Onde duas retas paralelas se encontram? Geometria com pontos no infinito

Caio Tomás de Paula[1]

Orientador: Lucas Conque Seco Ferreira

Universidade de Brasília

18 de Dezembro de 2020

[1]Bolsista pelo FNDE do PETMAT-UnB.

Resumo

- Início há mais de 500 anos com o desenho em perspectiva;

- Estudo da perspectiva
- Nos permite atacar problemas naturalmente não métricos de uma forma melhor que a geometria euclidiana ("geometria descritiva")
- Em certo sentido, completa e torna o espaço euclidiano simétrico com os pontos no infinito nos quais retas paralelas se encontram
- Está ligada com a noção topológica de compactificação*
- Com os pontos no infinito, unifica objetos, como as cônicas

Considere a curva quádrica em $\mathbb{R}^2$

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

que estamos supondo ser não vazia.

Considere a curva quádrica em $\mathbb{R}^2$

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

que estamos supondo ser não vazia. Vamos mostrar que

- essa curva é dada pela interseção de um cone do $\mathbb{R}^3$ com um plano Π;

Considere a curva quádrica em $\mathbb{R}^2$

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

que estamos supondo ser não vazia. Vamos mostrar que

- essa curva é dada pela interseção de um cone do $\mathbb{R}^3$ com um plano Π;
- ela são de 3 tipos: elipse, parábola e hipérbole, de acordo com seus "pontos no infinito";

Considere a curva quádrica em $\mathbb{R}^2$

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

que estamos supondo ser não vazia. Vamos mostrar que

- essa curva é dada pela interseção de um cone do $\mathbb{R}^3$ com um plano Π;
- ela são de 3 tipos: elipse, parábola e hipérbole, de acordo com seus "pontos no infinito";
- colando esses pontos no infinito ao plano Π, veremos que elas são a "mesma curva": podemos levar uma na outra por uma mudança de perspectiva

- Introduza em (1) a substituição

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}, Z \neq 0$$

- Introduza em (1) a substituição

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}, Z \neq 0$$

de modo que

$$A\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + B\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 + 2C\left(\frac{XY}{Z^2}\right) + D\left(\frac{X}{Z}\right) + E\left(\frac{Y}{Z}\right) + F = 0$$

- Introduza em (1) a substituição

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}, Z \neq 0$$

de modo que

$$A\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + B\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 + 2C\left(\frac{XY}{Z^2}\right) + D\left(\frac{X}{Z}\right) + E\left(\frac{Y}{Z}\right) + F = 0$$

e, multiplicando por Z^2, obtemos

$$Q(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + 2CXY + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0, \quad (2)$$

- Introduza em (1) a substituição

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}, Z \neq 0$$

de modo que

$$A\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + B\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 + 2C\left(\frac{XY}{Z^2}\right) + D\left(\frac{X}{Z}\right) + E\left(\frac{Y}{Z}\right) + F = 0$$

e, multiplicando por Z^2, obtemos

$$Q(X,Y,Z) = AX^2 + BY^2 + 2CXY + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0, \quad (2)$$

que é a equação de uma superfície no espaço XYZ; o lado esquerdo $Q(X,Y,Z)$ é uma forma quadrática (não degenerada).

- Note que (1) é a interseção do plano $Z = 1$ com essa superfície.

- Como $Q(X,Y,Z)$ é uma forma quadrática, podemos efetuar uma transformação afim $T \in GL(3,\mathbb{R})$ que preserva o vértice do cone

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

- Como $Q(X, Y, Z)$ é uma forma quadrática, podemos efetuar uma transformação afim $T \in GL(3, \mathbb{R})$ que preserva o vértice do cone

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

de modo que

$$Q(U, V, W) = \pm U^2 \pm V^2 \pm W^2 = 0 \tag{3}$$

- Como $Q(X, Y, Z)$ é uma forma quadrática, podemos efetuar uma transformação afim $T \in GL(3, \mathbb{R})$ que preserva o vértice do cone

