Uma demonstração topológica do Teorema de Cayley-Hamilton

Caio Tomás de Paula [1]

Orientador: Lucas Conque Seco Ferreira

PETMAT UnB

Departamento de Matemática – Universidade de Brasília

Junho de 2021

[1] Bolsista pelo MEC/FNDE do PETMAT-UnB

Resumo

- Background
- Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos
- Teorema de Cayley-Hamilton
- Prova do TFPS

O teorema

Enunciado

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

O teorema

Enunciado

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

Enunciado alternativo

Sejam T um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita V e p_T o polinômio característico de T. Se f_T é o polinômio minimal de T, então $f_T | p_T$.

Um pouco de história

- Provado por Hamilton para quatérnios em 1853;

Um pouco de história

- Provado por Hamilton para quatérnios em 1853;
- Aparece em um *memoir* de Cayley que introduziu álgebra matricial (1858);

Um pouco de história

- Provado por Hamilton para quatérnios em 1853;
- Aparece em um *memoir* de Cayley que introduziu álgebra matricial (1858);
- Provado para $n = 2$ e "verificado" para $n = 3$:

Um pouco de história

- Provado por Hamilton para quatérnios em 1853;
- Aparece em um *memoir* de Cayley que introduziu álgebra matricial (1858);
- Provado para $n = 2$ e "verificado" para $n = 3$:

  'I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree.'

Um pouco de história

- Provado por Hamilton para quatérnios em 1853;
- Aparece em um *memoir* de Cayley que introduziu álgebra matricial (1858);
- Provado para $n = 2$ e "verificado" para $n = 3$:

  'I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree.'

- Caso geral demonstrado pela primeira vez em 1878, por Frobenius

Polinômios simétricos

Definição

Um polinômio em n variáveis $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ é simétrico se, dada qualquer permutação τ dos índices, $P(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = P$.

Polinômios simétricos

Definição

Um polinômio em n variáveis $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ é simétrico se, dada qualquer permutação τ dos índices, $P(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = P$.

Exemplo

Os polinômios

$$p_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

são simétricos para $1 \leq k \leq n$. Eles também são homogêneos, i.e., todos os termos não nulos têm mesmo grau.

Polinômios Simétricos Elementares (PSE)

Definição

Os n polinômios simétricos elementares, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são definidos como:

$$\sigma_1 = \sum_{i} x_i$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\sigma_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Teorema (Vieta)

Sejam $p(z)$ mônico de grau n com raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ os PSE nos α_i. Então

$$p(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

Teorema (Vieta)

Sejam $p(z)$ mônico de grau n com raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ os PSE nos α_i. Então

$$p(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

Exemplo

Seja $T \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Por Vieta,

$$\det(\lambda I - T) = p_T(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k \lambda^{n-k},$$

sendo σ_k os PSE nos autovalores de T.

Teorema (Fundamental dos Polinômios Simétricos)

Qualquer polinômio simétrico em n variáveis $x_1, \dots, x_n$ pode ser escrito de forma única como um polinômio dos PSE nas variáveis.

Teorema (Fundamental dos Polinômios Simétricos)

Qualquer polinômio simétrico em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ pode ser escrito de forma única como um polinômio dos PSE nas variáveis.

Exemplo

O polinômio $p = (x_1 - x_2)^2$ fica inalterado se trocarmos x_1 com x_2, logo é simétrico; o TFPS garante então que p pode ser escrito em termos de $\sigma_1 = x_1 + x_2$ e $\sigma_2 = x_1 x_2$ e, de fato, pode:
$p = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$.

Teorema (Cayley-Hamilton)

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

Teorema (Cayley-Hamilton)

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

Cuidado!

$$0 = \det(A - A) = \det(AI - A) = p(A)$$

Teorema (Cayley-Hamilton)

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

Cuidado!

$$0 = \det(A - A) = \det(AI - A) = p(A)$$

escalar $\neq$ matriz

Teorema (Cayley-Hamilton)

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

Cuidado!

$$0 = \det(A - A) = \det(AI - A) = p(A)$$

escalar $\neq$ matriz

Teorema (Cayley-Hamilton)

Se T é um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V e p_T é o polinômio característico de T, então $p_T(T) = \mathbf{0}$.

