos mais largos da forma $p^{-n}\mathbb{Z}_p$.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Strassman). *Seja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

uma série de potências não nula com $a_n \in \mathbb{Q}_p$. Suponha que $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ de forma que $f(x)$ converge para $x \in \mathbb{Z}_p$. Seja N definido pela condição

$$\|a_N\|_p = \max_{n \geq 0} \|a_n\|_p \quad e \quad \|a_n\|_p < \|a_N\|_p \quad \text{para} \quad n > N.$$

Então, a função $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ dada por $x \mapsto f(x)$ tem no máximo N zeros.

Demonstração: Faremos indução sobre N . Para $N = 0$, temos que $\|a_0\|_p > \|a_n\|_p$ para todo $n \geq 1$. Se $f(r) = 0$ para algum $r \in \mathbb{Z}_p$, temos que

$$-a_0 = a_1 r + a_2 r^2 + \dots$$

assim

$$\|a_0\|_p \leq \max_{n \geq 1} \|a_n r^n\|_p \leq \max_{n \geq 1} \|a_n\|_p,$$

uma contradição. Isso prova o teorema para $N = 0$. Agora assumindo o teorema para algum $n \geq 0$. Se $r \in \mathbb{Z}_p$ é um zero de $f(x)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x^n - r^n) \\ &= (x - r) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n x^j r^{n-1-j}. \end{aligned}$$

rearranjando a série, obtemos

$$f(x) = (x - r) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

onde

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} r^k.$$

Observe que para todo n ,

$$\|b_n\|_p \leq \max_{k \geq 0} \|a_{n+1+k}\|_p \leq \|a_N\|_p$$

e que

$$\|b_{N-1}\|_p = \|a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots\|_p = \|a_N\|_p,$$

além disso, se $n \geq N$, temos que

$$\|b_n\|_p \leq \max_{k \geq 0} \|a_{n+1+k}\|_p \leq \max_{j \geq N+1} \|a_j\|_p < \|a_N\|_p.$$

Assim,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - r}$$

satisfaz a hipótese do teorema trocando N por $N - 1$. Por indução, $g(x)$ possui no máximo $N - 1$ zeros em \mathbb{Z}_p então $f(x)$ possui no máximo N zeros em \mathbb{Z}_p . \square

Podemos usar o Teorema de Strassman para determinar os zeros de

$$-\log_p(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Observe que como essa série de potências converge apenas para $\|x\|_p < 1$, não podemos aplicar o Teorema de Strassman diretamente. Consideramos então

$$-\log_p(1 - px) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} x^n.$$

Se $p \neq 2$, temos que

$$\max_{n \geq 1} \left\| \frac{p^n}{n} \right\|_p = \|p\|_p$$

então $-\log_p(1 - px)$ possui no máximo um zero para $\|x\|_p \leq 1$. Contudo, $x = 0$ é um zero nesse disco e dessa forma concluímos que o único zero de $-\log_p(1 - px)$ é $x = 0$. Se $p = 2$, temos que $-\log_2(1 - 2x)$ possui no máximo dois zeros no disco de raio 1, sendo eles $x = 0$ e $x = 1$.

2.5. INTERPOLAÇÃO p -ÁDICA E BASE DE MAHLER

Uma importante função contínua para a Teoria dos Números, introduzida por Euler, é a função gamma. É possível mostrar de forma recorrente que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

usando essa observação Euler definiu a função

$$\Gamma(s + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^s dx.$$

Esse é um exemplo de uma função contínua real (ou mesmo complexa) que *interpola uma sequência de números inteiros*, ou seja, uma função contínua tal que $f(n) = u_n$ para alguma sequência de números inteiros $(u_n)_{n \geq 0}$.

Nosso objetivo é estudar o mesmo problema no caso p -ádico, ou seja, dada uma sequência $(u_n)_{n \geq 0}$ de números inteiros queremos saber se existe uma função contínua $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ tal que $f(n) = u_n$. A primeira coisa que observamos é que sendo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ denso em \mathbb{Z}_p , existe no máximo uma função contínua com essa propriedade para qualquer sequência dada. O seguinte resultado nos dá uma primeira condição suficiente para a existência de uma função interpoladora.

Teorema 2.5.1. *Suponha que a sequência $(u_k)_{k \geq 0}$ é p -adicamente limitada e satisfaz a condição de que para cada número natural m , existe um natural N tal que*

$$k \equiv k' \pmod{p^N} \implies u_k \equiv u_{k'} \pmod{p^m}.$$

Então existe uma função contínua $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ tal que $f(k) = u_k$.

Usando esse resultado, nós podemos definir a função contínua gamma p -ádica para $p \neq 2$ como sendo $\Gamma_p(0) := 1$, e

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{k < n \\ (k,p)=1}} k$$

onde a condição $(n, p) = 1$ existe pois $n! \rightarrow 0$ na norma p -ádica.

Por fim, iremos apresentar um análogo do Teorema de Weierstrass que afirma que toda função contínua sobre um intervalo fechado pode ser aproximada uniformemente por polinômios. O análogo p -ádico disso é o Teorema de Mahler. Esse teorema diz que dada uma função contínua $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, existem números $c_n \in \mathbb{Q}_p$ tais que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \binom{x}{k}.$$

Precisamente, temos

Teorema 2.5.2 (Teorema de Mahler). *Suponha que $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ é contínua. Sejam*

$$a_n(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k).$$

Então $a_n(f) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} a_n(f)$$

converge uniformemente em \mathbb{Z}_p . Além disso

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} a_n(f).$$

Reciprocamente, se $a_n \rightarrow 0$ então a função definida por

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} a_n$$

é contínua sobre \mathbb{Z}_p .

Note que esse resultado nos dá uma caracterização para as sequências $(u_n)_{n \geq 0}$ que podem ser interpoladas por uma função contínua p -ádica.

INTRODUÇÃO A TEORIA ALGÉBRICA p -ÁDICA

Sejam F e K dois corpos com $F \subseteq K$, dizemos que K é uma *extensão* de F e denotamos tal extensão por K/F . Naturalmente, se K é uma extensão de F , tem-se em particular que K é um F -espaço vetorial. Dizemos que a extensão K/F é uma *extensão finita* se K tem dimensão finita enquanto F -espaço vetorial. Isto é, se existe $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset K$ tal que todo $v \in K$ escreve-se de maneira única como

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

com $a_i \in F$ para todo i . Um conjunto como B é chamado *base de K* e o número n de elementos de uma base qualquer de K é a *dimensão da extensão K/F* . Denotamos por $n = [K : F]$. Dizemos que a extensão K/F é *algébrica* quando tem dimensão finita. Um elemento α de uma extensão algébrica K/F é dito ser *algébrico sobre F* . Tem-se que α é algébrico sobre F se, e somente se, existe um único polinômio mônico, irredutível $P(X) \in F[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$. Tal polinômio é chamado *polinômio minimal de α* e seu grau é chamado o *grau do algébrico α* . Se F é um corpo de característica zero, isto é, se o menor subcorpo de F é \mathbb{Q} , então toda extensão algébrica K/F de grau n é da forma

$$K = F(\alpha) := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i ; a_i \in \mathbb{Q}_p \right\}$$

para algum $\alpha \in K$ algébrico de grau n . Dizemos que K é obtido pela *adjunção* de α a F . Nesse caso K é o menor corpo que contém F e α . O *Fecho algébrico*

do corpo F , denotado por \overline{F} é o corpo que contém todos elementos que são algébricos sobre F . Se $F = \overline{F}$ dizemos que F é *algebricamente fechado*.

Nesta seção estudaremos extensões algébricas K/\mathbb{Q}_p . Claramente, todo \mathbb{Q}_p tem característica zero. Assim, do que vimos acima, deve ser $K = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ para algum $\alpha \in K$. Os dois próximos exemplos nos mostram que de fato existem extensões algébricas não triviais de \mathbb{Q}_p , isto é, que nenhum \mathbb{Q}_p é algebricamente fechado.

EXEMPLO A fim de encontrarmos os primeiros exemplos de extensões algébricas de \mathbb{Q}_p , trabalhemos em \mathbb{Q}_2 . Temos que $b \in \mathbb{Z}_2$ é quadrado perfeito se, e somente se, $b \equiv 1 \pmod{2^3}$. De fato, se for $b \equiv 1 \pmod{8}$, aplicando o Lema de Hensel ao polinômio $P(X) = X^2 - b$ com $\alpha_1 = 1$ concluímos que deve existir $\alpha \in \mathbb{Q}_2^*$ com $\alpha^2 = b$. Reciprocamente, admitindo que b é um quadrado perfeito, deve existir um $a = 1 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3c$ com $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$ e $c \in \mathbb{Z}_2$ tal que $a^2 = b$. Efetuando os cálculos conclui-se que vale $b \equiv 1 \pmod{8}$. Em particular, temos que o grupo $\mathbb{Q}_2^*/(\mathbb{Q}_2^*)^2$ tem ordem 8 e é gerado por $-1, 2$ e 5 . Um conjunto de representantes é

$$\{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\}.$$

Sendo assim, temos que os números 2 e 5 **não** são quadrados perfeitos em \mathbb{Q}_2 . Sendo assim, denotando por $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ exemplares de raízes dos polinômios $P(X) = X^2 - 2$ e $Q(X) = X^2 - 5$, respectivamente, temos que

$$K_1 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5}) = \{a_0 + a_1\sqrt{5} ; a_0, a_1 \in \mathbb{Q}_2\}$$

e

$$K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2}) = \{a_0 + a_1\sqrt{2} ; a_0, a_1 \in \mathbb{Q}_2\}$$

são extensões algébricas de \mathbb{Q}_2 de grau 2 (tais extensões são chamadas *extensões quadráticas*). Analogamente,

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}_2(\sqrt{-2}), \mathbb{Q}_2(\sqrt{-5}), \mathbb{Q}_2(\sqrt{10}), \text{ e } \mathbb{Q}_2(\sqrt{-10})$$

são extensões quadráticas de \mathbb{Q}_2 . Mais ainda, acima foram listadas todas extensões quadráticas de \mathbb{Q}_2 .

EXEMPLO Para p ímpar, é possível mostrar que $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$ tem ordem 4 e se $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ não é um quadrado, temos que $\{1, p, c, pc\}$ é um conjunto de representantes. Em particular, as extensões quadráticas de \mathbb{Q}_p são

$$\mathbb{Q}_p(\sqrt{p}) = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}) = \{a_0 + a_1\sqrt{p} ; a_0, a_1 \in \mathbb{Q}_p\},$$

$$\mathbb{Q}_p(\sqrt{c}) = \mathbb{Q}_p(\sqrt{c}) = \{a_0 + a_1\sqrt{c} ; a_0, a_1 \in \mathbb{Q}_p\}$$

e

$$\mathbb{Q}_p(\sqrt{cp}) = \mathbb{Q}_p(\sqrt{cp}) = \{a_0 + a_1\sqrt{cp} ; a_0, a_1 \in \mathbb{Q}_p\}.$$

Os exemplos acima nos permitem concluir que nenhum corpo \mathbb{Q}_p é algebricamente fechado visto que, até mesmo alguns polinômios de grau 2 com coeficientes em \mathbb{Q}_p possuem raízes fora de \mathbb{Q}_p . Em realidade, é possível mostrar que para todo natural n existem polinômios mônicos, irredutíveis de grau n e coeficientes em \mathbb{Q}_p que não possuem raízes em \mathbb{Q}_p . Isto é, para todo natural n existem extensões algébricas K/\mathbb{Q}_p de grau n . Como consequência imediata, conclui-se que o fecho algébrico de \mathbb{Q}_p tem dimensão infinita.

3.1. VALOR ABSOLUTO p -ÁDICO DE UMA EXTENSÃO ALGÉBRICA K DE \mathbb{Q}_p

Sendo K um \mathbb{Q}_p -espaço vetorial, podemos estudar valores absolutos em K por meio do estudo de normas definidas em K . Nada mais natural que procurarmos uma norma $\|\cdot\|_K$ em K que satisfaça

$$\|\alpha\|_K = \|\alpha\|_p, \forall \alpha \in \mathbb{Q}_p,$$

isto é, um valor absoluto que *estenda* o valor absoluto p -ádico. Observamos que caso $\|\cdot\|_K$ exista, será necessariamente um valor absoluto *não arquimediano* (satisfaz a desigualdade ultramétrica) visto que $\|\cdot\|_K$ e $\|\cdot\|_p$ coincidirão em \mathbb{Z} (ver Teorema 2.2.2 em [2]).

Definição 3.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo k . Dizemos que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ de V são equivalentes se, e somente se, existem constantes $C, D > 0$ tais que para todo $v \in V$ vale*

$$\|v\|_1 \leq C\|v\|_2 \quad \text{e} \quad \|v\|_2 \leq D\|v\|_1$$

Se duas normas de um espaço vetorial V são equivalentes, então, um subconjunto $A \subseteq V$ será aberto com respeito a uma das normas se, e somente se, o for com respeito a outra. Isto é, as duas normas *induzem a mesma topologia em V* . Em particular, podemos concluir que V será completo com respeito a uma das normas se, e somente se, for completo com respeito a outra. Essa observação e o seguinte teorema nos permite concluir que, caso exista um valor absoluto $\|\cdot\|_K$ que estenda o valor absoluto p -ádico, teremos K completo com respeito a $\|\cdot\|_K$.

Teorema 3.1.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ sobre um corpo valorizado completo k . Fixada uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , a função*

$$\|\cdot\|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \|v\|_V = \max_i |a_i|_k,$$

define uma norma em V com respeito a qual V é completo. Tal norma é chamada norma do sup com respeito à base B . Ademais, qualquer outra norma de V é equivalente à norma do sup com respeito a qualquer base.

Sendo assim, mesmo que ainda não saibamos se de fato existe um valor absoluto $\|\cdot\|_K$ em K que estenda o valor absoluto p -ádico, já podemos afirmar que no caso de existir, tornará K completo. Nessa mesma linha, podemos afirmar que no caso de existir um valor absoluto como esse, existirá precisamente um.

Proposição 3.1.3. *Seja k um corpo valorizado (corpo no qual existe um valor absoluto). Considere dois valores absolutos $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ de k . As seguintes afirmações são equivalentes*

- *Os dois valores absolutos induzem a mesma topologia em k .*
- *Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in k$ vale*

$$\|x\|_1 = \|x\|_2^\delta$$

Consideremos dois valores absolutos $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em K que estendem o valor absoluto p -ádico. Considerando esses valores absolutos como normas de K , temos do Teorema 3.1.2 que ambos valores absolutos induzem a mesma topologia em K . Segue da Proposição 3.1.3 que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\|_1 = \|x\|_2^\delta$$

para todo $x \in K$. Em particular, escolhendo $x \in \mathbb{Q}_p$, concluímos que deve ser $\delta = 1$, donde os dois valores absolutos são idênticos.

Outra observação que podemos fazer a respeito dessa norma que buscamos encontrar em K que estende $\|\cdot\|_p$ é que, caso exista, não precisaremos nos preocupar com o contexto. Mais precisamente, admita que K e L sejam extensões algébricas de \mathbb{Q}_p tais que $L \subseteq K$. Seja $x \in L$ e admita que em ambas as extensões existam valores absolutos $\|\cdot\|_L$ e $\|\cdot\|_K$ que estendem o valor absoluto p -ádico. Então teremos para todo $x \in L$ que vale

$$\|x\|_L = \|x\|_K,$$

isto é, a restrição de $\|\cdot\|_K$ a L coincide com $\|\cdot\|_L$.

Até o momento já sabemos que caso exista em K um valor absoluto $\|\cdot\|_K$ que estende o valor absoluto p -ádico, então

- Esse valor absoluto é único;
- K é completo com respeito a $\|\cdot\|_K$;
- Se $L \subseteq K$ são extensões de \mathbb{Q}_p e $x \in L$, então $\|x\|_L = \|x\|_K$

A partir de agora, caminharemos em direção à expressão que definirá o valor absoluto desejado em K . Começamos revisando alguns conceitos sobre extensões de corpos.

1. Seja F um corpo e $K = F(\alpha)$ uma extensão finita. Seja K' uma outra extensão finita do corpo F . Seja $\sigma: K \rightarrow K'$ um F -isomorfismo (isomorfismo que preserva os elementos de F) de K em um subcorpo de K' . Então $\sigma(\alpha)$ é raiz do mesmo polinômio mônico e irredutível que tem α

como raiz. Reciprocamente, se $\alpha' \in K'$ é outra raiz do polinômio mônico irredutível que tem α como raiz, então existe um único F -isomorfismo $\sigma: K \rightarrow F(\alpha')$ with $\sigma(\alpha) = \alpha'$.

2. Seja α um algébrico sobre F . As raízes do polinômio minimal de α são chamadas *conjugados de α* . Há uma correspondência de um para um entre os conjugados de α e os F -isomorfismos de $F(\alpha)$. No caso de corpos de característica zero, o número de conjugados de α é precisamente o grau de α .
3. A extensão K/F é dita *normal* se todo elemento $\alpha \in K$ tem seus conjugados também em K . Sendo $K = F(\alpha)$ uma extensão normal, o conjunto dos F -isomorfismos (nesse caso automorfismos) de K forma um grupo chamado *Grupo de Galois* da extensão.

Definição 3.1.4 (Norma de um elemento $\alpha \in K$). *Seja F um corpo e $K = F(\alpha)$ uma extensão de grau n de F e seja*

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Q}_p[X]$$

o polinômio minimal de α . As três definições seguintes da Norma do elemento α de K a F , denotada por $N_{K/F}(\alpha)$ são equivalentes:

1. *Se K é considerado como F -espaço vetorial e A é a matriz da transformação linear $x \mapsto \alpha \cdot x$, então $N_{K/F}(\alpha) = \det(A)$.*
2. $N_{K/F}(\alpha) = (-1)^n \cdot a_0$.
3. *Se K/F é uma extensão normal*

$$N_{K/F}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha_i,$$

onde os α_i 's são os conjugados de α sobre F .

Note que (b) \iff (c) decorre diretamente de

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i).$$

Para a equivalência (a) \iff (b) consideramos como base do F -espaço vetorial K o conjunto $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$, com respeito à qual a matriz da transformação linear $x \mapsto \alpha \cdot x$ é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

cujo determinante é claramente $(-1)^n \cdot a_0$.

EXEMPLO. Consideremos $K_1 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$. Calculemos $N_{K_1/\mathbb{Q}_2}(\sqrt{5})$ pelas três definições.

(a) Seja $\{1, \sqrt{5}\}$ base de K_1 enquanto \mathbb{Q}_2 -espaço vetorial. Consideremos a transformação linear $x \mapsto \sqrt{5} \cdot x$. Como

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sqrt{5} &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{5} \\ \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} &= 5 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$

temos que a matriz da transformação é

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo determinante vale $N_{K_1/\mathbb{Q}_2}(\sqrt{5}) = -5$.

(b) Claramente o polinômio minimal de $\sqrt{5}$ é $P(X) = X^2 - 5$. Logo, $N_{K_1/\mathbb{Q}_2}(\sqrt{5}) = (-1)^2 \cdot (-5) = -5$.

(c) O único conjugado de $\sqrt{5}$ é $-\sqrt{5}$ e o resultado segue imediatamente.

EXEMPLO. Consideremos $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Procedendo de maneira análoga ao que fizemos no último exemplo, encontramos $N_{K_2/\mathbb{Q}_2}(\sqrt{2}) = -2$.

Na definição 3.1.4, só nos é dito como calcular a norma de α no caso de ser $K = F(\alpha)$. No caso de ser $\beta \in K$ um elemento diferente de α , adotamos a parte (a) da definição. Isto é, definimos a norma do elemento β de K sobre F , denotada por $N_{K/F}(\beta)$, como o determinante da matriz da transformação $x \mapsto \beta \cdot x$. Nesse caso, teremos

$$N_{K/F}(\beta) = [N_{F(\beta)/F}(\beta)]^{[K:F(\beta)]} \quad (3.1)$$

De fato, se dispomos de uma base B_1 para $F(\beta)$ enquanto F -espaço vetorial e de uma base B_2 para K enquanto $F(\beta)$ -espaço vetorial, podemos obter uma base B para K enquanto F espaço vetorial agregando os produtos “elemento de $B_1 \times$ elemento de B_2 ”. Com respeito à base B a matriz da transformação $x \mapsto \beta \cdot x$ escreve-se em blocos como

$$A = \begin{bmatrix} A_\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\beta \end{bmatrix}$$

onde A_β é a matriz de $x \mapsto \beta \cdot x$ sobre $F(\beta)$. Como $N_{F(\beta)/F}(\beta) = \det(A_\beta)$ e o número de blocos A_β na matriz A é precisamente $[K : F(\beta)]$ temos que

$$\det(A) = N_{K/F}(\beta) = [N_{F(\beta)/F}(\beta)]^{[K:F(\beta)]}.$$

De modo geral, se temos $F \subset L \subset K$ três corpos e $\alpha \in K$, usando o mesmo raciocínio utilizado na obtenção de (3.1) verifica-se que

$$N_{K/F}(\alpha) = N_{L/F}(N_{K/L}(\alpha)) \quad (3.2)$$

Agora temos condições de avaliar a norma de qualquer elemento da extensão K/F . Sendo assim, podemos pensar na norma como uma função multiplicativa

(pois determinantes o são) $N_{K/F}: K \rightarrow F$. Assim, a norma é uma maneira de “cair” da extensão K para o corpo base F . Além disso, segue diretamente de (3.1) que se $\beta \in F$, então $N_{K/F}(\beta) = \beta^n$.

Voltemos ao caso K/\mathbb{Q}_p . Já temos condições de deduzir qual será a expressão do valor absoluto $\|\cdot\|_K$ que estende o valor absoluto p -ádico (caso exista). Admita por enquanto que a extensão K/\mathbb{Q}_p seja normal. Seja $\alpha \in K$ um elemento de grau n . Seja σ um \mathbb{Q}_p -isomorfismo do grupo de Galois da extensão. É fácil ver que a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\sigma: K &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|\sigma(x)\|_K \end{aligned}$$

será também um valor absoluto em K que estende o valor absoluto p -ádico. Logo, segue da unicidade de $\|\cdot\|_K$ que deve ser $\|x\|_K = \|x\|_\sigma$ para todo σ no grupo de Galois. Como $\sigma(\alpha)$ percorre a lista de conjugados de α conforme σ varia no grupo de Galois da extensão, temos

$$\prod_{\sigma} \sigma(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha_i = N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)$$

donde teremos

$$(\|\alpha\|_K)^n = \prod_{\sigma} \|\sigma(\alpha)\|_K = \left\| \prod_{\sigma} \sigma(\alpha) \right\|_K = \|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\|_K = \|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\|_p$$

e tirando a raiz n -ésima concluímos que deve ser

$$\|\alpha\|_K = \sqrt[n]{\|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\|_p} \tag{3.3}$$

Sendo assim, no caso de ser K/\mathbb{Q}_p uma extensão normal e de existir o valor absoluto $\|\cdot\|_K$, concluímos que necessariamente deve valer (3.3). Observe que se for $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, teremos $N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha) = \alpha^n$ e vale

$$\sqrt[n]{\|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\|_p} = \|\alpha\|_p$$

como se espera do valor absoluto $\|\cdot\|_K$.

O seguinte resultado nos diz que o valor em (3.3) independe de estarmos trabalhando em extensões normais. Isto também está alinhado com o que se espera do valor absoluto $\|\cdot\|_K$ visto que o mesmo deve “independe do contexto”.

Proposição 3.1.5. *Sejam L e K extensões finitas de \mathbb{Q}_p com $\mathbb{Q}_p \subseteq L \subseteq K$. Seja $m = [L : \mathbb{Q}_p]$ e $n = [K : \mathbb{Q}_p]$. Então vale*

$$\sqrt[m]{\|N_{L/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\|_p} = \sqrt[n]{\|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\|_p}.$$

Demonstração. De fato, temos de (3.2) que

$$N_{K/\mathbb{Q}_p}(x) = N_{L/\mathbb{Q}_p}(N_{K/L}(\alpha)) = N_{L/\mathbb{Q}_p}(x^{n/m}) = [N_{L/\mathbb{Q}_p}(x)]^{n/m}$$

e o resultado segue diretamente da aplicação da raiz n -ésima. \square

A proposição 3.1.5 nos diz que

$$\sqrt[n]{\|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)\|_p}$$

independe do corpo K que contém o algébrico x . Sendo assim, temos que esse valor deve coincidir com $\|x\|_K$ (caso $\|\cdot\|_K$ exista) mesmo nos casos em que a extensão não é normal. Isto condiz com o fato de que $\|x\|_K$ não deve depender da extensão K que contém o algébrico x .

De fato, tem-se que (3.3) define um valor absoluto em K que estende o valor absoluto p -ádico.

Teorema 3.1.6. *Seja K/\mathbb{Q}_p uma extensão finita de grau n . A função $\|\cdot\|: K \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\|x\|_K = \sqrt[n]{\|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)\|_p}$$

*é o valor absoluto em K que estende o valor absoluto p -ádico de \mathbb{Q}_p . Tal valor absoluto é chamado **valor absoluto p -ádico da extensão K** .*

3.2. ESTRUTURA ALGÉBRICA DE K

Lembre-se que todo $x \in \mathbb{Q}_p$ escreve-se como $x = p^m \cdot x_0$ com $m = \nu_p(x)$ e $\|x_0\|_p = 1$. Em particular, temos que $\|x\|_p$ é sempre uma potência de p com expoente inteiro. Se K/\mathbb{Q}_p é uma extensão algébrica de grau n e $x \in K$, vimos que $\|x\|_K = \sqrt[n]{\|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)\|_p}$. Em particular, $\|x\|_K$ é da forma p^m com $m \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$.

Definição 3.2.1. *Seja K/\mathbb{Q}_p uma extensão algébrica de grau n e seja $\|x\|_K$ o valor absoluto p -ádico da extensão K . Seja $x \in K$, $x \neq 0$. Definimos a **valorização p -ádica de x** como sendo o único racional $\nu_p(x) \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ que satisfaz*

$$\|x\|_K = p^{-\nu_p(x)}.$$

Se $x = 0$, fixamos $\nu_p(x) = +\infty$. A imagem $\nu_p(K) \subseteq \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ é chamada **grupo de valores de K** .

Temos que o Grupo de valores de K é um subgrupo aditivo de \mathbb{Q} . Segue diretamente da definição acima que

$$\nu_p(x) = \frac{1}{n}\nu_p(N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)) \tag{3.4}$$

EXEMPLO. Consideremos $K_1 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ e seja $x = a + b\sqrt{5} \in K_1$. Temos que

$$\nu_2(x) = \frac{\nu(N_{K_1/\mathbb{Q}_2}(x))}{2} = \frac{\nu_2(a^2 - 5b^2)}{2} \in \mathbb{Z}.$$

e temos que nesse caso o grupo de valores é $\nu_2(K_1) = \mathbb{Z}$.

EXEMPLO. Consideremos $K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ e seja $x = a + b\sqrt{2} \in K_2$. Temos

$$\nu_2(x) = \frac{\nu(N_{K_2/\mathbb{Q}_2}(x))}{2} = \frac{\nu_2(a^2 - 2b^2)}{2}.$$

Em particular, para $x = \sqrt{2}$, teremos $\nu_2(x) = \frac{1}{2}$. Concluimos que o grupo de valores de K_2 é $\nu_2(K_2) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

De modo geral, o grupo de valores de uma extensão K/\mathbb{Q}_p de grau n é da forma

$$\nu_p(K) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$$

onde e é um divisor de n . O número e é chamado *índice de ramificação de K sobre \mathbb{Q}_p* . Dizemos que a extensão K/\mathbb{Q}_p é *ramificada* quando $e > 1$ e *não ramificada* quando $e = 1$.

EXEMPLO. Como vimos nos dois exemplos acima, para $K_1 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ temos

$$\nu_2(K_1) = \mathbb{Z}.$$

Logo, o índice de ramificação é $e = 1$ e K_1 é uma extensão não ramificada. Já para $K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ temos

$$\nu_2(K_2) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

e temos que o índice de ramificação é $e = 2$ e a extensão é ramificada.

Definição 3.2.2. *Seja K/\mathbb{Q}_p uma extensão finita com índice de ramificação $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$. Um elemento $\pi \in K$ é chamado **uniformizador** de K quando $\nu_p(\pi) = 1/e$.*

EXEMPLO. Já vimos que $K_1 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ é uma extensão não ramificada, isto é, $e = 1$. Como

$$\nu_2(2) = \frac{1}{2} \cdot \nu_2(N_{K_1/\mathbb{Q}_2}(2)) = \frac{1}{2} \cdot \nu_2(2^2) = 1$$

concluimos que $\pi = 2$ é um uniformizador de K_1 . Já a extensão $K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ é ramificada e já mostramos que $\nu_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$. Logo, temos que $\pi = \sqrt{2}$ é um uniformizador de K_2 .

Note que se π é um uniformizador da extensão algébrica K/\mathbb{Q}_p , então

$$\left\| \frac{p}{\pi^e} \right\|_K = p^{-(\nu_p(p) - \nu_p(\pi^e))} = p^0 = 1$$

donde concluimos que $p = \pi^e \cdot u$ com $\|u\|_K = 1$. Isto é, o índice de ramificação e está associado à fatoração de p como potência do uniformizador. A extensão é não ramificada se, e somente se, p é uniformizador. Em particular, concluimos que todo elemento $x \in K$ escreve-se como

$$x = p^{\nu_p(x)} \cdot u = \pi^{e\nu_p(x)} \cdot u' \quad (3.5)$$

com $\|u'\|_K = 1$.

Definição 3.2.3. *Seja K/\mathbb{Q}_p uma extensão algébrica. Definimos o Anel dos inteiros de K por*

$$O_K = \{x \in K; \|x\|_K \leq 1\}$$

e seu ideal maximal

$$\langle \pi \rangle = \pi \cdot O_K = \{x \in K; \|x\|_K < 1\}.$$

O corpo

$$\mathbb{F} = O_K / \langle \pi \rangle$$

é chamado corpo residual de K .

Segue diretamente de (3.5) que temos $K = O_K \left[\frac{1}{\pi} \right]$. Claramente, quando $K = \mathbb{Q}_p$ temos $O_K = \mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ o corpo com p elementos. Como $\mathbb{Z}_p \subset O_K$, temos que o corpo residual \mathbb{F} de K é uma extensão de \mathbb{F}_p . Em realidade, se escolhermos $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_l\} \subseteq \mathbb{F}$ um conjunto linearmente independente com respeito a \mathbb{F}_p e para cada \bar{v}_i escolhermos $v_i \in O_K$ tal que $v_i \equiv \bar{v}_i \pmod{\pi}$, é fácil ver que $\{v_1, \dots, v_l\}$ é um conjunto linearmente independente com respeito a \mathbb{Q}_p . Segue que \mathbb{F}/\mathbb{F}_p é uma extensão finita e temos \mathbb{F} um corpo com p^f elementos para algum $f \in \mathbb{N}$.

Seja $\mathcal{R} = \{0, c_1, c_2, \dots, c_{p^f-1}\}$ um conjunto de representantes de classes laterais de $O_K / \langle \pi \rangle$. Dado $x \in O_K$, existe um único $a_0 \in \mathcal{R}$ tal que $x = a_0 + \pi \cdot x_1$ com $x_1 \in O_K$. Analogamente, existe um único $a_1 \in \mathcal{R}$ tal que $x_1 = a_1 + \pi \cdot x_2$ com $x_2 \in O_K$. Continuando assim, concluimos que é possível representar x como

$$x = \sum_{i \geq 0} a_i \pi^i = a_0 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 + \dots + a_n \pi^n + \dots$$

com os $a'_i \in \mathcal{R}$. De modo geral, se $x \in K$, temos

$$x = \sum_{i \geq -\nu_p(x)} a_i \pi^i$$

com os $a'_i \in \mathcal{R}$. Em realidade, não é uma tarefa árdua verificar que tal escrita é única.

Até o momento sabemos que o corpo residual \mathbb{F} é uma extensão finita de \mathbb{F}_p . Isto é, existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] = f$ e o número de elementos de \mathbb{F} é p^f . O seguinte resultado nos diz qual é o valor de f .

