Onde duas retas paralelas se encontram?

Geometria com pontos no infinito

Caio Tomás de Paula, Lucas Conque Seco Ferreira
Universidade de Brasília
caiotomas6@gmail.com

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Resumo

A geometria projetiva é um tema de estudo amplo e muito bonito. Nosso objetivo nesse trabalho é dar uma visão intuitiva e sobretudo geométrica das ideias centrais do tema, e também uma aplicação para o estudo das cônicas.

Introdução

O estudo da geometria projetiva teve início há mais de 500 anos com o desenho em perspectiva, sendo um tema de estudo antigo. Além disso, ela, em certo sentido, completa e torna o espaço euclidiano simétrico com os pontos no infinito e unifica alguns objetos, como as cônicas.

Objetivos

Nosso foco é tentar mostrar o mais intuitivamente possível, mas com certo rigor, que no plano projetivo todas as seções cônicas (elipse, parábola e hipérbole) são dadas pela mesma curva.

Metodologia

O estudo do tema se deu através de encontros *online* semanais com o orientador.

Desenvolvimento

Considere a curva quádrica em $\mathbb{R}^2$

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

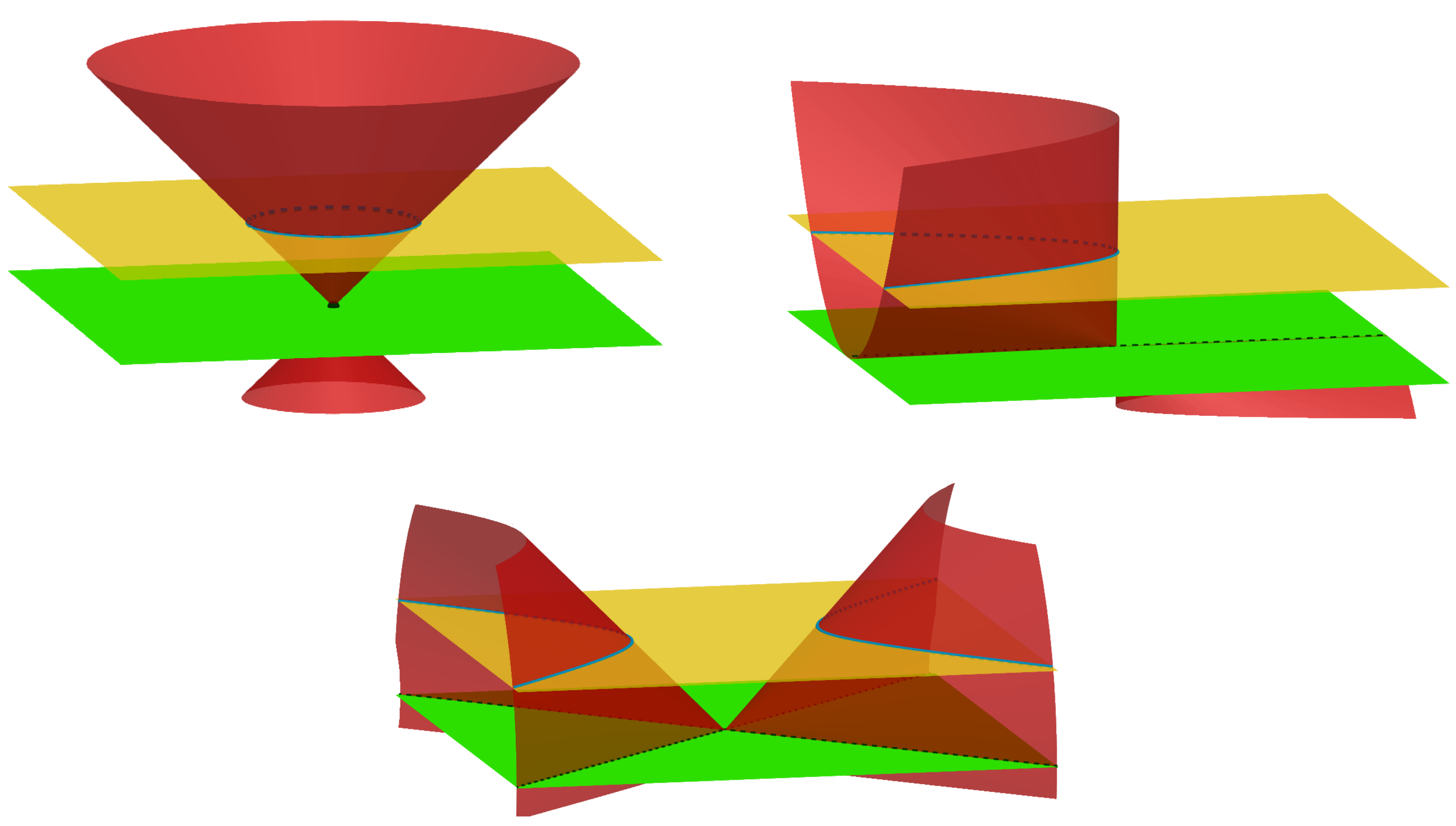
que estamos supondo ser não vazia. Introduzindo a substituição