Cuidado!

$$0 = \det(A - A) = \det(AI - A) = p(A)$$

Não é demonstração!

escalar $\neq$ matriz

Observação

Note que se $T = \text{diag}(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq n$, então o teorema se verifica imediatamente:

$$p_T(T) = \begin{pmatrix} p_T(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_T(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_T(\lambda_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Observação

Note que se $T = \text{diag}(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq n$, então o teorema se verifica imediatamente:

$$p_T(T) = \begin{pmatrix} p_T(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_T(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_T(\lambda_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Além disso,

$$\det(\lambda I - U^{-1}TU) = \det\left(U^{-1}(\lambda I - T)U\right) = \det(\lambda I - T).$$

Observação

Note que se $T = \text{diag}(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq n$, então o teorema se verifica imediatamente:

$$p_T(T) = \begin{pmatrix} p_T(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_T(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_T(\lambda_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Além disso,

$$\det(\lambda I - U^{-1}TU) = \det\left(U^{-1}(\lambda I - T)U\right) = \det(\lambda I - T).$$

Logo, o teorema se verifica para T diagonalizável.

Observação

Note que se $T = \text{diag}(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq n$, então o teorema se verifica imediatamente:

$$p_T(T) = \begin{pmatrix} p_T(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_T(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_T(\lambda_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Além disso,

$$\det(\lambda I - U^{-1}TU) = \det\left(U^{-1}(\lambda I - T)U\right) = \det(\lambda I - T).$$

Logo, o teorema se verifica para T diagonalizável. Nem todo operador é diagonalizável... mas eles são densos!

As invertíveis são densas!

Lema

O conjunto $\mathcal{I}$ das matrizes invertíveis de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ é denso.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{J} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \det T \neq 0\} \subset \mathcal{I},$$

e identifique $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{n^2}$.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{J} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \det T \neq 0\} \subset \mathcal{I},$$

e identifique $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{n^2}$. Sendo assim, como $\det T$ é um polinômio nas entradas de T, segue que $\mathcal{J}$ é o conjunto de pontos T de $\mathbb{C}^{n^2}$ nos quais $\det T \neq 0$.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{J} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \det T \neq 0\} \subset \mathcal{I},$$

e identifique $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{n^2}$. Sendo assim, como $\det T$ é um polinômio nas entradas de T, segue que $\mathcal{J}$ é o conjunto de pontos T de $\mathbb{C}^{n^2}$ nos quais $\det T \neq 0$. Supondo que $\det$ se anulasse em alguma vizinhança de T, então a expansão em série de Taylor

$$\det = \sum_k \frac{\partial^{|k|} \det}{\partial z^k}(T) \frac{(z-T)^k}{k_1! \cdots k_n!}$$

de $\det$ em torno de T nos daria $\det \equiv 0$, absurdo. Por fim, $\mathcal{J}$ é aberto pois, intuitivamente, seu complementar é uma superfície algébrica.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{J} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \det T \neq 0\} \subset \mathcal{I},$$

e identifique $\mathsf{gl}(n, \mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{n^2}$. Sendo assim, como $\det T$ é um polinômio nas entradas de T, segue que $\mathcal{J}$ é o conjunto de pontos T de $\mathbb{C}^{n^2}$ nos quais $\det T \neq 0$. Supondo que $\det$ se anulasse em alguma vizinhança de T, então a expansão em série de Taylor

$$\det = \sum_k \frac{\partial^{|k|} \det}{\partial z^k}(T) \frac{(z - T)^k}{k_1! \cdots k_n!}$$

de $\det$ em torno de T nos daria $\det \equiv 0$, absurdo. Por fim, $\mathcal{J}$ é aberto pois, intuitivamente, seu complementar é uma superfície algébrica. Logo, $\mathcal{I}$ é denso. $\square$

E as diagonalizáveis também!

Lema

O conjunto $\mathcal{D}$ das matrizes diagonalizáveis de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ é denso.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{U} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \lambda_i \neq \lambda_j\} \subset \mathcal{D}.$$

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{U} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \lambda_i \neq \lambda_j\} \subset \mathcal{D}.$$

Note que

$$\Delta_T = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

com f *simétrica*.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{U} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \lambda_i \neq \lambda_j\} \subset \mathcal{D}.$$

Note que

$$\Delta_T = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

com f *simétrica*. Logo, $\Delta_T = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, e segue que g é um polinômio nos coeficientes de p_T, i.e., um polinômio nas entradas de T.

Demonstração.