Teorema 3.2.4. *Seja K/\mathbb{Q}_p uma extensão de grau n e índice de ramificação e . Seja $f = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$. Tem-se que $n = e \cdot f$.*

Ideia. Escolha $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f \in O_K$ e $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_f \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha_i \equiv \bar{\alpha}_i \pmod{\pi}$ para $i = 1, 2, \dots, f$ e de modo que $\bar{B} = \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_f\}$ é uma base de \mathbb{F} . Em particular, teremos que $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f\}$ será um subconjunto de O_K linearmente independente. Seja π um uniformizador de K . A ideia é mostrar que

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots & \alpha_f, \\ \pi \cdot \alpha_1, & \pi \cdot \alpha_2, & \cdots & \pi \cdot \alpha_f, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi^{e-1} \cdot \alpha_1, & \pi^{e-1} \cdot \alpha_2, & \cdots & \pi^{e-1} \cdot \alpha_f \end{array} \right\}$$

é base de K sobre \mathbb{Q}_p . Dado $x \in O_K$, tem-se do fato de que \bar{B} é base de \mathbb{F} que

$$x = x_0^1 \alpha_1 + x_0^2 \alpha_2 + \cdots + x_0^f \alpha_f + \pi \cdot x_1$$

para algum $x_1 \in O_K$ e com $x_0^i \in \mathbb{Z}_p$, $i = 1, 2, \dots, f$. Procedendo de maneira análoga com o elemento x_1 , concluímos que vale

$$\begin{aligned} x &= x_0^1 \alpha_1 + x_0^2 \alpha_2 + \cdots + x_0^f \alpha_f \\ &\quad + x_1^1 \pi \alpha_1 + x_1^2 \pi \alpha_2 + \cdots + x_1^f \pi \alpha_f + \pi^2 x_2 \end{aligned}$$

com $x_2 \in O_K$ e os coeficientes x_i^j todos em \mathbb{Z}_p . Repetindo esse argumento e vezes obteremos

$$\begin{aligned} x = & x_0^1 \alpha_1 + x_0^2 \alpha_2 + \cdots + x_0^f + \alpha_f \\ & x_1^1 \pi \alpha_1 + x_1^2 \pi \alpha_2 + \cdots + x_1^f \pi \alpha_f + \\ & x_2^1 \pi^2 \alpha_1 + x_2^2 \pi^2 \alpha_2 + \cdots + x_2^f \pi^2 \alpha_f + \\ & \vdots \\ & x_{e-1}^1 \pi^{e-1} \alpha_1 + x_{e-1}^2 \pi^{e-1} \alpha_2 + \cdots + x_{e-1}^f \pi^{e-1} \alpha_f + p \cdot x_e \end{aligned}$$

para algum $x_e \in O_K$ e com todos coeficientes $x_i^j \in \mathbb{Z}_p$. Sendo assim, se continuamos esse processo indefinidamente, para cada par $i \in \{1, 2, \dots, f\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, e-1\}$ temos que a parcela $\alpha_i \cdot \pi^j$ terá como coeficiente uma seqüência de inteiros p -ádicos da forma

$$(y_i^j(n))_{n \in \mathbb{N}} = x_i^j(1) + px_i^j(2) + p^2 x_i^j(3) + \cdots + p^n x_i^j(n-1) + \cdots$$

que converge para um inteiro p -ádico y_i^j . Isso mostra que todo elemento de K se escreve como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} . Trabalhando $(\text{mod } \pi)$ é fácil ver que \mathcal{B} é um conjunto linearmente independente. \square

Sendo assim, a fatoração $n = ef$ nos dá informações sobre mudanças no grupo de valores $\nu_p(K)$ por meio do índice de ramificação e e sobre mudanças no corpo residual por meio de f .

EXEMPLO. Para $K_1 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ vimos que $e = 1$ e que $\pi = 2$ é um uniformizador. Como $n = 2 = ef$, concluímos que $f = 2$ e então $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_4$. Tomando $\mathcal{R} = \{0, 1, c, c+1\}$ como um conjunto de representantes de $O_K/\langle \pi \rangle$, concluímos que todo elemento $x \in O_K$ se escreve de modo único como

$$x = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \cdots + a_n \cdot 2^n + \cdots$$

com os a_i 's em \mathcal{R} .

EXEMPLO. Para $K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ vimos que $e = 2$ e que $\pi = \sqrt{2}$ é um uniformizador. Como $n = 2 = ef$, concluímos que $f = 1$ e então $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_2$. Tomando

$\mathcal{R} = \{0, 1\}$ como um conjunto de representantes de $O_K/\langle\pi\rangle$, concluímos que todo elemento $x \in O_K$ se escreve de modo único como

$$x = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \cdots + a_n \cdot 2^n + \cdots$$

com os a'_i s em $\{0, 1\}$.

Ao trabalharmos em extensões algébricas, também dispomos de uma versão do Lema de Hensel.

Lema 3.2.5 (HENSEL). *Seja K/\mathbb{Q}_p uma extensão algébrica. Considere um polinômio*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in O_K[X].$$

Se existir $\alpha_1 \in O_K$ tal que $\|P(\alpha_1)\|_K < \|P'(\alpha_1)\|_K^2$, então existe um único $\alpha \in O_K$ com

$$P(\alpha) = 0 \quad e \quad \|\alpha - \alpha_1\|_K < \frac{\|P(\alpha_1)\|_K}{\|P'(\alpha_1)\|_K}.$$

Corolário 3.2.6. *Seja K/\mathbb{Q}_p de grau $n = ef$. Então O_K^\times contém o grupo cíclico das $(p^f - 1)$ -ésimas raízes da unidade.*

Ideia. De fato, temos que $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F}_{p^f}^\times$ é um grupo cíclico com $p^f - 1$ elementos. Escolhendo qualquer conjunto de representantes de \mathbb{F} em O_K obtemos “raízes aproximadas” da unidade, cada uma, por meio do Lema de Hensel nos fornece uma $(p^f - 1)$ -ésima raiz da unidade. \square

Teorema 3.2.7. *Para cada $f \in \mathbb{N}$ existe exatamente uma extensão não ramificada K/\mathbb{Q}_p de grau f . Essa extensão é obtida pela adjunção a \mathbb{Q}_p de uma $(p^f - 1)$ -ésima raiz primitiva da unidade.*

Ideia. Consideremos $\bar{\alpha}$ um gerador do grupo multiplicativo $\mathbb{F}_{p^f}^*$. Seja

$$\bar{P}(X) = X^f + \bar{a}_{f-1} X^{f-1} + \cdots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0 \in \mathbb{F}_p[X]$$

o polinômio minimal de $\bar{\alpha}$. Escolhendo para cada \bar{a}_i um $a_i \in O_K$ com $a_i \equiv \bar{a}_i \pmod{\pi}$ temos que o polinômio

$$P(X) = X^f + a_{f-1}X^{f-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in O_K[X]$$

mônico e irreduzível. Seja α uma raiz do polinômio $P(X)$. Temos que $K = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ é uma extensão de grau f de \mathbb{Q}_p . Além disso, como $\bar{\alpha} \in \mathbb{F}$, temos que $f \leq [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] \leq [K : \mathbb{Q}_p] = f$ e então concluímos que K/\mathbb{Q}_p é extensão não ramificada. Resta verificarmos a questão da unicidade. Admita que K'/\mathbb{Q}_p seja uma extensão não ramificada de grau f . Segue do Corolário 3.2.6 que K contém as raízes $(p^f - 1)$ -ésimas da unidade. Seja β uma raiz $(p^f - 1)$ -ésima primitiva da unidade em K . Temos

$$\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_p(\beta) \subseteq K.$$

Da escolha de β podemos encontrar $\bar{\beta} \in \mathbb{F}$ gerador de \mathbb{F}^* com $\beta \equiv \bar{\beta} \pmod{\pi}$. Portanto

$$\mathbb{F}_{p^f} \subseteq \mathbb{Q}_p(\beta)/\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{F}.$$

Logo, temos $f \leq [\mathbb{Q}_p(\beta) : \mathbb{Q}_p] \leq [K : \mathbb{Q}_p] = f$ e concluímos que deve ser $K = \mathbb{Q}_p(\beta)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. W. S. Cassels, *Local Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [2] F. Q. Gouvêa, *p-adic numbers: An introduction*, 2 ed. Springer, New York, 1997.
- [3] N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
- [4] M. R. Murty, *Introduction to p-adic analytic number theory*, Vol. 27, American Mathematical Soc., 2009.
- [5] A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Vol. 198, Springer Sciences & business media, 2013.
- [6] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus*, Cambridge University press, Cambridge, 2006.



PESQUISAS SOBRE A MATEMÁTICA GREGA

GÉRARD GRIMBERG, MARCELA AMORIM, ROBERTA
TEIXEIRA E PÃ MONTENEGRO

20-24 JUNHO

Sejam bondosas, Musas, pois falaremos de palavras antigas
Livre adaptação de Apolônio de Rodes, Argonautas, IV.984-5

SUMÁRIO

Prefácio

1 A Disciplinarização do Saber na Grécia Antiga até o século IV AEC

1.1 O Estatuto do Saber

2 A natureza em Platão, Aristóteles e Demócrito

2.1 Introdução

2.2 O *Timeu* de Platão

2.3 Aristóteles

2.4 Demócrito

2.5 Conclusão

3 Reconstruções de Práticas e a Sistematização da Matemática através da Incomensurabilidade

3.1 Introdução

3.1.1 Subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$

3.2 Desenvolvimento

3.2.1 O que temos

3.3 Reconstruções

3.3.1 prova por absurdo

3.3.2 Teoria Musical

3.4 Antifairese

3.5 Considerações

4 Euclides muito além da obra *Os Elementos* - O resgate de Pappus sete séculos depois

- 4.1 Introdução
- 4.2 Dados
- 4.3 Porismas
- 4.4 Fenômenos
- 4.5 Óptica
- 4.6 Cônicas
- 4.7 Divisão de Figuras
- 4.8 Lugares de superfície
- 4.9 Elementos de Música
- 4.10 Catóptrica
- 4.11 Livro das Falácias e Comentários sobre Mecânica

Referências

PREFÁCIO

A presente apostila visa acompanhar o minicurso homônimo ministrado na X Bienal de Matemática, realizada entre os dias 20 e 24 de junho de 2022 na cidade de Belém - PA.

Consiste em uma visão geral de quatro pesquisas em andamento, uma por capítulo da apostila, acerca da História da Matemática Grega, realizada pelo nosso grupo de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ).

O primeiro estudo é de autoria de Roberta Teixeira, abordando sobre a disciplinarização do saber.

O segundo por Gérard Grimberg, estudando certas concepções físicas em Demócrito, Platão e Aristóteles.

Pã Montenengro, fica responsável pelo terceiro estudo, abordando as reconstruções para o surgimento da Teoria da Incomensurabilidade.

Por fim, Marcela Amorim nos traz sobre como Pappus de Alexandria resgata a obra de Euclides sete séculos após este e nos mostra a valiosidade do restante do *corpus* euclidiano.

Esperamos que aproveitem e que esta pequena coleção de estudos em andamento forneça subsídios e novas indagações sobre a matemática e seus posicionamentos conforme tempo e contexto.

Saudações helênicas,
Gérard, Marcela, Roberta e Pã

BELÉM - PA, JUNHO DE 2022

A DISCIPLINARIZAÇÃO DO SABER NA GRÉCIA ANTIGA ATÉ O SÉCULO IV AEC

1.1. O ESTATUTO DO SABER

Encontramos perspectivas de saber diversas em culturas e momentos históricos diferentes. Por meio de trabalhos arqueológicos, obtemos acesso a documentos datados de períodos remotos da história da humanidade e podemos, ainda que limitadamente, tentar desvendar o desenrolar de certos processos históricos. Dentre eles, ressaltamos a possibilidade de sondar concepções epistemológicas de um povo em determinado período, ou seja, buscar compreender como um povo considerava o conhecimento em uma época.

Nesse sentido, por exemplo, os escritos sobreviventes das civilizações egípcia, mesopotâmica e babilônica, como o Papiro de Rhind e o Plimpton 322, revelam o interesse desses povos em elaborar procedimentos para a resolução de alguns problemas práticos, como o cálculo de áreas, regras de contagem, a própria administração da cidade, entre outros (ROQUE, 2012). Esses procedimentos, embora hoje possam ser assimilados aos saberes matemáticos, não traziam, entretanto, quaisquer sinais de um saber especializado ou teórico. Nos documentos, além disso, não há classificação de tipos de saberes quanto às suas utilidades, tampouco menção à separação do saber em diferentes áreas. Baseados nessas evidências, não há elementos para determinar se esses povos concebiam o saber de forma disciplinarizada.

O cenário é diferente entre as obras remanescentes da Grécia Antiga, uma

vez que a historiografia grega instaura distinções entre um texto de cunho literário, um de cunho científico e um de cunho prático. É relevante o fato de que, em alguns fragmentos ainda do século VI A.E.C., podemos encontrar alusões à distinção entre as áreas de conhecimento. Entretanto, é no final do período clássico, nas obras de Platão, Isócrates, e, sobretudo, de Aristóteles, no qual a estrutura de um saber já separado em disciplinas distintas, caracterizadas pelos seus princípios e objetos de estudo, está documentada.

A tentativa de elucidação de alguns aspectos do processo pelo qual os gregos do período clássico conceberam sua própria geografia do saber, que reverbera até os dias atuais, inicia-se em uma exposição sobre a racionalidade grega antiga. É necessário que recoloquemos a questão da sabedoria grega de maneira crítica, levando em consideração o fato de que a razão grega não é âcomo a nossa razão [...], uma razão científica, experimental e voltada para a matematisação e a gestão da naturezaâ (LAKS, 2013, p.93). A racionalidade emergente no período era, de maneira geral, política, pautada na relação dos homens com eles mesmos (VERNANT, 1972). A fábula de Esopo abaixo se trata de uma descrição despojada e concisa do que foi a razão grega antiga:

Dêmades, o orador, falando certa vez publicamente em Atenas sem que as pessoas lhe dessem muita atenção, pediu-lhes permissão para contar uma história esópica. Depois de concordarem, começou a dizer: âDeméter , a andorinha e a enguia andavam pelo mesmo caminho. Ao chegarem junto a um rio, a andorinha voou e a enguia mergulhou.â Disse isso e se calou. Quando, então, perguntaram âMas e Deméter, o que se passou com ela?â, falou: âEstá colérica com vocês, que, deixando de lado os assuntos da cidade, se apegam a histórias esópicas.â

Assim também entre os seres humanos são irracionais todos que desprezam as coisas prementes e preferem as prazerosas.

(ESOPO, C96, P63)

A partir do texto, percebe-se, a relação entre razão (*lógos*) e política (*póleos prágmata*) e nos ajuda a entender o horizonte epistemológico no qual as

disciplinas florescem. Sendo assim, interessa-nos reparar no fato de que as disciplinas surgem em uma conjuntura específica na qual os gregos estão a pensar sobre a melhor maneira de dirigir a cidade. Indo além, as fontes testemunham que o século V e IV A.E.C. foi marcado pela tentativa de elaborar um modelo de educação para os cidadãos da *pólis*, isto é, parece ser em meio ao debate acerca de como formar um cidadão e governantes que as disciplinas são mencionadas pela primeira vez. Tal debate desponta com a chegada dos sofistas à cidade de Atenas e suas promessas de vender um conhecimento político capaz de desenvolver grandes líderes. Assim, dá-se início a uma discussão cujo ápice é a obra de Platão República: como formar o jovem grego? É nesse contexto que Platão e Isócrates inauguram suas respectivas escolas dentro da cidade de Atenas, institucionalizando o acesso à educação e dando uma resposta aos sofistas.

Sob essa perspectiva, na busca da melhor educação dos jovens e de contraponto à onda sofística é que a tradição grega aborda a problemática da sabedoria e dos sábios, voltando-se sobre si mesma. Ou seja, ao falar sobre os grandes sábios gregos, temos a oportunidade de compreender mais profundamente a racionalidade grega nas palavras dos próprios. Esse movimento está documentado nos trabalhos de Platão e Aristóteles, por exemplo, na retomada da história da Grécia e dos sábios antigos. Esse é o período no qual surge a lenda dos Sete Sábios da Grécia, cujos personagens são lendários e objeto de grande admiração pelos gregos.

Essa lenda é mencionada pela primeira vez em Platão (Protágoras, 343a), mas acredita-se que já era sabida na época de Heródoto, pois é contado por ele o interesse de estrangeiros, entre eles Creso, a respeito dos sábios da Grécia (1-29). Muitos outros autores gregos recontaram suas versões da história dos sete sábios e, no total, vinte e duas personalidades são citadas. De todos os relacionados, os mais frequentes são Tales, Bias, Pítaco, Cleóbulo, Sólon, Quílon e Periandro. Destes, há apenas quatro unânimes: Sólon de Atenas, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene e Tales de Mileto.

Até então, em uma cultura altamente religiosa como a grega, uma outra noção de sapiência humana prosperava. Aqueles que pareciam possuir um canal de comunicação mais estreito com as divindades eram detentores de um status

diferenciado perante a sociedade (JOHNSTONE, 2012). Por exemplo, quando alguém chegava ao templo de Delfos, o mais famoso entre todos, encontrava ali um oráculo, indivíduo responsável por comunicar os presságios e enigmas enviados pelo próprio deus Apolo, regente de Delfos. Os poetas gregos antigos começavam suas histórias com o canto das musas, divindades a quem eram atribuídas a capacidade de inspirar a música e a criação artística como um todo. O aedo e o rapsodo eram figuras similares ao poeta: inspirados pelas musas, eles cantavam e encenavam, respectivamente, histórias épicas. Por isso, os oráculos, poetas, aedos e rapsodos eram privilegiados e, de uma certa maneira, venerados, pelo acesso ao divino. Os sete sábios, entretanto, possuem uma sabedoria de outra ordem.

Entre os séculos VII e VI, a Grécia passava por mudanças severas em suas estruturas política e social. Esses eventos e seus impactos são primordiais no sentido de entender como houve uma continuidade entre uma sabedoria incontestável, ligada estritamente ao divino, e uma de ordem humana. Ou seja, segundo Vernant (1972), é em meio a uma conjuntura de instabilidade e mudanças que surgem os primeiros sábios. Estes eram aqueles com habilidades sociopolíticas capazes de solucionar o conflito, a *stasis* (LEÃO, 2013).

A tradição historiográfica levanta a questão sobre a sapiência deles, tendo Diógenes Laércio trazido a anedota sobre a trípode a ser entregue ao mais sábio, mas isso não parece gerar dúvidas em Platão. Para ele, Sólon é o mais sábio dos sete (Timeu, 20e) e, além disso, não só era Sólon o mais sábio em tudo mais, como também na poesia se destacava como o mais nobre dos poetas (Timeu, 21c). Em outra passagem, n' *O Banquete*, Platão explica a importância da figura de Sólon e o motivo para tal respeito:

Do teu lado, Sólon é alvo de elevada estima entre vós por haver gerado suas leis, bem como diversos outros homens em outros lugares, quer entre os gregos quer entre os bárbaros, devido às muitas admiráveis proezas que trouxeram à luz as múltiplas virtudes por eles geradas. Por causa de seus excelentes filhos, muitos santuários foram erigidos em sua honra, algo que jamais ocorreu por iniciativa de descendentes humanos. (PLATÃO, *O Banquete*, 209d)

Ao debruçarmo-nos nos fragmentos sobreviventes de Sólon, é possível inferir que sua legislação, por mais que não tenha sido a primeira da história da Grécia, foi moderada no sentido de que tentou agradar a todos. Somos levados a acreditar que sua intenção, ao escrever a constituição, foi o alcance do equilíbrio entre as classes. Ao ser perguntado sobre suas leis e se essa era a melhor aos atenienses, Sólon responde que foram às melhores dentre as que eles poderiam aceitar (PLUTARCO, Vida de Sólon, 15.2)

Ao povo, portanto, concedi privilégio que lhe bastasse e honra não lhe retirei nem acrescentei; aos que detinham a força e as riquezas granjeavam respeito, também a esses garanti que nenhuma afronta sofressem. De pé, lancei um forte escudo sobre ambos: vencer com injustiça, não o permiti, a nenhum deles. (Fragmento 5.1-6 West)

Pelas suas palavras, conseguimos notar sua preocupação com a *pólis* e as consequências do conflito entre as classes, ao dizer que seu coração se enche de dor, ao ver a mais antiga terra da Iônia em chacina. Atribuindo a culpa da crise à avareza e arrogância, sobretudo da aristocracia, ele tenta instruir os ricos a não serem ambiciosos e os pede que ajustai essa enorme avidez; pois nem nós cederemos, nem vós bem-sucedidos com isso sereis (ARISTÓTELES, Constituição dos Atenienses, 5).

Segundo Aristóteles, o incômodo panorama de pobres sendo forçados à escravidão como pagamento de dívida aos mais ricos só começou a ser solucionado com Sólon, o primeiro campeão do povo (ARISTÓTELES, Constituição dos Atenienses, 2). A escravatura era, junto com a falta de participação política, um dos maiores motivos de descontentamento por parte do *demos*, por isso, suas primeiras iniciativas foram a abolição da lei de escravidão por dívida e o perdão a dívidas privadas ou públicas. Em um cenário de endividamento generalizado da população, esta medida passou a ser chamada de *seisáchtheia*, palavra cujo sentido literal é aliviar o fardo (LEÃO, 2001). Sólon, inclusive, teria sido o primeiro a perdoar uma dívida (Vida de Sólon, 15.9).

Sua postura moderada o aproxima dos outros sábios da época. Todos eles, para além da atuação política, eram virtuosos e a sabedoria do grupo estava

difundida na sociedade por máximas, sentenças curtas que expressavam uma conduta a ser seguida. A característica mais evidente das máximas dos sábios é sua homogeneidade: não há características distintivas que diferenciem os provérbios de um sábio dos de outro. Por exemplo, o provérbio de Cleóbulo, "A medida é melhor", é quase exatamente o mesmo que o atribuído a Tales, "Viva de acordo com a medida". Também semelhantes são o provérbio de Quílon, "Conheça-te a ti mesmo", e outro de Tales, "é difícil conhecer a si mesmo". Essa homogeneidade foi notada pelos antigos e isto é significativo, pois, embora as lendas sobre a vida dos sábios distingam suas personalidades individuais e áreas de especialização, o caráter de sua sabedoria era homogêneo, incorporando a sabedoria da era arcaica. E a característica única e mais importante de sua sabedoria coletiva é a de *sophrosýne*.

O conceito grego de *sophrosýne* combina autocontrole, autoconhecimento e a aceitação do limite. Para Heráclito, *âsophrosýne* é a maior virtude, e sabedoria é falar e agir de acordo com a verdade, valorizando a natureza das coisas. (DK 22 B 112). Deste modo, percebemos que, não só os sábios falavam sobre a *sophrosýne* em seus provérbios, como também seguiam seus próprios preceitos, tornando-se modelos dos tipos de ação que defendiam. Todos eles negaram o título do mais sábio, tentaram governar suas cidades com moderação e justiça, chegando a negar um governo tirano, perdoaram dívidas e assassinos e muitos outros exemplos. Ou seja, os *sophoí* eram performadores de *sophrosýne*. Isso parece ter sido reconhecido por outras personalidades gregas da era arcaica até a helenística, como mostram as passagens abaixo:

Eis por que motivo prezo Menos o excesso do que o ínfimo Há sábio
que de mim discorde? (EURÍPEDES, Hipólito, 264-266)

E Píndaro dizia que os sábios presavam pela máxima âNada em
excessoâ excessivamente. (PÍNDARO, frag. 216)

De maneira geral, percebemos que houve um processo de continuidade entre o sábio do período homérico, os poetas, aedos e oráculos, aqueles com acesso direto às divindades, e os sábios do período arcaico. Estes últimos, parecem

assim ser chamados por conseguirem assimilar, de uma maneira humana, características antes restritas aos deuses. As virtudes, que antes eram divinas, passaram a ser encontradas, ou reconhecidas, em mortais: a moderação, a justiça, as habilidades para governar, entre outras. A frase escrita no túmulo de Tales é a materialização desse fenômeno:

"Neste pequeno túmulo jaz o sapientíssimo Tales, cujas glórias se eleva aos céus."(DIÓGENES LAÉRCIO, 1.39)

Ao tentar responder, enfim, à pergunta sobre o tipo de saber possuído por um sábio, chega-se à conclusão de que ainda não é um saber científico, mas é racional, emancipado, de uma certa maneira, de um pensamento religioso. Tal movimento de distanciamento do divino é iniciado por aqueles que viriam a integrar, em algum momento ou em alguma versão, a lista dos sete sábios da Grécia. Todos eles tiveram uma postura ativa na construção e emancipação política de suas respectivas cidades e traziam consigo a sabedoria acerca do justo, do belo, do moderado e, acima de tudo, pareciam separar as leis divinas das dos homens.

Em suma, parece que somente o saber de Tales terá, naquela altura, avançado para além da utilidade prática, ao servir-se da indagação teórica. Quanto aos restantes, é da excelência política que lhes vem a reputação de sabedoria. (PLUTARCO, 2012, 3.8). Tales de Mileto se destaca dos demais por ir além da esfera política e social. Ao mesmo tempo em que se dedicava a uma investigação de ordem política, iniciou um estudo de ordem natural que possibilitou a elaboração de um discurso racional, abrindo portas para a disciplinarização do saber. Ele é responsável pela inauguração de um certo tipo de investigação em relação à natureza que, séculos depois, viria a ser chamada de ciência.

Seu maior empreendimento nesse sentido foi sua suposta teoria cosmológica. Rompendo, de uma certa maneira, com as teorias da época, Tales, segundo Aristóteles, teria eleito a água como princípio de todas as coisas, a *arché*.

As histórias da filosofia muitas vezes o apresentam como "o primeiro filósofo", em grande parte por causa da maneira como Aristóteles o introduz na *Metafísica*, como o primeiro ter praticado

uma filosofia da "natureza". Mas os testemunhos mais antigos, notadamente os de Aristófanes e Heródoto, antes sugerem uma figura multifacetada engajada sobretudo na política e na engenharia (especialmente hidráulica). (LAKS MOST, 2016, p. 206)

Para Simplicio e Teofrasto, Tales não foi o primeiro, mas, sendo tão superior aos seus antecessores, estes foram esquecidos historicamente (DK 11 B 1). O título de primeiro filósofo, como dizem Laks e Most, é um crédito, em grande parte, por seus estudos sobre o elemento primordial e sobre a natureza como um todo. Em *Sobre os céus*, Aristóteles diz que, segundo Tales, toda a Terra flutua na água, como uma tora ou um pedaço de madeira (294a). De acordo com esse trecho, a concepção de Tales seria mais geológica, baseada numa suposta sustentação, e origem, da Terra. Por outro lado, na *Metafísica*, Aristóteles é mais abstrata:

A maioria dos primeiros filósofos concebeu apenas princípios materiais para todas as coisas. Aquilo de que todas as coisas consistem. De que procedem primordialmente e para o quê, por ocasião da sua destruição são dissolvidas em última instância, permanecendo a essência, ainda que modificada por suas afecções a isso, dizem, é um elemento e princípio das coisas existentes. [...] Tales, fundador dessa escola de filosofia, afirma que esse princípio permanente é a água (razão pela qual ele igualmente propôs que a terra flutua na água). É presumível que tenha chegado a essa hipótese a partir da observação de que o nutriente de tudo é úmido, e que o próprio calor é gerado da umidade, sua existência dependendo dela. (ARISTÓTELES, *Metafísica*, 983b1-15)

Conjecturar sobre a real fala de Tales é infrutífero dada a falta de fontes. No entanto, importa reconhecer sua fama de ser o primeiro a eleger um elemento material, inerente à natureza, como princípio de todo o resto. Parece-nos que sua postura difere da dos demais, perpetuadores da teogonia de Hesíodo, segundo a qual

Bem no início, Abismo nasceu; depois, Terra largo-peito, de todos assento sempre estável, dos imortais que possuem o pico do Olimpo nevado, o Tártaro brumoso no recesso da terra largas-rotas e Eros, que é o mais belo entre os deuses imortais, o solta-membros, e de todos os deuses e todos os homens subjuga, no peito, espírito e decisão refletida. De Abismo nasceram Escuridão e a negra Noite; de Noite, então, Eter e Dia nasceram, que gerou, grávida, após com Escuridão unir-se em amor. (HESÍODO, Teogonia, 116-125)

Tales parece ter sido, então, o primeiro a tentar explicar o universo como resultado de modificações de algo oriundo da própria natureza. Principalmente nisso consiste sua diferença relativa aos demais primeiros pensadores. Ademais, cabe ressaltar que a passagem de um conhecimento mitopoético a um racional acerca da natureza não é linear e tampouco definitivo.

Ele funda uma área de conhecimento hoje chamada de filosofia natural. Ele e seus discípulos mais ilustres, Anaximandro e Anaxímenes, fundaram a escola jônica criaram teorias sobre a natureza sem envolver o divino. Para exemplificar, trazemos um fragmento de Écio, comentador de obras clássicas e grande fonte de informações de Anaximandro. Nela, há uma explanação sobre trovões e relâmpagos:

Anaximandro: todos esses fenômenos [trovões, relâmpagos, trovões, turbilhões e tufões] seriam causados, todos eles, pelas rajadas de vento. Quando este é encerrado numa nuvem densa e irrompe para fora dela com violência, o rompimento produz o barulho e essa fenda dá a impressão de um clarão, em contraste com o negrume da nuvem. (DK 12 A 23)

Abaixo, porém, vemos uma passagem da Teogonia, de Hesíodo. Nela, os trovões e relâmpagos são lançados por Zeus em momentos de fúria. Pode-se ver claramente o contraste com a teoria de Anaximandro.

Nisso iam ao Olimpo, gozando a bela voz, com música imortal; rugia a terra negra em volta ao cantarem, e amável ruído se lançava

dos pés ao retornarem a seu pai: esse reina no céu, ele mesmo segurando trovão e raio chamejante, pois no poder venceu o pai Crono [...] (HESÍODO, Teogonia, 68-73)

Segundo historiadores recentes, o corpus de conhecimento jônico não pode ser considerado ainda como ciência, pelo menos não em nossa definição moderna. De forma geral, a ciência é entendida como um saber teórica e sistematizado (POPPER, 2014), algo que os milésios não fizeram.

[...] não se deve supor que o alcançado pelos milésios foi um sistema de investigação totalmente articulado, incluindo uma metodologia definida e estendendo-se por tudo o que chamamos de ciência.[...] No entanto, há duas características importantes que distinguem a especulação dos filósofos milésios dos pensadores anteriores, sejam gregos ou não. Em primeiro lugar, há o que pode ser descrito como a descoberta da natureza e, em segundo lugar, a prática da crítica racional e do debate. (LLOYD, 2012, p. 8,)

Lloyd (2012) afirma que a descoberta da natureza por parte dos milésios não foi uma ruptura com o contexto mitopoético da sociedade grega até então. Na verdade, foi o reconhecimento de um fenômeno natural, em oposição ao que antes era entendido como sobrenatural. Ou seja, suas ideias parecem derivar dos mitos com a diferença de que a origem divina é omitida. Por outro lado, duas características distinguem as especulações dos milésios dos pensadores anteriores, gregos ou não: em primeiro lugar, a descoberta da natureza como produto de si mesmo, emancipada de ações divinas, e, em segundo lugar, o florescimento de um campo de debate racional propício a novas ideias.

Como vimos anteriormente, Sólon nos deixou poemas e, a partir deles, nota-se que ele se responsabilizava por suas propostas e fez o que estava a seu alcance para tornar a lei ateniense acessível ao povo. Nesse sentido,

Tales e Sólon tinham, pelo menos, duas coisas em comum. Primeiro, ambos renunciaram a qualquer autoridade sobrenatural para

suas próprias ideias e, em segundo lugar, ambos aceitaram os princípios do livre debate e do acesso público às informações sobre as quais uma pessoa ou ideia deve ser julgada. (LLOYD, p. 15, 2012)

Tales divulgou as suas ideias e seus discípulos deram continuidade ao estudo da filosofia natural a ponto de criarem suas próprias hipóteses. Estas, curiosamente, contradiziam Tales, algo que mostra suas tentativas de se chegar ao conhecimento verdadeiro. Há a possibilidade de que essas teorias estivessem diretamente competindo umas com as outras pelo posto de verdade absoluta. Ou seja, muitas são os traços que estabeleciam uma postura até então inédita entre os homens.

Com a postulação de Tales, Anaximandro e outros de uma substância ou princípio residente, universal e originário à *arch* que subjaz a tudo o que acontece, uma nova forma de racionalidade, uma nova concepção de divindade e novas ideias de sabedoria emergiram no pensamento grego. (JOHNSTONE, 2012, p.34)

Suas ideias foram estruturadas a partir de argumentos lógicos, característica fundamental para a concepção aristotélica de ciência. Os milésios deram conta de explicar a natureza sem a influência arbitrária dos deuses. Expusemos as teorias acerca de terremotos e trovões e, nelas, nada havia sobre a ira de Poseidon e Zeus, como seria caso lêssemos os poemas de Homero e Hesíodo. Principalmente, é de profunda importância o fato de que Tales, Anaximandro e Anaxímenes tentaram descrever os fenômenos em sua forma mais geral. Ou seja, tentaram elaborar uma teoria que se aplicasse a todos os fenômenos de mesma natureza e não a casos particulares. Assim, eles investigam o universal e o essencial, não o particular e acidental (LLOYD, 2012, p.10).

Devemos, então, esclarecer que a conquista dos milésios foi a de ter, principalmente, rejeitado as explicações sobrenaturais para fenômenos naturais e instaurado uma conjunção que veio a ser propícia ao florescimento ciência anos depois. O conhecimento produzido por eles não era científico e tampouco estava dividido em disciplinas.

Cabe-nos pontuar que a tradição historiográfica nos fornece anedotas interessantes que elucidam a suposta recepção por parte dos gregos a esse tipo inédito de estudo sobre a natureza. A primeira diz respeito a Tales e sua queda em um poço por olhar as estrelas:

Foi o caso de Tales, quando observava os astros; porque olhava para o céu, caiu num poço. Contam que uma decidida e espirituosa rapariga da Trácia zombou dele, com dizer-lhe que ele procurava conhecer o que passava no céu, mas não via o que estava junto dos próprios pés. Essa pilheria se aplica a todos os que vivem para a filosofia. (PLATÃO, Teeteto 174a)

Em sua obra *A República*, Platão relata sobre a má fama dos filósofos entre o povo. Segundo nos é contado, o filósofo era marginalizado na sociedade, sendo alvo, inclusive, de chacota. A passagem acima é um exemplo desse comportamento. O próprio Platão engajou-se na iniciativa de desfazer essa percepção, chegando a reconhecer os filósofos como os mais preparados para governar a cidade. Uma outra anedota pode ser relevante na demonstração de que a investida de Platão foi frutífera:

Pois quando o censuraram por causa da sua pobreza, com o argumento de que a filosofia para nada servia, diz-se que, tendo previsto pelo estudo dos corpos celestes que ia haver uma abundante colheita de azeitona, juntou um pequeno capital, ainda durante o Inverno, e pagou sinal por todos os lagares de Mileto e de Quios, arrendando-os por baixo preço, porque ninguém licitou contra ele. Quando chegou a ocasião própria, houve uma súbita afluência de pedidos de lagares; então ele sublocou-os pelo preço que quis, e deste modo obteve um lucro avultado, demonstrando assim que é fácil aos filósofos enriquecer, se o desejarem, mas que não é isso o que lhes interessa. (DK 11 A 1)

Ou seja, esses dois fragmentos são testemunhas do processo pelo qual o povo grego provavelmente passou: o de aceitação do conhecimento científico como

ferramenta para o bom governante. A tradição indica que o cenário começa a mudar ainda no século VI com os pitagóricos. Eles não eram um grupo homogêneo, mas, aparentemente formavam uma seita religiosa, detinham um lugar especial na vida política por onde passaram e elaboraram as bases para a teoria da primeira ciência da qual temos relatos, ainda que raros: a matemática.

