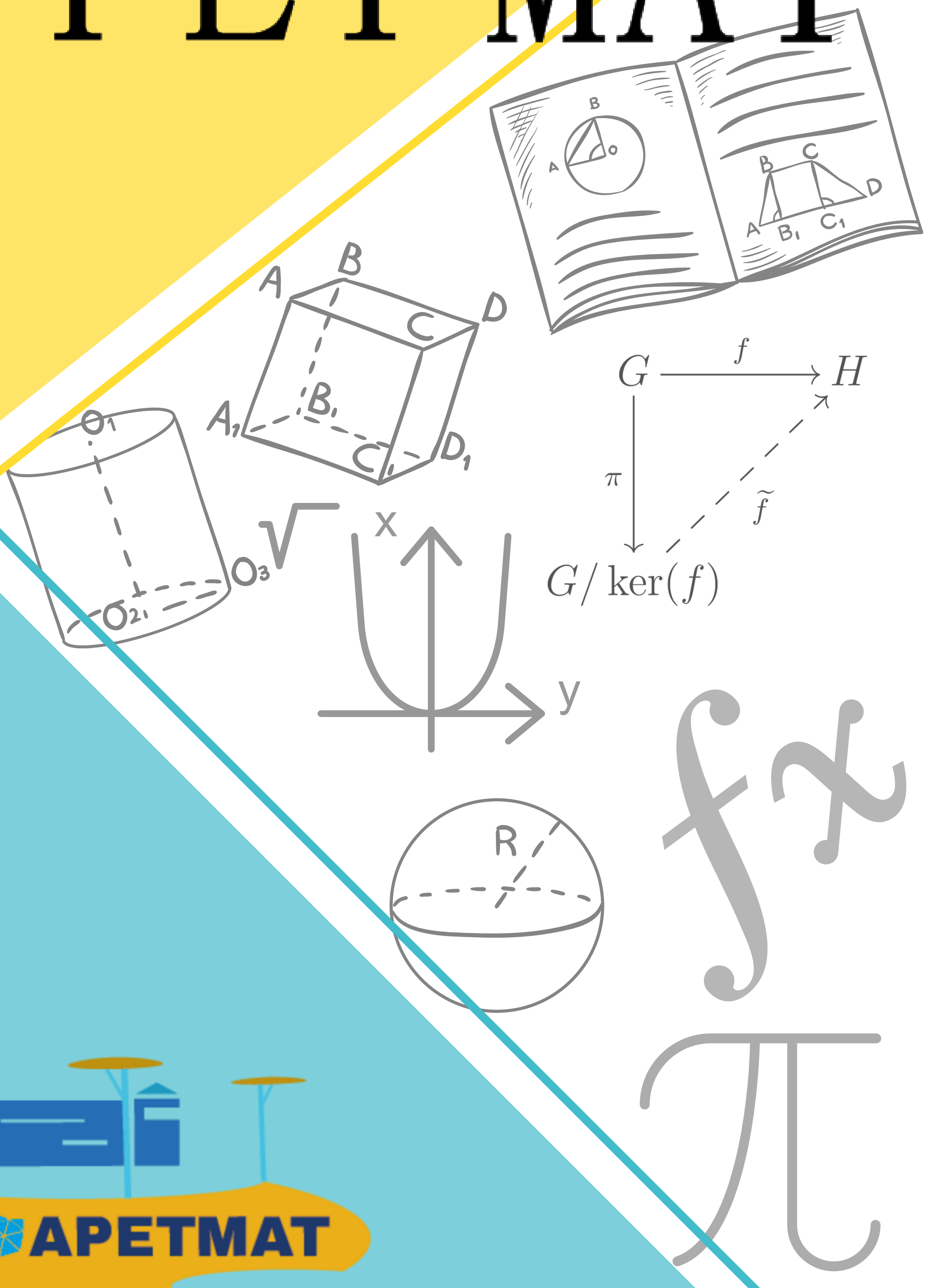
R Iniciação Científica PETMAT



XII ECAPETMAT

5ª EDIÇÃO

2021

Edição especial

Revista de Iniciação Científica Volume 5 - Dezembro de 2021 PET - Matemática Unesp/IBILCE

Sumário

Relatos do XII ENAPETMAT

Diego Cruz Santos - Petiano do PET Matemática IBILCE
2021

APRESENTAÇÃO

Neste ano de 2021, teremos uma edição especial da revista voltada ao XII Encontro Nacional dos PETs Matemática em que apresentamos os anais do evento, organizado pelo PET Matemática da UNESP de São José do Rio Preto. Sendo assim, para maior conhecimento do leitor, caminharemos em algumas seções que falam sobre a questão histórica do ENAPETMAT, falaremos sobre as edições passadas, a criação do evento deste ano e, por fim, os momentos mais importantes. Por isso, fiquem atentos. Vamos começar?

HISTÓRIA DO ENAPETMAT

O Encontro Nacional de PETs Matemática é um evento cujo objetivo é a integração e divulgação dos trabalhos de pesquisa realizados pelos grupos PETs Matemática existentes, a fim de promover um espaço de troca de experiências entre pesquisadores e graduandos. Na primeira edição do evento, organizada pelo PET Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, houve a participação de cinco grupos e um palestrante convidado. Depois dessa primeira edição, o encontro se tornou uma tradição, e em 2021 chegamos à sua décima segunda edição, sendo organizada pelo PET Matemática da UNESP de São José do Rio Preto, com a ajuda de três PETianos egressos do grupo.

