A matemática da relatividade especial

Caio Tomás de Paula[1]

Orientadora: Luciana Ávila Rodrigues

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

23 de Novembro de 2021

[1] Bolsista PET/MEC/FNDE

O que é a relatividade especial?

- Teoria que descreve a relação física entre espaço e tempo

Postulados

i. As leis da Física são as mesmas para qualquer referencial inercial (**Relatividade**).

ii. A velocidade da luz no vácuo é a mesma para qualquer referencial inercial (**Invariância de** c).

O que é a relatividade especial?

- Teoria que descreve a relação física entre espaço e tempo

Postulados

i. As leis da Física são as mesmas para qualquer referencial inercial (**Relatividade**).

ii. A velocidade da luz no vácuo é a mesma para qualquer referencial inercial (**Invariância de** c).

Quais suas implicações físicas?

- **Nada** se move mais rápido que a luz no vácuo
- Dilatação temporal
- Contração espacial (invisível, [4])
- Relatividade da simultaneidade (!)
- Unificação de espaço e tempo

Quais suas implicações físicas?

- **Nada** se move mais rápido que a luz no vácuo
- Dilatação temporal
- Contração espacial (invisível, [4])
- Relatividade da simultaneidade (!)
- Unificação de espaço e tempo

Quais suas implicações físicas?

- **Nada** se move mais rápido que a luz no vácuo
- Dilatação temporal
- Contração espacial (invisível, [4])
- Relatividade da simultaneidade (!)
- Unificação de espaço e tempo

Quais suas implicações físicas?

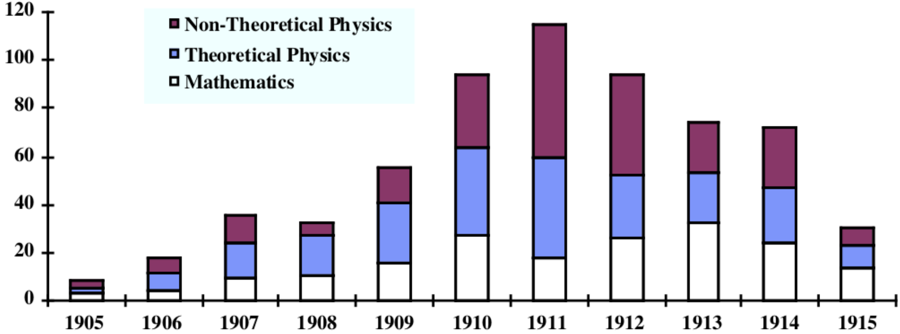
- **Nada** se move mais rápido que a luz no vácuo
- Dilatação temporal
- Contração espacial (invisível, [4])
- Relatividade da simultaneidade (!)
- Unificação de espaço e tempo

Quais suas implicações físicas?

- **Nada** se move mais rápido que a luz no vácuo
- Dilatação temporal
- Contração espacial (invisível, [4])
- Relatividade da simultaneidade (!)
- Unificação de espaço e tempo

Breve história

- Teoria desenvolvida ao longo do final do século XIX e início do século XX
- Além de Einstein, teve contribuições de Poincaré, Lorentz e Minkowski



Papers na teoria da relatividade restrita, [5].

Qual a geometria do espaço-tempo?

- A geometria natural a se considerar é a **geometria de Minkowski**

Espaço de Minkowski

O espaço $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$, sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ a chamada **"métrica" de Lorentz**, dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

é chamado **espaço de Minkowski** e denotado $\mathbb{R}^{2,1}$ ou $\mathbb{R}^3_1$. Temos três tipos de vetores nesse espaço:

- tipo **espaço** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 > 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ex.: $(1,1,0)$);
- tipo **tempo** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$ (ex.: $(1,1,2)$);
- tipo **luz** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (ex.: $(1,1,\sqrt{2})$).