Considere

$$\mathcal{U} = \{T \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{C}) : \lambda_i \neq \lambda_j\} \subset \mathcal{D}.$$

Note que

$$\Delta_T = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

com f *simétrica*. Logo, $\Delta_T = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, e segue que g é um polinômio nos coeficientes de p_T, i.e., um polinômio nas entradas de T. Usando o mesmo argumento acima com a expansão em série de Taylor

$$g = \sum_k \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(p) \frac{(z-p)^k}{k_1! \cdots k_n!}$$

de g, temos o resultado. □

Finalmente, Cayley-Hamilton

Demonstração.

Já temos todo o necessário:

Finalmente, Cayley-Hamilton

Demonstração.

Já temos todo o necessário:

1. p_T é contínuo em T, pois as entradas de $p_T(T)$ são polinômios nas entradas de T;

Finalmente, Cayley-Hamilton

Demonstração.

Já temos todo o necessário:

1. p_T é contínuo em T, pois as entradas de $p_T(T)$ são polinômios nas entradas de T;
2. pela continuidade, para verificar $p_T(T) = \mathbf{0}$ basta verificarmos para as diagonalizáveis;

Finalmente, Cayley-Hamilton

Demonstração.

Já temos todo o necessário:

1. p_T é contínuo em T, pois as entradas de $p_T(T)$ são polinômios nas entradas de T;
2. pela continuidade, para verificar $p_T(T) = \mathbf{0}$ basta verificarmos para as diagonalizáveis;
3. feito!

Finalmente, Cayley-Hamilton

Demonstração.

Já temos todo o necessário:

1. p_T é contínuo em T, pois as entradas de $p_T(T)$ são polinômios nas entradas de T;
2. pela continuidade, para verificar $p_T(T) = \mathbf{0}$ basta verificarmos para as diagonalizáveis;
3. feito!

É interessante observar que como o teorema vale em $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, ele também vale em $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{gl}(n, \mathbb{Q})$. □

Lema da Dispersão

Definição

Dado um monômio $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, sua dispersão é $i_1^2 + \cdots + i_n^2$.

Lema da Dispersão

Definição

Dado um monômio $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, sua dispersão é $i_1^2 + \cdots + i_n^2$.

Lema (Dispersão)

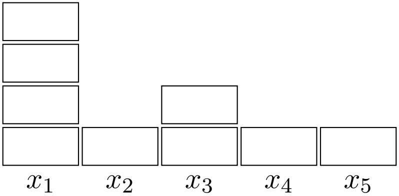
Dados $i_1, \ldots, i_n$ com $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$, os termos de $\sigma_1^{i_1 - i_2} \sigma_2^{i_2 - i_3} \cdots \sigma_n^{i_n}$ com dispersão máxima são $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ e seus conjugados.

Demonstração do Lema

Identificamos o monômio $x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ com uma sequência de pilhas de alturas $j_1, \ldots, j_n$ de blocos idênticos.

Demonstração do Lema

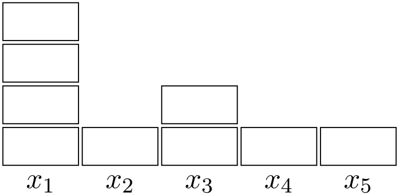
Identificamos o monômio $x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ com uma sequência de pilhas de alturas $j_1, \ldots, j_n$ de blocos idênticos.



O monômio $x_1^4 x_2 x_3^2 x_4 x_5$

Demonstração do Lema

Identificamos o monômio $x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ com uma sequência de pilhas de alturas $j_1, \ldots, j_n$ de blocos idênticos.



O monômio $x_1^4 x_2 x_3^2 x_4 x_5$

Tomando blocos de massa unitária, a altura do centro de gravidade é dada pela soma das alturas de cada bloco dividida pela quantidade de blocos.

Demonstração do Lema

Supondo que o primeiro bloco de cada pilha está à altura 1 e cada bloco tem altura unitária, então a pilha de altura j_1 contribui

$$1 + 2 + \cdots + j_1 = \frac{j_1(j_1 + 1)}{2}$$

para a soma.

