Problemas de otimização: da Matemática Básica ao Cálculo Diferencial e Integral

X Bienal de Matemática

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues e Caio Tomás de Paula

20 a 24 de Junho de 2022

Aos PETianos do PET Matemática da UnB.

Sumário

Prefácio

O presente trabalho é um dos resultados da pesquisa coletiva realizada pelo grupo do Programa de Educação Tutorial (PET) em Matemática da Universidade de Brasília, em que estudamos problemas de otimização tendo como referência principal o livro *Stories about Maxima and Minima*, [1]. O objetivo deste minicurso é considerar problemas clássicos do Cálculo que podem ser resolvidos usando desigualdades entre médias, apresentando também as soluções clássicas, que utilizam o ferramental do Cálculo. Inicialmente, introduzimos o conceito de problema de otimização para, nas seções seguintes, enunciarmos e demonstrarmos as desigualdades entre as médias juntamente com problemas que podem ser resolvidos utilizando essas desigualdades. Ao final, apresentamos soluções para os mesmos problemas usando as técnicas aprendidas na disciplina do Cálculo. Esperamos que o(a) participante deste minicurso possa apreciar a beleza e elegância das soluções utilizando as desigualdades entre médias!

Belém, Junho de 2022

Luciana Ávila Rodrigues
Caio Tomás

1

Problemas de otimização

Um problema de otimização é aquele onde procura-se encontrar, entre todas as soluções possíveis, a solução "ótima", onde o sentido preciso da palavra "ótima" depende do contexto: em algumas situações, a solução ótima pode ser a que minimiza uma determinada quantidade, enquanto em outras pode ser a solução que maximiza uma outra quantidade.

Problemas deste tipo são comuns em nossa vida diária e aparecem não só em Matemática, mas também em Teoria da Computação e Economia, por exemplo, e não existe um método universal que resolva todos os problemas de otimização existentes.

Entretanto, existem métodos específicos para certas classes de problemas. Esse é o caso dos problemas apresentados nas seções seguintes: são problemas de máximo e mínimo, cujas soluções podem ser encontradas seguindo os seguintes passos:

1. entender como a quantidade que se deseja otimizar depende dos parâmetros que descrevem o problema;

2. relacionar os parâmetros, obtendo uma função que descreva a quantidade que se deseja otimizar;

3. encontrar o(s) ponto(s) crítico(s) de interesse utilizando a primeira derivada da função e aplicar o Teorema de Weierstrass para determinar se o ponto crítico maximiza/minimiza a função desejada.

As etapas 1 e 2 acima não são exclusivas dos problemas de máximos e mínimos. De fato, a busca por solução de qualquer problema de otimização necessariamente passa por essas etapas. Elas, juntas, são o que chamamos de processo de formalização do problema ou simplesmente formalização do problema. Dependendo da classe de problemas em que estamos, diferentes métodos podem ser mais adequados.

Por exemplo, para encontrar máximos e mínimos de funções reais de uma variável real, podemos utilizar o conceito de convexidade e aqui podemos definir diferentes noções de convexidade como convexidade em pontos médios e convexidade no sentido de Jensen, enquanto que para encontrar máximos e mínimos de funções reais de várias variáveis reais, o princípio de Lagrange é muito usado [1, cap. 11,12].

Neste minicurso, vamos trabalhar com problemas de otimização clássicos do Cálculo Diferencial e Integral. Além das técnicas do Cálculo, veremos que é possível usar desigualdades entre médias para encontrar as soluções.

Ademais, adotaremos as seguintes notações a menos que mencionado o contrário.

$A, B, C, \ldots$	pontos no plano ou espaço
$\overline{AB}$	distância euclidiana entre A e B
AB	segmento que liga os pontos A e B
$a, b, c, \ldots$	retas ou medidas de segmentos
$\overleftrightarrow{AB}$	reta pelos pontos A e B
$\overrightarrow{AB}$	semirreta de origem A que passa por B
ΔABC	triângulo de vértices A, B e C
$\cong$	congruência
$\sim$	semelhança
∇f	gradiente da função f

1.1. Desigualdade das médias aritmética e geométrica entre dois números

Começaremos abordando uma das desigualdades mais antigas da história, que afirma que a média geométrica não excede a média aritmética. Como veremos na demonstração, neste caso, a igualdade ocorre. Desigualdades deste tipo, onde a igualdade ocorre, são chamadas exatas. Podemos enunciar este resultado de maneira formal do seguinte modo.