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}, Z \neq 0,$$

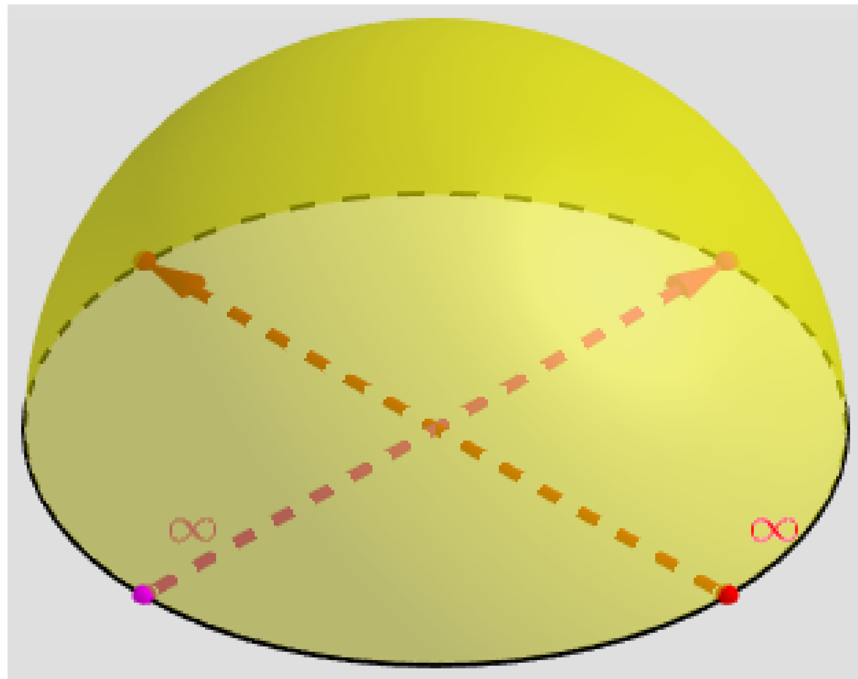
transformamos o estudo de (1) na análise dos zeros de

$$AX^2 + BY^2 + 2CXY + DXZ + EYZ + FZ^2, \qquad (2)$$

que denotamos $Q(X, Y, Z)$. Utilizando uma transformação afim adequada e o teorema de Sylvester, mostramos que esses zeros nos dão um cone afim, de modo que a curva original é a interseção de um plano ($Z = 1$, amarelo) com um cone, o que nos diz que (1) é de fato a equação geral das cônicas, que são de três tipos:

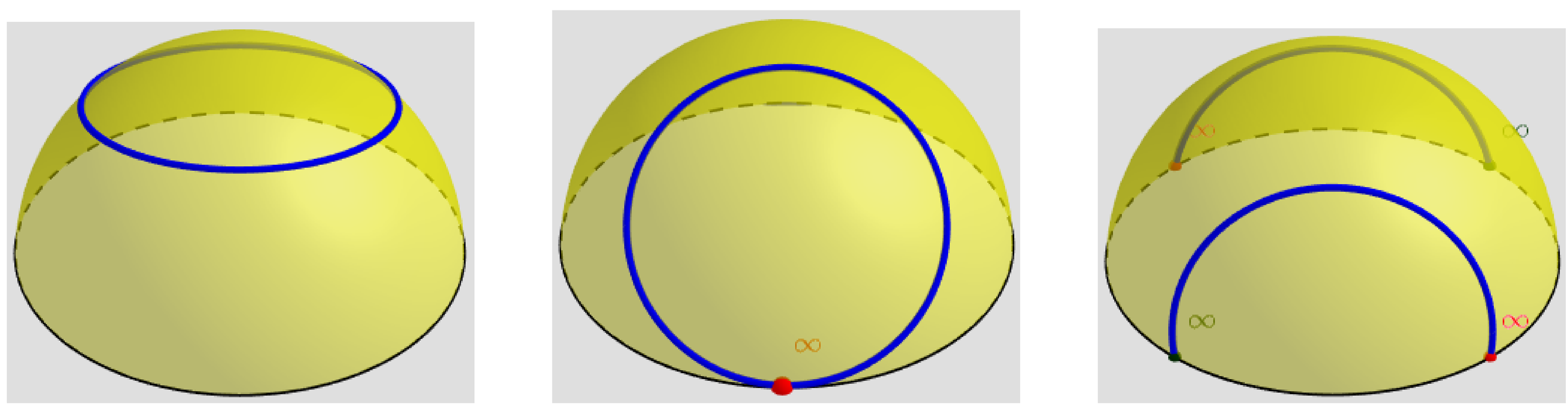


Vemos também que fazer a interseção do cone com o plano $Z = 0$ (verde) é, geometricamente, uma "divisão por zero"; essa interseção nos dá as direções assíntotas da cônica, i.e., seus pontos no infinito. Introduzimos o plano projetivo, $\mathbb{R}P^2$, que nada mais é que a esfera S^2 com antípodas identificadas. Os pontos do equador são os pontos no infinito, denotados ∞.



Resultados

Assim, notamos que a equação $Q(X, Y, Z) = 0$ que obtivemos anteriormente, por ser homogênea de grau 2, é uma curva em $\mathbb{R}P^2$. Como mencionamos, a interseção desse cone com o plano $Z = 1$ nos dá a cônica correspondente e, com o plano $Z = 0$, nos dá os pontos no infinito da mesma cônica. Portanto, observando as imagens acima e recordando que os pontos de $\mathbb{R}P^2$ são direções de $\mathbb{R}^3$, temos que elipse, parábola e hipérbole têm, respectivamente, nenhum, um e dois pontos no infinito. No modelo do hemisfério apresentado acima temos as seguintes configurações para as cônicas, que são dadas pela mesma curva (azul) Veja `https://youtu.be/JOipiXojtS4` e `https://youtu.be/NNQHPr7p1rg` para animações das cônicas.



Conclusão

Pudemos ver, ainda que de modo breve, a beleza e a utilidade da geometria projetiva através da unificação das cônicas em uma só curva. Além disso, notamos que as ideias aqui apresentadas não são de um nível técnico muito elevado, sendo portanto compatíveis com os conhecimentos de um aluno de graduação.

Referências

[1] Andrade, Plácido; Barros, Abdênago, *Introdução à Geometria Projetiva*, SBM: Textos Universitários, 2010.

[2] Berger, Marcel, *Geometry I*, Springer, 1987.

[3] Hitchin, Nigel, *Projective Geometry*, Lecture notes, 2003.

[4] Seco, Lucas, *Cônicas*, Anotações, 2017.