Demonstração do Lema

Supondo que o primeiro bloco de cada pilha está à altura 1 e cada bloco tem altura unitária, então a pilha de altura j_1 contribui

$$1 + 2 + \cdots + j_1 = \frac{j_1(j_1+1)}{2}$$

para a soma. A altura y do centro de gravidade é

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{d}\left(\frac{j_1(j_1+1)}{2} + \cdots + \frac{j_n(j_n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2d}(j_1^2 + \cdots + j_n^2 + j_1 + \cdots + j_n) = \frac{1}{2d}(s+d), \end{aligned}$$

Demonstração do Lema

Supondo que o primeiro bloco de cada pilha está à altura 1 e cada bloco tem altura unitária, então a pilha de altura j_1 contribui

$$1 + 2 + \cdots + j_1 = \frac{j_1(j_1+1)}{2}$$

para a soma. A altura y do centro de gravidade é

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{d}\left(\frac{j_1(j_1+1)}{2} + \cdots + \frac{j_n(j_n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2d}(j_1^2 + \cdots + j_n^2 + j_1 + \cdots + j_n) = \frac{1}{2d}(s+d), \end{aligned}$$

sendo d a quantidade de blocos, i.e., o grau do monômio, e s sua dispersão.

Demonstração do Lema

Supondo que o primeiro bloco de cada pilha está à altura 1 e cada bloco tem altura unitária, então a pilha de altura j_1 contribui

$$1 + 2 + \cdots + j_1 = \frac{j_1(j_1+1)}{2}$$

para a soma. A altura y do centro de gravidade é

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{d}\left(\frac{j_1(j_1+1)}{2} + \cdots + \frac{j_n(j_n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2d}(j_1^2 + \cdots + j_n^2 + j_1 + \cdots + j_n) = \frac{1}{2d}(s+d), \end{aligned}$$

sendo d a quantidade de blocos, i.e., o grau do monômio, e s sua dispersão. Logo, $s = 2dy - d$ e, como d é fixo, s é função linear crescente de y.

Demonstração do Lema

- Note que todos os termos de

$$\sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\cdots\sigma_n^{i_n}$$

podem ser obtidos de $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ movendo blocos horizontalmente (e soltando-os no topo da pilha abaixo se necessário).

Demonstração do Lema

- Note que todos os termos de

$$\sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\cdots\sigma_n^{i_n}$$

  podem ser obtidos de $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ movendo blocos horizontalmente (e soltando-os no topo da pilha abaixo se necessário).
- Os conjugados de $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ são os termos para os quais cada camada de blocos repousa completamente sobre a camada inferior antes que os blocos sejam soltos.

Demonstração do Lema

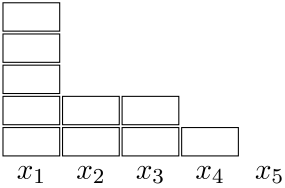
- Note que todos os termos de

$$\sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\cdots\sigma_n^{i_n}$$

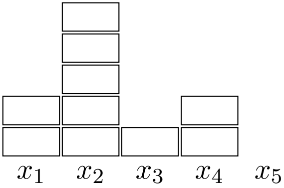
  podem ser obtidos de $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ movendo blocos horizontalmente (e soltando-os no topo da pilha abaixo se necessário).
- Os conjugados de $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ são os termos para os quais cada camada de blocos repousa completamente sobre a camada inferior antes que os blocos sejam soltos.
- Portanto, os blocos cairão justamente para os termos que não são conjugados de $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$.

Demonstração do Lema

$x_1^5 x_2^2 x_3^2 x_4$



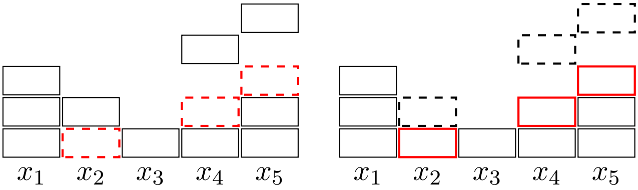
$x_1^2 x_2^5 x_3 x_4^2$



Monômios conjugados (centro de gravidade à mesma altura)