Proposição 1.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$ quaisquer, temos*

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{1.1}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Provaremos este resultado de duas formas distintas.

1. A primeira maneira é puramente algébrica:

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant (a-b)^2 \\ \implies & 2ab \leqslant a^2 + b^2 \\ \implies & 4ab \leqslant (a+b)^2 \\ \implies & \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

2. A segunda maneira é geométrica: tomamos um segmento AC, de comprimento fixo $a+b$, e D entre A e C tal que $\overline{AD} = a$ e $\overline{DC} = b$, como ilustrado na Figura 1.1.

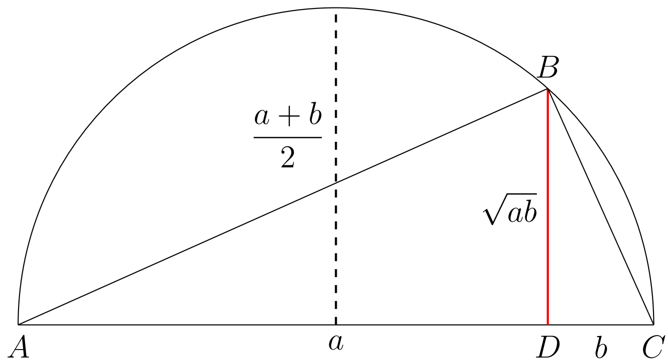

Figura 1.1: Demonstração geométrica de (1.1).

Construímos uma semicircunferência de diâmetro AC e traçamos a perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por D. Seja B a interseção da semicircunferência com a perpendicular. Temos, então, ΔABD semelhante a ΔBCD pelo critério ângulo-ângulo, donde segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \implies \overline{BD} = \sqrt{ab}.$$

Assim, observando que $\overline{BD} \leqslant \overline{AC}/2$, fica demonstrada a desigualdade. Note que a igualdade ocorre se, e somente se, D é ponto médio de AC, ou seja, se, e somente se, $a = b$.

$\square$

Nas aplicações que faremos de (1.1) ao longo do texto, usaremos com mais frequência a forma alternativa:

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

A desigualdade (1.1) pode ser utilizada para resolver problemas de maximização como os dois a seguir.

Problema 1.1. *Encontrar o máximo do produto de dois números $x, y > 0$ cuja soma é constante e igual a $S \in \mathbb{R}_+$.*

Solução. Note que maximizar o produto é o mesmo que maximizar a raiz do produto, já que x e y são não negativos. Logo, (1.1) nos diz

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{S}{2},$$

ou seja, que o máximo da raiz ocorre quando x e y são iguais e vale

$$\frac{x+x}{2} = x,$$

de modo que o máximo do produto é

$$\left(\frac{x+x}{2}\right)^2 = x^2,$$

ou seja, o quadrado da metade da soma. □

Problema 1.2. *Encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.*

Solução. Basta notar que a área do triângulo retângulo com catetos de medidas x e y é $xy/2$. Fixando $x + y = S$, temos, por (1.1), que

$$\frac{xy}{2} \leqslant \frac{S^2}{8},$$

de modo que a área é máxima quando x é igual a y, ou seja, quando o triângulo é isósceles. □

1.2. Desigualdade das médias aritmética e geométrica entre n números

Podemos generalizar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica como na proposição a seguir.

Proposição 1.2. *Dado um conjunto* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ *qualquer, vale*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{1.2}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Como no caso $n = 2$, também há várias maneiras de demonstrar a desigualdade no caso geral. Apresentaremos duas formas: a primeira, formulada por Cauchy, é considerada uma das mais bonitas; a segunda, formulada por Ellers[1], é mais sucinta e direta.