- A geometria natural a se considerar é a **geometria de Minkowski**

Espaço de Minkowski

O espaço $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ a chamada **"métrica" de Lorentz**, dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, \; \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

é chamado **espaço de Minkowski** e denotado $\mathbb{R}^{2,1}$ ou $\mathbb{R}^3_1$. Temos três tipos de vetores nesse espaço:

- tipo **espaço** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 > 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, 0)$);
- tipo **tempo** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$ (ex.: $(1, 1, 2)$);
- tipo **luz** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, \sqrt{2})$).

- A geometria natural a se considerar é a **geometria de Minkowski**

Espaço de Minkowski

O espaço $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ a chamada **"métrica" de Lorentz**, dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

é chamado **espaço de Minkowski** e denotado $\mathbb{R}^{2,1}$ ou $\mathbb{R}^3_1$. Temos três tipos de vetores nesse espaço:

- tipo **espaço** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 > 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, 0)$);
- tipo **tempo** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$ (ex.: $(1, 1, 2)$);
- tipo **luz** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, \sqrt{2})$).

- A geometria natural a se considerar é a **geometria de Minkowski**

Espaço de Minkowski

O espaço $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ a chamada **"métrica" de Lorentz**, dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

é chamado **espaço de Minkowski** e denotado $\mathbb{R}^{2,1}$ ou $\mathbb{R}^3_1$. Temos três tipos de vetores nesse espaço:

- tipo **espaço** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 > 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, 0)$);
- tipo **tempo** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$ (ex.: $(1, 1, 2)$);
- tipo **luz** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, \sqrt{2})$).

Qual a geometria do espaço-tempo?

- A geometria natural a se considerar é a **geometria de Minkowski**

Espaço de Minkowski

O espaço $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$, sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ a chamada **"métrica" de Lorentz**, dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

é chamado **espaço de Minkowski** e denotado $\mathbb{R}^{2,1}$ ou $\mathbb{R}^3_1$. Temos três tipos de vetores nesse espaço:

- tipo **espaço** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_1 > 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, 0)$);
- tipo **tempo** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_1 < 0$ (ex.: $(1, 1, 2)$);
- tipo **luz** se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_1 = 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (ex.: $(1, 1, \sqrt{2})$).

Sobre os tipos de vetores

- o conjunto dos vetores tipo luz é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \textbf{ (cone)}$$

- o conjunto dos vetores tipo tempo é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

- o conjunto dos vetores tipo espaço é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 0\}$$

Sobre os tipos de vetores

- o conjunto dos vetores tipo luz é

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \textbf{ (cone)}$$

- o conjunto dos vetores tipo tempo é

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

- o conjunto dos vetores tipo espaço é

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 0\}$$

Sobre os tipos de vetores

- o conjunto dos vetores tipo luz é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \text{ (cone)}$$

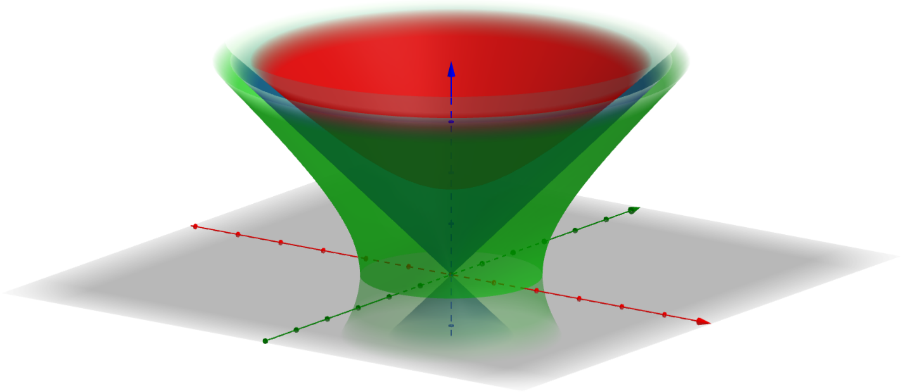
- o conjunto dos vetores tipo tempo é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