Tudo quanto nos números e harmonia era concorde com as propriedades e as partes dos céus e com a totalidade do mundo criado, foi por eles reunido e organizado em um sistema: e se alguma lacuna se fizesse notar algures não tardavam em suprimi-las com acréscimos, de tal modo que o conjunto de sua teoria resultasse coerente. (ARISTÓTELES, *Metafísica*, 986a1-8)

Nosso desafio é, portanto, responder à seguinte pergunta: como uma seita religiosa obteve tanto prestígio a ponto de seus membros serem reconhecidos como exemplos de líderes políticos e sua ideologia ter impactado toda a filosofia grega por vários séculos subsequentes? Além disso, como eles conseguiram unir filosofia e religião? A resposta parece estar na relação entre o pitagorismo e o orfismo.

Francis Cornford foi um estudioso cuja tese sobre a continuidade entre filosofia e religião é um clássico da historiografia grega. Em seu livro *From Religion to Philosophy*, o autor argumenta que o pitagorismo foi capaz de integrar a teologia com a filosofia, a fé com a razão, de maneira única. A prática do exercício racional levaria à purificação da alma e à sua consequente libertação da prisão do corpo. Assim, o uso da razão seria capaz de expurgar uma pessoa de suas infinitas reencarnações.

O pitagorismo se apresenta como uma tentativa de intelectualizar o conteúdo do Orfismo, preservando sua forma social, e o máximo possível da essência que o segundo havia originalmente vestido. Como o próprio orfismo, é tanto uma reforma (da religião dionisíaca) quanto um renascimento. Como todas as reformas, significa que grande parte do supercrescimento ritualístico é deixado de lado: o orfismo deixa de ser um culto, e torna-se um modo de

vida. Como um renascimento, o pitagorismo significa um retorno a uma simplicidade anterior, o desenterrar de sua forma essencial, cujo contorno é suficientemente simples para se adaptar a um novo movimento do espírito. (CORNFORD, 2018, p.199)

Para os órficos, a palavra *theoría* significava a identificação com Deus e o seu ciclo de vida, sofrimento, morte e renascimento. Pitágoras deu um novo significado à *theoría*; ele a reinterpretoeu como a contemplação impassível da razão, da verdade imutável, e converteu o modo de vida em uma 'busca de sabedoria' (*philosophia*). (p. 200). Assim, percebemos que foi a partir do pitagorismo que a palavra teoria começou a ter seu sentido moderno. E, finalmente, os pitagóricos acreditavam que, através da contemplação, seria possível chegar em um estado intelectual que comunicava conhecimento matemático. Assim, eles fizeram da ciência uma forma de purificar suas almas e se elevarem aos céus.

Após estes, Pitágoras transformou o tipo de filosofia em relação a isso [*i.e.* geometria] dando-lhe a forma de uma disciplina livre, considerando seus princípios desde a origem e investigando suas proposições independentemente da matéria e de acordo com o inteligível a ele, que também descobriu o estudo dos irracionais e o arranjo das figuras cósmicas. (DK 58 B 1)

Aristóteles é nossa maior fonte sobre o pitagorismo e, em sua obra *Metafísica*, está a seguinte passagem:

Os assim chamados pitagóricos são contemporâneos e até mesmo anteriores a esses filósofos. Ele primeiro se aplicaram às matemáticas, fazendo-as progredir e, nutridos por elas, acreditaram que os princípios delas eram os princípios de todos os seres. E dado que nas matemáticas os números são, por sua natureza, os primeiro princípios, e dado que justamente nos números, mais do que no fogo, na terra e na água, eles achavam que viam muitas semelhanças com as coisas que são e que geram - por exemplo, consideravam

que determinada propriedade dos números era a justiça, outra a alma e o intelecto, outra ainda o momento e o ponto oportuno e, em poucas palavras, de modo semelhante para todas as coisas -; e além disso, por verem que as notas e os acordes musicais consistiam em número; e, finalmente, porque todas as outras coisas em toda a realidade lhe pareciam feitas à imagem dos números e porque os números tinham a primazia na totalidade da realidade, pensaram que os elementos dos números eram elementos de todas as coisas, e que a totalidade do céu era harmonia e número. Eles recolhiam e sistematizavam todas as concordâncias que conseguiam mostrar entre os números e os acordes musicais, os fenômenos, as partes do céu e todo o ordenamento do universo. E se faltava alguma coisa, eles se esmeravam em introduzi-la, de modo a tornar coerente sua investigação. (ARISTÓTELES, 985b24-986a8)

Nesse sentido, acreditamos que o estudo da ciência, pelo menos da matemática, era obrigatório entre os pitagóricos. Por isso, se na primeira fase do pitagorismo, no século VI, a matemática estava fortemente ligada à religião, entre os séculos V e VI, o contexto era diferente. A última fase do pitagorismo foi protagonizada por personagens que hoje são reconhecidas por sua relevância na matemática, como Filolau de Crotona e Árqitas de Tarento. Este último foi, possivelmente, o primeiro líder esclarecido e era amigo de Platão, sendo, talvez, o responsável por inspirá-lo em sua opinião sobre o uso das ciências para a formação do cidadão. Temos alguns fragmentos questionavelmente atribuídos a ele, dentre os quais, escolhemos um:

Aqueles que se preocupam com as ciências matemáticas parecem-me fazer bem distinções, e não é surpreendente que eles pensam corretamente, sobre cada coisa, como elas são. Pois, uma vez que eles fazem distinções adequadas sobre a natureza do todo, eles também devem ver bem, sobre coisas particulares, como elas são. E certamente, sobre a velocidade do corpos celestes, seus nascimentos e ocasos, eles nos transmitiram uma distinção clara, e também so-

bre geometria e números, e especialmente sobre música. Pois essas ciências parecem irmãs. (DK 47 B 1)

Pode-se notar o papel do pitagorismo na história da matemática. Por fim, terminamos a primeira parte deste minicurso trazendo à tona o debate levantado pela produção historiográfica recente sobre a formação das primeiras disciplinas. é possível sustentar que houve uma especialização do saber muito cedo, já nos séculos VI e V, como afirma Zhmud (1994). A opinião contrária, no entanto, é passível de argumentação: em se tratando de um campo intelectual e científico ainda não diferenciado, âpara os filósofos, não menos para os matemáticos e os médicos, as fronteiras disciplinares permanecem, antes de Platão, ao mesmo tempo contestáveis e fluidasâ (LLOYD, 2002, p. 48).

A NATUREZA EM PLATÃO, ARISTÓTELES E DEMÓCRITO

2.1. INTRODUÇÃO

A restituição da Filosofia de Demócrito é difícil por várias razões, a primeira sendo que nenhuma obra do pensador chegou até nós. Conhecemos apenas sua obra através de citações aproximativas. Os autores que citam ou comentam partes da obra de Demócrito defendem uma problemática oposta ao atomista. O primeiro comentador (que chegou até nós) Aristóteles vê as concepções de Demócrito sob o prisma da sua própria filosofia. Os comentadores tardios (Alexandre, Simplicio, Diogenes Laércio, Sextus Empiricus ou até Proclus), aristotélicos, céticos ou neoplatônicos enxergam Demócrito com a perspectiva da filosofia que defendem. Surge aqui a segunda dificuldade de interpretação, um outro obstáculo, Demócrito é considerado pela historiografia como um “pré-socrático”, ou seja numa perspectiva onde os pensadores antes de Platão seriam apenas o prelúdio da filosofia grega, preparando a vinda de Sócrates, de Platão e Aristóteles.

Esta perspectiva foi analisada e criticada por André Laks (2006) que mostrou que esta perspectiva era forjada pela historiografia e reforçada pela edição no século XX por Hermann Diels do *Die Fragmente der Vorsokratiker* a partir de 1903. Mas Demócrito não é apenas contemporâneo de Sócrates, mas também teria vivido até período da Academia de Platão, pois a tradição (por exemplo Diógenes Laércio o faz falecer por volta de 460). Todos esses elementos exigem um estudo comparativo das concepções da natureza de Platão, Aris-

tóteles e Demócrito que torna possível uma maior compreensão das ideias de Demócrito. Esta parte do minicurso é, portanto, dedicada a leitura crítica de textos do *Timeu* de Platão, da *Física* e outros tratados de Aristóteles. Enfim abordamos certos trechos da obra de Aristóteles e de seus comentaristas que citam explicitamente Demócrito, levando em consideração leituras críticas recentes, inaugurada em particular por (O'Brien (1982 e 1994), Pierre Marie Morel (1996) e Heinz Wismann (2010).

2.2. O *Timeu* DE PLATÃO

O *Timeu* de Platão é uma descrição da constituição do cosmos ou seja da natureza. Platão aborda também nesta obra a constituição do homem, mas não analisaremos esta parte. Quem conta a história da concepção do Mundo, (um *muthos*) é Timeu, personagem de *Grecia Magna* que certos autores identificaram como Arquitas, um Pitagórico, governante de Tarenta e grande amigo de Platão. Mas, não se deve interpretar a visão do Mundo entregue por Timeu como a exposição de um pitagórico mas sim da própria concepção de Platão, uma vez que essa concepção é ligada à visão que atravessa os diálogos.

Explicando a dualidade da nossa existência, a permanência das Ideias, realidades inteligíveis, e o mundo sensível, mundo do devir, em movimento perpetuo, que podemos perceber através de nossa sensibilidade, Timeu afirma a primazia das Ideias. Para explicar como o mundo sensível é criado a partir do modelo das Ideias, Platão recorre à intervenção do Artista (*demiurgon*) que, a partir das realidades inteligíveis, produz o mundo sensível. Essa metáfora do artesão é, de fato, uma necessidade lógica do sistema de Platão, pois uma vez que o mundo sensível é mera cópia das Ideias, precisa para justificar a existência do mundo, um agente que opera sobre as Ideias. Outro elemento essencial a formação do mundo, é que todas as coisas sensíveis são criadas, se desenvolvem num certo lugar, um receptáculo. Assim o Mundo tem por receptáculo uma esfera que contém tudo, a esfera das estrelas...

Os elementos do mundo são a terra, a água, o ar e o fogo. Cada um é formado a partir de triângulos equiláteros ou de triângulos retângulos. A terra tem a forma do cubo, o fogo a pirâmide, o ar o octaedro e a água o

icosaedro. Ora essa estrutura não é perceptível pois a dimensão desses sólidos que estruturam os elementos é pequeno, e são apenas visíveis os agregados. O Lugar, o espaço, é concebido como limite do corpo material, ou seja extensão da matéria. O tempo possui o início: a criação do mundo sensível.

A questão do movimento é também abordada no *Timeu* que oferece uma exposição dos movimentos dos planetas, que mostra que as teorias não eram bem elaboradas na época. *O Sofista* trata do movimento em oposição ao Repouso enquanto categorias do Ser. O movimento é tratado como um modo de ser imperfeito, transitório.

2.3. ARISTÓTELES

Aristóteles separa cada disciplina segundo seu objeto de estudo, e cada disciplina tem o seus próprios princípios. O cosmos é assim dividido em duas áreas de pesquisa, o mundo sublunar, teatro do que está em perpetual transformação, tudo que nasce, vive, e morre na superfície da Terra; e o mundo supralunar dos astros, feitos de uma matéria sutil, o éter, e sujeitos a movimentos perfeitos e eterno, e logo circulares. Essa separação delimita as fronteiras da Física cujo domínio de estudo se restringe ao mundo sublunar, e a astronomia que trata do movimento dos astros.

Para Aristóteles esdudar a Natureza consiste em determinar as causas. Se, para ele, a matéria existe de toda eternidade (o tempo é infinito, não tem início nem fim), Aristóteles utiliza a mesma analogia entre Natureza e arte, pois na sua classificação das coisas, evoca a atuação do escultor que utiliza pedra para criar a estátua (causa material) dando a forma a ela (causa formal) e sendo quem atua (causa eficiente), é criando a sua escultura com certa finalidade por exemplo, em honra de um Deus (causa final).

Para dar conta do movimento, Aristóteles recorre aos conceitos de potência e de ato. "O movimento é o ato do que está em potência, enquanto tal". Mas todo movimento supõe um agente, um motor, que atua sobre o corpo em movimento. Outro aspecto, cada corpo tem o seu próprio movimento, conforme a sua natureza. A água e a Terra vão espontaneamente para baixo, enquanto ar e fogo vão para cima. Quanto se lança uma pedra no ar, a pedra é animada de

um movimento forçado. Quanto ao espaço, é o limite do corpo. Não se pode definir o espaço sem a matéria. Segundo Aristóteles a matéria é divisível ao infinito. Critica Platão por ter concebido essas linhas infinitesimalmente limitadas dos elementos (terre, ar, água, fogo).

No Céu, os astros são feitos de uma matéria sutil, o éter, muito leve, incorruptível e eterna: o movimento natural deste tipo de matéria é o círculo que não tem um movimento contrário. Assim, o Cosmos divide-se em duas áreas: o mundo sublunar e o mundo dos astros. Ao contrário da Física que não precisa da matemática pois os objetos da matemática, diz o Estagirita, são imóveis e separados da matéria, na astronomia, a descrição geométrica dos astros se impõe. A causa do movimento dos astros é uma série de motores, até o primeiro motor (imóvel).

2.4. DEMÓCRITO

Segundo Diógenes Laércio, que cita Thrasyllus, tanto o tamanho da obra quanto a diversidade dos assuntos tratados por Demócrito, é comparável à obra de Platão. Para dar uma ideia, citamos unicamente as obras da Física e da Matemática (Diógenes, IX, 34-49):

“As obras físicas são as seguintes: III. Grande Cosmologia (atribuída a Leucippo por Teofrasto e sua escola); Pequena Cosmologia; Cosmografia; Dos Planetas. IV. Da Natureza, livro primeiro; Da Natureza do Homem, ou Da Carne, livro segundo; Da Mente; Dos Sentidos (alguns autores reúnem esses dois livros em um só intitulado Da Alma). V. Dos Sabores; Das cores; Das Formas Diferentes; Das Mutações de Forma. VI. Confirmações (com provas adicionais às teses desenvolvidas nas obras precedentes); Das Imagens, ou Da Previsão do Futuro; Lógica, ou Cânon, em três livros; Problemas. As obras matemáticas são as seguintes: VII. Da Diferença de ângulo, ou Do Contacto do Círculo e da Esfera; Da Geometria; Fatos Geométricos; Números. VIII. Linhas e Sólidos Incomensuráveis, em dois livros; Projeções; O Grande Ano, ou

Astronomia, calendário; Contenda da Clepsidra e do Céu. IX. Descrição do Céu; Geografia; Descrição do Pólo; Descrição dos Raios.”

O problema é que não temos confirmação, através dos fragmentos ou paráfrases de Demócrito que chegaram até nós, dessa riqueza. Devemos então nos contentar analisando os poucos fragmentos que permanecem desta obra.

Segundo Aristóteles (*Metafísica*, 985 b 5-20),

“Leucippo e seu companheiro Demócrito sustentam que os elementos são o cheio e o vazio, aos quais dão o nome de o que é e o que não é, respectivamente. O que é, é cheio e sólido, o que não é, é vazio e subtil. Visto o vazio existir em não menor grau que o corpo, segue-se que o que não é não existe menos do que o que é. Os dois juntos constituem as causas materiais das coisas existentes. E tal como aqueles que fazem uma só da substância fundamental, geram as outras coisas por intermédio das suas modificações e postulam a rarefacção e a condensação como origem dessas modificações, assim também estes homens dizem que as diferenças [se. entre os seus elementos] são as causas das outras coisas. Segundo eles, estas diferenças são três – a forma, (**esquema**, a ordem (*taxis*), e posição (*thesis*)– o ser dizem eles, difere apenas no ritmo (*rhythmos*), contato (*diatigunã*) e revolução (*tropè*); o ritmo é a forma, o contacto, a ordem, e a revolução, a posição; é que A difere de N na forma, AN de NA na disposição, e Z de N na posição. Quanto ao problema do movimento, de onde e como os seres o possuem, esses filósofos ficaram negligentemente silenciosos.”

Os historiadores da filosofia ressaltaram a filiação eleáta dos atomistas na medida em que eles problematizam de outro modo a questão do Ser e do não Ser já abordado por Parmênides. A primeira inovação dos atomistas que aparece desde as primeiras linhas deste trecho da *Metafísica* consiste em conceder ao vazio uma realidade, o espaço onde evoluem os átomos é dissociado da matéria e se torna um conceito independente (o que não é o caso para Platão nem tampouco de Aristóteles que concebem o espaço como limites que encerram o corpo). O espaço adquire assim uma independência e uma significação

toda geométrica.

O segundo aspecto que pretendemos ressaltar, já analisado por Morel(1996, pp. 53 -56), e por Wissmann(2010, p. 28-29), é a tradução que faz de modo explícito Aristóteles do pensamento de Demócrito dos atributos dos átomos: a substituição dos termos ritmo (*rhysmos*, *diatiguè*) e *tropè* pelos termos respectivamente, **esquema**, *taxis*, *ethesis*), ou seja a substituição de termos dinâmicos por termos estáticos. O que Aristóteles não percebe, é que a propriedade fundamental dos átomos e de estar em movimento, ou seja, que o movimento é consubstancial aos átomos. Aristóteles consideram que os átomos são as coisas materiais de todos os corpos, ou seja tente inserir o pensamento de Demócrito. Na *Física*, que os atomistas pensam o vazio como causa do movimento dos átomos, mas de fato, não parece Demócrito entrou nessa consideração. Uma característica dos átomos é de estar em movimento. O caso do repouso se torna um caso provisório e transitório dos átomos. Aliás, é a aglutinação e a desagregação que marcam o nascimento e a morte de todo que nos aparece. Voltando à tradução dos termos por Aristóteles, ritmo evoca o movimento da onda, o contato, *diatiguè*), evoca o modo como os átomos se combinam neste movimento da onda, e a revolução, *tropè*, evoca o movimento de rotação que sofrem os átomos no seu movimento. Os três movimentos são interpretados por Aristóteles como a forma, a sução das letras na atividade da escritura. Mas essa analogia restringe a compreensão do fenômeno, pois o movimento dos átomos se dá nas três dimensões do espaço...

As observações de Simplicio (De caelo 295, 1, DK 68 A 37) vêm completando e talvez precisando o pensamento de Demócrito:

“Demócrito pensa que a natureza das coisas eternas consiste em pequenas substâncias (*ousia*) ilimitadas pelo número, e suponha, além disso, para estas um lugar (*topos*) ilimitado em grandeza. Ele designa o espaço (*topos*) pelos seguintes nomes: o *vazio*, o *nada* e o *ilimitado*, ao passo que a cada substância individual, ele chama *algo*, *compacto* e *ser*. Pensa ele que as substâncias são tão pequenas, que escapam aos nossos sentidos, se bem que possuam todas sortes de formas, de feitios e diferenças de tamanho. Deste

modo, consegue ele, a partir delas, como a partir dos elementos (*stochēion*), criar, por agregação, massas perceptíveis à vista e aos demais sentidos. Essas substâncias se enfrentam e são levados no vazio, pela falta de semelhanças entre si, assim como pelas outras diferenças que elas têm, e na sua trajetórias, se chocam e formam entrelaçamentos que produzam aglutinação, e ficam assim juntas sem gerar uma natureza, pois é impossível que dois venha a ser um. Quanto ao fato que as coisas ficam juntos durante um certo tempo, é devido aos entrelaços (*epallagê*) e aos seus ganchos (*antilêpsis*). Com efeito, certos são irregulares, outros em forma de gancho, outros convexos, outros concaves, outros tendo inúmeras diferenças.”

A descrição de Simplicio parece mais fiel por certos aspectos. Evoca as trajetórias dos átomos e que no decorrer de um movimento espacial dos átomos que devido às suas qualidades próprias, certos se combinam e se aglutinam para dar os corpos.

Queremos ressaltar que na concepção de Demócrito, não há analogia entre os processos da Natureza e os da Arte. Certo, os átomos são mero conceitos (certos fragmentos falam de *átomos-ideai*, inacessível aos sentidos), últimos constituintes da matéria. De certo modo esta concepção é bem mais perto da experiência dos artesão na Grécia de Platão do que pensar um elemento único na Terra. Pois, qualquer artesão que trabalha os metais, ouro, prata, ou alia-gem de cobre e e estanho como o Bronze sabe da diversidade das substâncias que compoem o elemento Terra.

Outro aspecto é que a hipótese dos átomos explica as noções de densidade e de massa dos corpos, do que as concepções de Platão ou Aristóteles.

Com Demócrito, não há tampouco essa divisão entre mundo sublunar e supralunar. Os astros são feitos da mesma matéria que os corpos terrestres, e se pode imaginar no espaço vazio ilimitado a formação de uma infinidade de mundos a partir de vórtices múltiplos, seguindo a observação de Diógenes (IX, 34-49).

Uma das provas deste fenômeno e talvez esta observação de Aristóteles

(Meteorológicas, 345a 25-30) que ressalta que a luz das estrelas é sua própria luz e não um reflexo.

“Anaxágoras, Demócrito e seus discípulos dizem que a Via Láctea é a Luz de certos Astros. Com efeito, o Sol, quando se move sob a Terra, não vê certos desses astros. Para aqueles que são vistos por ele, a sua luz não aparece (impedido pelos raios do Sol), mas se tratando de todos os que são interceptados pela Terra e que escapam da vista do Sol, a Luz que pertence a eles em próprio e a Via Láctea”

2.5. CONCLUSÃO

Se a concepção de Demócrito antecipa o tratamento matemático da natureza, é devido, em parte, que o movimento dos átomos é descrito através das linhas matemáticas que constituem as trajetória dos átomos. Não há como haver em Aristóteles uma distinção entre movimento retilíneo, próprio aos corpos terrestres e movimento circular característico do movimento dos astros. A matemática de Demócrito, as trajetórias dos átomos são combinações do retilíneo e circular. O espaço vazio no qual os átomos estão em movimento possibilita conceber também a ideia de inércia dos corpos. Mas precisava de uma matemática ainda mais sofisticada para chegar aos trabalhos de Arquimedes, e vários séculos mais tarde a constituição da física clássica com Copérnico, Galileu, Kepler e Newton.

RECONSTRUÇÕES DE PRÁTICAS E A SISTEMATIZAÇÃO DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DA INCO- MENSURABILIDADE

A questão da Incomensurabilidade aborda aspectos matemáticos valiosos, principalmente pela sua característica não empírica. Isso devido a estranheza que um primeiro olhar para isso pode causar em um observador não acostumado.

Nesta parte do minicurso, iremos vislumbrar a importância deste conceito para a matemática moderna, e assim problematizar para então entrar em nossa pesquisa sobre o desenvolvimento deste assunto e sua importância para a historiografia.

3.1. INTRODUÇÃO

Duas grandezas são consideradas **comensuráveis** quando possuem uma medida comum, ou seja, quando são múltiplos dessa medida comum. Podemos bem ver essa característica quando nos utilizamos do *Algoritmo de Euclides*¹, que nos traz a divisão da seguinte forma:

$$a = b \cdot q + r \tag{3.1}$$

¹Esse algoritmo não possuía essa denominação na época de Euclides, o que será discutido em 3.4

Ou seja, dadas duas grandezas a e b , supondo $a \geq b$, b cabe q vezes dentro de a , com resto r . Caso o resto r seja nulo, b é a nossa própria medida comum. Caso contrário, repetimos o algoritmo, buscando ver quantas vezes r cabe dentro de b . Esse algoritmo se repete até que o resto seja nulo.

Para números inteiros, este algoritmo sempre será finito. No entanto, o mesmo não ocorre com grandezas, onde o algoritmo pode ser finito ou não ter fim.

Justamente, quando o processo não é finito, que significa que não encontramos uma medida comum para as duas grandezas, dizemos que elas são **incomensuráveis**.

Esta característica das magnitudes contínuas tão intrigante será nosso foco nesta rápida exposição, buscando entender como teria sido a elaboração de uma teoria, além de vermos como a historiografia da matemática lida com estes desenvolvimentos.

Mas antes de nos debruçarmos sobre as discussões sobre as reconstruções da Teoria da Incomensurabilidade, vale ressaltarmos onde esta questão reside na nossa Matemática contemporânea e nas construções dos números reais. Para isso, vamos ver alguns resultados matemáticos que chegam neste aspecto.

3.1.1. SUBGRUPOS DE $(\mathbb{R}, +)$

Na visão da matemática moderna há somente medidas comensuráveis e incomensuráveis. Além disso, temos que \mathbb{R} é um corpo totalmente ordenado, possuindo a propriedade de supremo, que é o mesmo que dizer que \mathbb{R} é *arquimediano* e completo.

Definição 3.1. Dizemos que um conjunto é **Arquimediano** se para todo a e b existe um inteiro n tal que $b < a.n$

E neste aspecto, surge naturalmente, através dos subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$ a questão da incomensurabilidade.

Teorema 3.2 (Subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$). *Se um conjunto de \mathbb{R} é um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, então ou ele é da forma $m\mathbb{Z}$ ou é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração: Seja $G^+ = \{g \in G : g > 0\}$. Pela propriedade do ínfimo, temos que G^+ admite um limite inferior m . Vamos mostrar que se $m > 0$, então $G = m\mathbb{Z}$.

Vamos primeiro ver que $m \in G$. Como $m = \inf(G^+)$, podemos construir uma sequência de elementos de G^+ decrescente que tem por limite m , sendo então uma sequência de Cauchy.

Agora sejam dois elementos g e g' desta sequência que se encontram entre m e $m + s$, de forma que $0 < g' - g < s < m$. Como g e g' são elementos de G , $g' - g$ também é. Ora, $g' - g$ é inferior a m , o que é absurdo. Portanto, $m \in G$.

Para todo $g \in G$, a divisão euclidiana

$$g = m.q + r \tag{3.2}$$

irá dar $0 \leq r < m$. Logo, $r = 0$.

Nos resta agora o caso onde $m = 0$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x < y$. Assim, $y - x = c$. Vamos mostrar que entre x e y existe um elemento $g \in G$. Como $m = 0$, existe $g \in G^+$ tal que $0 < g < c$. Se dividirmos x por g , temos que

$$x = q.g + r \tag{3.3}$$

com $0 \leq r < g$.

Temos então que

$$0 < q.g \leq x = q.g + r < q.g + g < q.g + c \leq y \tag{3.4}$$

Vemos então que para um conjunto $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ ser subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ será da forma $m\mathbb{Z}$, quando a e b são **comensuráveis**. Mas quando a e b são **incomensuráveis**, será denso em \mathbb{R} (o conjunto encontra-se todo 'esmigalhado' sobre a reta).

Ou seja, por trás da questão da incomensurabilidade e da comensurabilidade fica essa propriedade dos subgrupos de \mathbb{R} .

3.2. DESENVOLVIMENTO

O problema central que nos interessa é tentar analisar o processo de constituição da teoria dos incomensuráveis. É aceito que os gregos antigos já tinham cálculos aproximativos deveras interessantes e suficientes para usar em certas construções e outros usos práticos (FOWLER, 1999).

Ao se construir a diagonal de um quadrado de lado l , sua diagonal será de $l \cdot \sqrt{2}$, ao nosso olhar moderno. Como os gregos tinham modos aproximativos, tinham como construir algo similar (uma viga, por exemplo) sem que tivessem que esbarrar na questão da exatidão do valor do que hoje chamamos $\sqrt{2}$.

Desta forma, vemos que o interesse por essa exatidão traz consigo um estudo e interesse mais aprofundando sobre a geometria: "Incomensurabilidade em si não é algo que pode ser conhecido com certeza de um modo empírico. O conhecimento sobre isso só pode ser obtido através de um processo sistemático de reflexão"(SZABÓ, 1978, p.182, tradução nossa). Assim, buscar as origens da Teoria da Incomensurabilidade pode nos permitir vislumbrar a passagem da matemática de uma prática empírica para uma ciência sistematizada e axiomatizada.

3.2.1. O QUE TEMOS

A principal obra completa que temos acesso da matemática grega são os *Elementos* de Euclides, dividida em 13 Livros e datada por volta do ano 300 AEC. Em sua obra, Euclides traz uma sistematização dos conteúdos geométricos da época, de modo axiomático e um forte encadeamento lógico dos resultados.

O principal livro que nos interessa é o Livro X, que trata justamente da questão da incomensurabilidade. Para isso, ele introduz o *Axioma de Euclides*².

Teorema 3.3 (Proposição X.1). *Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada,*

²Esse axioma não possuía essa denominação na época

uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta. (EUCLIDES, 2009, p.354)

Tendo estabelecido este axioma, é apresentada a situação onde então as magnitudes não serão comensuráveis:

Teorema 3.4 (Proposição X.2). *Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis (EUCLIDES, 2009, p.355)*

E por fim, é apresentado o *Algoritmo de Euclides*, tornando possível então estabelecer se duas magnitudes são ou não comensuráveis:

Teorema 3.5 (Proposição X.3). *Dadas duas magnitudes comensuráveis, achar a maior medida comum delas. (EUCLIDES, 2009, p.355)*

O que vemos é uma teoria já bem fundamentada e organizada, o que nos fornece poucos indícios sobre a origem dela. No entanto, podemos ver a importância dos demais livros para a teoria, como o Livro V, tratando da Teoria das Proporções³ e de diversos conjuntos de resultados dos livros VI a IX⁴, onde inclusive ele apresenta o *Algoritmo de Divisão* para números inteiros.

É acordo na historiografia que a obra de Euclides seria um compilado e uma sistematização de resultados já estudados anteriormente, sendo a maior contribuição do autor teria sido justamente esse encadeamento das construções.

Desta forma, para estudarmos o desenvolvimento da Teoria dos Incomensuráveis, devemos olhar então para antes de Euclides. Infelizmente, nenhum texto matemático deste período **Pré-Euclidiano** chegou inteiro até nós, sendo que temos alguns poucos fragmentos e citações trazidas por comentadores, muitos deles do período tardio.

³A historiografia atribui os resultados deste livro aos trabalhos de Eudoxo (teria vivido no começo do século IV AEC)

⁴Resultados atribuídos aos estudos pitagóricos

No entanto, as obras de Platão e Aristóteles chegaram quase que em sua totalidade para nós, sendo de um período imediatamente anterior a Euclides, e apresentando diversos elementos da matemática da época, obras amplamente comentadas ao decorrer dos séculos, além de algumas outras obras de outros filósofos. Mas temos que ter uma certa atenção ao buscarmos estes elementos nestes tratados específicos: em geral, filósofos, como Platão e Aristóteles não são matemáticos, utilizando-se dela com uma função específica em suas obras, não em sua forma e estudo intrínseca.

Outra questão que nos faz tomar certas precauções ao analisar estes materiais é o fato de que suas obras não são voltadas para o público matemático, mas um público mais amplo. Ou seja, a matemática presente nelas não se trata de uma matemática de ponta, refletindo não o que há de mais novo na pesquisa, mas sim um conteúdo já amplamente divulgado e popularizado, fazendo com que a matemática ajude a 'ilustrar' certas passagens para seus leitores.

Ao nos voltarmos ao que os Comentadores dizem sobre esta questão, temos três que nos interessam em especial, todos do período da antiguidade tardia: Jâmblico (século III), Pappus (século IV), Proclus (século V).

Jâmblico nos traz a questão espalhada em diversas lendas, envolvendo a construção do dodecaedro, sobre a carreira de Hipaso e sobre a morte de algum pobre pitagórico que foi jogado ao mar, atribuindo então à Escola Pitagórica a descoberta da incomensurabilidade.

Pappus também atribui os resultados à Escola Pitagórica, argumentando através do termo primitivo utilizado para *irracional* ser **árretos**, que teria o sentido de ***aquilo que não deve ser dito***, acompanhando que quem teve esta descoberta teria sido castigado por ir contra a suposta doutrina de ordem pitagórica.

Por fim, Proclus atribui em uma passagem rápida a descoberta ao próprio Pitágoras, sem dar detalhes sobre.

Notemos que estes três comentadores que se ocuparam a buscar, de alguma forma, narrar sobre a origem da Teoria dos Incomensuráveis, estão distantes da obra de Euclides ao menos 600 anos, o que faz perder ainda mais precisão sobre os fatos narrados de maneira ampla.

Vendo todos estes elementos limitantes de nossa busca, vemos que não

é possível traçar de maneira exata como foi o desenvolvimento da Teoria dos Incomensuráveis. Por conta disso, e da importância que a historiografia atribui a este estudo, o nosso objeto de trabalho será então buscar restituir, mas de maneira fundamentada, como veremos a seguir.

3.3. RECONSTRUÇÕES

Nesta seção, iremos trabalhar com algumas das reconstruções feitas para restituir o desenvolvimento da Teoria da Incomensurabilidade pela historiografia específica.

Antes de as vermos, vale ressaltar que este trabalho de reconstrução exige uma fundamentação ampla, com diversos aportes, como filosóficos, históricos e matemáticos, para sustentar e dar representatividade para a tese, buscando elementos que a comprovem e que a façam ter validade. Principalmente a partir da década de 1970, há uma preocupação muito grande para que ao restituir práticas e analisar conteúdos da matemática grega, especificamente, não se caia em anacronismos, preservando os elementos intrínsecos a prática matemática da época por estes povos, como defendido por UNUGURU (1975).