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

de modo que

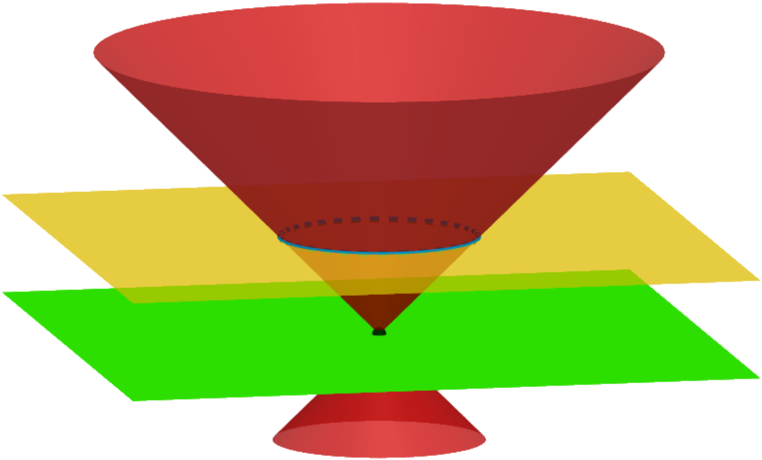
$$Q(U, V, W) = \pm U^2 \pm V^2 \pm W^2 = 0 \tag{3}$$

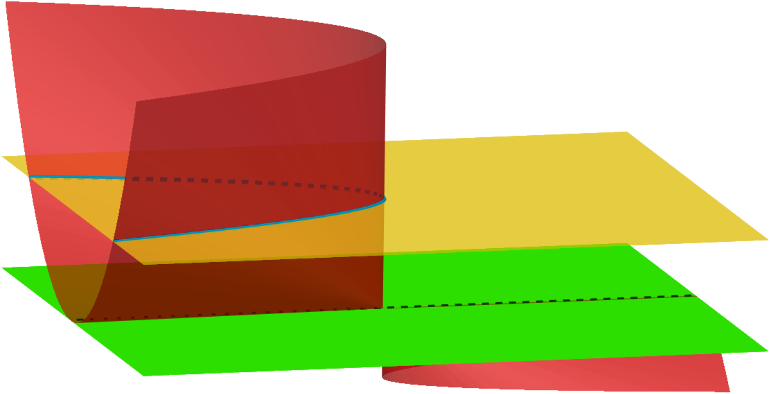
em que o conjunto dos sinais é invariante (Lei da Inércia de Sylvester), e a análise se reduz aos casos não degenerados

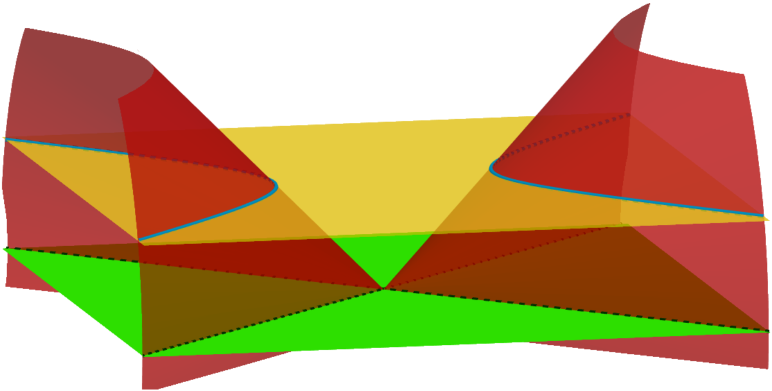
$$U^2 + V^2 + W^2 = 0 \qquad \text{(origem)}$$

