Aplicações das desigualdades entre médias para problemas de otimização do Cálculo Diferencial e Integral

Caio Tomás de Paula[1] & Railandi Sousa Assunção[1]
Orientadora: Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues[2]

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

XXIV Simpósio de Matemática para Graduação
ICMC-USP

[1]Bolsistas PET/MEC/FNDE
[2]Tutora PETMAT, Bolsista PET/MEC/FNDE

Sumário

Desigualdade AM-GM I

Vamos abordar uma das desigualdades mais antigas da história:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \;\; a, b \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

Desigualdade AM-GM I

Vamos abordar uma das desigualdades mais antigas da história:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \; a, b \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

Aplicações a problemas de otimização

1. encontrar o máximo do produto de dois números não negativos cuja soma é constante;
2. encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.

Desigualdade AM-GM I

Vamos abordar uma das desigualdades mais antigas da história:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \; a, b \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

Aplicações a problemas de otimização

1. encontrar o máximo do produto de dois números não negativos cuja soma é constante;
2. encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.

Demonstração algébrica.

$$0 \leq (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}. \qquad \square$$

Desigualdade AM-GM I

Aplicando

1. Maximizar $ab \iff$ maximizar $\sqrt{ab}$ (já que $a, b \geq 0$). Logo, por (1), o máximo ocorre quando $a = b = S/2$ e vale $S^2/4$.

Desigualdade AM-GM I

Aplicando

1. Maximizar $ab \iff$ maximizar $\sqrt{ab}$ (já que $a, b \geq 0$). Logo, por (1), o máximo ocorre quando $a = b = S/2$ e vale $S^2/4$.
2. A área do triângulo retângulo de catetos a e b é $ab/2$. Fixando $a + b$, segue de (1), que a área é máxima quando $a = b$, i.e., quando o triângulo é isósceles.

Desigualdade AM-GM II

Podemos ainda generalizar (1):

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

Desigualdade AM-GM II

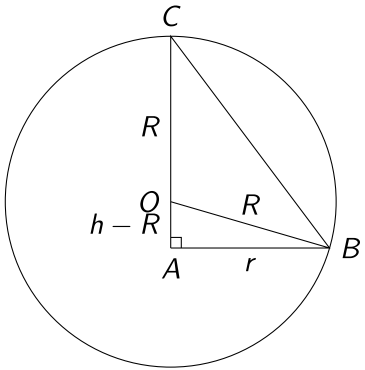
Podemos ainda generalizar (1):

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

Aplicações

- (i) numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo;
- (ii) num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo;

Desigualdade AM-GM II (i)



$$\boxed{r^2 = R^2 - (h-R)^2}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^2}{3}(2R-h)}$$

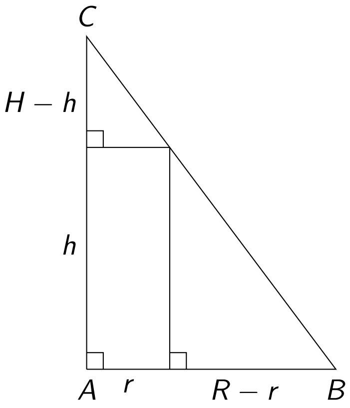
Daí, temos

$$\boxed{\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3,}$$

e a igualdade é alcançada para

$$\boxed{\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,}$$

Desigualdade AM-GM II (ii)



$$\boxed{\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \iff h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$$

$$\boxed{V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{H}{R}(R-r).}$$

Logo, temos

$$\boxed{\frac{RV}{4\pi H} = \frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(R-r) \le \left(\frac{R}{3}\right)^3,}$$

e a igualdade é alcançada para

$$\boxed{\frac{r}{2} = R - r \iff r = \frac{2R}{3}.}$$

Usando Cálculo I

Começamos por (i): numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo. Vimos que o volume do cone era

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h).$$

Usando Cálculo I

Começamos por (i): numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo. Vimos que o volume do cone era

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h).$$

Derivando e igualando a zero, temos

$$V'(h_{\text{crít}}) = \pi h_{\text{crít}} \left(\frac{4R}{3} - h_{\text{crít}} \right) = 0 \overset{h \neq 0}{\iff} h_{\text{crít}} = \frac{4R}{3}.$$

Usando Cálculo I

Começamos por (i): numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo. Vimos que o volume do cone era

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h).$$

Derivando e igualando a zero, temos

$$V'(h_{\text{crít}}) = \pi h_{\text{crít}} \left(\frac{4R}{3} - h_{\text{crít}} \right) = 0 \overset{h \neq 0}{\iff} h_{\text{crít}} = \frac{4R}{3}.$$

Derivando novamente, obtemos

$$V''(h) = \pi \left(\frac{4R}{3} - h \right) - \pi h = \frac{4\pi R}{3} - 2\pi h \implies V''(h_{\text{crít}}) = -\frac{4\pi R}{3} < 0,$$

de modo que, $h_{\text{crít}}$ maximiza V, como esperado.

Conclusão

Conclusão

Note como as soluções dos problemas apresentados são simples! Por que tais desigualdades entre as médias e suas aplicações são pouquíssimo discutidas em cursos de graduação em Matemática?

Bibliografia

- *THOMAS, G. B., Cálculo: Volume 1, Pearson, 12ª ed.*, 2012.
- *TIKHOMIROV, V. M., Stories about Maxima and Minima, Mathematical World - Volume 1, American Mathematical Society*, 1991.

Obrigado!

Contato: caiotomas6@gmail.com, railandisousa8@gmail.com