Nesse período entre 2019 e 2021, muita coisa aconteceu. Em 2019, o PET Matemática da Universidade de Brasília, cuja comissão organizadora era composta por catorze PETianos, organizou a décima primeira edição do ENAPETMAT. Na capital, foi anunciado que o grupo responsável pela edição seguinte seria o PET Matemática da UNESP de São José do Rio Preto. Como todos nós sabemos, em 2020 começou a pandemia de COVID-19. Não sabíamos o tempo que levaria para as atividades presenciais retornarem, logo optamos por adiar o evento naquele ano.

Para registrar, listamos os grupos que organizaram os encontros realizados até o momento:

1. ENAPETMAT (2009) - UFOP - Ouro Preto - MG
2. ENAPETMAT (2010) - UFG - Goiânia - GO

3. ENAPETMAT (2011) - UFSC - Florianópolis - SC
4. ENAPETMAT (2012) - UFSM - Santa Maria - RS
5. ENAPETMAT (2013) - UnB - Brasília - DF
6. ENAPETMAT (2014) - UFSC - Florianópolis - SC
7. ENAPETMAT (2015) - UFOP - Ouro Preto - MG
8. ENAPETMAT (2016) - UNESP - Rio Claro - SP
9. ENAPETMAT (2017) - UEL - Londrina - PR
10. ENAPETMAT (2018) - UFU - Uberlândia - MG
11. ENAPETMAT (2019) - UnB - Brasília - DF
12. ENAPETMAT (2021) - UNESP - São José do Rio Preto - SP

A próxima edição do ENAPETMAT será organizada pelo PET Matemática da Universidade Federal de Goiás. A seguir, contaremos mais sobre o evento realizado em 2021.

CRIAÇÃO DO XII ENAPETMAT E SEUS MOMENTOS MAIS IMPORTANTES

Como dito anteriormente, não realizamos o evento em 2020, pois desejávamos que ele ocorresse de forma presencial. Entendemos que, de maneira remota, a interação, a troca de experiências e as conversas são prejudicadas, visto que o contato direto entre as pessoas não ocorre. Além disso, o nosso conhecimento para organizar o evento em tal formato era limitado, porque, até então, não tínhamos participado de nenhum evento a distância. Mas, passado um ano, e com as nossas vivências da participação no SUDESTE PET e no ENAPET de 2020, observamos que era possível realizar o XII ENAPETMAT. Então, para não ficar com uma janela de dois anos sem o evento, decidimos sediar o evento de maneira virtual. Pensamos desse modo porque não tínhamos previsão de retorno às atividades presenciais em nosso câmpus.

A partir dessa decisão, convidamos três petianos egressos para nos auxiliarem na organização do evento. Foram eles: Maria Clara Lopes Taddone; Maria Fernanda Zanin Bonini; e Murillo Lozano Rubinho de Araújo. Essa colaboração foi importante, pois nenhum de nossos integrantes havia organizado evento algum. Esse foi um dos desafios que tivemos para enfrentar. Além desse trabalho, foram necessárias longas conversas, muitos testes, discutir várias ideias e preocupações. Hoje, vemos que tudo isso foi enriquecedor para a nossa formação tanto como PETianos quanto como pessoas, além de agregar muito em nosso currículo. Vale ressaltar que, como esse evento não é deliberativo, ou seja, não há votações e assembleias, pensamos em fazer algo mais leve, menos cansativo e mais interativo, já que tínhamos passado por um ano difícil, de muito luto e de muitos encontros virtuais.

Uma das ações que colocamos em prática, para alcançar esse objetivo, foi adaptar uma das atividades desenvolvidas pelo nosso grupo, o Desafiados, que consiste de um jogo que tem como objetivo promover o conhecimento e a interação entre todos, mesmo que remotamente, através de desafios lançados diariamente em seu site (`https://desafiadospet.com.br`). A busca pelas respostas de tais desafios incentiva as equipes participantes a escolherem estratégias de resolução que englobam o trabalho em equipe e a criatividade. O jogo é composto por diversos desafios de conhecimentos gerais e no XII ENAPETMAT, foi adaptado para o formato de uma gincana. Montamos desafios matemáticos mais rápidos e que fossem respondidos no tempo programado. Essa atividade foi bastante elogiada, bem como as palestras ministradas por Julia Jaccoud e Régis Varão, dos canais "A Matemaníaca"e "Fantástico Mundo Matemático"do YouTube, respectivamente. Além disso, organizamos oficinas que abordaram diversos temas. Para maior conhecimento, listamos abaixo os assuntos apresentados e seus responsáveis. Observe:

1. Aprenda a fazer pulseiras em macramê básico, ministrada por Gabriela Karam

2. Contadores de Estórias, ministrada por Ana Paula Brandão de Melo, Brena Cristina Sturion, Isaac Souza Silva e Thiago Moraes Rizzieri

3. Oficina de cubo mágico, ministrada por Eduardo da Fonseca Martins e Guilherme Zahra Cundari

4. Expressão dos sentimentos: o caminho para a saúde mental, ministrada pela Profª Luciana Aparecida Nogueira da Cruz do Departamento de Educação da Unesp de São José do Rio Preto

5. Língua Brasileira de Sinais, ministrada por Ariane Silva Rabelo

6. Receitas Práticas, ministrada por Ana Julia Aparecida Rossafa e Bianca Cambiaghi e Silva

7. Yoga, ministrada por Daniela Aguas

Além dessas atividades, tivemos minicursos sobre ”Origami e o Ensino de Geometria”, ministrado pelo professor Lee Yun Sheng, e ”Sistemas Dinâmicos Estocásticos: o que é, como e o que modela”, ministrado pelo professor Paulo Régis Caron Ruffino. Essas foram as principais atividades realizadas no XII ENAPETMAT, que deixaram muitas lembranças e bons momentos em nossa memória. Que venha o próximo!