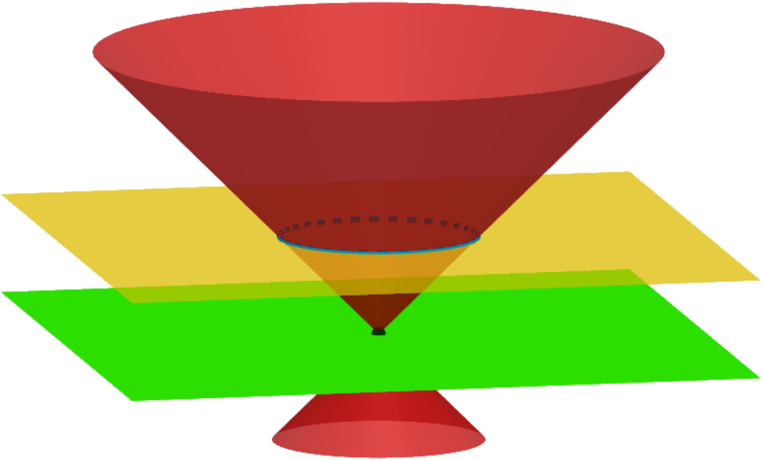
$$U^2 + V^2 = W^2 \qquad \text{(cone reto)}$$

e, portanto, $Q(X, Y, Z)$ é um cone afim.









- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:

- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);

- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);
  - $Z = 0$ tangencia o cone (parábola);

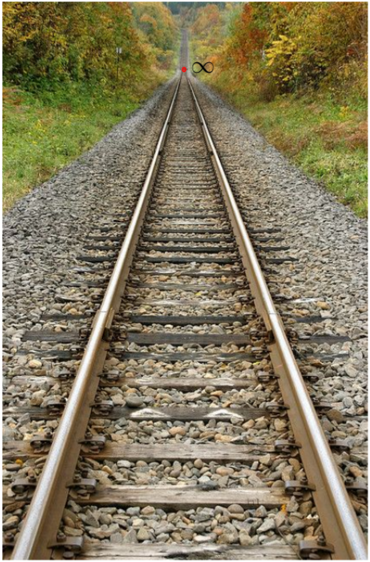
- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);
  - $Z = 0$ tangencia o cone (parábola);
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em ambas as folhas (hipérbole);

- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);
  - $Z = 0$ tangencia o cone (parábola);
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em ambas as folhas (hipérbole);
- Note que, em cada caso, a interseção do cone com um plano da forma $Z = \pm\varepsilon, \varepsilon > 0$, nos dá curvas do mesmo tipo

- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);
  - $Z = 0$ tangencia o cone (parábola);
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em ambas as folhas (hipérbole);
- Note que, em cada caso, a interseção do cone com um plano da forma $Z = \pm\varepsilon, \varepsilon > 0$, nos dá curvas do mesmo tipo
- Na substituição que introduzimos em (1), tomamos $Z \neq 0$; fazer a interseção do cone com $Z = 0$ é, geometricamente, uma "divisão por zero", que fornece as direções assíntotas da cônica: seus pontos no infinito

- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);
  - $Z = 0$ tangencia o cone (parábola);
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em ambas as folhas (hipérbole);
- Note que, em cada caso, a interseção do cone com um plano da forma $Z = \pm\varepsilon, \varepsilon > 0$, nos dá curvas do mesmo tipo
- Na substituição que introduzimos em (1), tomamos $Z \neq 0$; fazer a interseção do cone com $Z = 0$ é, geometricamente, uma "divisão por zero", que fornece as direções assíntotas da cônica: seus pontos no infinito
- Desse modo, o que distingue os tipos de cônicas são seus pontos no infinito

- Vemos, assim, que há 3 tipos de cônicas no plano euclidiano:
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em uma das folhas (elipse);
  - $Z = 0$ tangencia o cone (parábola);
  - $Z = 0$ intercepta o cone transversalmente em ambas as folhas (hipérbole);
- Note que, em cada caso, a interseção do cone com um plano da forma $Z = \pm\varepsilon, \varepsilon > 0$, nos dá curvas do mesmo tipo
- Na substituição que introduzimos em (1), tomamos $Z \neq 0$; fazer a interseção do cone com $Z = 0$ é, geometricamente, uma "divisão por zero", que fornece as direções assíntotas da cônica: seus pontos no infinito
- Desse modo, o que distingue os tipos de cônicas são seus pontos no infinito
- Adicionando tais pontos no infinito ao plano euclidiano, as cônicas se tornam uma mesma curva



