Tranças, nós e protetores de para-brisa

Caio Tomás de Paula

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília

caiotomas6@gmail.com — +55 (61) 98226-3710

X Bienal de Matemática 2020

Introdução

Vamos analisar a estrutura do protetor de para-brisa mostrado abaixo, que lembra um disco e se dobra de maneira um tanto quanto estranha.

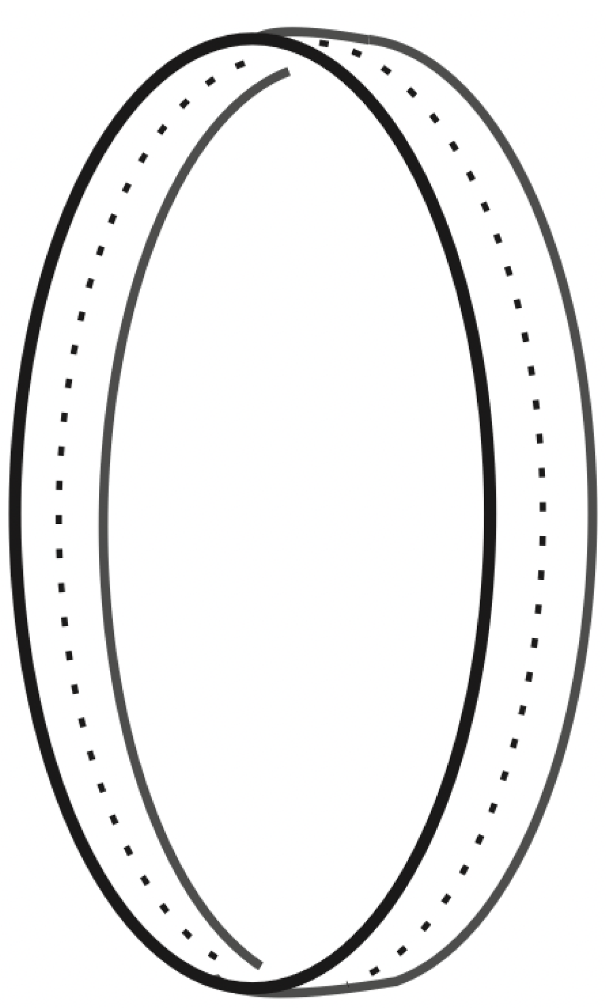
A parte fundamental do protetor é um arame metálico que percorre todo o perímetro do protetor, formando um loop. Esse arame é torcionalmente rígido: podemos dobrá-lo ao longo de seu comprimento, mas não podemos torcê-lo. Isso será a base para a nossa análise.

Objetivos

1. Com o protetor na sua posição fechada “normal”, quantos *loops* o arame faz, e por quê?
2. De modo mais geral, quais são todas as possíveis posições fechadas para o protetor, em termos de quantos *loops* o arame faz?

Desenvolvimento

A parte de “quantos” da pergunta 1 pode ser respondida através de observações experimentais, dobrando o protetor de fato, mas isso não ajuda a responder a parte do por quê. Vamos dizer que o arame é uma **fita**, como ilustrado abaixo. Essa fita tem duas arestas, que chamaremos de **círculos de fronteira**. Vamos chamar de **centro** o círculo no meio do caminho entre os círculos de fronteira. Quando o protetor está fechado, a fita é “enrolada” em vários *loops*. Informalmente, isso seria como enrolar um pedaço de linha em um carretel e depois juntar as pontas da linha, de forma que o pedaço de linha é ele próprio um *loop*. Isso é exatamente o que temos em mente mas, para sermos mais gerais, devemos permitir que essa linha passe por baixo dos *loops* que já estão no carretel, e é aqui que as tranças entram na jogada!



Lema 1. Com o protetor fechado, o centro da fita é uma trança fechada de um componente, ou seja, um nó.

Suponha que nossa trança fechada de um componente foi construída a partir de uma trança de m cordas e com n cruzamentos. Como essa trança tem apenas um componente, segue que m e n têm paridades diferentes, pois a permutação associada à nossa trança fechada deve ter a forma

$$(i_1 i_2 \cdots i_m) = \underbrace{(i_1 i_m)(i_1 i_{m-1})\cdots(i_1 i_2)}_{m-1 \text{ transposições}}, \quad i_j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, m \text{ e } i_j \neq i_k \text{ se } j \neq k.$$