Demonstração do Lema

$x_1^3 x_2 x_3 x_4^2 x_5^3$ $\qquad$ $x_1^3 x_2 x_3 x_4^2 x_5^3$



Monômio com centro de gravidade mais baixo

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Seja f o polinômio simétrico a ser representado. O conjunto dos termos de f com um dado grau é também um polinômio simétrico, e se pudermos representar cada um deles como um polinômio nos σ_i, podemos representar f.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Seja f o polinômio simétrico a ser representado. O conjunto dos termos de f com um dado grau é também um polinômio simétrico, e se pudermos representar cada um deles como um polinômio nos σ_i, podemos representar f.
- Logo, podemos assumir s.p.g. que f é *homogêneo*.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Seja f o polinômio simétrico a ser representado. O conjunto dos termos de f com um dado grau é também um polinômio simétrico, e se pudermos representar cada um deles como um polinômio nos σ_i, podemos representar f.
- Logo, podemos assumir s.p.g. que f é *homogêneo*.
- Escolha qualquer termo de f com dispersão máxima s_1, e considere ele e seus conjugados.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Seja f o polinômio simétrico a ser representado. O conjunto dos termos de f com um dado grau é também um polinômio simétrico, e se pudermos representar cada um deles como um polinômio nos σ_i, podemos representar f.
- Logo, podemos assumir s.p.g. que f é *homogêneo*.
- Escolha qualquer termo de f com dispersão máxima s_1, e considere ele e seus conjugados.
- Forme o produto de funções simétricas elementares g_1 que tem esses termos como seus termos de dispersão máxima: se os termos de f têm coeficiente c_1 e expoentes $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$, então

$$g_1 = \sigma_1^{i_1 - i_2} \sigma_2^{i_2 - i_3} \cdots \sigma_n^{i_n}.$$

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Pelo Lema de Dispersão, esses termos são os únicos termos de g_1 com dispersão s_1.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Pelo Lema de Dispersão, esses termos são os únicos termos de g_1 com dispersão s_1.
- Daí, $f - g_1$ contém menos termos com dispersão s_1 do que f, possivelmente zero.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Pelo Lema de Dispersão, esses termos são os únicos termos de g_1 com dispersão s_1.
- Daí, $f - g_1$ contém menos termos com dispersão s_1 do que f, possivelmente zero.
- Continuando desse modo começando com $f - g_1$, formando g_2 e $f - g_1 - g_2$, e assim por diante, temos um algoritmo que eventualmente termina pois, em cada etapa, ou a dispersão máxima ou a quantidade de termos com tal dispersão diminui.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Pelo Lema de Dispersão, esses termos são os únicos termos de g_1 com dispersão s_1.
- Daí, $f - g_1$ contém menos termos com dispersão s_1 do que f, possivelmente zero.
- Continuando desse modo começando com $f - g_1$, formando g_2 e $f - g_1 - g_2$, e assim por diante, temos um algoritmo que eventualmente termina pois, em cada etapa, ou a dispersão máxima ou a quantidade de termos com tal dispersão diminui.
- Para a unicidade, basta mostrar que o polinômio nulo em $x_1, \ldots, x_n$ é unicamente representado como o polinômio nulo em $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Isso é verdade pois dois produtos distintos

$$\sigma^{k_1} \cdots \sigma^{k_n}$$

não têm mesmo termo líder, já que o termo líder de $\sigma_1^{k_1} \cdots \sigma_n^{k_n}$ é

$$x_1^{k_1+\cdots+k_n} x_2^{k_2+\cdots+k_n} \cdots x_n^{k_n},$$

e a correspondência

$$(k_1, \ldots, k_n) \mapsto (k_1 + \cdots + k_n, \ldots, k_{n-1} + k_n, k_n)$$

é injetiva.

Demonstração do TFPS usando dispersão

- Isso é verdade pois dois produtos distintos

$$\sigma^{k_1} \cdots \sigma^{k_n}$$

não têm mesmo termo líder, já que o termo líder de $\sigma_1^{k_1} \cdots \sigma_n^{k_n}$ é

$$x_1^{k_1+\cdots+k_n} x_2^{k_2+\cdots+k_n} \cdots x_n^{k_n},$$

e a correspondência

$$(k_1, \ldots, k_n) \mapsto (k_1 + \cdots + k_n, \ldots, k_{n-1} + k_n, k_n)$$

é injetiva.

- Logo, os termos líderes em uma soma de produtos disjuntos de polinômios simétricos elementares não se cancelam, e a soma só é nula se for vazia.

Referências

Blum-Smith, B., Coskey, S.
The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory
https://arxiv.org/abs/1301.7116v5, 2020.

Hoffman, K., Kunze, R.
Linear Algebra
Second Edition, Prentice-Hall, 1971.

Higham, N.
What is the Cayley-Hamilton Theorem?
https://nhigham.com/2020/11/03/what-is-the-cayley-hamilton-theorem/

Obrigado!

Contato: caiotomas6@gmail.com