1. Para o primeiro método, começaremos provando (1.2) para $n = 4$ e, em seguida, "desceremos" para $n = 3$, usando a técnica de *forward-backward induction.*

   Para $n = 4$ a desigualdade (1.2) segue se aplicarmos (1.1) como a seguir:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (x_1 \cdot x_2)(x_3 \cdot x_4) &\leqslant \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right]^2 \\ &\leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)^4. \end{aligned}$$

   Usando essa desigualdade auxiliar, temos

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3} &= [x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3}]^{1/4} \\ &\leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 x_2 x_3)^{1/3}}{4}, \end{aligned}$$

   donde segue que

$$\frac{3}{4}(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}$$

[1] O autor de [1] cita apenas o sobrenome deste matemático. Ao que nossas pesquisas indicaram, se trata de Erich Werner Ellers, professor emérito da Universidade de Toronto.

e, portanto,

$$\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Note que, usando o método acima, podemos provar (1.2) para todo n da forma 2^k, com $k \geqslant 2$.

Para concluir a indução, suponhamos que a desigualdade seja válida para $n = m + 1$. Por hipótese, temos

$$\begin{aligned}(x_1 \cdots x_m)^{1/m} &= \left[(x_1 \cdots x_m)(x_1 \cdots x_m)^{1/m}\right]^{1/(m+1)} \\ &\leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_m + (x_1 \cdots x_m)^{1/m}}{m+1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(x_1 \cdots x_m)^{1/m} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m+1},$$

ou seja,

$$\sqrt[m]{x_1 \cdots x_m} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m},$$

e concluímos a demonstração.

2. O argumento de Ellers consiste em mostrar, por indução, que se

$$x_1 \cdots x_n = 1$$

com $x_i > 0$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, então

$$x_1 + \cdots + x_n \geqslant n.$$

Provada esta implicação, seguirá que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant 1 = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

que é o que queremos provar. Vamos, então, mostrar a validade da implicação.

Para $n = 1$ vale a implicação acima. Suponha que ela seja válida para $n = m$. Ora, então se

$$x_1 \cdots x_{m+1} = 1,$$

sabemos que há dois números no conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\}$ tais que um deles é maior ou igual a 1 e outro é menor ou igual a 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 \geqslant 1$ e $x_2 \leqslant 1$. Essas duas desigualdades são equivalentes a

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leqslant 0,$$

isto é,

$$x_1 x_2 + 1 \leqslant x_1 + x_2.$$

Com isso e usando a hipótese de indução, temos

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} \geqslant 1 + x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} \geqslant 1 + m,$$

como queríamos.

□

Nas soluções usaremos mais frequentemente a forma equivalente de (1.2)

$$x_1 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n.$$

A seguir, faremos uma interpretação geométrica de (1.2) e, em seguida, resolveremos alguns problemas relacionados.

Interpretação geométrica. A desigualdade (1.2) possui uma interpretação geométrica interessante. Para $n = 2$, (1.2) nos diz que

$$2\sqrt{x_1 x_2} \leqslant x_1 + x_2 \iff 4\sqrt{x_1 x_2} \leqslant 2(x_1 + x_2),$$

ou seja, que um retângulo de dada área tem perímetro mínimo se ele é um quadrado. Para n qualquer, (1.2) é uma generalização dessa ideia.

De fato, cada vértice de um ortotopo n-dimensional, que é a generalização de paralelepípedo reto retângulo para dimensões maiores que 3, é ligado a n arestas, com comprimentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como há 2^n vértices, podemos estimar o número de arestas por $n2^n$. Mas como cada aresta liga 2 vértices, essa estimativa contará o número de arestas duas vezes. Portanto, concluímos que há $2^{n-1}n$ arestas neste ortotopo n-dimensional. Agora, como há a mesma quantidade de arestas de cada comprimento e há n comprimentos possíveis, sabemos que há 2^{n-1} arestas de cada comprimento, e a soma dos comprimentos de todas as arestas é

$$2^{n-1}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Multiplicando (1.2) por $n2^{n-1}$, podemos escrever

$$2^{n-1}(x_1 + \cdots + x_n) \geqslant n2^{n-1} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

O lado esquerdo desta desigualdade é o análogo, para dimensões maiores, do perímetro em dimensão 2, enquanto que o lado direito é uma constante multiplicada pela raiz n-ésima do volume do ortotopo. Portanto, como a igualdade é válida somente quando todos os x_k são iguais, podemos concluir que entre todos os ortotopos de dimensão n com mesmo volume, o n-cubo tem a menor soma de comprimentos das arestas ligadas a cada vértice.