- o conjunto dos vetores tipo espaço é

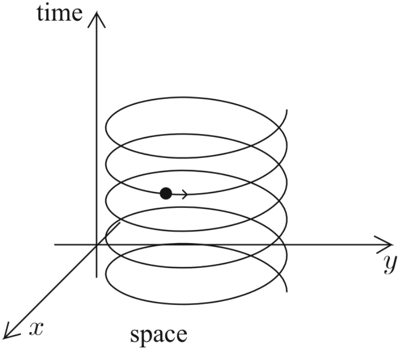
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 > 0\}$$

- Com essa métrica, surgem conexões naturais com geometria hiperbólica



Linha mundo

A curva composta de pontos do espaço-tempo (**eventos**) que corresponde à história de um objeto é chamada **linha-mundo** do objeto.



Linha mundo da Terra.

Causalidade

Dados dois eventos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que e_1 **precede causalmente** e_2 se

$$\tau_2 - \tau_1 \geq 0, \quad \text{e} \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\tau_1 - \tau_2)^2 \leq 0,$$

sendo $e_i = (x_i, y_i, z_i, \tau_i)$, e denotamos $e_1 \prec e_2$.

Observação

A relação de causalidade $\prec$ é transitiva, $(e_1 \prec e_2,\ e_2 \prec e_3 \implies e_1 \prec e_3)$, reflexiva $(e_1 \prec e_1)$ e antisimétrica $(e_1 \prec e_2, e_2 \prec e_1 \implies e_1 = e_2)$, ou seja, é uma relação de **ordem parcial** (logo, podemos ter $e_1 \not\prec e_2$ e $e_2 \not\prec e_1$).

Causalidade

Dados dois eventos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que e_1 **precede causalmente** e_2 se

$$\tau_2 - \tau_1 \geq 0, \quad \text{e} \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\tau_1 - \tau_2)^2 \leq 0,$$

sendo $e_i = (x_i, y_i, z_i, \tau_i)$, e denotamos $e_1 \prec e_2$.

Observação

A relação de causalidade $\prec$ é transitiva, $(e_1 \prec e_2,\ e_2 \prec e_3 \implies e_1 \prec e_3)$, reflexiva $(e_1 \prec e_1)$ e antisimétrica $(e_1 \prec e_2, e_2 \prec e_1 \implies e_1 = e_2)$, ou seja, é uma relação de **ordem parcial** (logo, podemos ter $e_1 \not\prec e_2$ e $e_2 \not\prec e_1$).

Isometrias

Uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ é dita **causal** se preserva causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \prec \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Observação

Pode-se mostrar que se uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ não é causal, então ela inverte a causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \succ \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Exemplo (*Lorentz boost*)

$B_\lambda : (x, y, z, \tau) \mapsto (x \cosh \lambda + \tau \sinh \lambda, y, z, x \sinh \lambda + \tau \cosh \lambda)$

Direção temporal

Dizemos que $e_1 = (x, y, z, \tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$ é **direcionado para o futuro (passado)** se $\tau > 0$ $(\tau < 0)$.

Isometrias

Uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ é dita **causal** se preserva causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \prec \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Observação

Pode-se mostrar que se uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ não é causal, então ela inverte a causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \succ \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Exemplo (*Lorentz boost*)

$B_\lambda : (x, y, z, \tau) \mapsto (x \cosh\lambda + \tau \sinh\lambda, y, z, x \sinh\lambda + \tau \cosh\lambda)$

Direção temporal

Dizemos que $e_1 = (x, y, z, \tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$ é **direcionado para o futuro (passado)** se $\tau > 0$ $(\tau < 0)$.

Isometrias

Uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ é dita **causal** se preserva causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \prec \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Observação

Pode-se mostrar que se uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ não é causal, então ela inverte a causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \succ \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Exemplo (*Lorentz boost*)

$$B_\lambda : (x, y, z, \tau) \mapsto (x \cosh \lambda + \tau \sinh \lambda, y, z, x \sinh \lambda + \tau \cosh \lambda)$$

Direção temporal

Dizemos que $e_1 = (x, y, z, \tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$ é **direcionado para o futuro (passado)** se $\tau > 0$ ($\tau < 0$).