MURAL DO EVENTO

Para registrar a participação no evento, foi criado um mural virtual onde todos puderam deixar a sua marca. Como resultado disso obtemos o seguinte mural.

Trabalhos de Atividades PETianas

Nesta seção apresentaremos os trabalhos de Atividades PETianas submetidos no evento XII ENAPETMAT no ano de 2021 realizados por participantes do evento.

Serão apresentados os seguintes trabalhos:

1. "10 Anos PET Matemática Pontal", trabalho feito pela aluna Lorraine Silva Gonçalves, orientada pelo Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira;

2. "25 anos do PETMAT UnB: perfil dos egressos", trabalho feito pelo aluno Caio Tomás, orientado pela Profª. Drª. Luciana Ávila Rodrigues;

3. "Atividades remotas do PET Matemática UnB", trabalho feito pelo aluno Ayrton Anjos, orientado pela Profª. Drª. Luciana Ávila Rodrigues;

4. "Breve análise sobre atividades diagnósticas aplicadas ao curso de Administração da UFES", trabalho feito pelo aluno Abraão Santana Pezente, orientado pelo Prof. Dr. Fabiano Petronetto do Carmo;

5. "Em tempos de pandemia: um minicurso presencial se reconfigura em videoaulas", trabalho feito pela aluna Maria José Sanabria Correa, orientada pela Profª. Drª. Inês Farias Ferreira;

6. "Ensino de Matemática na Educação Básica: monitoria em etapas de transição", trabalho feito pelo aluno Mauricio Menna Barreto, orientado pela Profª. Drª. Inês Farias Ferreira;

7. "Introdução ao LaTeX para alunos da UFRRJ", trabalho feito pelo aluno Matheus Degliomini Silva, orientado pela Profª. Drª. Eulina Coutinho Silva do Nascimento;

8. "Minicurso de GeoGebra", trabalho feito pelos alunos Ana T. Pereira. Henrique C. de Oliveira, Júlia C. Gonçalves, Rafael G. Alves e Thais E. Gonçalves, orientados pelo Prof. Dr. Eder Marinho;

9. "Monitorias para o curso de Administração", trabalho feito pelo aluno Victor Rigoni de Lima, orientado pelo Prof. Dr. Fabiano Petronetto do Carmo;

10. "Pré-Cálculo UFMG", trabalho feito pelo aluno Daniel Xavier Almeida, orientado pelo Prof. Dr. Carmen Rosa Giraldo Vergara;

11. "Tutoria em Matemática Básica", trabalho feito pelo aluno Lucas Camaz Ferreira, orientado pela Profª. Drª. Eulina Coutinho Silva do Nascimento.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

10 Anos PET Matemática Pontal

Lorraine Silva Gonçalves, Amanda Vitória de Jesus Mendes, Ana Cláudia Gonçalves Moreira, Beatriz Akiria de Assis Quaresma, Carla Soares Lima, Eduarda Cristina Silva, Guilherme Silva Gondin de Oliveira, Laurinda Aparecida Ferreira de Morais, Matheus Silveira Campos, Roberta Agnes Mendes Melo e Silas Silveira Campos[1]. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira[2]
PET Matemática Pontal - Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) - Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
lorraine.goncalves@ufu.br, mgov@ufu.br
Trabalho do PET
Palavras-chave: Evento comemorativo; História; Matemática; Futuro.

Introdução

A história de criação do grupo PET Matemática Pontal se inicia no ano de 2010 quando um grupo de docentes se reúnem, com objetivo de escrever um projeto que visava a criação de novos grupos pelo Brasil do Programa de Educação Tutorial (PET) gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC). O desafio era escrever uma proposta competitiva e inovadora, visto que o edital para abrir novos grupos PET abrangia todo o Brasil, de modo que seriam escolhidas apenas quarenta propostas dentre as apresentadas por diversas universidades do Brasil.

No início dos trabalhos da equipe, utilizou-se uma proposta que havia sido anteriormente escrita e submetida em um edital interno da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) para criação de grupos PET institucionais, proposta esta que não veio a ser contemplada na época. A ideia dos docentes era entender quais aspectos da proposta haviam sido bem avaliados e mantê-los, aperfeiçoar aqueles

[1]Petianos.
[2]Tutor.

não tão bem pontuados e principalmente expandir a proposta com novas ideias sobre pesquisa, ensino e extensão.

Para a tutoria era fundamental escolher alguém com experiência acadêmica, que trabalhasse de forma dinâmica com pesquisa, ensino e extensão, e que fosse alguém capaz de agregar em torno de um objetivo comum com um grupo heterogêneo de alunos e alunas. Sendo assim, concordaram que a Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho era uma boa opção para assumir tal responsabilidade. Uma vez definida a base para a escrita do projeto e a tutora que o representaria, o desafio da equipe era conseguir colaboradores para o PET nos seus anos iniciais de vida. Todos os docentes do Curso de Matemática do Campus Pontal da UFU se comprometeram a entrar no projeto como colaboradores e foram fundamentais para a consolidação do projeto construído.

Ao fim do longo processo de escrita havia sido construído uma proposta para a criação de grupo PET, nomeado de PET Matemática Pontal, que previa a realização de 10 subprojetos de extensão, 5 subprojetos de ensino e 3 subprojetos de pesquisas, sendo que um deles previa que os 12 bolsistas do programa contariam desde o início com um orientador para iniciação científica. Dessa forma, a proposta PET Matemática Pontal foi aprovada pela UFU para concorrer pela criação de um novo grupo PET do MEC no Brasil.