Veremos em específico três vertentes de reconstituições sobre o desenvolvimento da Teoria dos Incomensuráveis: As centradas na prova por absurdo trazida por Aristóteles; outra envolvendo a Teoria Musical Grega; e por fim, a mais aceita atualmente, centrada no processo da *Antifairese*.

3.3.1. PROVA POR ABSURDO

ARISTÓTELES (1962) nos traz, através dos *Primeiros analíticos*, a seguinte passagem que mostraria que a incomensurabilidade teria sido descoberta por estudos de relações entre o lado de um quadrado e sua diagonal:

E.g. a prova que a diagonal de um quadrado é incomensurável com os lados mostrando que se é assumido que são comensuráveis, números ímpares se tornam iguais aos pares (I.23, 41A29)

Em geral, historiadores analisam esta citação como uma prova por absurdo, muito semelhante a prova usual que utilizamos para mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional:

- Seja um quadrado ABCD, com lado AB e diagonal AC. Suponhamos por absurdo que AC é comensurável com AB.

Então, seja $\alpha : \beta$ a razão entre a diagonal e o lado, expresso nos menores inteiros possíveis. Então $\alpha > \beta$ e portanto $\alpha > 1$.

Agora, $AC^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$, mas $AC^2 = 2AB^2$ (pela proposição I.47 dos *Elementos*).

Então $\alpha^2 = 2\beta^2$. Portanto, α^2 é par, logo α também é par.

Como $\alpha : \beta$ está em *menores termos*, β deve ser ímpar.

Mas como α é par, podemos escrevê-lo como $\alpha = 2\gamma$.

Assim, $\alpha^2 = 4\gamma^2 = 2\beta^2 \rightarrow \beta^2 = 2\gamma^2 \rightarrow \beta^2$ e β são pares (**absurdo!**)

Portanto, AB e AC são incomensuráveis.

Esta visão e restituição encontrou muitos adeptos no final do século XIX e início do XX, com nomes como Thomas Heath, Tannery e Zeuller.

Tannery ainda, em especial, atribui muita importância a certos personagens no desenvolvimento da teoria dos incomensuráveis como um todo, como Teodoro, Teeteto e Eudoxo, utilizando como principal embasamento o diálogo *Teeteto* de Platão. Este diálogo ainda é muito utilizado para orientar sobre as descobertas matemáticas atribuídas a Teodoro e Teeteto, mas ainda é um diálogo que se deve tomar cuidados ao analisar, principalmente pela tradução ambígua do termo *dynamis*.

Esta reconstrução hoje não é amplamente aceita, sendo que, em geral, a historiografia não se conforma com o resultado geométrico limitado.

3.3.2. TEORIA MUSICAL

Proposta por SZABÓ (1978), que se baseou na importância da teoria das proporções para a dos incomensuráveis. Dessa forma, buscou traçar então uma

restituição dos avanços dos estudos sobre proporções, tendo a hipótese de que de alguma forma, as teorias caminharam e progrediram em conjunto.

A partir de estudos pitagóricos sobre Teoria Musical, envolvendo razão entre intervalos (quartas, quintas e oitavas, na nossa noção atual), estes resultados teriam migrado e encorpado uma teoria das proporções, com a introdução do *measuring rod*, trazendo o conceito de **logos**.

Então a teoria musical das proporções foi aplicada e estendida para a aritmética. A teoria então teria sido aplicada na geometria, sendo imediata a transição para a teoria da incomensurabilidade.

Szabó ainda aponta que a incomensurabilidade quadrática (a teoria geral, não apenas o caso específico), deve ter sido conhecido antes de Arquitas (*fl.* 400 AEC) e de Hipócrates de Quios (IV AEC).

Esta reconstrução de Szabó não teve uma grande aceitação dentro da historiografia, mesmo que bem restituída, no ponto de vista da historiografia, mas indica a variedade de elementos utilizados para buscar restituir uma prática, sendo que ele se utiliza amplamente de uma análise filológica em sua obra.

3.4. ANTIFAIRESE

Antifairese seria um processo centrado no tão discutido *Algoritmo de Euclides*, realizando divisões euclidianas entre magnitudes, buscando encontrar um segmento que meça ambos ao mesmo tempo. Seria usado também para fornecer aproximações para processos antifairéticos longos, que poderiam ter fim ou não. Vem da palavra grega *anthyphairesis*, que teria o sentido de *subtrações recíprocas*, além de haver o uso do verbo *anthyphaireîn* nos *Elementos*.

No entanto, não há nenhum relato antigo que nos forneça exatamente o que seria este processo. Por se tratar de uma prática que possui altos indícios de estar ligado à prática da análise de comensurabilidade e incomensurabilidade de magnitudes, torna-se um elemento central na busca de uma reconstrução para a Teoria da Incomensurabilidade.

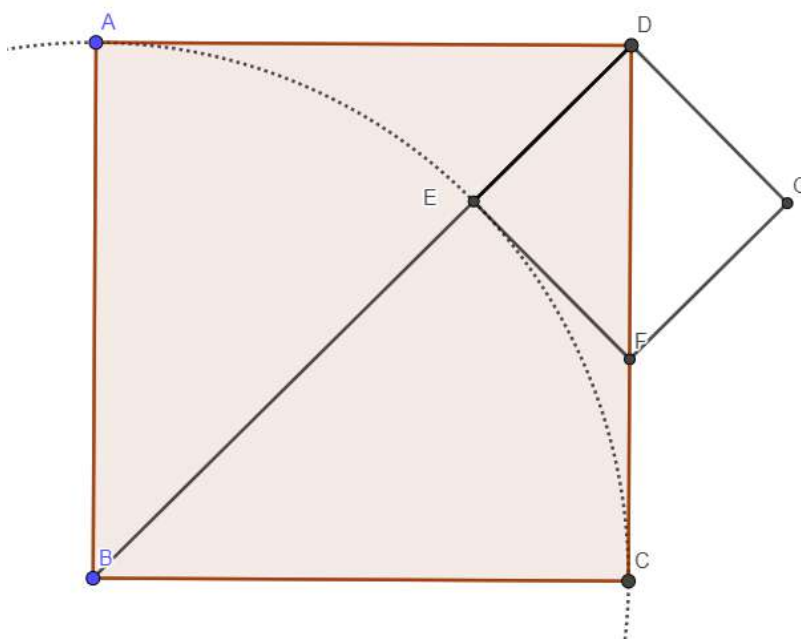
Ao menos desde os povos de língua árabe (VITRAC, 2002) e escolásticos medievais (KNORR, 1975) de restituir esta prática, a partir da hipótese que

era centrado no *Algoritmo de Divisão de Euclides*, para estudar aproximações e a questão de comensurabilidade e incomensurabilidade, além do estudo do próprio conteúdo dos *Elementos* de Euclides.

Voltou a se buscar sua reconstituição com autores contemporâneos como K. von Fritz, S. Heller e O. Becker, que se oporam a demonstração trazida por aristóteles (por absurdo), apresentando este procedimento como central para o estudo.

A *antifairese* seguiria o mesmo propósito do *Algoritmo de divisão*, onde quando o algoritmo fosse finito, as magnitudes comparadas seriam comensuráveis e, caso contrário, seriam incomensuráveis.

Os principais trabalhos que consolidaram a visão atual do processo são KNORR (1975) e FOWLER (1999). Consistiria no seguinte passo a passo (no caso da incomensurabilidade):



Seja ABCD um quadrado. Vamos aplicar a *Antifairese* para buscarmos uma medida comum entre o lado e a diagonal desse nosso quadrado.

Vamos sempre subtrair a menor magnitude da maior. Neste primeiro caso, tiramos BC de BD, obtendo o resto ED.

Construímos então um quadrado DEFG a partir do lado ED. Agora devemos tirar ED de BC.

Vemos que ED é igual a CF. Desta forma, quando retiramos ED de BC equivale ao segmento DF, diagonal de nosso quadrado DEFG.

Devemos agora retirar ED de DF. Mas isso significa realizar o processo antifairético entre o lado e a diagonal de um quadrado, exatamente o nosso problema inicial.

Dessa forma, é fácil ver que aplicar a *Antifairese* entre o lado e a diagonal de um quadrado resultará em um processo infinito, fornecendo assim que não chegaremos a uma medida comum entre as duas grandezas, ou seja, que s ao incomensuráveis.

A aplicação da *Antifairese* em magnitudes teria possibilitado o estudo que fez com que matemáticos gregos Pré-Euclidianos constituíssem uma Teoria da Incomensurabilidade, sendo assim um longo processo de práticas matemáticas e sistematizações de elementos matemáticos.

No entanto, temos que tomar o cuidado de ver que estamos lidando com uma reconstrução para reconstruir, ou seja, é uma base que deve estar muito bem fundamentada para que não torne as teses centradas nela inválidas ou insossa. Durante nossos estudos, vemos que há uma grande dificuldade para firmar com mais certidão os fundamentos da *Antifairese*, sendo que deve ser uma prática tomada com extrema cautela pelos motivos anteriores elencados.

3.5. CONSIDERAÇÕES

A questão da incomensurabilidade suscita a ainda famosa *Crise dos Incomensuráveis*, onde a descoberta de medidas incomensuráveis teria desencadeado uma crise de fundamentos na Matemática, que só teria sido plenamente atravessada com os trabalhos de Dedekind no século XIX.

No entanto, não há relato algum sobre alguma devida crise, apenas relatos sobre a punição de algum pitagórico por ter descoberto e/ou vazado a informação da existência de incomensuráveis.

Esta tese é trazida por historiadores da matemática do fim do século XIX, que projetavam a crise de fundamentos que viviam, com as reformulações de Hilbert e Cantor, na Grécia Antiga, sendo então considerado uma ação anacrônica que diz mais sobre eles do que sobre a Grécia.

Esta questão é amplamente discutida em (GONÇALVES *et* POSSANI, 2010), sendo que sugerimos a leitura para maior aprofundamento na discussão.

Um outro desdobramento deste estudo é a análise da concepção e lido com o infinito no período Pré-Euclidiano, sendo que ao afirmar que um algoritmo não possui fim, implica uma certeza que nada ocorrerá mesmo com um número suficientemente grande de processos, e assim, uma concepção do infinito.

O prosseguimento deste estudo apresentado nesta parte do minicurso visa analisar justamente estes aspectos do infinito, principalmente através da obra *Física* de Aristóteles.

Desta forma, vemos quantos elementos emergem do estudo histórico da incomensurabilidade, justificando o interesse de diversos historiadores em cima deste tema, e também mostrando a importância de revisarmos e confrontarmos correntes de pensamento que elaboraram suas próprias reconstruções, sendo possível obter novos resultados e derrubar certas hipóteses.

EUCLIDES MUITO ALÉM DA OBRA *Os Elementos* - O RESGATE DE PAPPUS SETE SÉCULOS DEPOIS

Pappus, integrante da Era de Prata da matemática grega que se deu em torno de 250 a 350 EC, classificado como matemático, astrônomo, geógrafo. Sabe-se que viveu grande parte de sua vida em Alexandria, pelos títulos de seus livros que sobreviveram.

PAPPOY ALECSANDREŌS SYNAGŌGĒS G.

Periécsei dè problēmata geōmetrikà epípedá te kai stereá

A citação anterior mostra o início do prefácio do Livro 3, cuja tradução é: "Pappus Alexandrino Sinagoga" e, abaixo, em letras menores, contém problemas de geometria plana e sólida.

A obra principal de Pappus, na qual esse trabalho irá se debruçar, chama-se Coleção Matemática ou simplesmente Coleção. Em grego, denomina-se *synagōgē*, composta de 'syn' (= com, junto) e 'agō' (= conduta, educação) e, em várias línguas, a palavra sinagoga está ligada ao conceito de escola, assembleia, reunião. Essa é a ideia da obra de Pappus que reúne vários livros abrangendo grande parte dos assuntos tratados na época, muitas vezes sendo a única fonte para grande parte das conquistas e descobertas dos seus antecessores. Porém, outras obras merecem destaque: um comentário em grego do Almagesto de Ptolomeu, um comentário do Livro 10 dos Elementos de Euclides em árabe, e, seu trabalho de geografia mais famoso em armênio, denominado

Descrição do Mundo. O único vestígio de sua vida particular é a existência de um possível filho, ou alguém que tenha um vínculo fraternal, para o qual ele dedica os livros sete e oito. É no Livro 7 que a diferença entre problema e teorema citada no Prefácio do Livro 3, é tratada de forma mais detalhada. Problema designa um inquérito em que é proposto a construir ou fazer algo, enquanto teorema designa um inquérito no qual uma sequência de implicações necessárias de certas hipóteses é investigada. Um problema pode ter ou não solução à ser possível ou impossível à e, considerando possível, quando, como e de quantas maneiras ele é possível. Admiravelmente, Pappus já trazia essa classificação para problemas de investigação.

4.1. INTRODUÇÃO

A hegemonia da civilização mediterrânea na Matemática durou nove séculos, começando com Pitágoras, passando por nomes como Arquimedes, Apolônio, Teon, Ptolomeu e tantos outros, e finalizando com Pappus, sendo conhecido como o último geômetra grego. O mais brilhante e reconhecido é Euclides de Alexandria, mencionado na maioria dos trabalhos da antiguidade e tendo sua obra mais famosa conhecida como *Os Elementos*, considerada a bíblia da matemática até a história recente.

Pappus, sete séculos depois de Euclides produz a obra conhecida como Coleção Matemática ou simplesmente Coleção (*Synagōgē*). Tal trabalho que, originalmente era composta por 12 livros, sobrevivendo 6,5 livros, inclui o trabalho de 51 estudiosos da antiguidade, incluindo diversos temas, muito além da Geometria.

O comentário de Pappus permite quebrar o paradigma que Euclides tenha sido apenas um geômetra compilador e organizador de obras pré-euclidianas. Ele cita com rara admiração presente nos prefácios da Coleção diversas obras euclidianas e o trata como iniciador de tratados matemáticos sobre vários assuntos, muito além da Geometria.

A autora visa mostrar as obras de Euclides mencionadas na Coleção de Pappus, seus conteúdos, assuntos abordados, e, uma certa relação entre tais tratados organizados por Pappus. Na geometria, além do famoso Elemen-

tos, encontra-se os trabalhos Dados, Divisão de Figuras, Porismas, Lugares de Superfície e Livro das Falácias, sendo que os três últimos citados não sobreviveram e Pappus é o grande responsável em trazer informações de tais obras para o tempo atual. Sobre astronomia, Euclides escreveu Fenômenos; sobre ótica escreveu óptica e Catóptrica; sobre música: Elementos de música, e ainda tudo que produz sobre mecânica.

O trabalho traz também a importância não negada da obra os Elementos que está presente nos demais tratados euclidianos, pelo menos quando Pappus cita cada um deles. Os Elementos é ainda considerado, por muitos matemáticos, como o melhor livro texto jamais produzido. Mais de mil edições foram produzidas desde a sua primeira publicação em 1482.

4.2. DADOS

Essa é a das únicas obras euclidianas que possui apenas geometria, sobrevivente em grego e é diretamente ligada aos seis primeiros livros dos Elementos. Contém um total de 94 proposições que tratam de grandezas em geral, triângulos, áreas, paralelogramos, retas, círculos. Depois obviamente dos Elementos é a obra de Euclides mais citada por Pappus à 121 vezes.

Um exemplo da relação entre as duas obras euclidianas é a proposição 108 do sétimo livro da Coleção de Pappus: O círculo da ABG dada posição e dois pontos D, E, traçar, a partir dos pontos D, E, uma linha DE, e fazer a linha BG paralela a linha DE. Esse é o problema 8 do tratado Contratos de Apolônio. Para essa construção Pappus cita as proposições 25, 26, 27, 57, 91 e 93 do livro Dados e as proposições 21, 32 e 35 no Livro III dos Elementos.

4.3. PORISMAS

(MUGLER, 1958) designa porisma (*pórisma* como um corolário, um teorema auxiliar. Para ele, porisma é uma proposição adicional que tem como resultado uma consequência que servirá para demonstrar algum teorema. Em o Tratado de Esfera e Cilindro, Arquimedes denomina de porisma a 38^a proposição do Livro 1. (MUGLER, 1958) ainda traz porismos (*porismós*) como

uma investigação ou uma declaração de um fato geométrico dentro de uma proposição.

Uma outra possível ideia do que seja porisma dada por Pappus como nome de certas proposições para encontrar fatos geométricos particulares. Já Proclus, entende como fatos geométricos procurados, cuja pesquisa requer um tipo de investigação que não é uma construção isolada ou um simples teorema.

Pappus em seu sétimo livro, cita, demonstra e diagrama os trinta e oito lemas dos Porismas, compondo as proposições 127 a 164, que serviram, originalmente, para esclarecer os teoremas. Ele afirma que essa obra de Euclides continha 171 teoremas organizados em três livros, incluindo alguma relação com as cônicas e com o próprio Teorema de Pappus. Identifica-os como algo entre Problema (de construção) e Teorema (de demonstração), afirmando que não há nada a ser construído ou demonstrado, mas sim a ser encontrado, algo próximo da definição de lugar geométrico atual:

O teorema é uma proposta feita para uma demonstração do que está sendo proposto, o problema é uma proposta feita para a construção do que está sendo proposto e o porisma é uma proposta feita em aquisição do que é proposto (Prefácio do livro VII da Coleção Matemática, tradução pela autora)

Um exemplo de porisma é a proposição 127, do Livro VII: Seja a figura $ABGDEZ\bar{E}$ de tal forma que AD está para DG assim como AZ está para $Z\bar{E}$. Considere os pontos TH e K , intersecções entre BG e $E\bar{E}$ e entre EZ e BD , respectivamente. Afirma-se que $TH-K$ é paralelo a AG .

O exemplo mais famoso de porisma é o Teorema de Pappus, que bem mais tarde motivou o estudo de Geometria Projetiva: Sejam as retas coplanares distintas com dois conjuntos de três pontos distintos A, C, E e B, D, F . Então os pontos de intersecção, $AB \cap DE = M$, $BC \cap EF = N$ e $CD \cap AF = P$, são colineares.

4.4. FENÔMENOS

Pappus não atribuiu seu nome a nenhum progresso significativo astronomia antiga, mas ele havia escrito um comentário sobre o *Almagesto* de Ptolomeu, e é no sexto livro de sua *Coleção* que ele reúne pequenos comentários sobre algumas obras pertencentes ao que a Escola de Alexandria tinha chamado de *Pequena Astronomia*.

Essa obra euclidiana sobrevivente composta por dezoito proposições, várias delas subdivididas em até quatro casos, foi amplamente citada por Pappus, na sua *Coleção*, principalmente no sexto livro referente à astronomia. Para Pappus: “No segundo teorema dos Fenômenos de Euclides, temos também que encobriu na demonstração quantas vezes o zodíaco estará em ângulo reto com o horizonte durante uma única revolução, quando o polo do horizonte está localizado entre os trópicos, ou em um deles. é por esta razão que vamos demonstrar que, se o polo do horizonte está localizado em um dos trópicos, o zodíaco estará apenas uma vez perpendicular ao horizonte durante uma revolução, e que, se o polo está localizado entre os trópicos, o zodíaco será duas vezes perpendicular.” Por isso, ele acrescentou duas proposições (55 e 56) no livro 6. A proposição 2 diz que: Em uma revolução do cosmos, o círculo através dos polos da esfera será perpendicular ao horizonte duas vezes; e a elipse será perpendicular ao meridiano duas vezes, mas nunca ao horizonte, quando o zênite está entre o trópico de verão e o polo visível. Nas duas figuras a seguir, a representação do zênite e o diagrama referente a segunda proposição da obra *Fenômenos*.

4.5. ÓPTICA

A óptica, que é atribuída a Euclides por Proclus, também é atestada por Pappus, que o inclui, de maneira um tanto curiosa, num conjunto de obras que ele denomina *A pequena astronomia*. Representa um tratado elementar em perspectiva, o primeiro trabalho grego sobre o assunto e permaneceu assim até Ptolomeu. Pappus cita quinze vezes, sendo que doze proposições de autoria própria complementam as de Euclides.

A Proposição 51 do Livro VI de Pappus afirma que: Tendo um círculo, se elevarmos de seu centro uma linha reta que não faz ângulos retos com o plano do círculo, nem igual ao raio do círculo, e se o olho for colocado no final da reta assim elevada, os diâmetros serão vistos desiguais. Enquanto a Proposição 36 do livro euclidiano diz que: Quando uma linha é puxada para cima do centro de um círculo em ângulos retos para a superfície do círculo, e o olho é colocado nessa linha, em seguida, os diâmetros desenhados neste círculo são vistos como iguais. Nas figuras abaixo, à esquerda da obra de Pappus e à direita, de Euclides.

4.6. CÔNICAS

A obra de Apolônio homônima é composta de oito livros, sendo que por Pappus sabe-se que, dentre esses, quatro são de Euclides e, antes dele, Aristeu já tinha desenvolvido tal tema. Pappus exonera Euclides da culpa da não demonstração de algumas proposições, já que até a época, não se tinha tantas ferramentas para fazê-lo.

O enunciado original do problema de Pappus pode ter vindo do tempo de Euclides, em conexão com o trabalho de Apolônio. Nessa época, o nome do problema é o lugar a três ou quatro retas, que foi resolvido para certos casos especiais por Euclides e, de forma geral, por Apolônio e que ambos chegaram à conclusão que era uma cônica. Pappus resolveu o mesmo problema para cinco e seis retas, mas hesitou ir adiante já que a solução para seis retas já era um sólido e não há nada a mais que três dimensões.

- Para três ou quatro retas, a solução é uma cônica (Euclides e Apolônio).
- Para cinco ou seis retas, a solução é uma cúbica (Pappus).
- Para sete ou oito retas, a solução é uma quádrlica (Descartes).

Problema de Pappus: Dadas quatro retas, encontrar o lugar geométrico do ponto P tal que o produto das distâncias de P a duas delas é proporcional ao produto das distâncias às outras duas, cuja solução é uma cônica.

4.7. DIVISÃO DE FIGURAS

Essa obra traz a divisão de triângulos e quadriláteros em figuras de áreas proporcionais. Das 36 proposições desse livro, 6 são auxiliares e exatamente as escolhidas por Pappus mencionar em sua obra. Pappus enuncia a terceira proposição do livro VII assim:

Deixe a linha AB ser para BG certo em uma razão maior do que AE ser para EZ, eu afirmo que, por composição, AF também está para FB em uma razão maior do que AZ é para ZE. (tradução da autora)

Esse é exatamente a proposição 23 da obra de Euclides: Dadas quaisquer duas linhas retas e nestas linhas os pontos A, B e D, E e deixar que a razão de AB para BC seja maior que a razão de DE para EZ, diz-se que a razão de AC para CB será maior do que a razão de DZ para ZE.

4.8. LUGARES DE SUPERFÍCIE

Pappus e Proclus fazem observações a essa obra euclidiana que não sobreviveu. Pappus cita no livro IV quando trata de quadratriz e, no livro VII, incluindo-a no que se denomina Tesouro da Análise.

Parece que os dois livros dessa obra incluíam além de cones, cilindros e talvez esferas, ainda parabolóide e hiperbolóide, já antecipando o trabalho de Arquimedes Conóides e Esferóides. Pappus afirma que os antigos tinham estudado muito outras curvas de graus mais altos como determinação de intersecções de cones, cilindros e esferas.

No Livro VII da Coleção, as proposições 235 a 238 são utilizadas por Pappus para se referir as quatro primeiras proposições de um dos dois livros que compõem a obra euclidiana. Proposição 235: Se alguém tem uma linha AB e uma linha de "GD" justaposição, e se tivermos a razão do retângulo incluída sob as linhas "AD", "AB" ao quadrado para a linha "DG", o ponto "G" pertencerá a uma linha cônica. Se agora a linha AB parar a ser dada posição, se os pontos

A, B deixam de ser dados e estão nas linhas dados de posição AE, EB, ponto "G" sendo elevado estará em uma determinada superfície de posição; e isso foi demonstrado.

4.9. ELEMENTOS DE MÚSICA

Proclus atribui a Euclides uma obra com esse título, o que mais tarde seria endossado no prefácio da edição de Dados que sobreviveu. Pouco sabe ao certo o que realmente foi de Euclides. Pappus apenas cita esse trabalho junto a Harmônica de Ptolomeu, no Livro VI da Coleção.

4.10. CATÓPTRICA

Essa obra parece ser uma compilação de trabalhos anteriores. Proclus e Pappus atribuíram a Euclides, mas não negam a grande influência de Theon de Alexandria. Pappus menciona essa obra apenas cinco vezes na Coleção, no livro VI, com outras obras da Escola da Alexandria, juntamente com Dados, óptica e Fenômenos. Já no prefácio é citada acompanhando Almagesto de Ptolomeu, Esférica de Teodósio e as três de Euclides já faladas. Na proposição 41, do Livro VI da Coleção, na qual Pappus menciona mais visivelmente tal obra.

A proposição 41 mostra uma noção de perspectiva em espelhos: Se uma linha saindo do olho para o centro do círculo não é perpendicular ao plano deste círculo, o diâmetro do círculo irá parecer desigual, ou menor ou maior.

4.11. LIVRO DAS FALÁCIAS E COMENTÁRIOS SOBRE MECÂNICA

Pappus começa o Livro VIII definindo centro de gravidade e afirmando que mecânica tem muita Matemática. Cita muito Theon sobre a descrição dos cinco poderes mecânicos: a roda e o eixo, a alavanca, a polia, a cunha e os parafusos. é no Livro VIII, sobre a mecânica dos corpos, que Aristóteles é mais citado.

Pappus critica por alguns equívocos sobre o movimento dos corpos atribuídos a ele. Ainda nesse livro, Pappus proclama o mérito do estudo das alavancas ao filósofo. A seguir uma das figuras que compõe o estudo de mecânica da Coleção Matemática.

Euclides não chegou a escrever uma obra específica sobre o assunto, porém vários fragmentos são atribuídos a ele. Pappus cita várias obras euclidianas no livro VIII, como Dados e Elementos, para demonstrar algumas proposições. Como por exemplo, as proposições 22 e 23.

Na proposição 22, Pappus afirma que em dois círculos diferentes as circunferências são proporcionais aos seus diâmetros e, utiliza esse fato, para demonstrar que os números de dentes nas engrenagens devem levar essa proporção.

O Livro das Falácias, apesar de Pappus não ter mencionado e não ter sobrevivido, há evidências de ter existido, já que Proclus, um século mais tarde, o menciona como um livro que enumera teoremas que combinam o verdadeiro com o falso, refutando o erro com ilustrações práticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARCHIMALD, R. C. **Euclid's Book on Division of Figures**. Springer. Zurique. 1988.
- ARISTÓTELES. **Categories. On interpretation. Prior Analytics**. Trad. H. P. Cooke Hugh Tredennick. Cambridge: Harvard University Press. 1962.
- ARISTÓTELES, *Les Meteorologiques*, Vrin, 1976.
- ARISTOTELES, *Metafísica*, Eds. Loyola, 2002.
- ARISTÓTELES. **Metaphysics**, vol.1. Trad. Hugh Tredennick. Harvard University Press. Cambridge, MA, 1933.
- ARISTÓTELES. **On the Heavens**. BiblioBazaar, LLC, 2009.
- ARISTOTELES, *Physique*, Belles Lettres, 1990.
- BERGGREN, J. L. THOMAS, R. S. D. **Euclid's Phaenomena: A translation and Study of a Hellenistic Treatise in Spherical Astronomy**. American Mathematical Society, Providence. 2006
- BURNYEAT, M. *et al.* **The Theaetetus of Plato**. Hackett Publishing. 1990.
- CHAMBERS, M. *et al.* **Athenaion Politeia**. Walter de Gruyter GmbH Co. KG. 2016.
- COMMANDINO, F. **Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones**. Roma, 1589.

- CORNFORD, F. M. **From religion to philosophy**: A study in the origins of western speculation. Courier Corporation. 2004.
- DIELS H., do *Die Fragente der Vorsokratiker*, Berlim,1903.
- DIÓGENES LAERCIO. **Vida de los filósofos más ilustres**, vol.1. Editorial Verbum. 2019.
- DIÔGENES LAÊRTIOS, 1987 *Vidas e doutrinas dos filósofos ilustres*, 2ª ed.,UNB.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. Unesp. 2009.
- EURÍPEDES. **Hipólito**. Trad. Trajano Vieira. Editora 34. 2015.
- FOWLER, D. **The mathematics of Plato's Academy**. Oxford: Clarendon Press. 1999.
- GILLISPIE, C. C. **Dictionary of Scientific Biography**. Princeton University, Editor Scriber. Nova Iorque. 1981.
- GONCALVES, C. H. B., POSSANI, C. **Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga**. Matemática Universitária, vol.47, p.16-24. 2010
- HEATH, T. L. **A History of Greek Mathematics**, 2 volumes. Oxford: Clarendon Press. 2018 [1921].
- HERÓDOTO. **História**. Trad. J. B. Broca. Editora Nova Fronteira. 2018.
- HULTSCH, F. O. **Collectionis**. Berolini. 1878.
- HUNTER, R. L. **Plato's Symposium**. Oxford University Press on demand. 2004.
- JOHNSTONE, C. L. **Listening to the logos**: Speech and the coming of wisdom in ancient Greece. Univ. of South Carolina Press. 2012.
- KENNEY, E. J., DENYER, N., EASTERLING, PE., HARDIE, P., HUNTER, R. **Plato: Protagoras**. Cambridge University Press. 2008.

- KHEIRANDISK, E. **The Arabic Version of Euclid's Optics.**
- KNORR, W.R. **The Evolution of the Euclidean Elements.** D. Reinel Publishing Company. 1975.
- KNORR, W.R. Infinity and continuity: The interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity. *In:* Kretzmann, N. (eds.) **Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought**, p.122-145. Ithaca, NY: Cornell University Press. 1982.
- KNORR, W. R. **Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry.** Ed. Birkhauser. Boston. 1989.
- LAKS A., 2006, *Introduction à la Philosophie présocratique*, PUF.
- LEÃO, D., BRANDÃO, J. L. **Plutarco - Vidas paralelas: Sólon e Públicola.** 2012.
- LEÃO, D. **O livro I de Diógenes Laércio: a tradição dos sete sábios e a caracterização da figura dos *sophos*.** 2013.
- LLOYD, G. E. R. **Early Greek Science: Thales to Aristotle.** Random House. 2012.
- MATTIOLI, M. L., MALTA, A., DUARTE, A. S. **Esopo - Fábulas seguidas do romance de Esopo.** Editora 34, São Paulo, 2017.
- MOREL P-M., 1996, *Démocrite et la recherche des Causes*, Klincksieck.
- MUGLER, C. **Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs.** Paris. 1958.
- NETZ, R. **The Shaping of Deduction in Greek Mathematics.** Cambridge University Press. Nova Iorque. 2004.
- PLATÃO, Timeu, CECH, 2010
- POPPER, K. **Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge.** Routledge. 2014.
- ROQUE, T. **História da Matemática.** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Ed. Zahar. 2012.

- SALEM J. 2002, Démocrite, Vrin.
- SZABÓ, A. Greek dialectic and Euclid's Axiomatics. *In*: LAKATOS, I. (eds.) **Problems in the philosophy of Mathematics**. Proceedings of the international colloquium in the philosophy of science. Vol.1, p.1-8, Amsterdam: North-Holland. 1967.
- SZABÓ, A. **The beginnings of Greek Mathematics**. D. Reidel Publishing Company. 1978.
- TAISBAK, C. M. **Euclid's Data - The Importance of Being Given**. Museum Tusulanum Press. Copenhagen. 2003.
- TAYLOR, A. **Plato - Timaeus and Critias**. Routledge. 2013.
- THOMAS, I. (eds.) **Selections Illustrating the History of Greek Mathematics**. Harvard University Press. Massachusetts. 1941.
- UNGURU, S. **On the need to rewrite the history of Greek mathematics**. Arch. Rational Mech. vol.15, p.67-114. 1975.
- VERDENIUS, W. J. **Iambi et elegi graeci ante alexandrum cantati**, vol.2. 1976.
- VERNANT, J.-P. **As origens do pensamento grego**. Difusão Europeia do Livro. 1972.
- VITRAC, B. 'Umar al Khayyam et l'anthypérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide. Fahrang. Quarterly Journal of Humanities Cultural Studies. vol.14, p.137-192. 2002.
- WEST, M. L. Hesiod - Theogony. *In*: **I Zum fröhgrichischen Epos**. p.259-272. De Gruyter. 2011.
- WISMANN H., 2010, *Les avatars du vide, Démocrite et les fondements de l'atomisme*, Hermann.
- XAVIER, G. G., LÁKS, A. **Introdução à "Filosofia Pré-Socrática"**. Trad. M. C. D. Peixoto. São Paulo: Paulus. 2013.

- ZHMUD, L. **Die Beziehungen zwischen philosophie und wissenschaft in der antike.** Sudhoffs Archiv, p.1-13. 1994.