- Queremos, então, adicionar esses pontos no infinito ao $\mathbb{R}^n$

- Queremos, então, adicionar esses pontos no infinito ao $\mathbb{R}^n$

Definição

Dado um espaço vetorial V, o espaço projetivo de V, denotado por $P(V)$, é o conjunto de subespaços vetoriais de dimensão 1 de V. Em particular, para $V = \mathbb{R}^{n+1}$ costuma-se usar a notação $\mathbb{R}P^n$.

- Queremos, então, adicionar esses pontos no infinito ao $\mathbb{R}^n$

Definição

Dado um espaço vetorial V, o espaço projetivo de V, denotado por $P(V)$, é o conjunto de subespaços vetoriais de dimensão 1 de V. Em particular, para $V = \mathbb{R}^{n+1}$ costuma-se usar a notação $\mathbb{R}P^n$.

- Note que se $\dim V = n + 1$, então $\dim P(V) = n$.

- Queremos, então, adicionar esses pontos no infinito ao $\mathbb{R}^n$

Definição

Dado um espaço vetorial V, o espaço projetivo de V, denotado por $P(V)$, é o conjunto de subespaços vetoriais de dimensão 1 de V. Em particular, para $V = \mathbb{R}^{n+1}$ costuma-se usar a notação $\mathbb{R}P^n$.

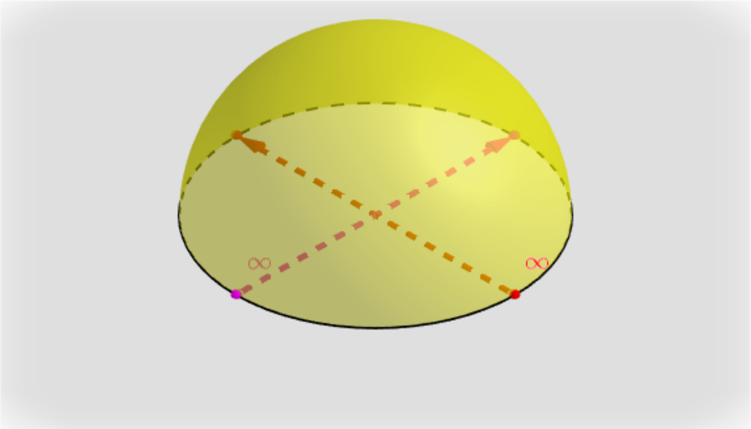
- Note que se $\dim V = n + 1$, então $\dim P(V) = n$.
- Um espaço projetivo de dimensão 1 é uma reta projetiva (real) e o de dimensão 2, um plano projetivo (real).

- Queremos, então, adicionar esses pontos no infinito ao $\mathbb{R}^n$

Definição

Dado um espaço vetorial V, o espaço projetivo de V, denotado por $P(V)$, é o conjunto de subespaços vetoriais de dimensão 1 de V. Em particular, para $V = \mathbb{R}^{n+1}$ costuma-se usar a notação $\mathbb{R}P^n$.

- Note que se $\dim V = n + 1$, então $\dim P(V) = n$.
- Um espaço projetivo de dimensão 1 é uma reta projetiva (real) e o de dimensão 2, um plano projetivo (real).
- Segue da definição que $\mathbb{R}P^n$ é o conjunto de retas pela origem; cada reta intercepta a esfera unitária S^n em dois pontos $\pm u$, de modo que $\mathbb{R}P^n$ é S^n com antípodas identificadas.



O modelo do hemisfério para o plano projetivo

- Qualquer subespaço unidimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é o conjunto de múltiplos de um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, de modo que sendo $v = (X_0, \ldots, X_n) \neq 0$, escrevemos $[v] = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$, que são as coordenadas homogêneas de um ponto em $\mathbb{R}P^n$.