Problemas. Para terminar esta seção, vamos discutir três problemas estereométricos, isto é, envolvendo volume de sólidos, que podem ser resolvidos usando (1.2).

Problema 1.3. *Numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo.*

Solução. Sejam R o raio da esfera, O o centro da esfera, r o raio da base do cone e h a altura do cone. Aqui temos dois casos para lidar.

Caso 1: $0 \leqslant h \leqslant R$. Neste caso, a seção vertical do cone com a esfera é algo como ilustrado na figura abaixo.

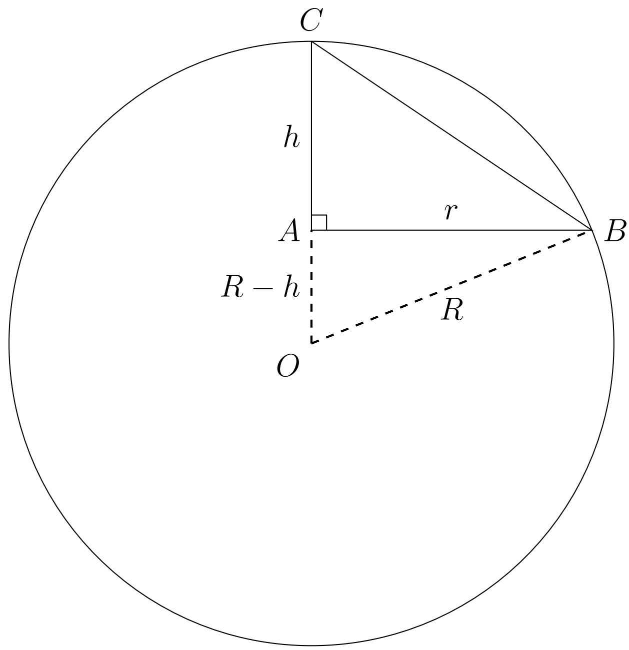

Figura 1.2: Seção vertical do cone com a esfera no Caso 1.

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (R-h)^2 \iff r^2 = R^2 - (R-h)^2,$$

e, substituindo na fórmula do volume V do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3}[R^2 - (R-h)^2] = \frac{\pi h^2}{3}(2R-h).$$

Daí, usando (1.2), temos

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}(2R-h) \leqslant \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade é válida quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

o que é absurdo, pois estamos supondo $h \leqslant R$. Portanto, o máximo não ocorre para $0 \leqslant h \leqslant R$.

Caso 2: $R \leqslant h \leqslant 2R$**.** Neste caso, a seção vertical do cone com a esfera é como mostrada abaixo.

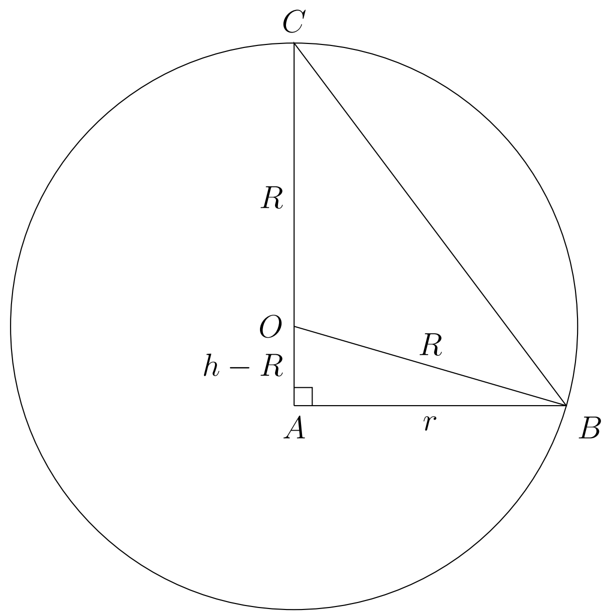

Figura 1.3: Seção vertical do cone com a esfera no Caso 2.

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (h-R)^2 \iff r^2 = R^2 - (h-R)^2,$$

e, substituindo na fórmula do volume V do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3}[R^2 - (h-R)^2] = \frac{\pi h^2}{3}(2R-h).$$

Usando (1.2) como no Caso 1, temos

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}(2R-h) \leqslant \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade, novamente, ocorre quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

ou seja, $h = (4/3)R$ maximiza $3V/(4\pi)$ e, portanto, maximiza V. $\square$

Problema 1.4. *Num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo.*

Solução. Sejam R o raio do cone, H a altura do cone, r o raio do cilindro e h a altura do cilindro. Observe a seção vertical do cilindro com o cone abaixo.