MATERIAIS DIDÁTICOS E JOGOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA
FERREIRA E RAFAEL LEITE

JUNHO DE 2022

*Dedicamos este trabalho a professora
Jeane do Socorro Costa da Silva,
por sua paciência e dedicação.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Os Materiais Didáticos e Jogos Para As Aulas de Matemática

- 1.1 Polias de Arquimedes
- 1.2 Técnica Japonesa de Multiplicação
- 1.3 Quadrado Mágico
- 1.4 Geoplano
- 1.5 Cartelas Mágicas
- 1.6 Teorema de Pitágoras
- 1.7 Torre de Hanói

2 Considerações Finais e Comentários

Referências

PREFÁCIO

O ensino da matemática na maioria das escolas acontece de forma tradicional, sendo o conteúdo exposto pelo professor e reproduzido pelo aluno em seu caderno. D'Ambrósio (2007) afirma que é comum encontrarmos o desinteresse pela Matemática por parte dos estudantes e, isso se deve em grande parte pela maneira como ela é trabalhada em sala de aula. Os docentes encontram dificuldades em disseminar seus conhecimentos, em muitas vezes devido a empecilhos que são estabelecidos no ambiente escolar e/ou até mesmo que se formaram durante sua trajetória profissional. A análise desse cenário mostra a dificuldade dos professores em planejar e colocar em prática uma aula fora do ensino tradicional para seus alunos, e assim, tornar os alunos mais interessados e proativos dentro de sala. O objetivo deste minicurso de utilizar material concreto é possibilitar que os estudantes estabeleçam uma relação entre a manipulação desses materiais e a abstração dos conceitos do conteúdo matemático trabalhado, como afirma Lorenzato (2006, p. 61), "o material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico". Sendo assim é de suma importância elaborar atividades que trabalhem com o auxílio dos materiais concretos para facilitar a aprendizagem, sendo possível proporcionar ao aluno uma melhor compreensão e uma construção significativa do conteúdo. Justificamos este trabalho com os benefícios de se utilizar o recurso do material didático e os jogos nas aulas de matemática, Freire (1996, p. 24), enfatiza que "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua construção", o uso de materiais concretos, possibilita essa construção de conhecimento, pois, segundo Lorenzato (2006, p. 22), "para chegar ao abs-

vi CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA FERREIRA E RAFAEL LEITE

trato, é preciso partir do concreto", palavras auxiliam, mas sozinhas não são suficientes para ensinar, "o fazer é mais forte que o ver ou ouvir". Para Passos (2006, p. 78), os materiais concretos "devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído". Desse modo, o uso do material concreto torna-se uma ferramenta essencial pronta a atender à necessidade de elaborar pedagogicamente aulas com maior aproveitamento e entretenimento, ajudando o aluno a analisar, compreender e elaborar situações que possam resolver determinados problemas que sejam propostos pelo professor.

Para Borin (2007), a introdução de jogos nas aulas possibilita diminuir bloqueios por alunos que temem a matemática e sentem-se incapazes de aprender, dentro da situação do jogo, ao mesmo tempo que os alunos falam de matemática, melhoram seus desempenhos e demonstram atitudes mais positivas no processo de aprendizagem. Entretanto, é importante que a utilização de matérias concretos não fique restrita apenas à manipulação dos alunos de forma lúdica e sem uma função educativa bem definida. É necessário que seu uso esteja embasado em objetivos bem definidos, e para isso é necessário um cuidadoso planejamento. Pois, se usado corretamente em sala de aula, com intenção e objetivo, o material concreto pode se tornar um grande parceiro do professor, auxiliando no ensino e contribuindo para que o aluno tenha uma aprendizagem significativa.

Belém, Junho de 2022

Clícia Silva
Isabel de Sá
Jonatha Ferreira
Rafael Leite

OS MATERIAIS DIDÁTICOS E JOGOS PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA

A matemática está presente em todos os segmentos da vida e em todas as tarefas executadas do nosso dia a dia, seja na compra de um simples pão como na aplicação de um grande investimento financeiro. Porém, mesmo com tal importância, a disciplina da matemática tem as vezes uma visão negativa que influencia os alunos. Por uma perspectiva rasa, a matemática é uma disciplina pronta e acabada, sem espaço para inovação, para criatividade. O que acaba gerando nos alunos desânimo, frustração por não aprenderem, por achar difícil e sem utilidade.

É importante à adoção de uma nova postura educacional, a busca de um novo Paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino aprendizagem. É necessário que ele se empenhar no mundo que cerca os alunos, na sua realidade, aproveitando cada oportunidade a fim de sugerir atividades para que o desenvolvimento do ensino aprendizagem da matemática seja efetivo e prazeroso, e que, no final de cada aula, o educador tenha aplicado a matéria com qualidade e que tenha conseguido ensinar ao aluno de forma clara. (D' AMBROSIO, 2007, p. 31).

Nesse sentido, a busca por novas formas que propiciem a aprendizagem deve ser constante, uma vez que aprender vai além de memorizar, sendo que ensinar não é somente repassar conteúdos prontos. O professor tem um papel importantíssimo, sendo responsável por criar métodos que venham atrair o aluno

2 CLÍCIA SILVA, ISABEL DE SÁ, JONATHA FERREIRA E RAFAEL LEITE

de forma natural a participar da aula, causando-o curiosidade e aprofundando seu conhecimento na disciplina. Trabalhando em cima das dificuldades para diminuí-las, e assim elevando a sua autoestima, surge o interesse do mesmo para esta disciplina. Sabemos que muitos professores estão em busca de novas metodologias e ferramentas no auxílio da aprendizagem, tendo em vista as dificuldades encontradas pelos alunos, e a fim de ultrapassar as barreiras existentes entre o ensinar e o compreender é que o lúdico na matemática se mostra como uma ferramenta poderosa no sentido de motivar o aluno para o entendimento dos conceitos matemáticos que são extremamente importantes para o desenvolvimento do raciocínio lógico, no contexto do jogo, segundo Borin (2007, p. 08), "quando analisamos o comportamento e a atividade mental de um jogador disposto a ganhar, [...] a postura é a mesma de um cientista em busca de solução para um problema". O aluno precisa de estímulo para aprender, e o exercício lúdico desperta a motivação e interesse destes. As atividades lúdicas mostram-se como ferramentas de melhoramento do processo ensino-aprendizagem no âmbito da matemática, tornando o conteúdo abordado mais atrativo, dinâmico e prazeroso. Segundo a BNCC, "os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)." (BRASIL, 2018, p. 266). Sendo assim, apresentamos algumas das infinitas possibilidades (ao limite da imaginação do(a) professor(a)) de materiais concretos e jogos para usar em sala de aula, materiais esses em exposição no Centro de Ciências e Planetário do Pará, onde os autores desse minicurso atuam diariamente, recepcionando e ministrando, por meio desses instrumentos didáticos, escolas do ensino fundamental I e II, médio e superior, públicas e particulares. Em seguida iremos apresentar os materiais didáticos e jogos que serão explorados no minicurso, tais como os conteúdos matemáticos associados que podem ser trabalhados em sala de aula.

1.1. POLIAS DE ARQUIMEDES

É um experimento que "gera" uma função exponencial, e é possível demonstrar na prática que quanto maior o valor exponencial da função, menor será o seu valor resultante. Nesse experimento temos três sistemas de polias, o primeiro com nenhuma polia móvel, o segundo com uma polia móvel e o terceiro com duas, utiliza-se um peso qualquer e puxa-se a corda para sentir este peso aplicando-se uma força, é percebido que quanto mais polias móveis, menos força será necessário para elevar o peso. Com este material didático é possível chegar na seguinte expressão algébrica: $F = \frac{P}{2^n}$, onde F é a força aplicada, 2 a constante e n é o número de polias móveis.



Figura 1.1: Polias de Arquimedes (Fonte: Os Autores)

1.2. TÉCNICA JAPONESA DE MULTIPLICAÇÃO

Este objeto é excelente para se treinar cálculo mental, junto com o ábaco comum e o soroban e para ensinarmos multiplicação de uma forma dinâmica, utilizamos este material. Este método chama a atenção dos alunos pois é uma forma de multiplicar desenhando, e em alguns casos é bem mais rápido que o algoritmo usual. Quando multiplicarmos dois números com a técnica japonesa, utilizamos segmentos de retas paralelas e de perpendiculares, as interseções entre essas é o resultado da operação. Nesse experimento utilizamos

apenas varetas para realizar as multiplicações, por exemplo, dado a expressão numérica 12×23 , temos:

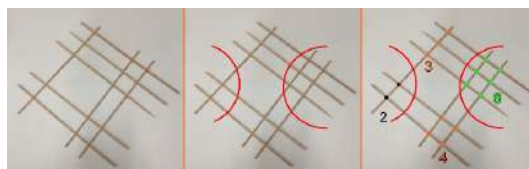


Figura 1.2: Multiplicação Japonesa (Fonte: Os Autores)

Primeiro organizamos o número doze, 1 vareta representa a dezena e 2 varetas paralelas, um pouco mais distantes, representam as unidades, o número 23 será organizado perpendicular as varetas de 12, seguindo a mesma lógica de organização entre dezena e unidade. Dividimos este sistema em três partes para melhor visualização, em seguida contamos as interseções, somando as interseções do meio, obtemos: 2, 3 + 4 e 6, resultando em $276 = 12 \times 23$.

1.3. QUADRADO MÁGICO

Este jogo é uma tabela de números em ordem crescente. Ele é "mágico" porque se somarmos os números de cada linha, coluna ou diagonal obtemos sempre o mesmo resultado. O interessante na realização desse modelo de jogo matemática consiste na disposição correta dos números de acordo com o quadrado fornecido, por exemplo, ao utilizamos um quadrado de ordem 3×3 , temos ao todo 9 células a serem preenchidas com os algarismos de 1 a 9, sem repetição, a soma dos números em todas as horizontais, verticais e diagonais devem ser igual a 15.

Aqui apresentamos um quadrado mágico 3×3 , mas é possível construir quadrados mágicos maiores, menores, e também utilizando mais números e mais operações de modo a tornar o jogo mais desafiante para o aluno, e também instigando sua curiosidade e sua intuição matemática para resolver problemas. Por exemplo, podemos alterar um pouco as regras e pedir para o aluno usar os números de 1 a 10 em um quadrado mágico 3×3 de modo a somar 18 em

1	2	3
4	5	6
7	8	9

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figura 1.3: Quadrado Mágico (Fonte: Os Autores)

todas as linhas, ou fazer um quadrado mágico 4×4 cuja soma nas linhas seja 34.

1.4. GEOPLANO

O geoplano é um material matemático e objeto didático criado pelo matemático Calleb Gattegno. É um recurso que pode auxiliar no desenvolvendo atividades com figuras e formas geométricas planas, características e propriedades dessas (vértices, arestas, lados), ampliação e redução de figuras, simetria, área, perímetro e teorema de Pitágoras. O geoplano é uma tábua com pinos equidistantes onde é possível utilizar um elástico para desenhar formas geométricas e propriedades destas. Aqui pode-se ver na prática que a melhor maneira de assimilar certo conteúdo matemático antes de sua abstração, é pela manipulação, principalmente na área de geometria. O professor deve usar a seu favor o fato de a geometria ser muito fácil de fazer o aluno enxergar em qualquer lugar o seu redor, desde uma televisão em seu quarto ou um simples caderno, e permitir com que o aluno manipule essas figuras geométricas com o geoplano certamente vai fazer com que os conceitos sejam melhor entendidos e o ensino de geometria seja mais eficiente. Outro material que também é utilizado para o ensino de geometria é o multiplano, que é um objeto criado pelo professor Rubens Ferronato, introduzido com o objetivo de se ensinar geometria incluindo pessoas cegas, porém o objeto foi aperfeiçoado e pode-se ensinar vários assuntos de matemática com ele, como funções, sistemas lineares, gráficos, matrizes,

etc.

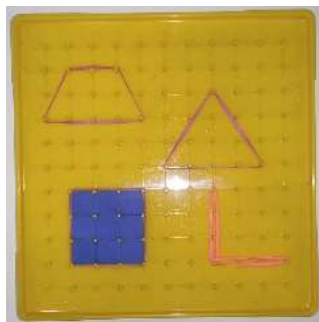


Figura 1.4: Geoplano (Fonte: Os Autores)

1.5. CARTELAS MÁGICAS

É um experimento que pode ser usado, nas séries iniciais, para falar sobre a adição, e para as séries mais avançadas, como o ensino médio, para falar de bases binárias. O experimento só é possível de se fazer, pois usa o seguinte teorema: Todo número natural pode ser decomposto de forma única como potências de 2. A mágica funciona da seguinte forma: mostra-se aos alunos diversas cartelas possuindo alguns números, em seguida, é pedido para que um aluno pense em um número, mas não diga para o professor. Logo depois, o professor mostra as cartelas e pergunta se o número que foi pensado está ou não em cada cartela. No final, o professor deve somar os primeiros números de cada cartela para obter o número que foi pensado, e isto se deve ao fato de que os primeiros números de cada cartela são todos potências de 2, então a sequência de afirmações ou negações dão implicitamente a decomposição do número inicial. É possível realizar esta mágica com números binários, pois a base é 2.



Figura 1.5: Cartelas Mágicas (Fonte: Os Autores)

1.6. TEOREMA DE PITÁGORAS

Este experimento busca apresentar o teorema de Pitágoras de forma lúdica, de modo que o aluno consiga visualizar a geometria do teorema. Tem-se 4 triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c , e em uma configuração inicial, esses 4 triângulos estão encaixados juntamente com o quadrado de lado a (que representa a medida a^2), e o quadrado de lado b (que representa a medida b^2), e como o teorema de Pitágoras é verdadeiro, tem-se a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$, isto é, deve ser possível retirar as peças que representam a^2 e b^2 e encaixar a peça que representa c^2 , pois elas são iguais. E de fato é possível reorganizar o quebra cabeça de modo que ele continue cabendo todo dentro do quadrado.

1.7. TORRE DE HANÓI

A torre de Hanoi é um ótimo experimento para se estudar funções no ensino médio, mais especificamente as funções exponenciais. O jogo se resume em uma estrutura com três hastes, e em uma dessas hastes temos uma torre com alguns discos, por exemplo, e o objetivo do jogo consiste em mover toda a torre para uma outra haste, com apenas duas simples regras: não é permitido mover mais



Figura 1.6: Teorema de Pitágoras (Fonte: Os Autores)

de uma peça por vez, e nunca uma peça maior deve ficar em cima de uma peça menor. Pode-se estudar funções exponenciais com esse objeto pois é possível encontrar uma fórmula que nos diz o número mínimo de movimentos para completar o jogo em função do número de discos, dada por: $f(n) = 2^n - 1$, onde n representa o número de discos.



Figura 1.7: Torre de Hanói (Fonte: Os Autores)

CONSIDERAÇÕES FINAIS E COMENTÁRIOS

Conclui-se que a utilização de objetos matemáticos é de fundamental importância para uma compreensão significativa e construção dos conhecimentos abstratos dos conteúdos vistos em sala de aula, pois, segundo Gervásio (2017), o método de ensino e aprendizagem tradicional que depende apenas do professor indo ao quadro e recitando o conteúdo para os seus alunos, não é eficiente para um bom aproveitamento da disciplina. Deste modo, é possível fazer com que os alunos enxerguem a matemática por uma perspectiva diferente da qual estão acostumados, conseguindo apreciar a sua beleza e delicadeza, e com isso entender que a matemática é bem mais do que uma disciplina para se estudar apenas dentro da sala de aula, mas sim parte fundamental da sua formação como cidadão, pois a matemática está por todo lugar a sua volta. Os objetos escolhidos para essa oficina foram pensados a fim de se utilizar em diferentes níveis de escolaridade e de acordo com a necessidade de cada turma, uma turma do sexto ou sétimo ano que ainda tem dificuldade com operações básicas pode facilmente desenvolver habilidades facilmente com o método de multiplicação japonês e o quadrado mágico; problemas mais abstratos de entender além das expressões algébricas, como exemplo o Teorema de Pitágoras ou função exponencial, pode ser assimilado na prática com o experimento do Teorema de Pitágoras e as Polias de Arquimedes; a Torre de Hanói e cartelas mágicas são ferramentas para trabalhar potências de base 2 e suas propriedades, além de estimular o raciocínio lógico; o Geoplano é outro material cuja utilidade se estende para diferentes séries, podemos explorar a geometria euclidiana de ma-

neira fácil para diferentes níveis escolares. Em suma, estes materiais didáticos e jogos são ferramentas para ensinar, entreter e até mesmo nivelar o nível de conhecimento de turmas do ensino fundamental e médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D' AMBROSIO, U. *Educação matemática: Da teoria à prática*. 14^a ed. [S.I]: Papiros, 2007
- [2] BORIN, Julia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. 6.ed. São Paulo: IME/USP, 2007.
- [3] FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996, 144p.
- [4] | LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.
- [5] PASSOS, C.L.B. *Materiais manipuláveis como recurso didáticos na formação de professores de Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006
- [6] PRADO, I.G. *Ensino de Matemática: O ponto de vista de Educadores e de seus Alunos sobre Aspectos da prática pedagógica*. Rio Claro 2000, 255f. Tese de Doutorado ? Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e ciências exatas (UNESP).
- [7] GERVÁZIO, Nunes Suemilton. *Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa*. Revista eletrônica paulista de matemática, v. 9, p. 42-55, 2017.



MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE OTIMIZAÇÃO:
EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E EVOLUÇÃO
DIFERENCIAL MELHORADA IMPLEMENTADA EM
PROCESSAMENTO PARALELO

MILENA ALMEIDA LEITE BRANDÃO E JOSÉ LAÉRCIO
DORÍCIO

JUNHO DE 2022

*À todos e todas que se interessarem pelo assunto.
Fizemos com carinho para vocês.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 Evolução Diferencial

- 1.0.1 Operadores da Evolução Diferencial
- 1.0.2 Parâmetros da evolução diferencial
- 1.0.3 Estratégias da Evolução Diferencial

2 Evolução Diferencial Melhorada

3 Método da Penalidade

4 Simulações Numéricas

- 4.0.1 Projeto de um recipiente de pressão
- 4.0.2 Projeto de uma viga engastada

5 Conclusões

Referências

Índice Remissivo

PREFÁCIO

A otimização matemática é uma ferramenta importante para tomada de decisão na análise e projeto de sistemas físicos, sendo aplicada em situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de várias variáveis, num contexto em que podem existir restrições.

Pode-se utilizar otimização em várias áreas, como, por exemplo, no projeto de sistemas ou componentes, planejamento e análise de operações, problemas de otimização de estruturas, otimização de forma, controle de sistemas dinâmicos. A grande vantagem é determinar a melhor configuração de projeto sem ter que testar todas as possibilidades envolvidas. Além disso, diminui o tempo dedicado ao projeto, possibilitando o tratamento simultâneo de uma grande quantidade de variáveis e restrições de difícil visualização gráfica ou tabular, possibilitando a obtenção de soluções não tradicionais com menor custo.

Técnicas clássicas de otimização são confiáveis e possuem aplicações nos mais diferentes campos de engenharia e de outras ciências. Porém, estas técnicas podem apresentar algumas dificuldades numéricas e problemas de robustez relacionados com: a falta de continuidade das funções a serem otimizadas ou de suas restrições, funções não convexas, multimodalidade, existência de ruídos nas funções, necessidade de se trabalhar com valores discretos para as variáveis, existência de mínimos ou máximos locais, etc. Assim, os estudos de métodos heurísticos, com busca randômica controlada por critérios probabilísticos, reapparecem como uma forte tendência nos últimos anos, principalmente devido ao avanço dos recursos computacionais, pois um fator limitante destes métodos é a necessidade de um número elevado de avaliações da função objetivo.

Um algoritmo pertencente à classe dos Algoritmos Evolucionários que tem

se destacado é o método de otimização conhecido como Evolução Diferencial (ED). O algoritmo da ED tem se apresentado robusto e eficiente ao ser testado com sucesso em vários campos da ciência. No entanto, por meio de testes com problemas clássicos de otimização, percebeu-se que às vezes os resultados obtidos com a ED não são tão bons quanto o esperado. Por isso, muitos pesquisadores tem proposto modificações no algoritmo original da ED com intuito de melhorar sua convergência. Tais esforços concentram não apenas em melhorar a qualidade da convergência do método mas também na sua velocidade de convergência.

Assim, o objetivo deste minicurso é apresentar um estudo do método de otimização Evolução Diferencial e apresentar um aprimoramento do método de Evolução Diferencial, chamado de Evolução Diferencial Melhorada implementado em processamento paralelo, que surgiu de modificações no algoritmo básico através da utilização de conjuntos embaralhados e tornando-o capaz de trabalhar com processamento paralelo. Para verificar a eficiência dos algoritmos apresentaremos alguns resultados obtidos na resolução de problemas de otimização de engenharia.

Ituiutaba, Junho de 2022

Milena Almeida Leite Brandão
José Laércio Dorício

EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

A Evolução Diferencial (ED) foi criada após Ken Price tentar usar técnicas evolutivas para resolver o problema do polinômio de Chebychev o qual foi apresentado por Rainer Storn. A descoberta aconteceu quando Price teve a idéia de utilizar diferentes vetores para recriar o vetor população criando uma abordagem diferente das encontradas nas estratégias de evolução que tratam de problemas de otimização. Desde então foram feitos vários testes e aperfeiçoamentos os quais tornaram o algoritmo ED versátil e robusto.

O algoritmo começa criando uma população inicial de N_p indivíduos, escolhida aleatoriamente e devendo cobrir todo o espaço de busca. Geralmente, é criada por uma distribuição de probabilidade uniforme, quando não há nenhum conhecimento sobre o problema.

Cada indivíduo, chamado de *vetor*, possui n componentes representadas por valores reais, sendo n o número de variáveis de projeto. Assim, a população segue uma evolução natural, em que o número de indivíduos é constante durante todas as gerações.

A ideia principal da evolução diferencial é gerar novos indivíduos, denotados vetores modificados ou doadores, pela adição da diferença ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo. Esta operação é chamada *mutação*.

As componentes do indivíduo doador são misturadas com as componentes de um indivíduo escolhido aleatoriamente (denotado vetor alvo), para resultar o chamado vetor tentativa, ou vetor experimental. O processo de misturar os parâmetros é referido como *cruzamento*. Se o vetor experimental resultar um valor da função objetivo menor que o vetor alvo, então o vetor experimental

substitui o vetor alvo na geração seguinte. Esta última operação é chamada *seleção*. O procedimento é finalizado quando algum critério de parada é obedecido.

1.0.1. OPERADORES DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Assim como o Algoritmo Genético, a Evolução Diferencial apresenta algumas operações a serem seguidas durante cada geração para manter a convergência não-prematura do método, garantindo, então, a diversidade da população e a obtenção da solução ótima, ou próxima desta.

Considere o seguinte problema de otimização sem restrições (a menos das laterais):

$$\{ \min f(X), \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

onde, $f(X)$ representa a função objetivo (também chamada de função custo ou adaptação), e sejam $X^L = (x_1^L, x_2^L, \dots, x_n^L)^T$ e $X^U = (x_1^U, x_2^U, \dots, x_n^U)^T$ as restrições laterais inferior e superior respectivamente.

A população de indivíduos durante a q -ésima geração é definida como:

$$X_d^{(q)} = (x_{d,1}, x_{d,2}, \dots, x_{d,n})^T, \quad i = 1, \dots, n \quad e \quad d = 1, \dots, N_p \quad (1.2)$$

A população inicial é escolhida aleatoriamente, dentro do espaço de busca, definido pelas restrições laterais, fornecidas pelo usuário:

$$x_{d,i}^{(0)} = x_i^L + r(x_i^U - x_i^L), \quad i = 1, \dots, n \quad e \quad d = 1, \dots, N_p \quad (1.3)$$

sendo que r é um número gerado randomicamente entre 0 e 1.

Agora com a população estabelecida, é necessário a criação de novos indivíduos, isto se dará através dos operadores que serão apresentados em seguida.

Mutação

Sejam os vetores X_α, X_β e X_γ escolhidos aleatoriamente e distintos entre si. Na geração q um par de vetores (X_β, X_γ) define uma diferença $X_\beta - X_\gamma$. Esta diferença é multiplicada por $F > 0$, sendo denotada por diferença

ponderada, e é usada para perturbar o terceiro vetor X_α ou o melhor vetor X_{best} da população. Este processo, que resulta no vetor doador $V^{(q+1)}$, pode ser escrito matematicamente como:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F \left(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)} \right) \quad \text{ou} \quad V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F \left(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)} \right) \quad (1.4)$$

sendo que os índices aleatórios $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N_p\}$ são inteiros distintos entre si e diferentes do índice d . O número de indivíduos da população, N_p , deve ser maior ou igual a 4. O fator de escala, ou taxa de perturbação, F , é um fator real, positivo e constante variando entre 0 e 2, cujo objetivo é controlar a amplitude da diferença ponderada. A Fig. 1.1 mostra um exemplo bidimensional que ilustra os diferentes vetores que participam da geração do vetor doador $V^{(q+1)}$.

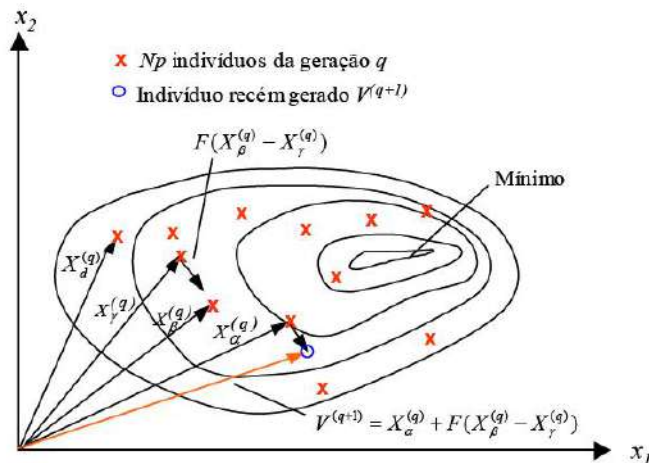


Figura 1.1: Processo de gerar o vetor doador $V^{(q+1)}$ para uma função objetivo bidimensional. Fonte: [5].

Se o número de indivíduos da população é grande o suficiente, a diversidade da população pode ser melhorada usando duas diferenças ponderadas para perturbar um vetor existente, ou seja, cinco vetores distintos são escolhidos aleatoriamente na população atual. O vetor diferença ponderada usa dois

pares de diferenças ponderadas e é usado para perturbar o quinto vetor ou o melhor vetor da população atual. Este processo pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
 V^{(q+1)} &= X_{\alpha}^{(q)} + F \left(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)} \right) \\
 \text{ou} \\
 V^{(q+1)} &= X_{best}^{(q)} + F \left(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)} \right)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde os índices aleatórios $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \{1, \dots, N_p\}$, são inteiros mutuamente distintos e diferentes do índice d , tais que $N_p \geq 6$.

Existem outras maneiras, que serão apresentadas adiante, de realizar a operação de mutação, o que diferencia as diversas estratégias que podem ser utilizadas pelo método da Evolução Diferencial.

Cruzamento

Na operação cruzamento, cujo objetivo é aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a mutação, as componentes do vetor doador, $V^{(q+1)}$, são misturadas com as componentes de outro indivíduo denominado vetor alvo. A escolha do vetor alvo, que deve ser diferente dos vetores já usados anteriormente, é aleatório, segundo uma probabilidade de cruzamento CR . Desta forma, obtém-se o vetor tentativa ou experimental, $U^{(q+1)}$, definido como:

$$u_i^{(q)} = \begin{cases} v_i^{(q+1)}, & \text{se } r_i \leq CR \\ x_{d,i}^{(q+1)}, & \text{se } r_i > CR, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{1.6}$$

onde r_i é um número randômico entre 0 e 1 e $x_{d,i}$ são as componentes do vetor alvo $X_d^{(q)}$. A probabilidade do cruzamento ocorrer, CR , representa a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor doador, e está compreendida entre 0 e 1, sendo fornecida pelo usuário. Quando $CR = 1$, por exemplo, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor doador $V^{(q+1)}$. Por outro lado, se $CR = 0$, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor alvo $X_d^{(q)}$.

Se após o cruzamento uma ou mais componentes do vetor experimental estiver fora da região de busca, fazem-se as correções:

$$\begin{cases} \text{Se } u_i < x_i^L \text{ então } u_i = x_i^L \\ \text{Se } u_i > x_i^U \text{ então } u_i = x_i^U \end{cases} \quad (1.7)$$

O cruzamento dado pela Eq. (1.6) é denominado de *cruzamento binomial* e pode ser observado na Fig. 1.2.

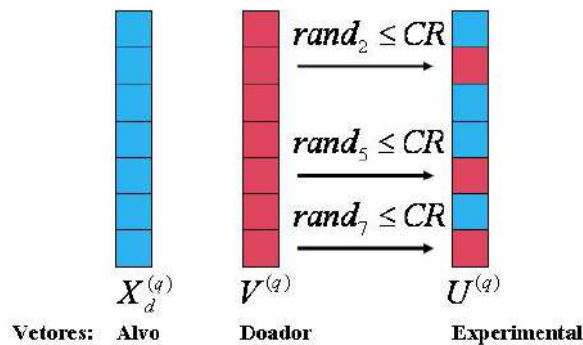


Figura 1.2: Cruzamento binomial

Outra forma de realizar o cruzamento, denominado *cruzamento exponencial*, é definida segundo a Fig. 1.3. As componentes do vetor experimental são dadas pelas componentes do vetor doador enquanto o número randômico for menor ou igual à probabilidade de cruzamento CR .

Após determinado o vetor experimental $U^{(q)}$, torna-se necessário selecionar os melhores descendentes. Esta operação será vista na próxima seção.

Seleção

A seleção é o processo de produzir melhores filhos. Diferentemente de outros algoritmos evolutivos, a evolução diferencial não usa hierarquia (elitismo) nem seleção proporcional. Em vez disso, o custo do vetor experimental $U^{(q+1)}$ é calculado e comparado com o custo do vetor alvo $X_d^{(q)}$. Se o custo do vetor

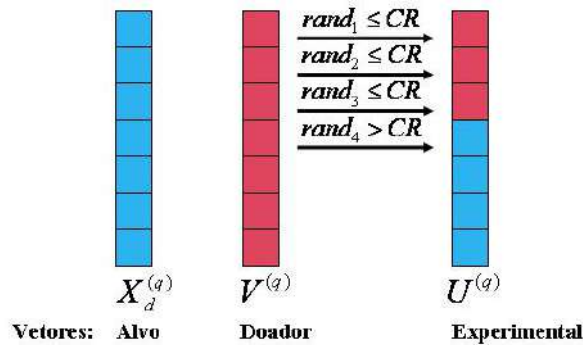


Figura 1.3: Cruzamento exponencial

alvo for menor que o custo do vetor experimental, o vetor alvo é permitido avançar para a próxima geração. Caso contrário, o vetor experimental substitui o vetor alvo na geração seguinte. Em outras palavras, este processo pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Se } f(U^{(q+1)}) \leq f(X_d^{(q)}), \text{ então } X_d^{(q+1)} = U^{(q+1)} \\ \text{Se } f(U^{(q+1)}) > f(X_d^{(q)}), \text{ então } X_d^{(q+1)} = X_d^{(q)} \end{cases} \quad (1.8)$$

O processo iterativo continua até que seja alcançado algum critério de parada, sendo que um número máximo de gerações deve ser estabelecido. Para problemas com restrição, um critério pode ser a não violação das restrições ou o melhor indivíduo ter encontrado um valor dentro de uma precisão pré-estabelecida. Assim, os seguintes critérios de parada podem se estabelecidos:

$$\begin{cases} q < max \\ |f_{min}^{(q+1)} - f_{min}^{(q)}| < \epsilon \end{cases} \quad (1.9)$$

1.0.2. PARÂMETROS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

O seguinte conjunto de regras pode ajudar na escolha das variáveis de controle N_p , CR e F , conforme [6]:

- A população inicial deve ser gerada o mais próximo possível da superfície da função objetivo;

- Frequentemente a probabilidade de cruzamento CR deve ser considerada menor do que um, por exemplo $CR = 0,3$. Caso não ocorra convergência, adotar $CR \in [0,8; 1]$ pode ajudar;
- Para muitas aplicações $N_p = 10D$, onde D é igual a dimensão ou ao número de variáveis, é uma boa escolha. Normalmente, F pode ser escolhido no intervalo de $[0,5; 1]$.
- Quanto maior for o tamanho da população escolhida, menor deve ser o valor de F .
- Tem-se um bom sinal de convergência quando os parâmetros do melhor componente da população variam muito de geração para geração, especialmente durante o início do processo de minimização, mesmo se seu valor da função objetivo decrescer lentamente;
- O valor da função objetivo do melhor indivíduo não pode cair de forma brusca, caso isto aconteça, a otimização está em um mínimo local;

1.0.3. ESTRATÉGIAS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Vale ressaltar que a Evolução Diferencial apresenta diferentes estratégias obtidas a partir da forma com que os operadores de mutação e cruzamento trabalham, ou seja, as estratégias da evolução diferencial podem variar de acordo com o tipo de indivíduo a ser modificado na formação do vetor doador, o número de indivíduos considerados para a perturbação e o tipo de cruzamento a ser utilizado, podendo ser escritas como: ED/a/b/c, sendo que:

a → especifica o vetor a ser perturbado, podendo ser *rand* (um vetor da população escolhido aleatoriamente) ou *best* (o vetor de menor custo da população);

b → determina o número de diferenças ponderadas usadas para a perturbação de a;

c → denota o tipo de cruzamento (exp: exponencial; bin: binomial).

Em 1995, Storn and Price deram o princípio de trabalho da estratégia básica usando apenas o operador cruzamento binomial (devido aos experimentos

binomiais independentes), onde o cruzamento é executado em cada variável sempre que um número $r \in [0; 1]$ aleatório for menor que a probabilidade de cruzamento CR .

Alguns anos mais tarde, Storn and Price (1997) desenvolveram mais estratégias usando o operador cruzamento exponencial, em que o cruzamento é executado nas variáveis em um laço até que esteja dentro do limite de CR . A primeira vez que um número $r \in [0; 1]$ aleatório ultrapassa o valor de CR , nenhum cruzamento é executado e as variáveis restantes são deixadas intactas. Resumidamente, as dez estratégias podem ser descritas de acordo com a Tab. 1.1.

No entanto, uma estratégia que funciona bem para um dado problema pode não funcionar bem quando aplicada a outro problema. A estratégia a ser adotada para um problema é determinada por tentativa e erro.