- Qualquer subespaço unidimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é o conjunto de múltiplos de um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, de modo que sendo $v = (X_0, \ldots, X_n) \neq 0$, escrevemos $[v] = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$, que são as coordenadas homogêneas de um ponto em $\mathbb{R}P^n$.
- Daí, se $\lambda \neq 0$

$$(\lambda X_0 : \lambda X_1 : \cdots : \lambda X_n) = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n).$$

- Qualquer subespaço unidimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é o conjunto de múltiplos de um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, de modo que sendo $v = (X_0, \ldots, X_n) \neq 0$, escrevemos $[v] = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$, que são as coordenadas homogêneas de um ponto em $\mathbb{R}P^n$.
- Daí, se $\lambda \neq 0$

$$(\lambda X_0 : \lambda X_1 : \cdots : \lambda X_n) = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n).$$

- Podemos passar do plano projetivo para o plano real do seguinte modo, com coordenadas homogêneas:

$$(X : Y : Z) = \left(\frac{X}{Z} : \frac{Y}{Z} : 1\right) \mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), Z \neq 0$$

- Qualquer subespaço unidimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é o conjunto de múltiplos de um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, de modo que sendo $v = (X_0, \ldots, X_n) \neq 0$, escrevemos $[v] = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$, que são as coordenadas homogêneas de um ponto em $\mathbb{R}P^n$.
- Daí, se $\lambda \neq 0$

$$(\lambda X_0 : \lambda X_1 : \cdots : \lambda X_n) = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n).$$

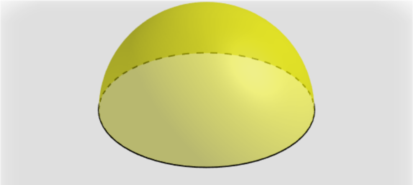
- Podemos passar do plano projetivo para o plano real do seguinte modo, com coordenadas homogêneas:

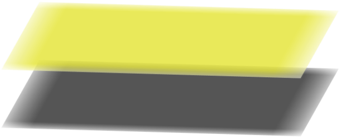
$$(X : Y : Z) = \left(\frac{X}{Z} : \frac{Y}{Z} : 1\right) \mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), Z \neq 0$$

- O plano projetivo é então

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1.$$

- Existem dois modelos particularmente interessantes para a visualização do plano projetivo: o modelo do hemisfério e o da tela.





Os diferentes modelos para o plano projetivo

- Usando a correspondência de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ dada anteriormente, a equação da reta se torna

$$ax + by + c = 0 \qquad\qquad aX + bY + cZ = 0$$

$$a\left(\frac{X}{Z}\right) + b\left(\frac{Y}{Z}\right) + c = 0$$

- Usando a correspondência de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ dada anteriormente, a equação da reta se torna

$$ax + by + c = 0 \qquad\qquad aX + bY + cZ = 0$$

$$a\left(\frac{X}{Z}\right) + b\left(\frac{Y}{Z}\right) + c = 0$$

para pontos no projetivo.

- Usando a correspondência de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ dada anteriormente, a equação da reta se torna

$$ax + by + c = 0 \qquad\qquad aX + bY + cZ = 0$$

$$a\left(\frac{X}{Z}\right) + b\left(\frac{Y}{Z}\right) + c = 0$$

para pontos no projetivo.

- Seu ponto no infinito é dado com $Z = 0$:

$$aX + bY = 0,$$

- Usando a correspondência de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ dada anteriormente, a equação da reta se torna

$$ax + by + c = 0 \qquad\qquad aX + bY + cZ = 0$$

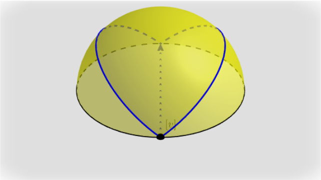
$$a\left(\frac{X}{Z}\right) + b\left(\frac{Y}{Z}\right) + c = 0$$

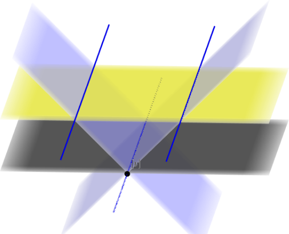
para pontos no projetivo.