Isometrias

Uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ é dita **causal** se preserva causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \prec \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Observação

Pode-se mostrar que se uma isometria φ de $\mathbb{R}^{3,1}$ não é causal, então ela inverte a causalidade, i.e., $\varphi(e_1) \succ \varphi(e_2)$ sempre que $e_1 \prec e_2$.

Exemplo (*Lorentz boost*)

$$B_\lambda : (x, y, z, \tau) \mapsto (x \cosh \lambda + \tau \sinh \lambda, y, z, x \sinh \lambda + \tau \cosh \lambda)$$

Direção temporal

Dizemos que $e_1 = (x, y, z, \tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$ é **direcionado para o futuro (passado)** se $\tau > 0$ $(\tau < 0)$.

Relatividade

Se dois eventos e_1, e_2 são causalmente não relacionados, então existem isometrias causais φ_1, φ_2 e φ_3 tais que

- $\varphi_1(e_1) - \varphi_1(e_2)$ é direcionado para o passado
- $\varphi_2(e_1)$ e $\varphi_2(e_2)$ têm a mesma coordenada temporal
- $\varphi_3(e_1) - \varphi_3(e_2)$ é direcionado para o futuro

Causalidade de curvas

Uma curva é **causal** se todo par de eventos sobre ela tem relação causal. A parametrização mais natural é a "direcionada para o futuro" (passado), i.e., a parametrização $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \tau(t))$ tal que

$$\frac{d\tau(t)}{dt} > 0 \ \left(\frac{d\tau(t)}{dt} < 0\right), \forall t.$$

Relatividade

Se dois eventos e_1, e_2 são causalmente não relacionados, então existem isometrias causais φ_1, φ_2 e φ_3 tais que

- $\varphi_1(e_1) - \varphi_1(e_2)$ é direcionado para o passado
- $\varphi_2(e_1)$ e $\varphi_2(e_2)$ têm a mesma coordenada temporal
- $\varphi_3(e_1) - \varphi_3(e_2)$ é direcionado para o futuro

Causalidade de curvas

Uma curva é **causal** se todo par de eventos sobre ela tem relação causal. A parametrização mais natural é a "direcionada para o futuro" (passado), i.e., a parametrização $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t), \tau(t))$ tal que

$$\frac{d\tau(t)}{dt} > 0 \ \left(\frac{d\tau(t)}{dt} < 0\right), \forall t.$$

Tipos de curvas

Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que

- γ é **tipo espaço** se $\gamma'(t)$ é tipo espaço $\forall t \in I$
- γ é **tipo tempo** se $\gamma'(t)$ é tipo tempo $\forall t \in I$
- γ é **tipo luz** se $\gamma'(t)$ é tipo luz $\forall t \in I$

Exemplo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$ tal que $\gamma(t) = (2t, \sinh t, \cosh t, 0)$. Temos

$$\gamma'(t) = (2, \cosh t, \sinh t, 0) \implies \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_1 = 2^2 + 1 - 0 = 5 > 0,$$

logo γ é tipo espaço em $\mathbb{R}$.

Tipos de curvas

Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que

- γ é **tipo espaço** se $\gamma'(t)$ é tipo espaço $\forall t \in I$
- γ é **tipo tempo** se $\gamma'(t)$ é tipo tempo $\forall t \in I$
- γ é **tipo luz** se $\gamma'(t)$ é tipo luz $\forall t \in I$

Exemplo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$ tal que $\gamma(t) = (2t, \sinh t, \cosh t, 0)$. Temos

$$\gamma'(t) = (2, \cosh t, \sinh t, 0) \implies \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_1 = 2^2 + 1 - 0 = 5 > 0,$$

logo γ é tipo espaço em $\mathbb{R}$.