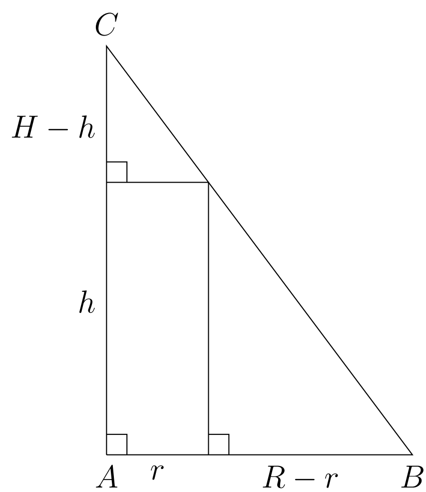

Figura 1.4: Seção vertical do cilindro com o cone.

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H},$$

ou seja,

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Daí, o volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{H}{R}(R-r).$$

Logo, temos

$$\frac{RV}{4\pi H} = \frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r) \leqslant \left(\frac{R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade vale quando

$$\frac{r}{2} = R - r \iff r = \frac{2R}{3}.$$

Portanto, $r = (2/3)R$ maximiza $RV/(4\pi H)$ e, portanto, maximiza V. $\square$

Problema 1.5. *Dada uma folha quadrada $a \times a$, cortar quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tenha volume máximo.*

Solução. Seja x a medida do lado dos quadrados retirados. Observe a Figura 1.5.

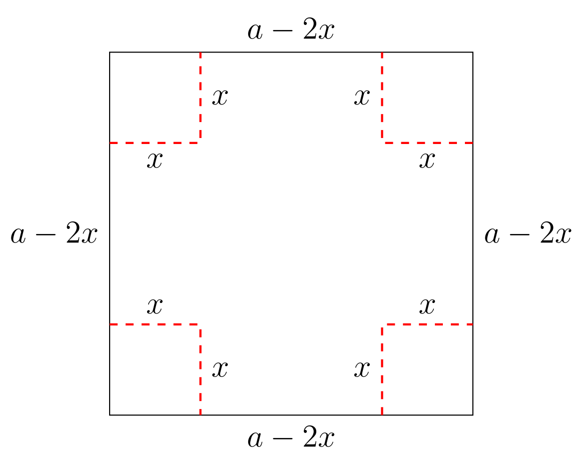

Figura 1.5: Quadrado de lado a com pequenos quadrados de lado x removidos.

O volume da caixa é $V = (a - 2x)(a - 2x)x$. Daí, temos

$$4V = (a - 2x)(a - 2x)4x \leqslant \left(\frac{2a}{3}\right)^3,$$

donde segue que V é máximo quando $a - 2x = 4x$, ou seja, quando $x = a/6$. $\square$

1.3. Desigualdades com a média quadrática

Nesta seção, vamos demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática e a desigualdade entre as médias geométrica e quadrática e, em seguida, aplicá-las em problemas de otimização. As desigualdades são enunciadas e demonstradas nas duas proposições a seguir.

Proposição 1.3. *Dado um conjunto* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ *qualquer, vale*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{1.3}$$

A igualdade é válida se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Dados $a, b \geqslant 0$ quaisquer com $a > b$, temos que

$$0 \leqslant (a-b)^2 \iff 2ab \leqslant a^2 + b^2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 &= \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \\ &\leqslant \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2}{n^2} \\ &= n\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n^2} \\ &= \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n},\end{aligned}$$

e (1.3) segue. □

Proposição 1.4. *Dado um conjunto* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$ *qualquer, vale*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{1.4}$$

A igualdade é válida se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Basta justapor (1.2) com (1.3):

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \overset{(1.2)}{\leqslant} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \overset{(1.3)}{\leqslant} \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

□

Com (1.4), vamos resolver os dois problemas de otimização a seguir.

Problema 1.6. *Encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, o de maior área.*

Solução. Usando (1.4) com $n = 2$, temos

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Daí, se o retângulo tem lados x_1 e x_2 e está inscrito numa circunferência de raio r, então

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = r\sqrt{2},$$

como ilustra a figura abaixo.