- Seu ponto no infinito é dado com $Z = 0$:

$$aX + bY = 0,$$

ou seja, é $(-b : a)$, a direção da reta $ax + by + c = 0$.





- Considere novamente a cônica (1). Para passarmos dessa equação para a equação (2), realizamos a transformação

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), Z \neq 0.$$

- Considere novamente a cônica (1). Para passarmos dessa equação para a equação (2), realizamos a transformação

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), Z \neq 0.$$

- Note que o cone que obtemos em (2), a saber

$$Q(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + 2CXY + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0,$$

- Considere novamente a cônica (1). Para passarmos dessa equação para a equação (2), realizamos a transformação

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), Z \neq 0.$$

- Note que o cone que obtemos em (2), a saber

$$Q(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + 2CXY + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0,$$

é uma equação homogênea de grau 2, logo é uma curva em $\mathbb{R}P^2$.

- Considere novamente a cônica (1). Para passarmos dessa equação para a equação (2), realizamos a transformação

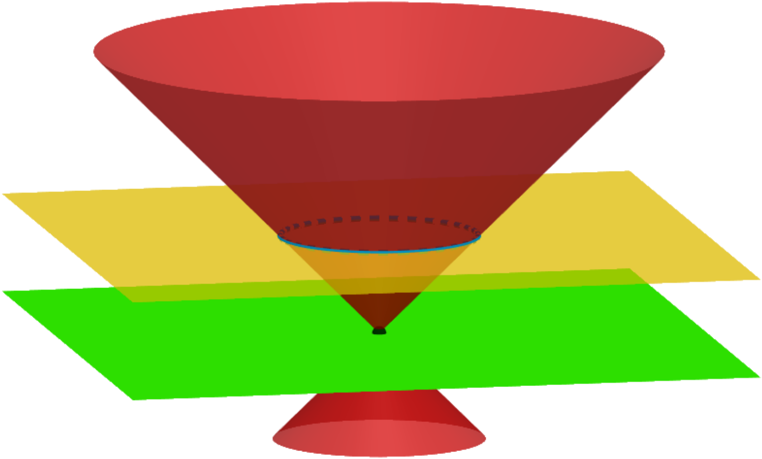
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), Z \neq 0.$$

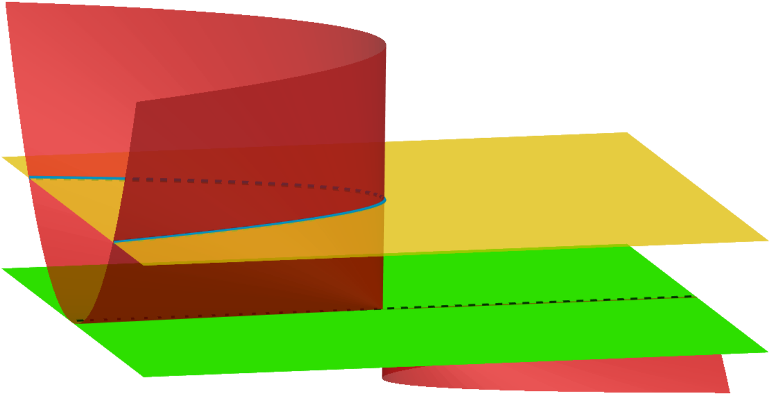
- Note que o cone que obtemos em (2), a saber