Às vésperas da primeira edição da Semana de Matemática do Pontal, o MEC notificou que a proposta PET Matemática Pontal havia sido classificada. Com isso, no dia 20 de outubro de 2010, durante a abertura da Semana de Matemática do Pontal, foi anunciado ao público a aprovação do projeto. No dia 08 de dezembro de 2010 é constituído oficialmente no sistema SIGPET do MEC o grupo PET Matemática Pontal, associado ao Curso de Matemática do Campus Pontal da UFU, sob a tutoria da Profa. Dra. Tânia, e esta data tornou-se a data oficial de nascimento do grupo PET Matemática Pontal.

Assim, em 08 de dezembro de 2020 o PET Matemática Pontal completou 10 anos, e para comemorar este aniversário, o grupo propôs realizar um evento comemorativo no decorrer do dia 05 de dezembro de 2020, constituído por mesas-redondas com as temáticas: "Como tudo começou..."; "História do PET Matemática Pontal"; e "PET, Matemática e Futuro". Além disso, a abertura do evento contou com o anúncio dos alunos mais bem classificados da III Mostra de Matemática de Ituiutaba (MOMATI), que é um projeto de extensão desenvolvido pelo grupo em parceria com as escolas públicas de Ituiutaba/MG. O evento teve o intuito de proporcionar uma interação entre o grupo PET Matemática Pontal com a graduação e egressos ao programa, refletir sobre a relevância do programa dentro da universidade, discutir acerca das vivências dentro do PET Matemática Pontal, além de propiciar um momento comemorativo para os participantes do evento e a possibilidade de conjecturar sobre o futuro do programa.

Metodologia

Para realizar o evento comemorativo aos 10 anos do PET Matemática Pontal, o grupo se organizou em etapas. Inicialmente realizou-se um levantamento dos dados de petianos egressos do grupo, afim de criar uma forma de comunicação mais rápida. Também, pensando nas discussões das mesas-redondas, pesquisou-se sobre os grupos PET Matemática pelo Brasil. Dessa forma, após delineada a programação, do evento e enviados os convites para a composição das mesas-redondas, foi confeccionado toda a arte de divulgação do evento e também foram gravados vídeos sobre as experiências dos petianos atuais e egressos dentro do programa, que geraram uma linha do tempo apresentada durante os intervalos das mesas-redondas. Ao final, o evento foi divulgado a toda comunidade e no dia 05 de dezembro de 2020, aconteceu a comemoração dos 10 anos do PET Matemática Pontal.

O evento foi dividido em quatro mesas-redondas. A primeira intitulada por "Mesa de abertura e premiação da III MOMATI", além de iniciar as discussões do evento comemorativo aos 10 anos do PET Matemática Pontal teve uma abertura musical com a participação do Prof. Dr. Wallisom Rosa e também premiou os mais bem colocados na III MOMATI, apresentando as colocações e os prêmios que eles receberam. A mesa de abertura, contou com a presença do reitor, Valder Stéffen Júnior, da UFU, do presidente do CLAA, Jesiel Cunha, do coordenador do curso de Matemática da UFU, Campus Pontal, Alisson Rafael Barbosa Aguiar, da diretora do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP), Rosana Maria Nascimento de Assunção, e do tutor do PET Matemática Pontal, Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira.

Figura 1: Mesa de abertura e premiação da III MOMATI

A segunda mesa denominada "Como tudo começou..." discutiu sobre como o PET Matemática Pontal foi idealizado; como foram os primeiros meses, quais foram as maiores dificuldades, os projetos que mais chamaram atenção do começo até os dias atuais. Contou com a participação dos professores Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira (ICENP – UFU), Tânia Maria Machado de Carvalho (ICENP – UFU), Mirian Maria Andrade Gonçalez (UTFPR/CT), Germano Abud de Rezende (FAMAT – UFU), Evaneide Alves Carneiro (ICENP – UFU) e Milena Almeida Leite Brandão (ICENP – UFU).

Figura 2: Mesa-redonda: Como tudo começou...

Já a terceira nomeada "História do PET Matemática Pontal" discutiu sobre as vivências dentro do programa; as experiências adquiridas, quais foram as maiores dificuldades, os projetos que mais chamaram a atenção, entre outros assuntos. Participou da mesa: a primeira tutora, Profa. Dra. Tânia, o tutor atual, Prof. Dr. Marcelo, os petianos egressos Magna, José Henrique, Heinrich, Fernanda, Quezia, Bertrand, Natália e a petiana atual Lorraine.

Figura 3: Mesa-redonda: História do PET Matemática Pontal

Por fim, a quarta mesa, chamada de "PET, Matemática e Futuro" abordou sobre o futuro dos grupos PET; sobre possíveis mudanças diante da pandemia, como as relações externas influenciam os grupos PET, acerca dos caminhos que estamos seguindo, dentre outras questões. Estavam presentes os petianos: Beatriz Akiria (PET Matemática Pontal – UFU), Gean Nascimento (PET Matemática – UFAM), Isadora Roth (PET Matemática – UFSM), Lorraine Silva (PET Matemática Pontal – UFU), Maria Fernanda Bonini (PET Matemática - IBILCE Unesp) e Paulo Henrique (PET Matemática - UFTM).