Tipos de curvas

Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que

- γ é **tipo espaço** se $\gamma'(t)$ é tipo espaço $\forall t \in I$
- γ é **tipo tempo** se $\gamma'(t)$ é tipo tempo $\forall t \in I$
- γ é **tipo luz** se $\gamma'(t)$ é tipo luz $\forall t \in I$

Exemplo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$ tal que $\gamma(t) = (2t, \sinh t, \cosh t, 0)$. Temos

$$\gamma'(t) = (2, \cosh t, \sinh t, 0) \implies \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_1 = 2^2 + 1 - 0 = 5 > 0,$$

logo γ é tipo espaço em $\mathbb{R}$.

Tipos de curvas

Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que

- γ é **tipo espaço** se $\gamma'(t)$ é tipo espaço $\forall t \in I$
- γ é **tipo tempo** se $\gamma'(t)$ é tipo tempo $\forall t \in I$
- γ é **tipo luz** se $\gamma'(t)$ é tipo luz $\forall t \in I$

Exemplo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$ tal que $\gamma(t) = (2t, \sinh t, \cosh t, 0)$. Temos

$$\gamma'(t) = (2, \cosh t, \sinh t, 0) \implies \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_1 = 2^2 + 1 - 0 = 5 > 0,$$

logo γ é tipo espaço em $\mathbb{R}$.

Tipos de curvas

Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^{3,1}$, dizemos que

- γ é **tipo espaço** se $\gamma'(t)$ é tipo espaço $\forall t \in I$
- γ é **tipo tempo** se $\gamma'(t)$ é tipo tempo $\forall t \in I$
- γ é **tipo luz** se $\gamma'(t)$ é tipo luz $\forall t \in I$

Exemplo

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3,1}$ tal que $\gamma(t) = (2t, \sinh t, \cosh t, 0)$. Temos

$$\gamma'(t) = (2, \cosh t, \sinh t, 0) \implies \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_1 = 2^2 + 1 - 0 = 5 > 0,$$

logo γ é tipo espaço em $\mathbb{R}$.

Parametrização de curvas causais

A parametrização de uma curva causal ou é direcionada para o passado ou é direcionada para o futuro.

Caracterização de curvas causais

Uma curva parametrizada γ é causal se, e só se, $\gamma'(t)$ não é do tipo espaço.

Caracterização de linhas mundo "possíveis"

Uma curva é linha mundo de um observador se, e só se, ela é do tipo tempo.

Parametrização de curvas causais

A parametrização de uma curva causal ou é direcionada para o passado ou é direcionada para o futuro.

Caracterização de curvas causais

Uma curva parametrizada γ é causal se, e só se, $\gamma'(t)$ não é do tipo espaço.

Caracterização de linhas mundo "possíveis"

Uma curva é linha mundo de um observador se, e só se, ela é do tipo tempo.

Parametrização de curvas causais

A parametrização de uma curva causal ou é direcionada para o passado ou é direcionada para o futuro.

Caracterização de curvas causais

Uma curva parametrizada γ é causal se, e só se, $\gamma'(t)$ não é do tipo espaço.

Caracterização de linhas mundo "possíveis"

Uma curva é linha mundo de um observador se, e só se, ela é do tipo tempo.

Curvas

Comprimento de curvas

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{3,1}$ é uma curva que não é do tipo luz, então

$$l_R(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\pm \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\|^2} dt$$

é o **comprimento relativístico/tempo próprio** de γ.

Tempo próprio

Seja $\gamma(t)$ uma linha mundo com $\gamma(t_1) = e_1, \gamma(t_2) = e_2$. O tempo próprio transcorrido entre e_1 e e_2 é tal que

$$l_R(\gamma) \leq \sqrt{-\|e_1 - e_2\|},$$

com igualdade se, e só se, γ é um segmento de reta entre e_1 e e_2.

Comprimento de curvas

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{3,1}$ é uma curva que não é do tipo luz, então

$$l_R(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\pm \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\|^2} dt$$

é o **comprimento relativístico/tempo próprio** de γ.