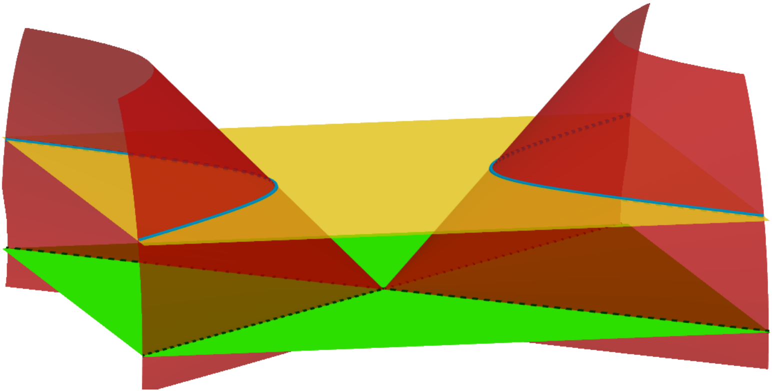
$$Q(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + 2CXY + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0,$$

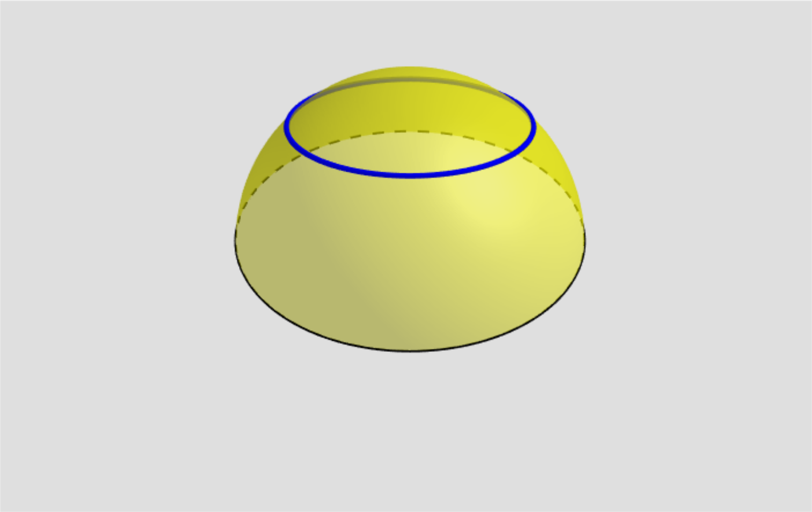
é uma equação homogênea de grau 2, logo é uma curva em $\mathbb{R}P^2$.

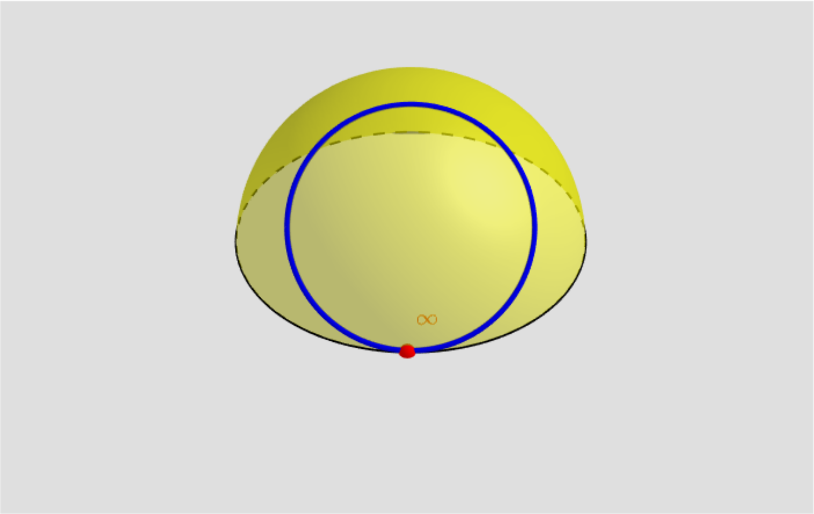
- Assim como antes, fazer $Z = 1$ nos devolve as cônicas e fazer $Z = 0$ nos dá os pontos no infinito da respectiva cônica.