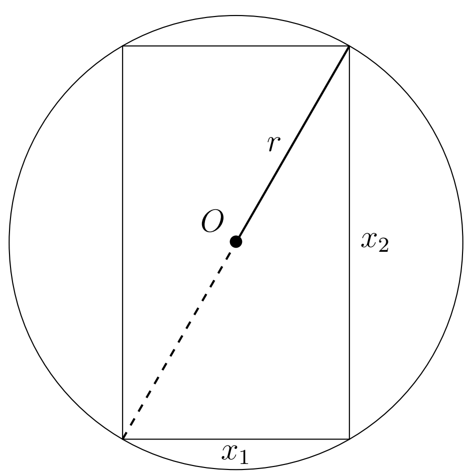

Figura 1.6: Retângulo de lados x_1 e x_2 inscrito na circunferência de raio r.

Portanto, a área é máxima quando $x_1 = r\sqrt{2} = x_2$, ou seja, quando o retângulo é um quadrado. □

Problema 1.7. *Encontrar, dentre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume.*

Solução. Podemos resolver esse problema com uma aplicação direta de (1.4). O paralelepípedo de maior volume será um cubo cujos lados têm medida $2R/\sqrt{3}$, sendo R o raio da esfera. De fato, sendo x_1, x_2, x_3 as medidas dos lados do paralelepípedo, temos por (1.4) que

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

ou seja, o volume do paralelepípedo é máximo quando $x_1 = x_2 = x_3$ e, nesse caso, temos

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

□

1.4. Soluções usando Cálculo

Nesta seção resolveremos os problemas apresentados nas seções anteriores usando as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Enunciaremos cada problema novamente antes de resolvê-lo.

Problema 1.1. Encontrar o máximo do produto de dois números $x, y > 0$ cuja soma é constante e igual a $S \in \mathbb{R}_+$.

Solução. Sejam x e y os números considerados, com soma constante e igual a $S \in \mathbb{R}_+$ fixa. Temos, então,

$$x + y = S \iff y = S - x.$$

A área do retângulo é dada por

$$f(x) = xy = x(S - x), \qquad x \in [0, S].$$

Derivando e igualando a zero, temos

$$f'(x) = S - 2x = 0 \iff x = \frac{S}{2}.$$

Portanto, $S/2$ é ponto crítico de f. Como f é contínua em $[0, S]$ e

$$f(0) = 0 = f(S), \qquad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{4} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $x = S/2$ maximiza f, como esperado. $\square$

Problema 1.2. Encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.

Solução. Sejam x e y as medidas dos catetos do triângulo, e suponhamos que $x + y = S$, com $S \in \mathbb{R}_+$ fixo. A área do triângulo é dada por

$$f(x, y) = \frac{xy}{2},$$

que pode ser escrita em termos de x como

$$f(x) = \frac{x(S - x)}{2}, \qquad x \in [0, S].$$

Derivando f, temos

$$f'(x) = \frac{S}{2} - x.$$

Igualando a derivada a zero, temos que $S/2$ é ponto crítico de f. Como f é contínua em $[0, S]$ e

$$f(0) = 0 = f(S), \qquad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{8} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $x = S/2$ maximiza f, como esperado.

$\square$

Problema 1.3. Numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo.

Solução. Observando a Figura 1.3, vimos que

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2.$$

Substituindo na fórmula do volume do cone, obtivemos

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h), \qquad h \in [0, 2R],$$

ou seja, escrevemos V em função de h; derivando, temos

$$V'(h) = \frac{2\pi h}{3}(2R - h) - \frac{\pi h^2}{3} = \frac{4\pi Rh}{3} - \pi h^2 = \pi h\left(\frac{4R}{3} - h\right).$$

Igualando a primeira derivada a zero temos que 0 e $4R/3$ são pontos críticos de V. Como V é contínua em $[0, 2R]$ e

$$V(0) = 0 = V(2R), \qquad V\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $h = 4R/3$ maximiza a função volume, como esperado. $\square$

Problema 1.4. Num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo.