Tabela 1.1: Estratégias do método Evolução Diferencial

Estr.	Operador Mutação	Notação
1	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/bin
2	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/bin
3	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/bin
4	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/bin
5	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/bin
6	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/exp
7	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/exp
8	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/exp
9	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/exp
10	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/exp

Apesar de vários aspectos positivos, tem-se observado que a ED às vezes não apresenta uma performance tão boa quanto se espera. A análise empírica da ED tem mostrado que o algoritmo pode deixar de prosseguir rumo a um ótimo global tendendo a um estado de estagnação, no qual os indivíduos ficam muito parecidos entre si, isto é, a população fica homogênea e o algoritmo não

apresenta qualquer melhora, apesar de aceitar novos indivíduos na população. Além disso, ED também sofre com o problema da convergência prematura. Esta situação surge quando há uma perda da diversidade da população. Como resultado, a população converge para um ponto que pode não ser uma solução ótima local. Isso geralmente ocorre quando a função objetivo é multi modal, tendo vários ótimos locais e global.

Assim como outros algoritmos evolutivos, o desempenho da ED se deteriora com o aumento da dimensionalidade da função objetivo. Várias modificações tem sido propostas na estrutura deste algoritmo a fim de melhorar seu desempenho. Na seção seguinte será tratado uma destas propostas de modificação no esquema básico da ED.

EVOLUÇÃO DIFERENCIAL MELHORADA

O algoritmo da Evolução Diferencial Melhorada (EDM) proposto é uma combinação da evolução com conjuntos embaralhados e a evolução diferencial básica (ED).

A EDM inicia-se como o algoritmo da ED usual por criar uma população de indivíduos amostrados aleatoriamente a partir da região viável usando distribuição de probabilidade uniforme. A população é então classificada em ordem crescente de valores da função objetivo e particionada em diversos conjuntos. Cada conjunto independentemente executa a ED. Na etapa da evolução, os conjuntos são obrigados a se misturar e os pontos são realocados para garantir a troca de informações. O processo do algoritmo EDM proposto é descrito a seguir e os seu fluxograma é apresentado na Fig. 2.1.

Passo 1: Inicialização. Gerar aleatoriamente uma população inicial de N_p vetores, sendo que cada vetor tem dimensão n , usando a seguinte regra:

$$X_{i,j} = X_{min,j} + rand(X_{max,j} - X_{min,j}), \quad (2.1)$$

onde $X_{min,j}$ e $X_{max,j}$ são os limites inferior e superior para a j -ésima componente respectivamente e $rand$ um número aleatório uniforme entre 0 e 1. Calcule o valor da função objetivo $f_i = f(X_i)$ para todo X_i . Defina o número máximo de geração como G_{max} . Seja $N_p = p \times m$, onde p é o número de conjuntos e m é o número de indivíduos em cada conjunto.

Passo 2: Classificação. Classifique a população inteira em ordem de crescimento do valor da função objetivo. Armazene-os em um conjunto $S = \{X_i, f_i : i = 1, \dots, N_p\}$.

Passo 3: *Divisão.* Divida S em p subpopulações S^1, S^2, \dots, S^p , cada uma contendo m pontos, tais que:

$$S^k = \{X_j^k, f_j^k : X_j^k = X_{k+p(j-1)}, f_j^k = f_{k+p(j-1)}, j = 1, \dots, m\}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Passo 4: *Evolução.* Seja $k = 1$.

Passo 4.1: Aplique ED a cada subpopulação S^k .

Passo 4.2: *Inicialização.* Defina o contador da geração $g = 1$. O conjunto S^k trabalha como uma população em ED.

Passo 4.3: *Mutação.* Selecione aleatoriamente três pontos da população S^k e gere o vetor doador V_i utilizando a Eq. (1.4). **Passo 4.4:** *Cruzamento.* Recombine cada vetor alvo X_i com o vetor doador gerado no passo 4.3 para gerar o vetor experimental U_i utilizando a equação (1.6). **Passo 4.5:** *Verificação de viabilidade.* Verifique se cada variável do vetor experimental pertence à região viável. No caso afirmativo, vá para o passo 4.6, caso contrário, corrija-o da seguinte forma:

$$U_{i,j} = \begin{cases} 2X_{min,j} - U_{i,j} & \text{se } U_{i,j} < X_{min,j} \\ 2X_{max,j} - U_{i,j} & \text{se } U_{i,j} > X_{max,j} \end{cases} \quad (2.2)$$

e vá para o passo 4.6.

Passo 4.6: *Seleção.* Calcule o valor da função objetivo para o vetor U_i . Escolha o melhor vetor comparando o valor da função objetivo dos vetores alvo e experimental usando a Eq. (1.8) para a próxima geração. **Passo 4.7:** *Iteração.* Se $g < G_{max}$ então vá para o passo 4.3 com $g = g + 1$, caso contrário, vá para o passo 5.

Passo 5: Se $k < p$ então $k = k + 1$ e vá para o passo 4.1, caso contrário, vá para o passo 6.

Passo 6: *Embaralhando os conjuntos.* Substitua os conjuntos S^1, S^2, \dots, S^p em S e verifique se os critérios de parada foram satisfeitos, se sim, pare, caso contrário vá para o passo 2.

A partir do algoritmo apresentado várias outras versões já foram propostas alterando o número de conjuntos (subpopulações) utilizados e também o

número de vezes que o algoritmo da ED básica é chamado para cada conjunto antes do processo de embaralhamento.

Depois de combinar as potencialidades dos métodos da Evolução Diferencial e da Evolução com Conjuntos Embaralhados é preciso implementá-los em paralelo, pois assim, cada conjunto do método ED evoluirá em um processador diferente e ao mesmo tempo, seguindo o princípio de que grandes problemas geralmente podem ser divididos em problemas menores, para então serem resolvidos concorrentemente (em paralelo).

No processador mestre é criado randomicamente a população inicial a qual é dividida em k subpopulações ($k \in \mathbb{Z}$ é menor ou igual ao número de processadores) e distribuída pelos no máximo k processadores. Em seguida, o código da ED segue processando sequencialmente em cada processador até atingir algum critério de parada. As subpopulações são então reagrupadas no processador mestre, embaralhadas e divididas novamente em subpopulações.

Resumidamente, o Método de Otimização Evolução Diferencial Melhorada com Processamento Paralelo (EDMP) une o que há de melhor nos métodos ED e ECE em um só algoritmo que é implementando em paralelo. O fluxograma do Método de Otimização Evolução Diferencial Melhorada em Paralelo pode ser visto na Fig. 2.2.

Usamos a biblioteca Message Passing Interface (MPI) para realizar a comunicação entre os processadores conforme descrito na Fig. 2.2. Note que há apenas duas comunicações entre os processadores e estas são feitas por meio do comando `MPI_allgatherv`, cuja função é reunir os dados e distribuir os dados combinados de todas as tarefas.

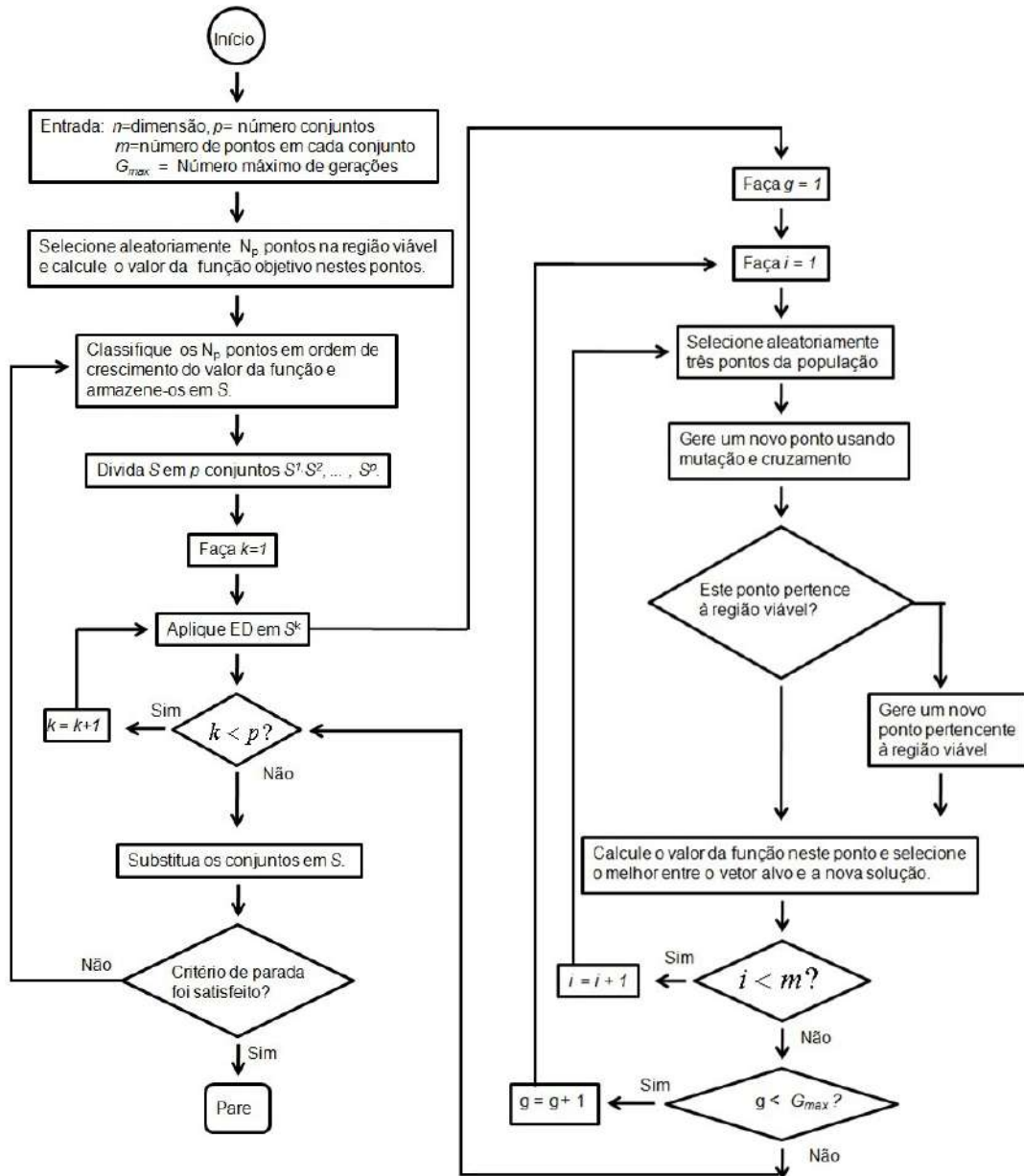


Figura 2.1: Fluxograma do Método Evolução Diferencial Melhorada - EDM.

MÉTODO DA PENALIDADE

Muitos algoritmos de otimização foram desenvolvidos para resolver problemas irrestritos, considerando apenas os limites laterais das variáveis, como no caso do Algoritmo Genético e da Evolução Diferencial, enquanto apenas alguns algoritmos processam as restrições de desigualdade e igualdade do problema para limitar a região viável. Assim, torna-se necessário utilizar algum artifício para que os problemas com restrições também se apliquem aos métodos de otimização irrestrita.

Uma das abordagens fundamentais para a otimização restrita é substituir o problema original por uma função de penalidade que é composta da função objetivo original do problema de otimização com restrições somada a um termo adicional para cada restrição, o qual é positivo quando o ponto atual X viola essa restrição e zero caso contrário.

A maioria das abordagens definem uma seqüência de funções de penalidade, na qual os termos penalizados por violarem as restrições são multiplicados por um coeficiente positivo. Ao fazer este coeficiente crescer, penalizam-se as violações das restrições mais severamente, forçando o ponto mínimo da função de penalidade se aproximar cada vez mais da região viável do problema restrito.

Essas abordagens são conhecidas como Método da Penalidade Exterior, porque o termo penalizado por cada restrição é diferente de zero somente quando X é inviável em relação a tal restrição. Segundo [7], muitas vezes, o ponto de mínimo das funções de penalidade são inviáveis com relação ao problema original, e aproximam-se da viabilidade apenas no limite em que os parâmetros de penalidade se tornam cada vez maiores.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \min f(X) & \text{sujeito a } g_j(X) \geq 0, \text{ restrições de desigualdade} \\ X \in \mathbb{R}^n & h_l(X) = 0, \text{ restrições de igualdade} \end{array} \quad (3.1)$$

Afim de que os problemas restritos (3.1) sejam transformados em problemas irrestritos será utilizado, neste estudo, o Método da Penalidade Exterior. Se o objetivo da otimização é minimizar a função objetivo $f(X)$, a função de penalidade $P(X)$ é somada a função principal $f(X)$ de modo a aumentar o valor da função nos pontos que estão fora da região viável, por outro lado, se o objetivo é maximizar, a função de penalidade é subtraída da função principal se o ponto não obedece às restrições.

Esta nova função objetivo, chamada *pseudo objetivo*, é penalizada de acordo com um *fator de penalidade* r_p toda vez que encontrar uma restrição ativa. Assim, este escalar amplia a penalidade, e quanto maior for seu valor, maior será a eficiência do método para obedecer às restrições. O modelo matemático da função pseudo objetivo $\Phi(X)$ utilizada para minimizar uma função $f(X)$ é dada por:

$$\Phi(X) = f(X) + r_p P(X), \quad (3.2)$$

e a função de penalidade $P(X)$ dada por:

$$P(X) = \sum_{j=1}^m (\max [0, g_j(X)]^2) + \sum_{k=1}^l h_l(X)^2, \quad (3.3)$$

sendo $g_j(X)$ as restrições de desigualdade, $h_l(X)$ as restrições de igualdade e m e l o número de restrições de desigualdade e igualdade respectivamente.

Deste modo, os pontos fora do espaço viável apresentarão valores muito ruins para a otimização e serão facilmente desconsiderados pelos algoritmos de otimização irrestrita.

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo é voltado para as simulações numéricas realizadas a fim de comprovar a eficiência dos algoritmos.

4.0.1. PROJETO DE UM RECIPIENTE DE PRESSÃO

O objetivo deste problema é o de minimizar o custo total do desenho de um recipiente de pressão proposto por [2] e [3] e apresentado na Fig. 4.1.

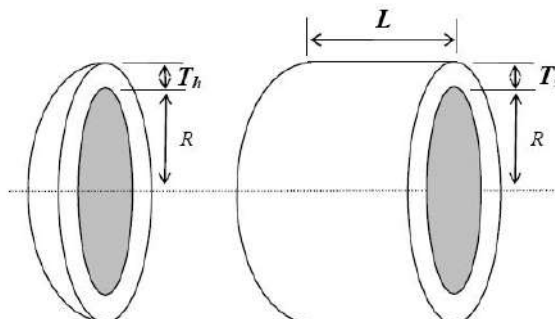


Figura 4.1: Projeto de um recipiente de pressão.

Existem quatro variáveis no projeto: x_1 (T_s , espessura do invólucro), x_2 (T_h , espessura da tampa), x_3 (R , raio interno) e x_4 (L , comprimento da seção cilíndrica do recipiente), sendo que R e L são contínuos. O problema pode ser descrito conforme segue:

$$\min f(x) = 0,6224x_1x_3x_4 + 1,7781x_2x_3^2 + 3,1661x_1^2x_4 + 19,84x_1^2x_3 \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$g_1(x) = -x_1 + 0,0193x_3 \leq 0 \quad (4.2)$$

$$g_2(x) = -x_2 + 0,00954x_3 \leq 0 \quad (4.3)$$

$$g_3(x) = -\pi x_3^2 x_4 - \frac{4}{3}\pi x_3^3 + 1296000 \leq 0 \quad (4.4)$$

$$g_4(x) = x_4 - 240 \leq 0 \quad (4.5)$$

Os limites laterais das variáveis $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ utilizados foram: $0 \leq x_1, x_2 \leq 10$, $10 \leq x_3 \leq 100$, $100 \leq x_4 \leq 200$.

Na Tab. 4.1 são apresentados alguns valores encontrados na literatura e a solução obtida utilizando Algoritmos Genético e Evolução Diferencial para a resolução do problema de recipiente de pressão. A Tab. 4.2 mostra os resultados obtidos com o método Evolução com Conjuntos Embaralhados considerando quantidades diferentes de conjuntos. A Tab. 4.3 apresenta os resultados obtidos com o método Evolução Diferencial Melhorada implementada em processamento paralelo. Observe que os menores valores para a função objetivo foram obtidos com o método EDMP e que além disso, independente do número de processadores, todas as restrições foram obedecidas no ponto ótimo.

4.0.2. PROJETO DE UMA VIGA ENGASTADA

O objetivo é minimizar o custo de uma viga com as limitações de tensão de cisalhamento, tensão de dobramento na viga, esforço de carga na barra, deflexão final da viga e restrições laterais, conforme proposto por [2] e [3] e esquematizado na Fig. 4.2.

O problema pode ser expresso como:

$$\min f(x) = 1,10471x_1^2 x_2 + 0,04811x_3 x_4 (14,0 + x_2) \quad (4.6)$$

Sujeito a:

$$g_1(x) = \tau(x) - \tau_{max} \leq 0 \quad (4.7)$$

$$g_2(x) = \sigma(x) - \sigma_{max} \leq 0 \quad (4.8)$$

$$g_3(x) = x_1 - x_4 \leq 0 \quad (4.9)$$

Tabela 4.1: Comparação de alguns resultados do problema de um recipiente de pressão.

Variáveis de projeto	[4] (2003)	[2] (2000)	[3] (1997)	Algoritmo Genético [1]	Evolução Diferencial [1]
x_1	0,8125	0,8125	0,9375	0,9613	0,2233
x_2	0,4375	0,4375	0,5000	0,4755	0,9611
x_3	42,09845	40,3239	48,3290	49,7928	53,7741
x_4	176,6366	200,0000	112,6790	100,0000	175,9351
$g_1(x)$	0,0	-0,034324	-0,004750	-0,0003	0,8146
$g_2(x)$	-0,03588	-0,052847	-0,038941	-0,0005	-0,4481
$g_3(x)$	-5,820e-11	-27,10584	-3652,876	-21,0985	-953602,7787
$g_4(x)$	-63,3624	-40,0000	-127,3210	-140,0000	-64,0649
$f(x)$	6059,1312	6288,7445	6410,3811	6281,3716	6343,9254

Tabela 4.2: Resultados do problema de um recipiente de pressão para ECE.

Variáveis de projeto	2 Conjuntos t=5,26s	4 Conjuntos t=5,72s	10 Conjuntos t=5,54s	20 Conjuntos t=7,46s
x_1	0,8631	0,8555	0,7787	0,7784
x_2	0,4267	0,4229	0,3850	0,3842
x_3	44,6980	44,3239	40,3499	40,3275
x_4	146,9913	150,8823	199,5795	199,8933
$g_1(x)$	-0,0004	-9,15e-6	-6,72e-7	-4,0e-5
$g_2(x)$	-0,0003	-6,14e-5	-8,26e-5	-1,0e-4
$g_3(x)$	-679,6647	-3,3706	-7,3757	-13,1134
$g_4(x)$	-93,0087	-89,1177	-40,4205	-40,1067
$f(x)$	6052,4298	6031,2781	5886,6091	5886,2353

Tabela 4.3: Resultados do problema de um recipiente de pressão para EDMP.

Variáveis de projeto	1 proc t=0,04s	2 proc t=0,04s	4 proc t=0,02s	8 proc t=0,48s
x_1	0,7782	0,7782	0,7782	0,7782
x_2	0,3846	0,3846	0,3846	0,3846
x_3	40,3197	40,3196	40,3196	40,3196
x_4	200	200	200	200
$g_1(x)$	3,8e-09	3,6e-09	3,6e-09	3,7e-09
$g_2(x)$	1,8e-09	1,4e-09	1,4e-09	1,7e-09
$g_3(x)$	-2,6e-5	0	0	-2,6-e05
$g_4(x)$	-40	-40	-40	-40
$f(x)$	5885,3328	5885,3328	5885,3328	5885,3328

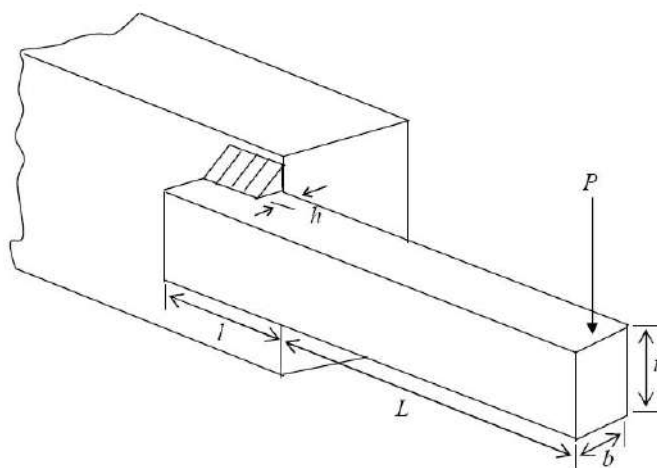


Figura 4.2: Projeto de uma viga engastada.

$$g_4(x) = 0,10471x_1^2 + 0,04811x_3x_4(14,0 + x_2) - 5 \leq 0 \quad (4.10)$$

$$g_5(x) = 0,125 - x_1 \leq 0 \quad (4.11)$$

$$g_6(x) = \delta(x) - \delta_{max} \leq 0 \quad (4.12)$$

$$g_7(x) = P - P_c(x) \leq 0 \quad (4.13)$$

sendo que,

$$\tau(x) = \sqrt{\tau'^2 + 2\tau'\tau'' \frac{x_2}{2R} + \tau''^2} \quad (4.14)$$

$$\tau' = \frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2} \quad (4.15)$$

$$\tau'' = \frac{MR}{J} \quad (4.16)$$

$$M = P\left(L + \frac{x_2}{2}\right) \quad (4.17)$$

$$R = \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2} \quad (4.18)$$

$$J = 2 \left[\sqrt{2}x_1x_2 \left(\frac{x_2^2}{12} + \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2 \right) \right] \quad (4.19)$$

$$\sigma(x) = \frac{6PL}{x_4x_3^2} \quad (4.20)$$

$$\delta(x) = \frac{4PL^3}{Ex_3^3x_4} \quad (4.21)$$

$$P_c(x) = \frac{4,013E\sqrt{\frac{x_3^2x_4^6}{36}}}{L^2} \left(1 - \frac{x_3}{2L} \sqrt{\frac{E}{4G}} \right) \quad (4.22)$$

onde:

$$P = 6000 \text{ lb}, \quad L = 14 \text{ in}, \quad E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad G = 12 \cdot 10^6 \text{ psi}, \\ \tau_{max} = 13600 \text{ psi}, \quad \sigma_{max} = 30000 \text{ psi} \quad \text{e} \quad \delta_{max} = 0,25 \text{ in}.$$

Os seguintes limites laterais das variáveis $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ forão adotados: $0,1 \text{ in} \leq x_1, x_4 \leq 2 \text{ in}$ e $0,1 \text{ in} \leq x_2, x_3 \leq 10 \text{ in}$.

Na Tab. 4.4 são exibidos os resultados encontrados na literatura e obtidos com os algoritmos Genético e Evolução Diferencial. Na Tab. 4.5 são apresentados os valores ótimos calculados pelo método Evolução com Conjuntos Embaralhados e na Tab ?? encontram-se os valores encontrados com EDMP.

Tabela 4.4: Comparação de alguns resultados para o projeto de uma viga engastada.

Variáveis de projeto	[4] (2003)	[2] (2000)	[3] (1997)	Algoritmo Genético [1]	Evolução Diferencial [1]
x_1	0,20573	0,20880	0,2489	0,409904	0,190675
x_2	3,47049	3,42050	6,1730	2,015463	4,219093
x_3	0,03662	8,99750	8,1739	6,533373	8,466207
x_4	0,20573	0,21000	0,2533	0,393606	0,240833
$g_1(x)$	0,0	-0,337812	-5758,603	-0,049774	-299,421047
$g_2(x)$	0,0	-353,9026	-255,5769	-1,930750	-803,114581
$g_3(x)$	-5,551e-17	-0,001200	-0,004400	0,016298	-0,050158
$g_4(x)$	-3,432983	-3,411865	-2,982866	-3,000997	-3,209018
$g_5(x)$	-0,080729	-0,083800	-0,123900	-0,284904	-0,065675
$g_6(x)$	-0,235540	-0,235649	-0234160	-0,230001	-0,234979
$g_7(x)$	-9,094e-13	-363,2323	-4465,270	-27262,031799	-3212,606384
$f(x)$	1,7248508	1,7483094	2,433116	2,358168	1,956630

Assim como [4], os menores valores para a função objetivo foram obtidos com o método Evolução Diferencial Melhorada implementada em processamento paralelo. Além disso, independente do número de processadores, todas as restrições foram obedecidas no ponto ótimo.

Esses resultados com EDMP confirmaram as intuições de que unir em um único algoritmo a simplicidade e robustez da ED com os conjuntos embaralhados da ECE deram certo.

Tabela 4.5: Resultados do problema de uma viga engastada para ECE.

Variáveis de projeto	2 Conjuntos t=7,41s	4 Conjuntos t=4,88s	10 Conjuntos t=6,72s	20 Conjuntos t=7,99s
x_1	0,2794	0,2055	0,2057	0,2058
x_2	2,8417	3,4753	3,4724	3,4703
x_3	7,4943	9,0393	9,0366	9,0358
x_4	0,2991	0,2057	0,2058	0,2058
$g_1(x)$	-0,5225	-2,1166	-3,9511	-1,1344
$g_2(x)$	-0,8868	-17,8126	-4,2678	-0,4141
$g_3(x)$	-0,0197	-0,0002	-0,0001	0
$g_4(x)$	-3,1754	-3,4321	-3,4326	-3,4328
$g_5(x)$	-0,1544	-0,0805	-0,0807	-0,0808
$g_5(x)$	-0,2326	-0,2355	-0,2355	-0,2355
$g_7(x)$	-1089,7967	-1,1995	-2,6463	-3,1720
$f(x)$	2,0614	1,7256	1,7253	1,7251

Tabela 4.6: Resultados obtidos com o Método EDMP

Variáveis de projeto	1 proc t= 0,03s	2 proc t= 0,02s	4 proc t=0,02s	8 proc t=0,14s
x_1	0,2057	0,2057	0,2057	0,2057
x_2	3,4705	3,4705	3,4705	3,4705
x_3	9,0366	9,0366	9,0366	9,0366
x_4	0,2057	0,2057	0,2057	0,2057
$g_1(x)$	-1,6e-09	-4,9e-09	-6,7e-10	-1,0e-08
$g_2(x)$	-1,1e-09	-1,3e-08	-1,4e-08	-3,9e-09
$g_3(x)$	6,9e-13	6,9e-13	8,6e-13	-2,0e-13
$g_4(x)$	-3,4330	-3,4330	-3,4330	-3,4330
$g_5(x)$	-0,0807	-0,0807	-0,0807	-0,0807
$g_6(x)$	-0,2355	-0,2355	-0,2355	-0,2355
$g_7(x)$	-1,1e-09	-3,5e-09	-6,1e-09	-1,8e-08
$f(x)$	1,7248	1,7248	1,7248	1,7248

CONCLUSÕES

As análises das simulações realizadas mostram que o algoritmo EDMP é eficiente e robusto. Além disso, confirmaram a intuição inicial de que grandes populações podem ser divididas em populações menores, com a busca realizada por meio de processamento em paralelo. Devido aos avanços de *hardware* e *software* surgiram máquinas que executam tarefas com vários processadores permitindo a troca de informações com rapidez, o que resulta em economia de tempo e esforço computacional. Isto ficou evidente com EDMP, o tempo de processamento durante a execução do algoritmo melhorado é consideravelmente menor quando comparado à outros algoritmos tais como Algoritmos Genéticos, Evolução com Conjuntos Embaralhados e Evolução Diferencial. Além disso, o algoritmo EDMP é relativamente simples e mostrou-se eficiente em diversos contextos.

Agradecimentos

- SBM
- Organizadores X Bienal de Matemática

Contato
milenabrandao@ufu.br
dorcio@ufu.br

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRANDÃO, M. A. L. (2014). *Evolução Diferencial Melhorada Implementada em Processamento Paralelo*. Tese(doutorado) Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
- [2] COELLO C. A. C. (2000). *Use of a self-adaptive penalty approach for engineering optimization problems*. *Computers in Industry*, v.41, n.2, p.113-127.
- [3] DEB, K., DASGUPTA, D. and MICHALEWICZ. (1997). *GenAS: a robust optimal design technique for mechanical component design*. *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications* Berlin, p. 497-514.
- [4] HU, X.; EBERHART, R.; SHI, Y.(2003). *Engineering optimization with particle swarm*. *IEEE Conference on Swarm Intelligence*, Indianapolis, Indiana.
- [5] OLIVEIRA, G.T.S. (2011). *Projeto ótimo de robôs manipuladores 3r considerando a topologia do espaço de trabalho*. Tese(doutorado) Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
- [6] STORN, R. (1996) *On the Usage of Differential Evolution for Function Optimazation*. *Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NA- FIPS,1996)*, Berkeley, p. 519-523, IEEE.
- [7] VANDERPLAATS, G. (1984). *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. McGraw-Hill, USA.



MÉTODOS HISTÓRICOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

JOÃO CLÁUDIO BRANDEMBERG

BELÉM, 20 A 24 DE JUNHO DE 2022

*Para Dona Ivone Brandemberg (1934 – 2021),
In Memoriam.*

SUMÁRIO

Prefácio

1 UM ROTEIRO PARA A APRESENTAÇÃO DOS CONTEÚDOS

- 1.1 O Método da Falsa Posição
- 1.2 O Teorema de Thales
- 1.3 As Proporções de Eudoxo
- 1.4 O Teorema de Pitágoras
- 1.5 As Fórmulas de Resolução de Equações Algébricas
- 1.6 O Princípio de Cavalieri
- 1.7 A Aritmética de Wallis
- 1.8 O Cálculo e Aplicações

2 SOBRE AS ATIVIDADES

- 2.1 Atividade: Falsa Posição
- 2.2 Atividade: Teorema de Thales
- 2.3 Atividade: Proporções de Eudoxo
- 2.4 Atividade: Teorema de Pitágoras
- 2.5 Atividade: Equações Algébricas
- 2.6 Atividade: Princípio de Cavalieri
- 2.7 Atividade: Aritmética de Wallis
- 2.8 Atividade: Cálculo e Aplicações

Referências Bibliográficas

PREFÁCIO

Uma discussão recorrente no ensino de conteúdos matemáticos está intimamente relacionada à abordagem didático/pedagógica na qual eles são trabalhados, seja a mesma do tipo construtiva, logicista ou formal. Para nossas discussões, enfatizamos que os conteúdos matemáticos relacionados a problemas a serem resolvidos em atividades de ensino ou extraescolares, tem origem histórica e dispõem de métodos históricos de resolução específicos, sendo que um mesmo tipo de problema pode ser resolvido com a utilização de mais de um método.

Tal multiplicidade de métodos de resolução de problemas que provêm do desenvolvimento do conhecimento matemático e do aprimoramento de métodos primários ou mesmo da obtenção de novos métodos, mediante o trabalho de estudiosos na busca de formas mais lapidares e precisas de se resolver um problema matemático.

Objetivamos em nosso minicurso uma descrição ou mesmo um resgate de alguns dos métodos históricos de resolução de problemas que consideramos importantes por sua funcionalidade, amplitude, aplicabilidade e que podem ser utilizados em uma abordagem de ensino de matemática que vai além dos conteúdos específicos dos quais tais métodos se constituíram.

Desde 2005, vimos enfatizando e inferindo um uso da História da Matemática como uma forte componente metodológica para o ensino de Matemática em sala de aula e, portanto, aqui, nosso texto deve se constituir como um ma-

terial histórico e de ensino, passível a ser utilizado em turmas de matemática na Educação Básica e/ou em turmas de formação de professores de Matemática, na graduação.

Esta apresentação escrita, uma historiografia, não segue uma linearidade homogênea, mas sempre que possível inferimos certa cronologia. De fato, os métodos (técnicas, algoritmos) que selecionamos compreendem um amplo período da história do desenvolvimento dos conteúdos (e conceitos) matemáticos que vai da antiguidade clássica (Babilônia, Egito, Grécia), passando pelo renascimento italiano, com suas fórmulas de resolução de equações por radicais e chegando a modernidade com o Cálculo e suas aplicações.

Buscamos descrever um desenvolvimento histórico-epistemológico de conceitos matemáticos, seguindo os métodos de resolução dos problemas elencados, por suas importâncias e considerando aspectos que levaram ao seu desenvolvimento; o que nos permite trabalhar tal material histórico como uma fonte de atividades para o ensino de matemática. De forma prática, a preparação (produção) de atividades de cunho histórico.

Tais atividades, elaboradas adequadamente, nos permite a inclusão de elementos desenvolvidos ao longo da história da matemática, com vistas à compreensão de determinados conceitos.

De fato, abordamos aspectos do desenvolvimento de conceitos (e métodos) matemáticos, como os conceitos de área e volume, atividades práticas envolvendo teoremas importantes historicamente, além de iniciarmos um estudo de documentos antigos, como: os tabletes babilônicos e os papiros egípcios.

Como vimos enfatizando, a alguns anos, nossas atividades perpassam ao simples encaminhamento passo a passo e mecanizado, devendo serem conectadas aos aspectos cotidianos, escolares e acadêmicos da cultura matemática, em uma discussão que considere os erros e acertos produzidos na busca de respostas que podem encaminhar a novos desafios na resolução de problemas que

ampliem e multipliquem os caminhos criativos que levam as novas fronteiras do conhecimento matemático.

São esses métodos de resolução de problemas matemáticos, construídos historicamente, que apresentamos, resumidamente a seguir, em um roteiro de composição da escrita de nosso minicurso.