Todas as mesas-redondas foram realizadas de modo virtual no canal do YouTube do PET Matemática Pontal e podem ser encontradas respectivamente pelos

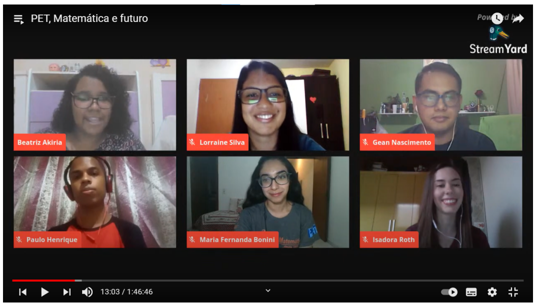


Figura 4: Mesa-redonda: PET, Matemática e Futuro

links: `https://youtu.be/3afRhV_UxIs`, `https://youtu.be/VQ3Ls5P_WSk`, `https://youtu.be/K7OHDhGR4d8` e `https://youtu.be/nz5MF70_Ikg`. Além disso, os participantes e petianos avaliaram a atividade por meio de um formulário online, obtendo um retorno positivo.

Resultados e Discussões

Como resultado, comemorou-se os 10 anos de criação do PET Matemática Pontal proporcionando uma interação entre o grupo, a graduação e os egressos ao programa. Dessa forma, foi possível refletir sobre a relevância do programa dentro da universidade discutindo as vivências dentro do PET Matemática Pontal. Ainda, conjecturou sobre o futuro do programa consolidando parcerias com outros grupos PET. Além disso, a atividade permitiu aos bolsistas do PET praticarem a organização grandes eventos como o aprendizado do uso de uma nova plataforma online. Por fim, confeccionou vídeos sobre a história do PET Matemática Pontal e depoimentos dos petianos.

Conclusão

A atividade permitiu um momento único, tanto para o grupo PET Matemática Pontal, quanto para os participantes. A possibilidade de conhecer melhor a origem do programa, as dificuldades e as superações que os petianos vivenciaram, proporcionaram maior admiração e consolidação do PET. Espera-se que com este trabalho, outros grupos sejam inspirados a realizar momentos comemorativos entre a graduação, os petianos egressos e outros grupos PET, sendo possível compreender a relevância que o programa tem dentro da universidade e na vida dos petianos.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, S. de E. S.; **Relatório Final das Atividades de 2020 do Programa de Educação Tutorial Matemática Pontal**. Secretaria de Educação Superior. Brasília, SESu, **2020**. Disponível em: <http://www.petmat.facip.ufu.br/node/72>. Acesso em: 06 de julho de 2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

25 anos do PETMAT UnB: perfil dos egressos

Caio Tomás, Thailany Machado, Thais Marçal, Matheus Souza[1].
Luciana Ávila Rodrigues[2] [3]
Departamento de Matemática - Universidade de Brasília
caiotomas6@gmail.com, thailany.ms@gmail.com,
thaisrdmarcal@gmail.com, matheus251freitas2@gmail.com,
luavila@unb.br

Trabalho do PET

Palavras-chave: Programa de Educação Tutorial; Matemática; Perfil de acadêmicos.

Introdução

O PET Matemática da Universidade de Brasília completou, em 2020, 25 anos de existência. Neste texto, apresentamos os resultados de uma pesquisa realizada com os egressos do grupo com o objetivo de traçar o perfil e analisar os impactos que a participação no programa trouxe aos egressos.

Os 25 anos do PETMAT UnB

O Programa de Educação Tutorial (PET) foi criado em 1979 e, segundo seu criador Claudio Castro, surge como uma forma de melhorar o ensino de graduação no Brasil. Um dos grandes problemas apontados por ele em [1] era a falta de docentes plenamente capacitados nas IES's brasileiras. O programa vem, então, com o objetivo principal de formar o que seria a futura matéria prima da pós-graduação, levando a uma melhora nos quadros de docentes e do ensino de graduação. Em

[1] Bolsistas do PET/MEC/FNDE.
[2] Orientadora: Luciana Ávila.
[3] Tutora: Luciana Ávila Rodrigues

suma, buscava-se capacitar indivíduos para serem os líderes responsáveis por guiar o Brasil a um futuro melhor.

O PET em sua essência é um programa que busca levar aos estudantes uma formação mais ampla, pois preconiza pela indissociabilidade do pilar da universidade brasileira, o tripé ensino, pesquisa e extensão.

O PETMAT UnB - PET Matemática da Universidade de Brasília, foi criado em 1995 e tem como primeiro tutor o professor Célius Magalhães, que permaneceu até 2001. Ao final de 2001, o professor Célius deixa a tutoria e quem assume é o professor Hemar Godinho, que permaneceu até 2006. Em seguida, de 2006 a 2008, o tutor foi o professor João Carlos; de 2008 a 2012, o professor Mauro Rabelo assumiu e, finalmente, de 2013 até hoje, a tutora é a professora Luciana Ávila Rodrigues.

Durante esses 25 anos o PETMAT foi se desenvolvendo, se consolidando e se transformando. Cada membro e cada tutor contribuiu para a construção do que o grupo é hoje.