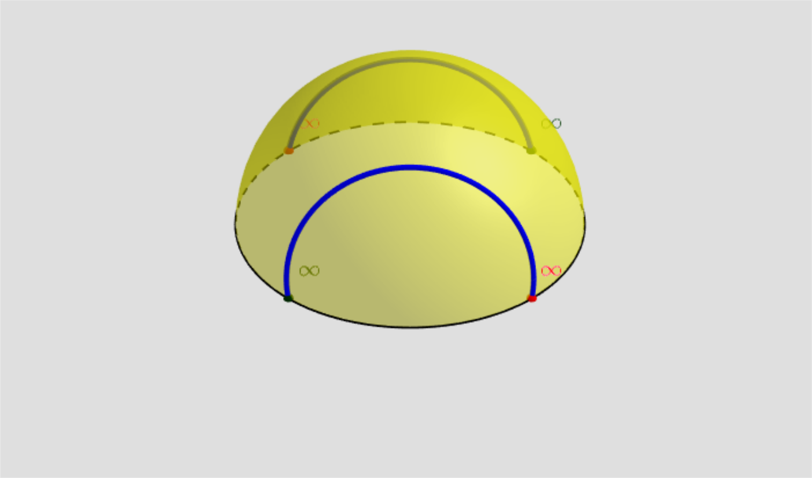


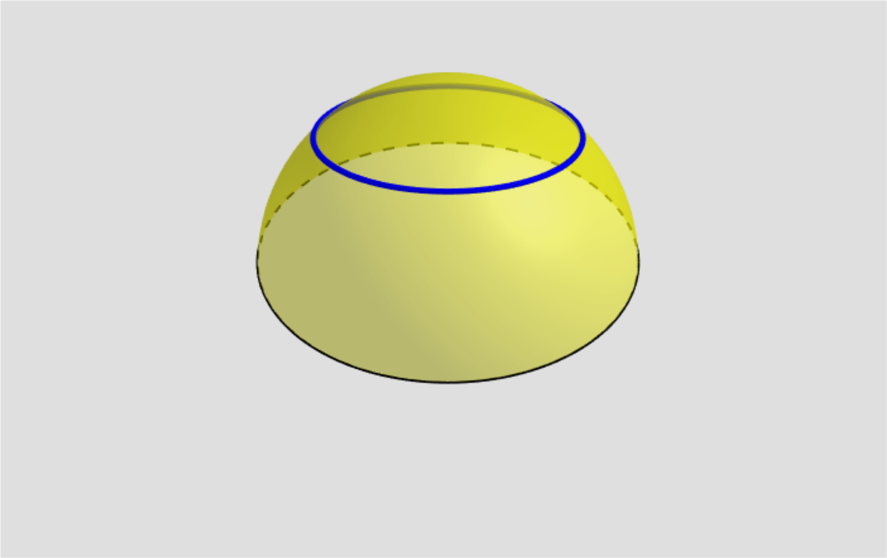












A. Barros, P. Andrade
Introdução à Geometria Projetiva
SBM: Textos Universitários, 2010.

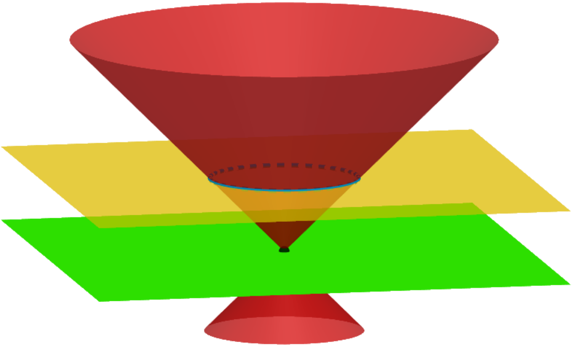
C. Tomás, L. Seco
Geometria com pontos no infinito
Work in progress, 2020

L. Seco
Cônicas
Anotações, 2017

M. Berger
Geometry I
Springer, 1987.

N. Hitchin
Projective Geometry
Lecture notes, 2003.

Obrigado!



Contato: `caiotomas6@gmail.com`