BELÉM, JUNHO DE 2022.

João Cláudio Brandemberg - UFPA

UM ROTEIRO PARA A APRESENTAÇÃO DOS CONTEÚDOS

Para a apresentação de nossos métodos históricos e atividades que compõem o minicurso, seguiremos, um roteiro sumarizado, proposto por Brandenberg, em 2019, constituído de 08 (oito) unidades, a saber: O Método da Falsa Posição; O Teorema de Thales; As Proporções de Eudoxo; O Teorema de Pitágoras; As Fórmulas de Resolução de Equações Algébricas; O Princípio de Cavalieri; A Aritmética de Wallis; O Cálculo e Aplicações. Além de três seções de atividades intercaladas, cobrindo o assunto discutido nas unidades.[8]

1.1. O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

Neste item, buscamos o resgate de um desses métodos, que julgamos importante e que em nossa opinião deveria constar no programa oficial. Trata-se do Método (ou regra) da Falsa Posição, que historicamente é originário do Antigo Egito.

Segundo [6], página 9, são problemas de uma época que estavam ligados, principalmente, a questões relativas as propriedades (demarcação de terras) e ao consumo e produção de alimentos. Posteriormente a questões de natureza bélica. As principais fontes históricas destas questões são os papiros. Onde destacam-se: o Papiro de Rhind (1650 a. C.) e o Papiro de Moscou (1850 a. C.).

2CAPÍTULO 1. UM ROTEIRO PARA A APRESENTAÇÃO DOS CONTEÚDOS

O método da Falsa Posição é historicamente considerado um procedimento aritmético por sua abordagem (apresentação) essencialmente retórico comum à matemática egípcia. Tal método consiste de uma técnica ou procedimento aritmético que parte de um número “escolhido”, que denominamos valor inicial falso e a partir do qual obtemos o valor verdadeiro, a solução do problema a ser resolvido [19].

A resolução deste tipo de problema, que envolve apenas operações de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão, e em uma versão posterior, o cálculo de raízes, é bem antiga. Como podemos ver nos problemas 24 e 26 do papiro de Rhind – “Uma quantidade adicionada de sua sétima parte resulta 19” e “Uma quantidade e sua quarta parte perfazem 15” [1].

Em acordo com [19] e [23], iremos considerar aqui, a importância do método da Falsa Posição, por considerarmos o seu papel histórico na construção do pensamento algébrico a partir do exercício de intuições antecedentes, e fundamentais, ao processo de formalização (algoritmos e operações).

Inferimos a necessidade de intuições anteriores às manipulações simbólicas características da linguagem matemática formal. Assim, nosso resgate do método da Falsa Posição perpassa aos objetivos, didaticamente justificados, indo além de uma apresentação meramente técnica de processos mecânicos de resolução de problemas matemáticos.

1.2. O TEOREMA DE THALES

Nascido em Mileto, no início do século VI a. C. Thales, de origem fenícia, foi considerado como o primeiro dos filósofos naturais e um homem de grande habilidade, tanto na política quanto na produção de fazeres práticos. Foi considerado um dos sete sábios da antiguidade, capaz de façanhas, como, prover o desvio do curso de um rio com objetivos militares [3].

Os gregos como Thales, ao herdarem o conhecimento matemático, em sua

maioria importado do Egito e da Mesopotâmia, de natureza empírica e sacerdotal, passam a tratá-lo de forma sistemática, substituindo as soluções do tipo receitas por deduções, trocando as justificativas experienciais por bases teóricas, calcadas em demonstrações.

No entanto, a matemática grega era prioritariamente geométrica, com pouco interesse em questões práticas e aritméticas de contagem e medida.

Thales foi o primeiro matemático grego a tentar uma demonstração geométrica, sendo inclusive reportadas a ele as seguintes afirmações: a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos; os lados de triângulos semelhantes são proporcionais; um círculo é cortado ao meio por qualquer de seus diâmetros [2].

Os resultados apresentados por Thales revelam preocupações bem diferentes das necessidades práticas dos babilônios e egípcios. Não são enunciados de regras práticas ou aplicações particulares e sim formulações de cunho teórico. Temos uma busca de justificativa para os resultados obtidos, não uma demonstração formal, mas, uma argumentação lapidada do processo de descoberta associando intuição e dedução [11].

O modo como Thales calculou a distância de um navio a praia, pode não ter sido inovador, mas Thales apresenta uma justificativa do tipo generalização de casos particulares observados empiricamente: uma observação de que objetos projetam sombras que em algum momento são iguais as suas alturas.

O enunciado a seguir, que denominamos Teorema de Thales, é, sem dúvida um dos mais divulgados nos livros didáticos de matemática nas escolas. O caso comensurável do dito teorema será enunciado da seguinte forma: Sejam duas retas r e s intersectando um feixe de (três) paralelas nos pontos A , B e C (reta r) e A' , B' e C' (reta s), respectivamente, temos válida a proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Tal resultado decorre do fato de podermos traçar por A uma paralela à reta s e determinarmos um paralelogramo e tomarmos as devidas relações, considerando o ponto E entre B e B' e o ponto F entre C e C' .

Como podemos observar, uma demonstração deste tipo não apresenta grande generalidade, mas reforça a verificação de um caso particular correspondente, onde segmentos de reta envolvidos são comensuráveis [11].

Ao que parece a “verificação” de Thales, que nos infere grande importância, resolve efetivamente, apenas os problemas envolvendo elementos (segmentos, grandezas) comensuráveis. Uma maior generalidade, atingindo a incomensurabilidade, só nos será apresentada com as proporções de Eudoxo.

1.3. AS PROPORÇÕES DE EUDOXO

Para determinar quadraturas (áreas) ou cubaturas (volumes) de figuras geométricas os matemáticos gregos, especialmente Eudoxo, Euclides e Arquimedes, produziam uma razão com outra figura conhecida (quadrados e cubos). Para tanto, os gregos desenvolveram uma sofisticada Teoria de grandezas (Magnitudes) e Proporções, principalmente os trabalhos de Eudoxo de Cnido. O matemático e filósofo, Eudoxo tem sua origem associada a cidade de Cnido por volta do século V a. C. foi aluno de Platão e trabalhou nas cortes do Egito antes de voltar para Atenas e fundar sua escola. Sua teoria das proporções encontra-se descrita no livro V dos Elementos de Euclides de Alexandria (300 a, C.). Da mesma forma suas especulações sobre seções cônicas, volumes e duplicação do cubo, constam do Livro XII [3] [7].

Como pode ser visto nos Elementos de Euclides, a Teoria das Proporções de Eudoxo se baseia nas noções de parte e múltiplo e da definição de razão. Uma teoria considerada inovadora, pois se aplica a grandezas comensuráveis e

incomensuráveis e se assenta em sete proposições.

Com destaque para: Livro V5 – *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos.*

De fato, foi Eudoxo de Cnido, quem idealizou um método para relacionar a magnitude de uma área (ou volume) de uma figura curvilínea com o “limite” das áreas (volumes) progressivas de polígonos (poliedros). Logo, se trata de demonstrar que é possível encontrar um polígono (poliedro) na sucessão e cuja área (volume) difere da requerida grandeza, por uma diferença tão pequena quanto se queira. Isso, é o que vemos no enunciado da Proposição XI dos Elementos, Euclides, uma descrição do chamado *método de exaustão* de Eudoxo. Atualmente, denominado Axioma de Eudoxo-Arquimedes, a saber: “Dadas duas magnitudes (grandezas) desiguais, se da maior se subtrair uma magnitude maior do que a sua metade, e do que sobrar uma magnitude maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrá uma magnitude que será menor do que a menor das magnitudes dadas”. [7] [11].

1.4. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Ao perguntarmos a um estudante sobre o Teorema de Pitágoras, certamente teremos uma resposta do tipo $a^2 + b^2 = c^2$, relacionando os lados de um triângulo retângulo. De certo modo, para nossos estudantes, as palavras catetos e hipotenusa carecem de sentido, assim como, o teorema carece de aplicações. Em função disso, intencionamos, aqui, em nossa apresentação do teorema um resgate destes significados, de suas aplicações e de sua importância histórico-cultural para o desenvolvimento da Matemática [8].

Tradicionalmente, o teorema está associado a Pitágoras, um filósofo grego

do sexto século a. C., que fundou uma irmandade (os pitagóricos) e que posteriormente seus membros passaram a trabalhar com a Matemática. Nascido em Samos na Grécia, foi para Crotona, no sul da Itália, por volta de 513 a. C., buscando escapar de perseguições políticas, onde fundou uma associação religiosa que adquiriu grande influência política até que uma rebelião dos habitantes da cidade o forçou a mudar para Metaponto, onde veio a morrer.

No entanto, evidências históricas sugerem que o teorema era do conhecimento de diversas culturas da antiguidade, sendo encontrado em diferentes formas em documentos egípcios, babilônicos, árabes, chineses e gregos. Provavelmente foi introduzido na Grécia por Pitágoras [3].

Um enunciado do Teorema de Pitágoras que podemos considerar é o que se encontra na proposição 47 do livro um dos Elementos de Euclides: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto. ” O enunciado de Euclides é um enunciado sobre áreas e não sobre os comprimentos dos lados de um triângulo. Isso se deve ao fato de os gregos utilizarem razões para comparar quantidades [8].

Para os gregos um segmento é um segmento e não um número. No entanto, no dia a dia, claramente, comprimentos eram calculados e medidos na Grécia e em outras culturas. Assim, na tradição da cultura grega existe uma lacuna real que difere a matemática teórica (acadêmica) do uso cotidiano das ideias matemáticas (cultural) [2].

1.5. AS FÓRMULAS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Historicamente, inicialmente, foram tratados problemas e suas resoluções que se representavam equações do primeiro e segundo grau, como oriundos das necessidades de sobrevivência dos povos antigos; um avanço posterior, se

deve aos povos de origem hindu-árabe. De fato, os árabes foram os grandes divulgadores da matemática no período que compreende os séculos IX ao XII.

Como consequência desta influência árabe, temos um novo período, no qual os matemáticos, principalmente os representantes do renascimento italiano, se dedicaram a resolução de equações do terceiro grau e do quarto grau; por um período superior a 200 anos de muitas descobertas, conquistas, derrotas, batalhas, desafios e trabalho duro [8].

No século XVI, com o renascimento, os matemáticos italianos Scipione Del Ferro (1465-1562), Girolamo Cardano (1501-1576), Niccolò Fontana (Tartaglia) (1500-1557) e Ludovico Ferrari (1522-1565) descobrem, ou criam fórmulas para resolução algébrica de equações do 3º e 4º graus. Entretanto, para equações de graus maiores a resolução algébrica se transforma em um tema de grande inquietação na comunidade matemática (p. 9) [4].

Em uma síntese histórica, temos:

Sobre a EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU: Segundo [1], a resolução de equações, em particular as equações do primeiro grau, é uma técnica (método, problema) bem antiga. Como podemos ver no problema 24 do papiro Rhind: “Uma quantidade adicionada de sua sétima parte resulta 19”. Assim, temos a resolução de problemas que se constituem no uso das operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão. Atualmente, resolver uma equação deste tipo se faz, isolando a variável, temos então, uma forma geral para representar uma equação do primeiro grau: $ax + b = 0$, onde a e b são números reais, $a \neq 0$. Desse modo, resolver uma equação do primeiro grau, consiste em escrevê-la na forma geral e realizar as operações de subtração e divisão (operações inversas).

Sobre a EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU: o matemático islâmico Al-Khowarizmi (780, 850) foi o primeiro a escrever sobre a resolução de problemas

do segundo grau, em seu famoso livro *Al-jabr Wa Muqabalah*. De fato, podemos ver em alguns trechos do seu livro, problemas do tipo: “*Eu tenho que dividir dez em duas partes, e multiplicar uma dessas partes pela outra. Após isso eu multiplico uma parte por ela mesma, e o produto desta multiplicação é quatro vezes o produto de uma parte pela outra*”.

Em notação moderna, tal equação pode ser expressa por: $x^2 = 4x(10 - x)$. Que reescrevemos, como: “Um quadrado igual a quatro (vezes 10) coisas menos quatro quadrados”. Em sua resolução, aparece, o cálculo de uma raiz quadrada.

Sobre a EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU: a resolução das equações do terceiro grau foi a maior contribuição à Álgebra desde antiguidade. O estudo das equações do terceiro grau, em nenhum sentido, foi motivado por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes de Matemática. De fato, para a utilização, atualmente, ou mesmo a época, dos métodos de resolução envolvendo a denominada fórmula de Cardano-Tartaglia, seria necessário reconhecer uma nova classe de entes matemáticos, a saber: os “Números Complexos”. Temos então, em sua resolução o cálculo de raízes cúbicas.

Ao utilizarmos o método de resolução de Cardano-Tartaglia, na resolução de uma equação do terceiro grau (cúbica), fazemos uso da fórmula, a seguir, temos, aparentemente, um processo simples, muitas vezes enganoso. Uma dificuldade conceitual e o peratória que não tem permitido um uso efetivo do ensino de equações do terceiro grau na Educação Básica.

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Sobre a EQUAÇÃO DO QUARTO GRAU: para resolver uma equação do quarto grau, pode-se também indicar uma fórmula que exprima suas raízes

através de seus coeficientes. Esta fórmula, no entanto, é bem mais complicada que a fórmula de resolução de uma equação do terceiro grau. O primeiro a resolver uma equação do quarto grau, a partir do método de resolução de equações do terceiro grau, foi Ludovico Ferrari (1522, 1560), o qual criou a fórmula de resolução por radicais da equação do quarto grau, a qual foi publicada, pela primeira vez, por Cardano no seu *Ars Magna*, (p. 239-240), publicado em 1545. [9].

Com a publicação do *Ars Magna*, que traz uma nova visão sobre a resolução de equações, apresentando técnicas algébricas, a descoberta dos italianos, ganha repercussão mundial, e no início do século XVIII com os estudos de Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813), entre outros matemáticos, o assunto toma novos contornos, na busca de um processo mais geral de resolução (teórico, estruturado ou mesmo numérico) para as equações de grau superior ao quarto.

Historicamente, o desenvolvimento da resolução de equações vai se consolidar na formação dos conceitos de estruturas algébricas, como as estruturas de Grupo, Anel e Corpo, os quais estão ligados à evolução da Teoria dos Números (inteiros, reais, complexos), que generalizam os processos de resolução algébricos e na resolução de problemas de cunho geométrico, como o uso das estruturas de simetrias [28].

Esta evolução do pensamento ou do conhecimento matemático (conteúdos, conceitos) permitiu um avanço, tanto no campo tecnológico quanto no campo teórico e no campo educacional. De fato, no campo educacional temos uma maior produção, com a introdução do pensamento algébrico que se caracteriza inicialmente com a obtenção de processo de extração de raízes (quadradas, cúbicas, quárticas) de números, de equações mais gerais e, posteriormente, com um estudo sistemático das equações algébricas e a introdução de novos conceitos e propriedades desses entes matemáticos, que permitem tratar do ensino de uma matemática complexa de forma mais simples [8].

1.6. O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Posterior aos processos de aritmetização e algebrização de segmentos de retas em uma tradução das situações geométricas, apontadas por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1607-1665) e Giles de Roberval (1602-1675), entre outros; para além da Geometria Analítica (também um método), surge na Europa do século XVII um novo método na resolução de problemas matemáticos, o chamado Método dos Indivisíveis [11].

A influência de Arquimedes se faz presente quando estudamos os trabalhos de Johann Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Suas contribuições são fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo, e nos mostram a riqueza e a força do pensamento arquimediano [8].

O método de quadraturas no século XVI segue a tradição teórica do método de exaustão desenvolvido na antiguidade grega, onde as quadraturas de figuras limitadas por curvas e retas são obtidas pela comparação com “retângulos” inscritos e circunscritos que produzem valores superiores e inferiores ao desejado. O que pode caracterizar o método da exaustão como um dos primeiros elementos no desenvolvimento de uma matemática infinitesimal [8].

De fato, são os astrônomos Kepler e Galileu, os primeiros a fazerem uso dos indivisíveis no estudo do movimento; e juntamente com Cavalieri, transformam o uso dos “infinitamente pequenos” num poderoso conjunto de técnicas (um método) para comparar áreas e volumes. Cavalieri é quem amplia as possibilidades de tratar uma “matemática infinitesimal”. Ele adere à concepção atomística dos gregos; e em 1635, com a publicação de seu livro *Geometria Indivisibilibus Continuorum*, busca sistematizar todo esse conhecimento [8].

Como podemos ver em [28], na página 144, em sua percepção dos indivisíveis Cavalieri, busca explicitar o que entende com a seguinte explicação: “figuras planas podem ser pensadas como um tecido de eixos (retas) paralelos;

os sólidos seriam como livros, compostos por folhas (planos) paralelas”. No entanto, continua “a diferença entre uma folha de papel e um indivisível é que elas existem em um número finito e possuem uma espessura (finita)”.

Os indivisíveis de Cavalieri podem ser interpretados como formas infinitamente “finas” e que possuem uma dimensão inferior em uma unidade ao conjunto contínuo formado pelo conjunto de todas estas formas.

Sua aplicação dos indivisíveis ao cálculo de áreas de figuras planas é realizada a partir da obtenção de uma reta tangente a figura (regula), nos moldes da quadratura da parábola de Arquimedes, e uma reta tangente oposta. Para o caso de sólidos ele utiliza planos tangentes (paralelos).

Assim, Cavalieri formula seu princípio, na concepção original, composto das seguintes assertivas:

- a) O total de indivisíveis de uma figura independe da diretriz (regula);
- b) As figuras planas (sólidos) estão na mesma proporcionalidade que a totalidade de suas retas (planos), tomadas a partir de uma diretriz (regula) qualquer.

Para Cavalieri, se dois sólidos com a mesma altura, têm suas seções planas de mesmo nível com a mesma área, se infere que têm o mesmo volume. Seu método é pragmático, isto é, ele é considerado válido porque produz resultados corretos [28].

De forma equivalente, dadas duas figuras planas ou sólidas, situadas entre dois planos tangentes e paralelos entre si, se um desses planos se deslocar paralelamente, até coincidir com o outro e, em cada posição, determinar nas figuras seções de razão constante, então as duas figuras estão nessa mesma razão [11].

1.7. A ARITMÉTICA DE WALLIS

Os trabalhos de maior destaque de John Wallis (1616-1703) são os livros: *De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus* (1655), onde ele apresenta as cônicas como curvas planas e *Arithmetica Infinitorum* (1656), onde faz um tratamento aritmético para problemas anteriormente abordados por métodos geométricos. Em acordo com Lopes, em 2016, [17], em seu *Arithmetica Infinitorum* Wallis basicamente iniciatratando de uma lista de termos numéricos (começando do zero) e em proporção aritmética crescente, isto é, algo do tipo $(0, 1, 2, \dots, n)$. Buscando determinar a razão entre a soma dessas quantidades e a soma dos $n + 1$ maiores termos.

Wallis afirma não haver distinção se o número de termos tomados for finito ou infinito, pois a razão se manterá igual a meio, indicando que o número de termos seja infinitamente grande, as distancias entre os termos da “lista” será infinitamente pequena (infinitesimal), tendendo a zero.

O método de Wallis, como descrevemos, é largamente aplicado a problemas geométricos dos quais já se tinha a solução clássica, visando garantir a solidez dos mesmos. Por exemplo, ele utiliza a razão meio, obtida de

$$\frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n}{n + n + n + n + n + \dots + n} = \frac{1}{2}$$

para afirmar a razão entre a área de um triângulo e a área de um paralelogramo de mesma base e de mesma altura [8].

A técnica de Wallis consiste em preencher uma superfície (sólido) com “retas” ou paralelogramos (paralelepípedos) de largura infinitesimal e uniforme em quantidade infinita. No caso do triângulo, temos mesma largura, porém comprimento variável, de modo que ao reduzir sua largura nos aproximamos dos lados do triângulo, obtendo-se um erro ou diferença progressivamente menor. Tal largura deve ser tão pequena quanto possível: um infinitésimo da altura do

triângulo. Apesar da noção de infinitésimo já existir intuitivamente, o termo “infinitesimal”, foi uma invenção de Wallis [8], [17].

Segundo [22], página 30, para Wallis, o infinitesimal possui uma existência natural, intuitiva e que corresponde, simplesmente, a algo que pode ser diminuído, continuado ou comprimido, tanto quanto se quiser). Wallis explica que estes “infinitésimos” surgem da divisão de uma magnitude finita e outra infinita, sendo este um infinito real (ou absoluto) o qual é uma quantidade maior que qualquer outra (toda) atribuível.

Para Wallis, uma quantidade finita pode ser representada pela soma de infinitos percentuais fixos e infinitesimais ou pode-se usar numa soma infinita de partes cada vez menores, porém finitas, que compõem um todo [8].

Segundo [11], página 569, a abordagem aritmética dos indivisíveis, apresentada por John Wallis, se tornou muito importante para o desenvolvimento do Cálculo. A originalidade de seu livro *Arithmetica Infinitorum*, de 1656, consiste na utilização de procedimentos de caráter calculatório para realizar quadraturas e cubaturas.

1.8. O CÁLCULO E APLICAÇÕES

Uma evolução histórica do Cálculo, sua importância, suas aplicações e os aspectos que levaram ao seu desenvolvimento começa com a tentativa dos antigos em obter a quadratura de um círculo, assim como, de outras figuras curvas e da obtenção de retas tangentes a estas curvas.

Desta forma, delimitamos nosso período histórico, que considera, para início, a fase: **empírico – teórico – axiomática** da matemática grega, com os trabalhos de Arquimedes (265 a C), o qual foi o grande artífice no processo de construção do cálculo.

De fato, Arquimedes usou sua própria versão primitiva do cálculo integral,

que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual, para determinar áreas e volumes.

Um salto milenar, nos leva ao século XV, onde, visualizamos e buscamos apresentar um contexto social e econômico, fértil para o desenvolvimento do Cálculo, elencamos:

- 1 - As grandes navegações (século XV);
- 2 - A invenção da Imprensa – GUTENBERG (final do século XV);
- 3 - O Renascimento italiano: Luca Pacioli, Scipione Del Ferro, Nicollo Tartaglia, Girolamo Cardano, LudovicoFerrari, Rafael Bombelli e François Viéte;
- 4 - O desenvolvimento tecnológico (séculos XVI e XVII): a Matemática precisa dar respostas e ferramentas; surge a necessidade de se trabalhar com questões sobre áreas e volumes, associadas ao centro de gravidade de objetos geométricos, para diversos fins e com Lucas Valério (1552-1618) renascem os métodos desenvolvidos pelos antigos gregos: ARQUIMEDES, APOLÔNIO, EUDOXO e EUCLIDES.
- 5 - O ombro de gigantes: GALILEU GALILEI (1564-1642) (Um vislumbre do cosmo) e JOHANNES KEPLER (1571-1630) (O funcionamento do Sistema Solar).
- 6 - Na Passagem do século XVI para o século XVII, o eixo de produção Matemática migra da costa italiana para o norte europeu (Alemanha, Inglaterra e França);
- 7 - Os Logaritmos de John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1631);
- 8 - O desafio do infinito no século XVII: as somas infinitas, Jacob Bernoulli (1657-1705), Johann Bernoulli (1667-1748) seus problemas e seus discípulos. A volta do cálculo de áreas (problemas de quadratura) e volumes;

9 - Isaac Barrow e as relações (conexões) entre os problemas de Tangentes e o cálculo de áreas e volumes;

10 - Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). [7].

Uma viagem de exploração, pode ser feita, pelos meandros contextuais que levam a criação do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz, no século XVII. Onde Newton e Leibniz se tornam os protagonistas.

Newton e Leibniz foram os criadores do Cálculo, no entanto, suas abordagens são bem diferentes quanto a forma e influências, sendo que com suas variações Newton trata do que conhecemos hoje por Derivada, enquanto Leibniz nos traz o conceito de Integral.

Somente com o trabalho desenvolvido pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), somos apresentados ao conceito de Limite, quando ele afirma que os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo [8].

SOBRE AS ATIVIDADES

Em nossas atividades (estruturadas ou semiestruturadas) pensamos abordar aspectos do desenvolvimento histórico e epistemológico de conceitos (e métodos: técnicas, algoritmos, ferramentas) matemáticos, como os conceitos de área e volume, atividades práticas envolvendo teoremas importantes ou mesmo, um estudo de documentos antigos (tabletes e papiros). Atividades que devem ser elaboradas com um tema e objetivos bem definidos ligados a obtenção do conhecimento matemático direcionado a um determinado método (ou mais de um).

Apresentamos, então, atividades que possam ser trabalhadas no processo de sala de aula e sirvam de modelos para a elaboração de outras atividades por professores e estudantes. [8].

Além disso, trazemos outras atividades (problemas) que devem ser adaptadas ao formato didaticamente adequado, como os problemas práticos, técnicos e/ ou recreativos como se apresentam, como, por exemplo: o problema das duas torres (que, em uma escrita do século XIII, considera uma fonte entre duas torres, e que dois pássaros, partindo do alto das torres com a mesma velocidade chegam à fonte juntos), o qual pode ser apresentado em uma reescrita adequada e cuja solução pode ser obtida em termos do uso do método da Falsa Posição e estimativas, dos teoremas de semelhança de triângulos ou com o uso do Teorema de Pitágoras.

Assim, nas seções de atividades, a seguir, propomos as que possam ser

trabalhadas no processo de sala de aula e sirvam de modelos para a elaboração de outras atividades por professores e estudantes.

2.1. ATIVIDADE: FALSA POSIÇÃO

Texto Temático: Os problemas *Aha* no Papiro de Rhind.

“Na antiguidade a Matemática consistia, no período anterior a consolidação do império grego, essencialmente em um ramo de conhecimento, que envolvia a resolução de problemas práticos relacionados às necessidades presentes, que desencadearia o que denominamos de Aritmética, principalmente no Antigo Egito e na Mesopotâmia.

Nesta linha, tem destaque, o Método (ou regra) da Falsa Posição, que historicamente é originário do Antigo Egito, onde de uma forma geral os problemas a época estavam ligados, principalmente, a questões relativas as propriedades (demarcação de terras), ao consumo e posteriormente a questões de natureza bélica. As principais fontes históricas deste conhecimento são os papiros, a saber: o Papiro de Rhind (1650 a. C.), o Papiro de Moscou (1850 a. C.), o Papiro de Kahun, o Papiro de Berlim e o Rolo de Couro” [6].

Vejamos então a resolução de problemas, do tipo “aha”, considerados do primeiro grau, e que envolvem apenas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Resolver os problemas 24 e 26 do papiro de Rhind:

“Uma quantidade adicionada de sua sétima parte resulta 19” e “Uma quantidade e sua quarta parte perfazem 15” [1].

Os métodos (algoritmos, técnicas) de resolução “antigo” e “moderno” nos permitem realizar comparações.

Resolução:

Na resolução do problema 26, “utilizando” o método da falsa posição, o Escriba egípcio é levado a “escolher” o número quatro como solução inicial.

Assim, temos $4 + 1 = 5$ e para obtermos 15 é suficiente multiplicarmos 5 por $3 = (2 + 1)$. De onde, podemos inferir que, multiplicando o valor inicial 4 por 3 se obtém 12, que é a solução desejada.

Na resolução do problema 24 o método utilizado (e o raciocínio) é o mesmo, fazemos

$$19 = 8\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

Logo, para obtermos a solução desejada, fazemos

$$7\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

Aqui, usamos a notação das frações unitárias típicas do Antigo Egito.

Atualmente, em acordo com [6], p. 41, para resolver uma equação do tipo $x + \frac{x}{7} = 19$ se faz, o isolamento da variável, isto é $x = \frac{19 \cdot 7}{8}$ ou ainda $x - \frac{19 \cdot 7}{8} = 0$.

Se quisermos eliminar a fração, fazemos $8x - 133 = 0$.

Temos então, uma forma geral para a equação do primeiro grau $ax + b = 0$, onde a e b são números, $a \neq 0$. Sua resolução é dada por $x = \frac{-b}{a}$.

2.2. ATIVIDADE: TEOREMA DE THALES

Texto Temático: As razões de Semelhança de Thales de Mileto.

“Nascido em Mileto, no início do século VI a. C. Thales, foi considerado um dos sete sábios da antiguidade, capaz de façanhas, incríveis, como promover o desvio em cursos de rios com objetivos militares. Os detalhes de suas ideias filosóficas e científicas são muito raros e com uma certa nuance mística. Afirmava-se também que Tales trouxera a geometria do Egito para a Grécia” [3].

“Ao herdarem o conhecimento matemático, em sua maioria importado do Egito e da Mesopotâmia, de natureza empírica e sacerdotal, os gregos passam a tratá-lo de forma sistemática, substituindo as soluções do tipo receitas por deduções, trocando as justificativas dadas pela experimentação por bases teóricas e demonstrações. ”

“Uma matemática grega, prioritariamente geométrica e com pouco interesse em questões práticas de contagem e medida. ”

“Thales foi o primeiro matemático grego a tentar uma demonstração geométrica, sendo inclusive reportadas a ele as seguintes afirmações: a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos; os lados de triângulos semelhantes são proporcionais; um círculo é cortado ao meio por qualquer de seus diâmetros” [2].

“Thales usou o caso de congruência de triângulos (ALA) para medir a distância a pontos inacessíveis (alturas de pirâmides, largura de rios). ”

“Segundo [18], com relação à Geometria, mais especificamente, relacionadas às definições, medidas e comparação de ângulos, o nome de Thales é associado a vários resultados (proposições), que acessamos a partir de Euclides de Alexandria. A saber:

- Os ângulos internos de um triângulo somam dois retos.
- Um ângulo é reto se e somente se pode ser inscrito numa circunferência.
- Se duas retas se cortam, elas determinam ângulos opostos congruentes.
- Em triângulos isósceles os ângulos da base são congruentes.
- Se dois triângulos têm dois ângulos e o lado comum a esses ângulos congruentes, então eles são congruentes.
- Triângulos semelhantes têm os seus lados respectivos proporcionais. ”

Vejamos então a resolução de um problema nos moldes do método proposto por Thales:

“Historicamente (ou diz a lenda), que usando uma estaca Thales verificou que em certa hora do dia a sombra projetada e a altura de uma estaca eram iguais. Ele concluiu que nesse mesmo horário o comprimento da sombra projetada pela pirâmide daria sua altura. Então, ao somar a metade da medida (largura) da base com o comprimento da sombra, ele encontrou a altura da pirâmide. ”

Problema 1. “Considere a pirâmide com cerca de 169 metros de altura e cujo ângulo entre o solo e cada face da pirâmide é de 60° . Determine a área de uma face da pirâmide. “

Resposta $\approx 19040 m^2$

A resolução segundo Thales:

Para calcular a área da face da pirâmide, considerando o cálculo da altura, Thales trata a semelhança entre triângulos: o que representa a pirâmide de lados h_f , 169 e b , e o seu triângulo modelo. Para simplificar, considerando o

ângulo de 60° , tomemos, o triângulo de lados:

$$1; \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{1}{2}$$

Temos as seguintes relações:

$$\frac{h_f}{1} = \frac{169}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow h_f = \frac{338\sqrt{3}}{3}$$

Além disso, a base da face é dada por $B = 2b$, onde $b = \frac{h_f}{2}$ ou seja, $B = h_f$. Logo, a área da face é dada por:

$$A_f = \frac{h_f^2}{2} = \frac{\left(\frac{338\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} = \frac{338^2}{6}$$

$$A_f \approx 19040 \text{ m}^2$$

Nesta linha podemos sugerir a resolução de problemas análogos ou problemas mais diretos, porém contextualizando, como:

“Se um paralelogramo e um triângulo tem mesma base e estão situados entre duas paralelas, então o paralelogramo tem o dobro da área do triângulo” e “Triângulos como mesma base e mesma altura tem mesma área”.

Os quais, apresentam uma conotação mais geral e teórica.

2.3. ATIVIDADE: PROPORÇÕES DE EUDOXO

Texto Temático: Podemos utilizar extratos do texto da seção 1.3, em atividades, envolvendo problemas sobre circunferências, como:

Problema 2. “Considere uma circunferência de diâmetro 32 cm. Divida a circunferência em oito partes iguais e construa o polígono inscrito. Qual o nome desse polígono? Qual a medida do raio da circunferência? Determine o comprimento do lado do polígono? ”

Problema 3. “Considere o quadrado $ABCD$ e os arcos de circunferência obtidos centrando o compasso em A e com raio AB e centrando o compasso em C e com raio CD . Considere ainda a diagonal AC que intercepta os arcos nos pontos E e F tais que $A - E - F - C$. Quanto mede o segmento EF ? ”

2.4. ATIVIDADE: TEOREMA DE PITÁGORAS

Texto Temático: O Método Kou-ku.

“No livro de Swetz Kao, publicado em 1998, p. 26-37, no segundo capítulo, intitulado “The Chiu Chang’s Problems Involving Right Triangles”, se apresentam problemas que partem da análise de situações cotidianas a luz do teorema de Pitágoras e de suas aplicações. Eles nos apresentam alguns termos do método Kou-ku de Chiu Chang: o lado menor adjacente ao ângulo reto é chamado kou, o lado maior adjacente ku e o lado oposto ao ângulo reto é hsien. [24].

Os três primeiros problemas são:

- a) Dados $kou = 3$, $ku = 4$. Qual o comprimento de $hsien$?
- b) Dados $hsien = 5$, $kou = 3$. Qual o comprimento de ku ?
- c) Dados $ku = 4$, $hsien = 5$. Qual o comprimento de kou ?

O método para resolver o problema c, toma o comprimento de kou igual a raiz quadrada da diferença dos quadrados de $hsien$ e de ku .”

$$kou = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3 \iff kou^2 = (hsien + ku)(hsien - ku)$$

Problema 4. “Considere o triângulo retângulo cujos quadrados sobre a hipotenusa e um dos catetos, respectivamente, são de áreas 82 cm^2 e 50 cm^2 . Determine a área deste triângulo”.