Para celebrar os 25 anos que o PETMAT completou em 2020, foi realizada um série de 6 webinários que contaram com a presença de tutores e PETianos egressos, além dos membros atuais do grupo. Este evento, que havia sido programado para ser presencial, teve de ser reformulado para o formato online devido à pandemia de Covid-19. Quatro webinários contaram a história do grupo no período de cada tutor por ordem cronológica e dois webinários tiveram temáticas especiais. Um destes foi "Mestrado e Doutorado no Exterior", em que foram contadas as experiências de alguns PETianos egressos que conseguiram o que é o sonho de muitos: estudar fora do Brasil; os interlocutores deste webnário deram diversas dicas para todos aqueles que têm este sonho. O último webinário tratou do tema das mulheres do PETMAT durante sua história: foram contadas as histórias de algumas matemáticas famosas, como Hipátia de Alexandria e Emmy Noether e foram abordados temas referentes a questões de gênero, levantando problemas e questionamentos. Nas redes sociais do PETMAT, iniciou-se o movimento "PETMAT 25 anos: Eu faço parte dessa história!", onde os PETianos e tutores, egressos e atuais, contaram um pouco de suas experiências com o PET. Esta foi uma forma de descobrir a história do PETMAT pelo olhar de quem o construiu e ainda constrói.

Para entender um pouco do impacto que o PETMAT teve na vida de seus egressos realizou-se uma pesquisa para catalogar o perfil desses egressos, que está detalhada na próxima seção.

Perfil dos egressos

A seguir serão descritos dados de um estudo quantitativo [3] e documental sobre o perfil de alunos que participaram do Programa de Educação Tutorial em

Matemática da Universidade de Brasília.

Os dados utilizados na análise foram obtidos a partir de uma lista com os nomes de alunos, encontrada em documentos do PETMAT que foram atualizados com a ajuda de alguns egressos. As informações adicionais foram encontradas nos seus currículos Lattes, disponíveis na plataforma Lattes.

Os objetivos da pesquisa eram saber se o egresso concluiu ou está em processo de uma pós-graduação, seja ela mestrado, doutorado ou pós-doutorado. Além disso, buscou-se saber sobre o seu estado atual no mercado de trabalho.

Foi verificada a quantidade de mestres, doutores e pós-doutores em Matemática, e também o número de PETianos egressos que estão inseridos no mercado de trabalho. Os dados obtidos são apresentados nas tabelas a seguir.

Na lista, tivemos um total de 114 egressos pesquisados. Destes, 74 (65%) fizeram pós-graduação, 14 (12%) seguiram diretamente para o mercado de trabalho, 5 (4%) ainda estão concluindo a graduação e 21 (19%) não encontramos informações.

Situação	Nº de PETianos	Porcentagem
Pós-Graduação	74	65%
Sem Informação	21	19%
Mercado de Trabalho	14	12%
Graduação	5	4%

Tabela 1: Situação atual entre o total de egressos.

Para os relatos a seguir, consideramos apenas os 88 PETianos egressos, aqueles que possuíamos informações, excluindo também os graduandos. Assim, desses 88 estudantes, 14 (16%) seguiram diretamente para o mercado de trabalho e 74 (84%) fizeram pós-graduação. Destes últimos, 15 (20%) fizeram pós-graduação fora do país.

A análise de perfil dos que ingressaram na pós-graduação trabalhou com 67 egressos, sendo desconsiderados do total de 74 os 7 alunos que ainda estão realizando o curso. Desses, 2 partiram direto para o doutorado seguido do pós-doutorado. Os demais 65 fizeram mestrado. Dentre eles, 45 seguiram para o doutorado.

Dos estudantes que concluíram a pós-graduação, procuramos informações nos seus currículos lattes e de 41 destes encontramos informações sobre onde eles estão inseridos no mercado de trabalho. Destes, 32 (78%) são docentes em Institutos de Educação de Ensino Superior (IES), 4 (10%) encontram-se em Órgãos Públicos (OP), 2 (5%) estão presentes em IES e Órgãos Públicos, 2 (5%) são docentes em escolas particulares e apenas 1 (2%) está atuando em outra área.

Área de Atuação	Nº de PETianos	Porcentagem
Docência em IES	32	78%
Órgãos Públicos	4	10%
Docência em Escola Particular	2	5%
Docência em IES e Órgãos Públicos	2	5%
Outras Áreas	1	2%

Tabela 2: Área de atuação entre os egressos que concluíram a pós-graduação.

Analisando os 14 egressos que entraram diretamente no mercado de trabalho, temos que 6 (43%) são docentes da Secretaria de Educação do Distrito Federal (SEDF), 3 (22%) são docentes em escolas particulares, 3 (22%) estão em Órgãos Públicos e, por fim, 2 (13%) atuam em outras áreas.

Área de Atuação	Nº de PETianos	Porcentagem
Docência na SEDF	6	43%
Docência em Escola Particular	3	22%
Órgãos Públicos	3	22%
Outras Áreas	2	13%

Tabela 3: Área de atuação entre os egressos que foram direto para o mercado de trabalho.

Resultados e Discussões

O perfil aqui traçado dos PETianos egressos do PETMAT mostra o sucesso do grupo e a contribuição do programa enquanto formador de matéria prima para os programas de pós-graduação. A grande maioria dos egressos frequentou um programa de pós-graduação, do Brasil ou do exterior, e hoje estão inseridos no mercado de trabalho exercendo cargos de liderança em órgãos públicos ou em IES. Esse perfil confirma a importância do programa na formação acadêmica e pessoal dos integrantes.

Referências Bibliográficas

[1] CLAUDIO, C.; O PET visto pelo seu criador, **2019**.

[2] CNPq; Plataforma Lattes, disponível em: <https://lattes.cnpq.br>.

[3] KNECHTEL, M. R; *Metodologia da Pesquisa em Eduação: uma abordagem teórico-prática dialogada*, Intersaberes, Curitiba, **2014**.