Solução. Observando a Figura 1.4, foi visto que

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Daí, o volume do cilindro é dado, em função de r, por

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi \frac{H}{R} r^2(R - r), \qquad r \in [0, R].$$

Derivando V, temos

$$V'(r) = \pi \frac{H}{R}\left[2r(R - r) - r^2\right].$$

Igualando a derivada a zero, temos que 0 e $2R/3$ são pontos críticos de V. Como V é contínua em $[0, R]$ e

$$V(0) = 0 = V(R), \qquad V\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4\pi HR^2}{27} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $r = 2R/3$ maximiza a função volume, como esperado. □

Problema 1.5. Dada uma folha quadrada $a \times a$, cortar quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tenha volume máximo.

Solução. Vimos que o volume da caixa é dado, em função de x, por

$$V(x) = x(a - 2x)^2, \qquad x \in [0, a/2].$$

Derivando V, temos

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Portanto, igualando V' a zero temos que os pontos críticos de V são $x = a/2$ e $x = a/6$. Como V é contínua em $[0, a/2]$ e

$$V(0) = 0 = V\left(\frac{a}{2}\right), \qquad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27} > 0.$$

Logo, pelo Teorema de Weierstrass, temos que $x = a/6$ maximiza a função volume, como esperado. □

Problema 1.6. Encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, o de maior área.

Solução. Da Figura 1.6, sabemos que

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \iff x_2 = \sqrt{4r^2 - x_1^2},$$

pois $x_1, x_2 > 0$. Daí, a área do retângulo é dada por

$$A(x_1) = x_1\sqrt{4r^2 - x_1^2}, \qquad x_1 \in [0, 2r].$$

Derivando, temos que

$$A'(x_1) = \sqrt{4r^2 - x_1^2} - \frac{x_1^2}{\sqrt{4r^2 - x_1^2}}.$$

Igualando a derivada a zero, obtemos que $r\sqrt{2}$ é o ponto crítico de A. Daí, como A é contínua em $[0, 2r]$ e

$$A(0) = 0 = A(2r), \qquad A(r\sqrt{2}) = 2r^2 > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que $x_1 = r\sqrt{2}$ maximiza a área. Portanto, o retângulo de área máxima tem dimensões $x_1 = r\sqrt{2} = x_2$, ou seja, é um quadrado, como esperado. □

Problema 1.7. Encontrar, dentre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume.

Solução. Neste problema, queremos encontrar, entre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume. Para tanto, vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. O problema então se traduz em maximizar a função

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,$$

com a condição de que

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sendo

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4R^2,$$

pois a diagonal do paralelepípedo retângulo é um diâmetro da esfera. Como x_1, x_2 e x_3 são as medidas dos lados de um paralelepípedo, vamos supor que x_1, x_2, $x_3 > 0$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, sabemos que, no ponto de máximo, temos

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, x_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculando os gradientes, temos

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2), \qquad \nabla g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3).$$

Portanto, no ponto de máximo temos

$$\begin{cases} x_2x_3 = 2\lambda x_1 \\ x_1x_3 = 2\lambda x_2 \\ x_1x_2 = 2\lambda x_3 \end{cases}.$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \iff x_1^2 = x_2^2.$$

Analogamente, dividindo a segunda equação pela terceira, temos

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \iff x_2^2 = x_3^2.$$

A condição $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ implica que

$$3x_1^2 = 4R^2 \implies x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

pois $x_1 > 0$. Logo, temos

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

ou seja, o paralelepípedo retângulo que tem volume máximo é o cubo de lado $2R/\sqrt{3}$, como esperado. □

Observação. Como mencionamos no início, não existe um método universal para se resolver todo e qualquer problema de otimização. Neste texto, apresentamos alguns problemas cujas soluções utilizaram as desigualdades entre médias e mostramos, também, formas de resolvê-los utilizando as ferramentas do Cálculo. O leitor interessado em conhecer outras técnicas e outros problemas de otimização é convidado a consultar [1] e também [3].

Referências Bibliográficas

[1] TIKHOMIROV, V. M. (1991). *Stories about Maxima and Minima*. American Mathematical Society.

[2] THOMAS, G. B. (2012). *Cálculo: Volume 1*. Pearson, 12ª edição.

[3] PETMAT. (2022). *Notas da Pesquisa Coletiva*. Disponível em `http://pet.mat.unb.br/Publica%C3%A7%C3%B5es.html`