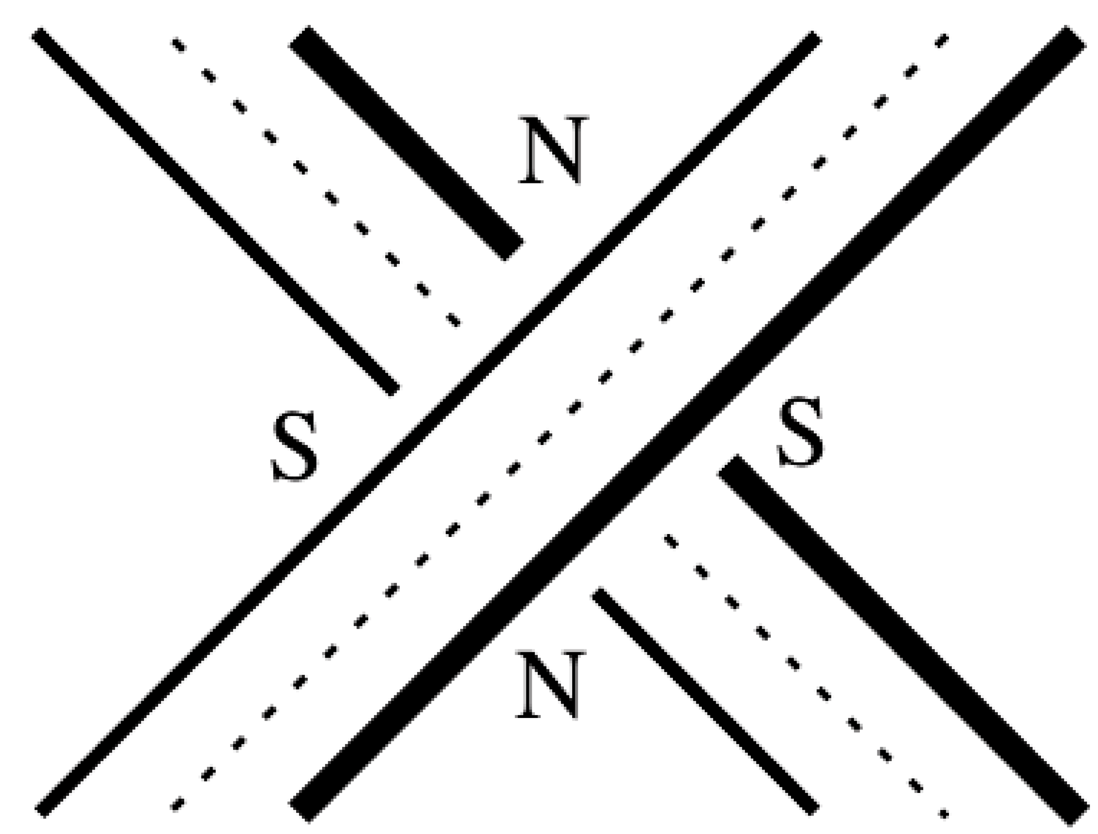
Como $m - 1 = n$, segue que m e n têm paridades distintas, ou seja:

Lema 2. Com o protetor fechado, se a fita é enrolada em m *loops* e o centro da fita tem n cruzamentos, então m e n têm paridades opostas.

Vamos considerar os dois círculos de fronteira da fita. Agora os *links* e o *linking number* entram na jogada! Aqui, o que nos interessa é o fato de que o valor absoluto do *linking number* é um invariante topológico. Com o protetor aberto, o *linking number* dos círculos de fronteira é 0. Como esse valor não muda quando dobramos o protetor, temos que:

Lema 3. Com o protetor fechado, o *linking number* dos círculos de fronteira é 0.

Pense no protetor fechado. Como a fita não tem torções, os únicos cruzamentos entre os círculos de fronteira ocorrem próximos dos n autocruzamentos do centro, como ilustrado abaixo. Ignorando o centro da fita, no lugar dos n autocruzamentos do centro, vemos 4 novos cruzamentos envolvendo os círculos de fronteira: dois autocruzamentos (S) e dois cruzamentos (N). Como estamos interessados no *linking number* dos círculos de fronteira, vamos ignorar os autocruzamentos. Então, temos um total de $2n$ cruzamentos, arranjados em n pares, entre os círculos de fronteira.



Para calcular o *linking number* note que para cada círculo de fronteira, seus dois pedaços na figura estarão orientados ambos para cima ou para baixo. Logo, em cada um dos n pares de cruzamentos temos ou dois $+1$ (círculos orientados para cima) ou dois -1 (círculos orientados para baixo). Portanto, cada um desses n pares de cruzamentos contribui com exatamente 1 ou -1 para o *linking number*. Note que 1 e -1 são ambos ímpares, e se somarmos n números ímpares o resultado tem a mesma paridade de n. Pelo Lema 3, o *linking number* é 0, i.e., par; logo, n deve ser par. Portanto, pela Lema 2, m deve ser ímpar.

Resultados

Teorema 4. Quando fechado, o arame do protetor deve ser enrolado em um número ímpar de *loops*.

De fato, o arame do protetor se enrola em 3 *loops* (respondendo à pergunta 1) não havendo torções no arame. Para responder à pergunta 2, você pode verificar experimentalmente que mesmo sendo possível forçar o protetor em 2 ou 4 *loops*, isso causará torções no arame. Contudo, 3 *loops* não é a única configuração possível, como demonstramos: em tese, qualquer número ímpar de *loops* pode ser alcançado: 5, 7, 9, ...

Conclusão

A Teoria dos Nós é um tema bastante abrangente e fortemente ligado à Teoria dos Grupos e à Topologia. Neste trabalho, estudamos alguns conceitos básicos com o objetivo de responder às perguntas propostas e demonstrar o Teorema 4, que exaure todas as possíveis configurações do protetor de para-brisa. Ainda no contexto da Teoria dos Nós, outros resultados importantes podem ser estudados.

Referências

[1] ADAMS, Colin, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W.H. Freeman and Company, 1994.

[2] CLAY, Matt; MARGALIT, Dan, *Office Hours With a Geometric Group Theorist*, Princeton University Press, 2017.

[3] FEIST, Curtis; NAIMI, Raimin, *Topology explains why automobile sunshades fold oddly*, arXiv:1205.4797, 2012.

[4] KURPITA, Bohdan; MURASUGI, Kunio, *A Study of Braids*, Kluwer Academic Publisher, 1999.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Sheila Chagas, por ter dado ótimas referências para estudo e esclarecer pontos que ficaram, por vezes, obscuros. Agradeço também ao Departamento de Matemática pelo apoio financeiro, que me permitiu participar desta Bienal de Matemática.

PETMAT UnB

60 MAT