[4] SILVA, D.; SIMON, F. O.; *Abordagem Quantitativa de Análise de Dados de Pesquisa: Construção e Validação de Escala de Atitude, Cadernos CERU*, v. 16, **2005**, p. 11-27.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Atividades remotas do PET Matemática UnB

Ayrton Anjos, Caio Tomás, Matheus Souza, João Vítor[1] Luciana Ávila Rodrigues[2] [3]
Departamento de Matemática - Universidade de Brasília
teixeiraayrton99@gmail.com, caiotomas6@gmail.com, matheus251freitas2@gmail.com, jotavitor.teixeiramoura560@gmail.com, luavila@unb.br
trabalho do PET

Palavras-chave: Ensino remoto; Oficina; Minicurso.

Introdução

Neste resumo apresentaremos duas atividades do PET Matemática da Universidade de Brasília, o PETMAT Minicursos e o PETMAT Oficinas, e como foi feita a adaptação para o ensino remoto. Discutiremos cinco minicursos que foram realizados em 2020 ou 2021, um minicurso que ainda será realizado em 2021 e duas oficinas que foram realizadas na XLIX Escola de Verão MAT/UnB em 2021. Tais atividades se encaixam principalmente no eixo do ensino, mas como veremos a seguir, elas também tiveram um forte caráter de extensão.

Oficinas

A primeira atividade que iremos discutir é a PETMAT Oficinas, em particular, duas oficinas realizadas na XLIX Escola de Verão MAT/UnB, evento que ocorreu de forma totalmente virtual no início de 2021. As oficinas tinham como públicoalvo tanto alunos da Educação Básica quanto da Educação Superior, público esse que foi atingido. O objetivo das oficinas era trabalhar com a Matemática de forma

[1]Petianos.
[2]Orientadora.
[3]Tutora.

lúdica apresentando situações instigantes ou situações que envolvem o cotidiano do participante.

O título da primeira oficina é "Matemágicas" e foi realizada pela petiana egressa Bárbara Ribeiro. A atividade consistiu em um conjunto de mágicas que podiam ser desvendadas através da matemática. Utilizando apenas dados e um baralho, a palestrante realizava a mágica para os participantes que, após esse momento, eram convidados a tentar descobrir o truque. A duração total foi de cerca de 3 horas.

Já a segunda oficina se chama "Congruências Modulares e aplicações" e também foi realizada durante a XLIX Escola de Verão MAT/UnB pelo petiano Ayrton Anjos. Essa é uma atividade clássica do PETMAT UnB, porém foi necessário a adaptação ao formato virtual. Foram trabalhados dois temas que podem ser entendidos através de congruências modulares: o primeiro deles é o cálculo do dia da semana de alguma data; e o segundo envolve os dígitos verificadores do CPF. Entretanto, antes disso, um problema foi apresentado para motivar o estudo das congruências. Foi necessário apenas que os participantes utilizassem papel e caneta e a duração total foi de cerca de 1 hora e 30 minutos.

Após a aplicação das oficinas de forma síncrona, os ministrantes reformularam para o formato assíncrono gravando vídeos que foram publicados e ainda estão disponíveis tanto no Youtube (`https://www.youtube.com/c/PETMatemticaUnB`) quanto no Instagram (`https://www.instagram.com/petmatunb/`) do grupo.

Minicursos

Agora discutiremos a atividade PETMAT Minicursos, que consiste na realização pelos petianos de minicursos sobre temas referentes à matemática. Em geral, o público-alvo são alunos da graduação ou, em especial, alunos do PET.

O primeiro minicurso que discutiremos é o clássico Minicurso de LaTeX de que vendo sendo ofertado desde a criação do grupo de forma presencial. No contexto atual da pandemia do COVID19, o minicurso foi adaptado em 2020 pelo petiano egresso Matheus Andrade. Já em 2021, a realização ficou por conta dos petianos Caio Tomás e Matheus Souza. O minicurso é direcionado para o aprendizado do software LaTeX, muito utilizado para a edição de textos científicos, que envolvem linguagem matemática/simbólica, pois sua qualidade é bastante superior aos demais editores de texto, por possibilitar a inserção de símbolos matemáticos e outros recursos pouco usuais em editores de texto comuns.

Na modalidade remota, devido às restrições tanto de conexão quanto de tempo, optamos por realizar o minicurso apenas para os próprios PETianos, possibilitando que a atividade fosse melhor aproveitada. Também devido à modalidade remota, tivemos a oportunidade de fazer uma versão gravada do minicurso, que será postada no canal do PETMAT UnB no YouTube e fará parte da programação da XXI

Semana Universitária da Universidade de Brasília, que será realizada em 2021. O minicurso foi divido em quatro aulas com duração de 2 horas cada, além disso, listas de exercícios foram passadas para que o conteúdo das aulas fossem trabalhados. Estudamos as noções iniciais de LaTeX tanto para escrever artigos quanto slides e a plataforma utilizada foi o Overleaf.

No ano de 2020 foram realizados os minicursos "Uma breve introdução às variedades diferenciáveis", "Uma introdução à Teoria de Jogos"e "SECIAR: um modelo didático um pouco mais realista que o SIR", realizados pelos petianos egressos Matheus Andrade, Bárbara Ribeiro e Manoel Reis. Os dois primeiros minicursos consistiram em 6 aulas com duração de 2 horas cada e atualmente estão disponíveis no canal do Youtube `https://www.youtube.com/c/PETMatemticaUnB`. Já o terceiro consistiu de 4 aulas com duração de 2 horas e está disponível no link `https://www.youtube.com/watch?vJQo2vEMSZFs`.