Tempo próprio

Seja $\gamma(t)$ uma linha mundo com $\gamma(t_1) = e_1, \gamma(t_2) = e_2$. O tempo próprio transcorrido entre e_1 e e_2 é tal que

$$l_R(\gamma) \leq \sqrt{- \|e_1 - e_2\|},$$

com igualdade se, e só se, γ é um segmento de reta entre e_1 e e_2.

Movimento uniforme vs movimento acelerado

- A desigualdade anterior nos diz que o tempo próprio ao longo de curvas que não são retas é sempre menor que o de uma reta ligando os mesmos pontos
- Fisicamente, isso significa que o relógio de um viajante acelerado parece andar **mais devagar** do que o de um viajante em movimento uniforme.

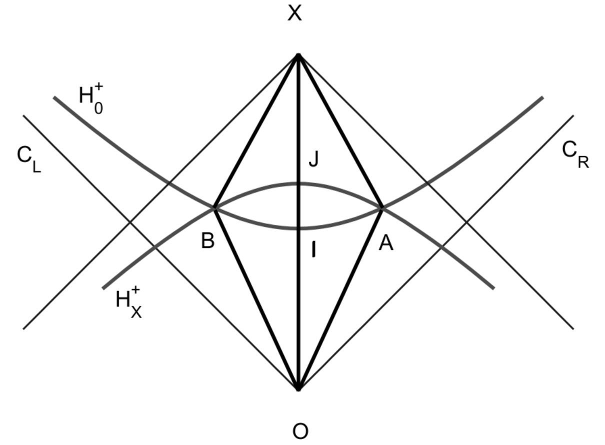
Desigualdade triangular inversa

Sejam O, A e X pontos tais que A e X estão no futuro de O e X está no futuro de A. Então

$$d_1(O, X) \geq d_1(O, A) + d_1(A, X),$$

com igualdade só se O, A e X estão numa reta.

Paradoxo dos gêmeos



Desigualdade triangular inversa, [2]

Paradoxo dos gêmeos

- Dois gêmeos: um na Terra e outro numa espaçonave
- A espaçonave faz uma viagem a uma estrela 4 anos-luz de distância da Terra e volta, mantendo velocidade constante de $0,8c$
- Como cada gêmeo percebe a passagem de tempo?

	Terra (anos)	Nave (anos)
Fim da ida/início da volta	5	3
Chegada	10	6

Referências I

Lee, N-H.
Geometry from Isometries to Special Relativity
Springer, 2020.

Bros, J.
From Euclid's Geometry to Minkowski Spacetime
Progress in Mathematical Physics, v. 47, pp. 60-119, 2006.

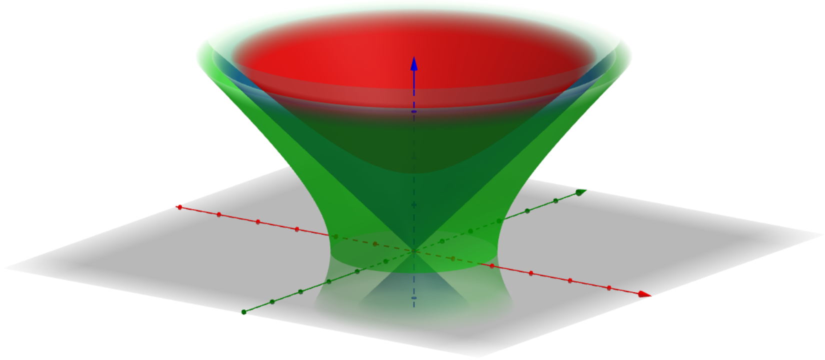
López, R.
Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space
https://arxiv.org/abs/0810.3351#

Terrell, J.
Invisibility of the Lorentz Contraction
Physical Review, v. 116, n. 4, pp. 1041-1045, 1959.

Referências II

Walter, S.
Minkowski, Mathematicians and the Mathematical Theory of Relativity
Einstein Studies, v. 7, pp. 45-86, 1999.

Obrigado!



Contato: caiotomas6@gmail.com