Resposta: 20 cm^2 .

Resolução: $hsien^2 = 82$, $ku^2 = 50$, logo queremos $kou^2 = 82 - 50 = 32$ e portanto, $kou = 4\sqrt{2}$. Como $ku = 5\sqrt{2}$, temos que a área do triângulo é dada por $\frac{1}{2}(4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}) = 20$.

Problema 5. “Um tronco de árvore (wooden) tem diâmetro 2,5 metros e uma borda de 0,7 metros, cortada considerando o diâmetro. Qual o valor máximo para a borda? Resposta: 2,4 metros. ”

Além desses problemas, podemos tomar outros problemas, com excelente tratamento para cálculos elementares na Educação Básica; como o problema da viga deslizante do tablete babilônico BM 85196. A saber:

Problema 6. “Uma “viga” de comprimento 30 (meio metro ou trinta metros) que está encostada em uma parede, seu topo desliza por 6 (dez centímetros ou seis metros). A que distância a base (pé) da viga fica da parede? ”

Resolução:

Temos um triângulo retângulo de lados 30, 24 e x . Logo,

$$x = \sqrt{30^2 - 24^2}$$

Na calculadora

$$x = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18$$

Ou ainda,

$$x = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{6^2(5^2 - 4^2)} = \sqrt{6^2 \cdot 3^2}$$

$$x = \sqrt{18^2} = 18$$

Ou (usando o método kow-ku)

$$x = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{(30 - 24)(30 + 24)} = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = 6 \cdot 3 = 18$$

Observe que vale a pena incentivar a produção de figuras (imagens, desenho) pelos estudantes.

2.5. ATIVIDADE: EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Texto Temático: Podemos utilizar o texto da seção 1.5, em atividades, envolvendo problemas sobre equações do primeiro ao quarto graus, como:

Problema 7. “Um quadrado mais 21 unidades é igual a 10 raízes. Qual é esse quadrado? ”

Cuja solução, essencialmente retórica é do tipo receita: tome primeiro a metade do número de raízes (5) e eleve ao quadrado (dá 25). De 25 subtraia 21, o resultado é 4 que tem raiz quadrada (2). De (5) subtraia esta raiz (2), você obtém (3) e o quadrado é 9. Se você somar as raízes (5) e (2) você obtém (7) e o quadrado é 49.

Em notação mais atual temos a equação $x^2 + 21 = 10x$ e a fórmula:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Podemos sugerir ainda, problemas de textos históricos adaptados, problemas lúdicos, problemas com uma nova “roupagem” ou desafios, como, respectivamente:

- “A soma da área e do lado de um quadrado (uma vez o lado) é $\frac{3}{4}$. Determine o lado do quadrado. ” (Problema do tablete BM13901#1).
- “Pessoas que estavam em uma reunião apertaram-se as mãos. Foi um total de 66 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião? ” [21].
- “Os alunos de uma turma resolveram comprar um presente custando R\$ 48,00 para o professor de Matemática, dividindo igualmente o gasto entre eles. Depois que 6 alunos se recusaram a participar da divisão, cada um dos alunos restantes teve que contribuir com mais R\$ 0,40 para a compra

do presente. Qual a percentagem de alunos da turma que contribuíram para a compra do presente? ” (Adaptação livre).

- “Um vendedor deseja vender uma mercadoria etiquetada, fazendo um desconto de 10% sobre o preço e ainda lucrando 20% sobre o preço de custo. Sabendo que o preço de custo foi 90 reais, qual o preço descrito na etiqueta? ” (Adaptação livre).

Um legado importante relacionado ao tema é o tratamento de problemas históricos extraídos da Aritmética de Diofanto de Alexandria, do Século III, como por exemplo o problema 02 do Livro IV, [16] a saber:

P2L IV – “*Trovare dui numeri tali che la loro differenza sia un numero dato, inoltre che la differenza tra i loro cubi sia assegnata*” (“Find two numbers such that their difference is a given number, moreover, that the difference between their cubes is assigned”) (Encontre dois números tais que sua diferença seja um número dado, além disso, que a diferença entre seus cubos seja atribuída).

Resolvendo, sejam os números $x + a$ e x , cuja diferença é a . Assim, para $(x+a)^3 - x^3$ temos $3ax^2 + 3a^2x + a^3$, dependendo de a e de x . Por exemplo: para $a = 1$ e $x = 1$ temos: $b = 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1^3 = 7$. Observe que $(a+x)^3 + x^3 = 9$.

Consideremos então, o seguinte adendo, apresentado por Gaspar Bachét (1581-1638), e comentado por Pierre de Fermat (1601-1665):

“*Dati dui cubi, trovanni altri due, la cui differenza sia uguale alla somma dei dati*” (“Given two cubes, find two more, whose difference is equal to the sum of the dice”) (Dados dois cubos, encontre mais dois, cuja diferença é igual à soma dos dados).

Resolvendo, “multiplica tre volte ciascuno dei due cubi per il lato dell’altro, dividi i prodotti per la differenza dei cubi, aggiungi al quoziente più piccolo il lato maggiore e toglia dal quoziente maggiore il lato minore; la somma e la differenza datanno i lati dei cubi cercati” (“multiply each by the side two cubes

three times the other, di products by the difference of the true cubes, bigger side to the smaller side and subtract or smaller side from the quotient; the sum and difference will give the sides of the cubes sought”) (multiplique cada um dos dois cubos três vezes pelo lado do outro, divida os produtos pela diferença dos cubos, adicione o lado maior ao quociente menor e subtraia o lado menor do quociente maior; estas soma e diferença darão os lados dos cubos procurados).

Por exemplificação tomemos $8 + 1 = 2^3 + 1^3 = 9$ queremos x e y tais que $x^3 - y^3 = 9$.

Seguindo a receita, temos: $y = \frac{3 \cdot 1 \cdot 8}{7} - 1 = \frac{17}{7}$ e $x = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{7} + 2 = \frac{20}{7}$.
de onde

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 - \left(\frac{17}{7}\right)^3 = \frac{8000}{343} - \frac{4913}{343} = \frac{3087}{343} = 9$$

Devemos comentar, em acordo com [16], que temos tradução do grego para o italiano, para o inglês e para o português. Assim, os cuidados nas adaptações devem ser efetivamente considerados.

2.6. ATIVIDADE: PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Texto Temático: Utilizamos o texto da seção 1.6 para tratarmos as atividades como a que envolve o seguinte problema sobre a determinação de áreas.

Problema 8. “Utilizando o Princípio de Cavalieri e uma comparação com um círculo, prove que a área da região plana delimitada por uma elipse de semieixos a e b vale πab ”

Resolução: Sejam a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o círculo $x^2 + y^2 = b^2$.

A reta $y = k$, $-b \leq k \leq b$ intersecta a elipse nos pontos de abscissa $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2}$ e o círculo nos pontos de abscissa $x = \pm \sqrt{b^2 - k^2}$. Portanto,

a reta $y = k$ determina na elipse uma seção de comprimento $2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$ e no círculo uma de comprimento $2\sqrt{b^2 - k^2}$.

Como estes indivisíveis correspondentes na elipse e no círculo são proporcionais na razão $\frac{a}{b}$, então, pelo Princípio de Cavalieri também a área da elipse (A_e) estará para a área do círculo (A_c). Logo,

$$\frac{A_e}{A_c} = \frac{a}{b} \Rightarrow A_e = \frac{a}{b}A_c = \frac{a}{b}\pi b^2 = \pi ab$$

2.7. ATIVIDADE: ARITMÉTICA DE WALLIS

Texto Temático: podemos utilizar extratos do texto da seção 1.7, para a apresentação de problemas sobre a soma de séries numéricas, como:

Problema 9. “determine as somas parciais da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + \dots”$$

Resolução: $S_n = n^2$

Podemos sugerir um desafio, como: “Determinar a soma da série “convergente”

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

2.8. ATIVIDADE: CÁLCULO E APLICAÇÕES

Texto Temático: podemos utilizar o texto da seção 1.8, para a apresentação de problemas, como:

Problema 10. “Dada a relação $y^2 = x^3$ entre os fluentes x e y . Determine, pelo Método de Newton, a relação entre as respectivas fluxões \dot{x} e \dot{y} . ” [8]

Resolução: Desenvolvendo a igualdade $(y + \dot{y}o)^2 = (x + \dot{x}o)^3$, obtemos:

$$y^2 + 2y\dot{y}o + \dot{y}^2o^2 = x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3$$

Cancelando y^2 com x^3 e dividindo tudo por o , temos,

$$2y\dot{y} + y^2o = 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2$$

de onde, $2y\dot{y} = 3x^2\dot{x}$.

Problema 11. “Determine, como proposto por Leibniz, a subtangente correspondente a um ponto da curva $y^2 = x^3$. ” [8]

Resolução: de $y^2 = x^3$, e usando as regras do cálculo de Leibniz, obtemos, $2ydy = 3x^2dx$.

Considerando S a subtangente, temos:

$$\frac{y}{S} = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

De onde

$$S = \frac{2y^2}{3x^2} = \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2x}{3}$$

Problema 12. “Tente determinar uma forma geral para determinar a área sobre uma curva $f(x)$ restrita a um intervalo $[a, b]$. ”

Problema 13. Na direção do realizado por Isaac Barrow (1630 -1667), achar a área sob as curvas, entre os extremos indicados a seguir:

- a) $f(x) = x^2$, entre $x = 0$ e $x = 1$.
- b) $f(x) = x$, entre $x = 0$ e $x = 2$
- c) $f(x) = x^3$, entre $x = 1$ e $x = 5$.
- d) $f(x) = x^4$, entre $x = 1$ e $x = 4$.
- e) $f(x) = x^5$, entre $x = 0$ e $x = 2$
- f) $f(x) = x^6$, entre $x = 1$ e $x = 3$.
- g) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, entre $x = 1$ e $x = 2$.
- h) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, entre $x = 1$ e $x = 2$.
- i) $f(x) = x^7$, entre $x = 0$ e $x = 1$.
- j) $f(x) = x^{-1}$, entre $x = 1$ e $x = 4$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BEKKEN, O. (1994) Equações de Ahmes até Abel. Tradução: José Paulo Quinhões Carneiro. GEPEM-USU.
- [2] BERLINGOFF, W. P. GOUVÊA, F. Q. (2008) A Matemática através dos Tempos. São Paulo, SP: Edgard Blucher.
- [3] BOWDER, D. (1982) Quem foi quem na Grécia Antiga. São Paulo, SP: ART Editora S. A.
- [4] BRANDEMBERG, J. C. (2011) Uma Abordagem Histórica da Resolução da Equação do 4^o grau. Educação Matemática na Amazônia – Coleção III – V. 2. Belém, PA: SBEM.
- [5] BRANDEMBERG, J. C. (2017) História e Ensino de Matemática. Revista Exitus (online); Volume 7, Número 2. P. 16-30. UFOPA.
- [6] BRANDEMBERG, J. C. (2017) O Idioma da Álgebra. Educação Matemática na Amazônia – Coleção V – V. 1. Belém, PA: SBEM.
- [7] BRANDEMBERG, J. C. (2017) Uma História da Integral: de Arquimedes a Lebesgue. São Paulo, SP: livraria da Física.
- [8] BRANDEMBERG, J. C. (2019) Métodos Históricos: sua importância e aplicações ao ensino de matemática. São Paulo, SP: livraria da Física.
- [9] CARDANO, G. (1993) The Rules of Algebra (Ars Magna). Translated by Richard Witmer. New York: Dover.

- [10] DUNHAM, W. (1991) *Journey through Genius: The great Theorems of Mathematics*. Penguin Books.
- [11] ESTRADA, M. F. et al. (2000) *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- [12] EVES, H. (1983) *Great Moments in Mathematics*. Washington: MAA.
- [13] GERDES, P. (1992) *Cultura e o Despertar do Pensamento Geométrico*. Universidade Pedagógica. Moçambique.
- [14] GERDES, P. (2011) *African Pythagoras: A Study in Culture and Mathematics Education*. Mozambique.
- [15] GILLINGS, R. J. (1972) *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover.
- [16] HEATH, T. L. (1964) *Diophantus of Alexandria: A study in the History of Greek Algebra*. New York: DOVER.
- [17] LOPES, G. L. O. (2016) *Contribuições dos métodos de John Wallis em sua obra Arithmetica Infinitorum para professores de Matemática*. São Paulo, SP: ENEM.
- [18] MARQUES, S. C. (2011) *A Descoberta do Teorema de Pitágoras. História da Matemática para Professores*. São Paulo, SP: Livraria da Física.
- [19] MEDEIROS, C. F. MEDEIROS, A. (2004) O Método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática. *Ciência Educação*, v. 10, n. 3, p. 545-557.
- [20] PASTOR, J. R. BABINI, J. (2013) *Historia de La Matemática*. Vol. 1. Barcelona: Gedisa Editorial.
- [21] PERELMANN, I. (2001) *Aprenda Álgebra Brincando*. Tradução: Milton da Silva Rodrigues. São Paulo, SP: Hemus.

- [22] RODRIGUES, G. C. (2013) Os Infinitésimos: da Idade Antiga à formalização dos Números Hiperreais. T.C.C. Belém, PA: UEPA.
- [23] SÁ, I. P. (2008) A Regra da Falsa Posição. Pesquisas e Práticas em Educação Matemática, v. 2, n. 1, p. 41-50.
- [24] SWETZ, F. J. KAO, T. I. (1988) Was Pythagoras Chinese? EUA: Pennsylvania.
- [25] VAN DER WAERDEN, B. L. (1975) Science Awakening I. EUA: Kluwer.
- [26] VAN DER WAERDEN, B. L. (1985) Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. New York: Springer-Verlag.
- [27] WAGNER, E. (2015) Teorema de Pitágoras e Áreas. Rio de Janeiro, RJ: IMPA.
- [28] WUSSING, H. (1988) Lecciones de História de las Matematicas. Espanha: Siglo XXI Editores.



ESCHER E A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

SOLANGE SCHARDONG E HELENO CUNHA

20 A 24 DE JUNHO DE 2022

SUMÁRIO

Prefácio

1 O modelo do disco de Poincaré

- 1.1 O modelo do disco e a sua métrica
- 1.2 O grupo de isometrias
- 1.3 As geodésicas
- 1.4 Curvas equidistantes
- 1.5 Círculos hiperbólicos

2 A geometria hiperbólica nas obras de Escher

- 2.1 Inspiração
- 2.2 Algumas obras de Escher
- 2.3 Análise de limite circular III
- 2.4 Análise de Borboletas

Referências

PREFÁCIO

A morte do artista holandês M. C. Escher completou 50 anos em março deste ano, 2022. Por isso aproveitamos essa oportunidade para celebrar o legado de sua obra. Uma sequência em particular de xilogravuras relacionadas à geometria hiperbólica serão o foco de nossas análises.

A proposta do mini curso é observar vários elementos de geometria hiperbólica na seguinte sequência de xilogravuras: limites circulares I, II, III, IV e borboletas. Para tanto vamos apresentar alguns fatos e personagens de geometria hiperbólica e logo localizá-los nas obra em questão.

Há inúmeras apresentações que se pode usar para intriduzir a geometria hiperbólica. Dados os nossos objetivos vamos adotar o modelo do disco de Poincaré. Vamos apresentar o modelo do disco de Poincaré, alguns de seu principais personagens e fatos para depois serem, como já citado, observados nas obras de Escher.

Poder discutir a conexão entre arte e matemática é um ato prazeroso e apreciado por nós e esperamos que esse sentimento também alcance aos demais que estiverem conosco durante a X Bienal de Matemática. Desde já registramos a nossa gratidão aos participantes do mini curso e à coordenação do evento pela oportunidade e apoio.

Belém, Junho de 2022

Solange Schardong

Heleno Cunha

POINCARÉ O MODELO DO DISCO DE

POINCARÉ

Personagens e fatos do modelo do disco de Poincaré. Mais detalhes, demonstrações e comentários adicionais sobre este capítulo podem ser encontrados em [1].

1.1. O MODELO DO DISCO E A SUA MÉTRICA

Vamos considerar o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e nele usar a seguinte alternativa para medir comprimentos de curvas:

$$ds = 2 \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \quad (1.1)$$

Vamos nos referir à 1.1 por métrica hiperbólica e o seu uso se dá assim. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma curva suave, então o seu comprimento segundo a métrica hiperbólica é

$$\ell(\gamma) = 2 \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{1 - ((x(t))^2 + (y(t))^2)}$$

O uso de número 2 em 1.1 é uma opção, digamos que um fator de escala. É que a métrica hiperbólica assim definida confere ao disco a curvatura seccional constante e igual a -1 . Mas não se preocupe com o emprego de certos termos técnicos. Se você possui familiaridade com a geometria riemanniana sabe do que se trata a curvatura seccional. Se ainda não chegou à geometria

riemanniana não se preocupe, guarde o termo sem se preocupar com ele e siga em frente neste texto.

Agora podemos pelo menos justificar o termo métrica. Uma vez que temos a noção de comprimento de arco, podemos introduzir uma métrica no disco, a métrica hiperbólica. Se $p, q \in \mathbb{D}$, então a distância hiperbólica entre eles, $d(p, q)$, é o ínfimo dos comprimentos de arcos das curvas que ligam o ponto p ao ponto q . Dito de outra forma

$$d(p, q) = \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \}.$$

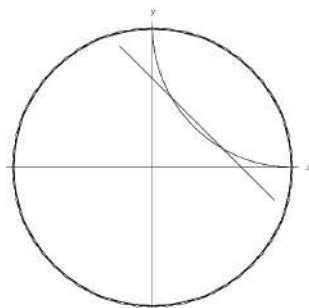
Example 1.1. A fim de deixar mais claro o uso da métrica hiperbólica, vamos usá-la para calcular o comprimento hiperbólico de duas curvas no disco de Poincaré. Sejam

$$\sigma(s) = (1-t) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) + (t) \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

um arco de circunferência. E

$$\tau(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t) + 1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

um segmento de reta.



Então o comprimento hiperbólico do segmento é

$$\ell(\sigma) = \int_0^1 \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \frac{4\sqrt{2} \operatorname{arctanh}(\sqrt{2/3-1})}{\sqrt[4]{3}} \sim 1,78.$$

E o comprimento hiperbólico da arco de circunferência é

$$\ell(\tau) = \int_0^1 \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \ln 2 - 2 \ln(\sqrt{3} - 1) \sim 1,31.$$

Não deixe de notar a seguinte curiosidade. O comprimento hiperbólico do arco de circunferência é menor do que o comprimento hiperbólico do segmento de reta. Não se assuste, que não há nada de errado. Lembre que estamos usando uma maneira alternativa para medir comprimentos. E não deixe que o hábito euclidiano se sobreponha ao entendimento desta nova geometria que está sendo apresentada.

Para encerrar o exemplo vamos confrontar os comprimentos hiperbólicos com os comprimentos euclidianos:

$$\text{comprimento euclidiano do segmento} = 0,51$$

$$\text{comprimento euclidiano do arco} = \pi/6 \sim 0,52$$

1.2. O GRUPO DE ISOMETRIAS

Agora que introduzimos o disco de Poincaré e a sua métrica hiperbólica surgem algumas perguntas naturais. A primeira que abordaremos é sobre o grupo de isometrias.

Um isometria hiperbólica é uma bijeção $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

Não é difícil de comprovar que a identidade é uma isometria, que a composição de duas isometria é uma isometria e que a inversa de uma isometria é uma isometria. Portanto, o conjunto das isometria hiperbólicas é um grupo.

As isometrias hiperbólicas são caracterizadas e elas são de um dos dois tipos abaixo:

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{\bar{c}z + \bar{a}}, \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{a}}$$

$$|a|^2 - |c|^2 = 1$$

1.3. AS GEODÉSICAS

Uma geodésica é uma curva do disco de Poincaré que minimiza distância. Uma geodésica no disco de Poincaré é uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\ell(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Um personagem altamente relevante em geometria hiperbólica é a fronteira do disco de Poincaré, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Na literatura há uma razoável quantidade de heterônimos para S^1 , mas todos tratados como sinônimos: fronteira, fronteira ideal, absoluto, bordo entre outros.

As geodésicas do disco de Poincaré podem ser prolongadas à fronteira. Este prolongamento produz dois pontos na fronteira do disco, pontos que são chamados de pontos finais da geodésica. Ou seja, uma geodésica produz um único par de pontos na fronteira do disco de Poincaré. Reciprocamente, por um par de pontos na fronteira do disco passa uma única geodésica.

E qual é o desenho de uma geodésica? As geodésicas do disco de Poincaré são diâmetros ou arcos de circunferências ortogonais à S^1 .

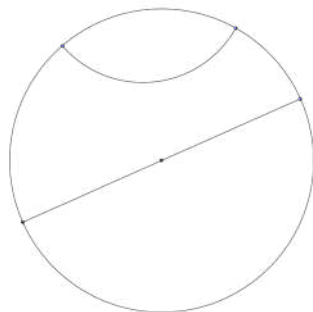


Figura 1.1: Duas geodésicas no disco de Poincaré

1.4. CURVAS EQUIDISTANTES

Já sabemos que por um par de pontos na fronteira do disco de Poincaré existe uma única geodésica que passa por eles. Então surge uma pergunta que vai ser importante na análise de algumas obras de Escher. O que são os

outros arcos de circunferência que passam por este par de pontos que não são geodésicas? Resulta que estes outros arcos que não são geodésicas são curvas equidistantes.

1.5. CÍRCULOS HIPERBÓLICOS

Um pergunta simples. Dado um ponto um ponto do disco de Poincaré, $p \in \mathbb{D}$, e um número positivo, $\delta > 0$, indaga-se qual é o conjunto

$$S(p, \delta) = \{q \in \mathbb{D} \mid d(p, q) = \delta\}$$

Ou seja, deseja-se caracterizar os círculos hiperbólicos de centro p e raio δ .

O círculos hiperbólicos são círculos euclidianos, porém de centre deslocado e raio deformado.

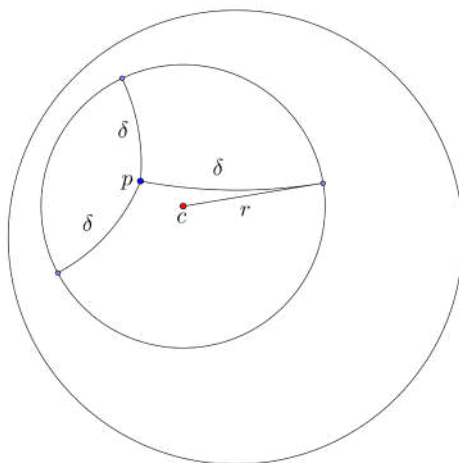


Figura 1.2: Exemplo de círculo hiperbólico

A figura acima ilustra um círculo hiperbólico de centro p e raio δ . Como observa-se ele também é um círculo euclidiano de centro c e raio r .

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA NAS OBRAS DE ESCHER

2.1. INSPIRAÇÃO

Ao analisar as obras de Escher é possível intuir que havia uma intensa busca pela representação do infinito. Uma guinada aconteceu quando Escher encontrou uma tesselação do disco de Poincaré produzida por meio dos estudos do grupo triangular elaborados pelo matemático canadense Coxeter. A partir de tesselação, Escher produziu uma sequência de xilogravuras livremente inspiradas no desenho de Coxeter.



Figura 2.1: A tesselação de Coxeter

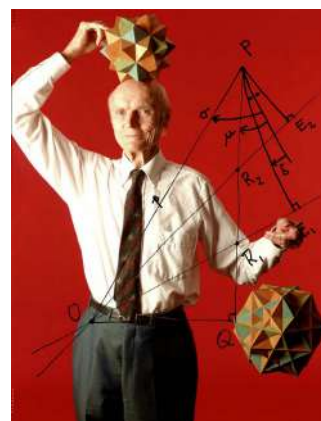


Figura 2.2: Coxeter (1907 – 2003)

Nós não pretendemos apresentar e analisar todas as obras de cunho hi-

perbólico produzidas por Escher, mas veremos as mais significativas e nelas apontaremos alguns personagens hiperbólicos.

2.2. ALGUMAS OBRAS DE ESCHER

Vamos apresentar algumas obras de Escher e quando houver e couber também daremos alguma curiosidade a cerca dela. As curiosidades, diálogos “ou coisas parecidas” foram extraídas do livro [2].

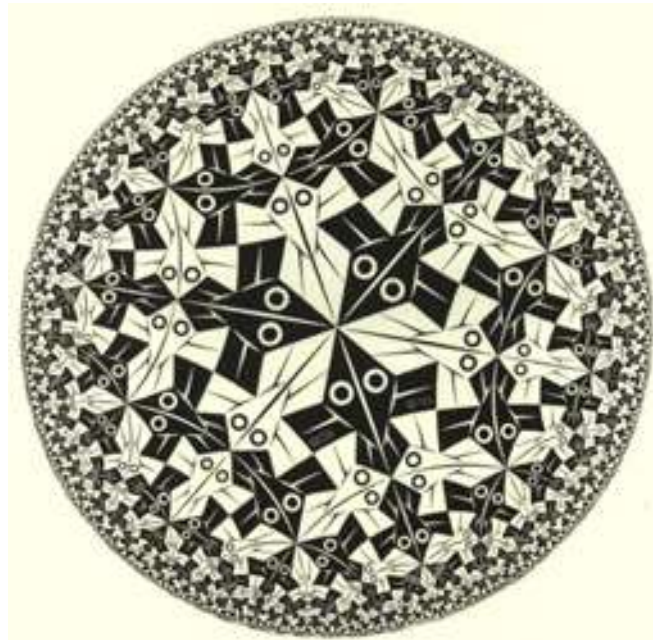


Figura 2.3: Limite Circular I, xilogravura, 1958

"...sendo uma primeira tentativa, mostra um semnúmero de defeitos. Não só a forma dos peixes, desenvolvidos de abstrações retilíneas em criaturas rudimentares, mas também o seu arranjo, em relação ao todo e a cada um, deixa muito a desejar..."



Figura 2.4: Limite Circular II, xilogravura, 1959

"Na verdade esta versão deveria ser pintada na superfície interior duma semiesfera. Ofereci-a ao Papa Paulo para que ele pudesse decorar com ela o interior da cúpula de São Pedro. Imagine um número infinito de cruzes penduradas por cima da sua cabeça! Mas o Papa não quis!"

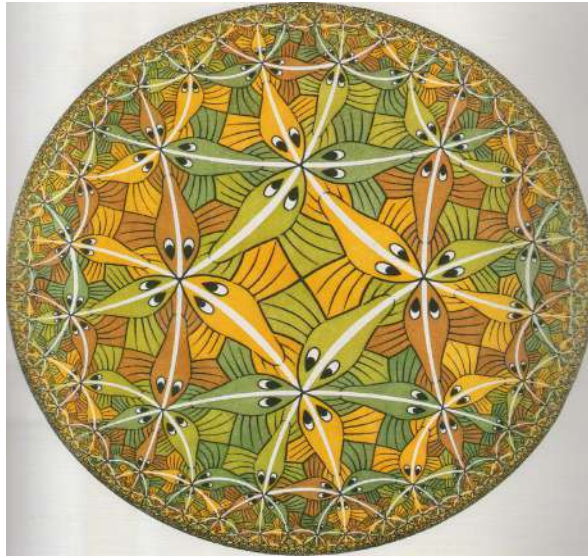


Figura 2.5: Limite Circular III, xilogravura, 1959

"...as deficiências do Limite circular I estão aqui



Figura 2.6: Limite Circular IV, xilogravura, 1960

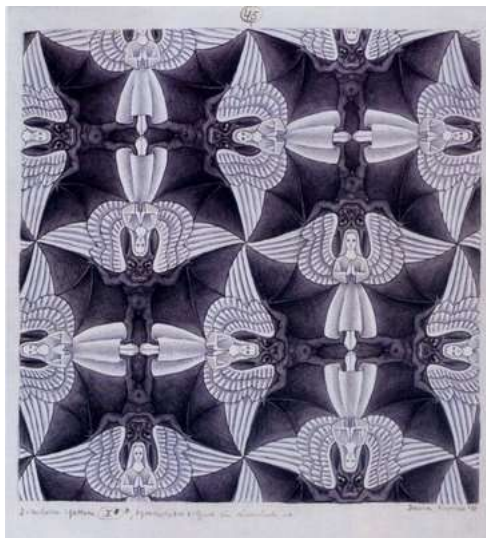


Figura 2.7: Anjos e Demônios (Versão euclidiana da obra acima)



Figura 2.8: Limite quadrado, xilogravura, 1964

O Limite Quadrado apareceu depois da série Limite circular I, II, III e IV. Isto aconteceu porque o professor Coxeter me chamou a atenção para o método da redução de dentro para fora, o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em Cada vez mais pequeno) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita. (Escher)

Trata-se de um desenho muito bonito, mas bastante banal e euclidiano, por conseguinte não o considero especialmente interessante. Os Limites circulares são mais interessantes, porque são não-euclidianos. (Coxeter)

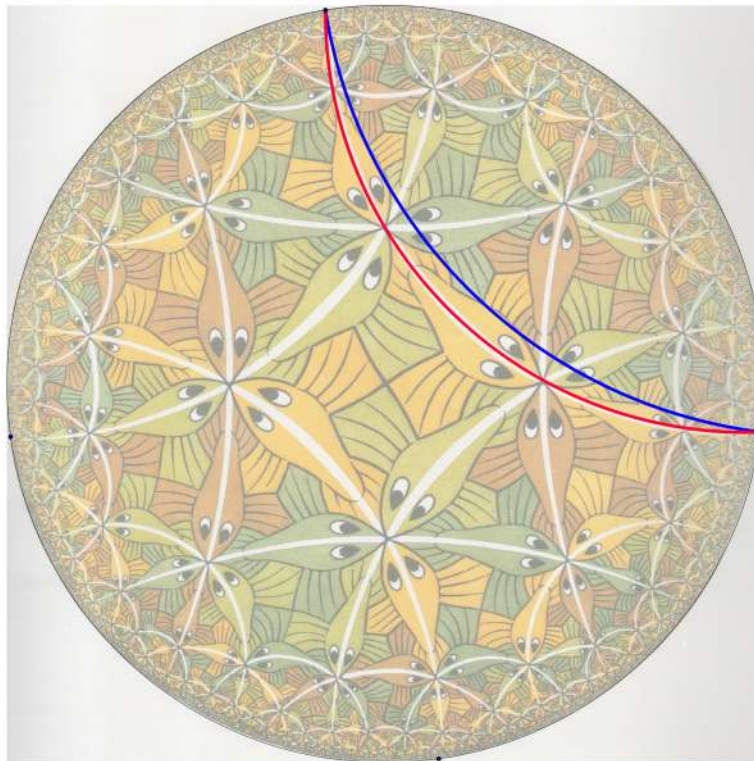
Tudo isso para mim era chinês, pois era completamente leigo em matemática. Reconheço de boa vontade que a pureza intelectual de uma gravura como Limite circular III vai muito além da gravura Limite quadrado (Escher).



Figura 2.9: Borboletas

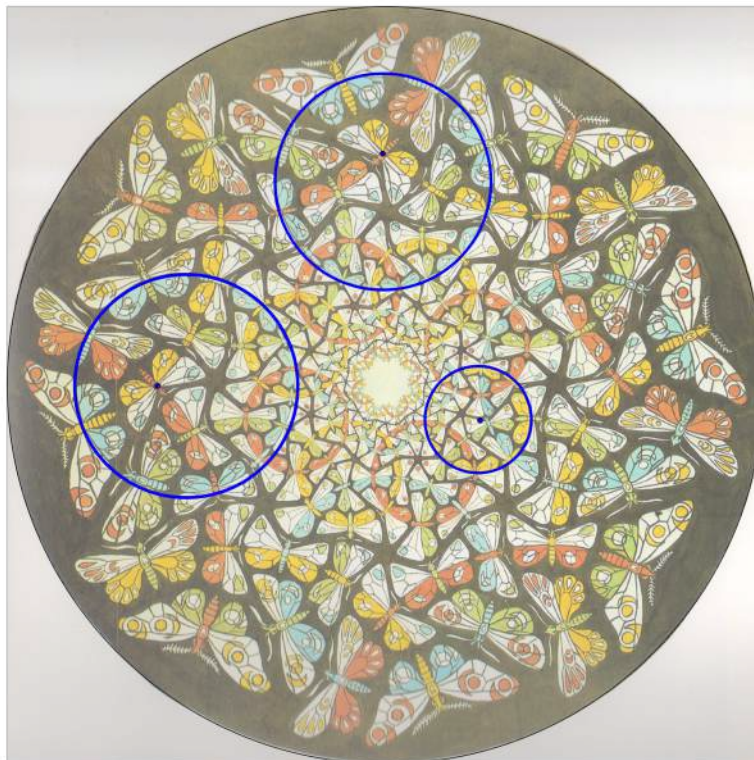
2.3. ANÁLISE DE LIMITE CÍRCULAR III

Os elementos hiperbólicos que gostaríamos de destacar nesta obra são as geodésicas e as curvas equidistantes. Em nossa ilustração a curva azul é a geodésica e a curva vermelha é uma curva equidistante. Portanto, as bandas dos peixinhos contidas entre as linhas azul e vermelha possuem a mesma medida hiperbólica.



2.4. ANÁLISE DE BORBOLETAS

Já nesta obra gostaríamos de destacar os círculos hiperbólicos. Cada círculo destacado em azul é uma círculo hiperbólico.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups*. Spring.
- [2] ERNEST, B. *O espelho mágico de M. C. Escher*. Taschen.

Anais da
X Bienal de Matemática
da Sociedade Brasileira de
Matemática

REALIZAÇÃO



ORGANIZAÇÃO



APOIO



9 788583 371861 >