Ainda em 2021 realizaremos o Minicurso de GAP (Groups, Algorithms, Programming). O GAP é um sistema de Álgebra Computacional com um grande foco em Teoria de Grupos, possuindo uma linguagem de programação própria e uma base de dados com estruturas algébricas e algoritmos algébricos. Pretendemos tratar das noções iniciais envolvendo a linguagem do GAP e algumas funções mais básicas para se trabalhar com listas e números racionais. Por fim, trabalharemos funções envolvendo grupos finitos e as utilizaremos para encontrar exemplos de grupos finitos que satisfazem certas hipóteses. Serão três aulas com duração de 2 horas, em que, na primeira parte, acontecerá uma exposição sobre o software e, na segunda parte, os participantes serão convidados a resolver alguns exercícios sobre o conteúdo da aula.

Conclusão

Acreditamos que as oficinas cumpriram o objetivo de apresentar de forma lúdica a matemática pois tivemos a participação de estudantes da Educação Básica. O Minicurso de LaTeX também cumpriu o objetivo de introduzir os petianos ao software LaTeX e capacitá-los a escrever os próprios textos e apresentações. Os minicursos e oficinas são uma excelente forma dos petianos trabalharem com o ensino, pois devem se organizar tanto na preparação para uma boa apresentação quanto na escolha das referências usadas. Além disso, permitem introduzir temas diversos de formas que não seriam tratados na graduação. Enriquecendo, assim, tanto suas experiências quanto o ensino de graduação.

Por fim, esperamos que esse resumo possa servir de inspiração para outros grupos PET Matemática, tanto em relação aos temas dos minicursos e oficinas quanto em relação à forma como as atividades foram adaptadas para o formato remoto.

Referências Bibliográficas

[1] PETMAT UnB. Disponível em <`http://pet.mat.unb.br/`>. Acesso em 23 de julho de 2021.

[2] GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra. Disponivel em <`https://www.gap-system.org/index.html`>. Acesso em 23 de julho de 2021.

[3] CAMPANI, C. A. P; *Tutorial de Beamer: apresentações em LaTeX*, **2006**.

[4] DATTA, D. *LaTeX in* 24 *Hours: A practical guide for scientific writing*, India, **2017**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Breve análise sobre atividades diagnósticas aplicadas aos Cursos de Administração da UFES

Abraão Santana Pezente[1], Aline Martins Nascimento Belchior[2], Chiara Vassoler Merizio[3], Victor Rigoni de Lima[4]. Fabiano Petronetto do Carmo[5].
Centro de Ciências Exatas - Universidade Federal do Espírito Santo, campus Goiabeiras
abraao.pezente@edu.ufes.br, aline.belchior@edu.ufes.br, chiara.merizio@edu.ufes.br, victor.lima.42@edu.ufes.br, fabiano.carmo@ufes.br
Atividade PETiana - PET Matemática UFES
Palavras-chaves: Ensino; Defasagem; Dificuldades em Matemática; Monitoria; Projeto.

Introdução

A partir do período 2019/1, os grupos PET Matemática UFES (PET-MAT) e PET Conexões Administração (PET-ADM) executaram o projeto de Monitoria de Matemática para os Cursos de Administração, ofertando monitorias virtuais a partir da plataforma AVA[6] aos discentes da disciplina de *Matemática I* ofertada no primeiro período do curso de Administração da universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

O projeto foi concebido com o objetivo geral de diminuir o alto índice de reprovação na disciplina e inicialmente focava no uso de ferramentas de ensino

[1]PETiano e autor principal
[2]PETiana
[3]PETiana
[4]PETiano
[5]Tutor e Orientador
[6]AVA é uma plataforma de aprendizagem virtual e institucional da UFES, onde os professores podem realizar a postagem de materiais e atividades para os alunos.

a distância, sendo o PET-ADM responsável pela criação e manutenção da plataforma, incluindo conteúdos, e divulgando-a, para os alunos do curso e o PET-MAT responsável pela parte conceitual da monitoria, ou seja, pela elaboração e solução de listas de exercícios, pela proposição e reprodução de discussões, textos, vídeos e outros. Posteriormente, houve a inclusão de monitorias síncronas ofertadas pelos PETianos do grupo PET-MAT.

Como forma de trazer informações sobre o conhecimento dos estudantes quanto aos conhecimentos de Matemática e melhorar a eficácia das tomadas de decisões com relação a conteúdos abordados e metodologias de ensino, resolveu-se desenvolver uma avaliação diagnóstica dos discentes no início dos períodos. Foram realizadas duas avaliações nos períodos 2019/2 e 2020/1.

Metodologia

Primeiramente, foi-se pensado em elaborar uma avaliação diagnóstica. Tal atividade foi elaborada pelos PETianos do PET-MAT da seguinte forma: para cada uma das provas, cada PETiano elaborou duas questões relativas aos conceitos matemáticos básicos - que em tese os estudantes recém chegados à universidade deveriam saber - relativos ao Ensino Médio regular. E, a partir dessas, foram selecionadas 11 questões para a prova no período 2019/2 e 12 para o período 2020/1 - aquelas que o grupo entendeu como sendo as mais pertinentes.

Em seguida, essas avaliações foram aplicadas para os discentes da disciplina de *Matemática I*. As atividades foram realizadas no Centro de Ciências Jurídicas e Econômicas da UFES e aplicadas no horário de aula da disciplina *Matemática I*, pelos PETianos do PET ADM juntamente com o professor responsável pela disciplina.

Depois das aplicações, os dados foram tabulados pelos PETianos do PET-ADM e enviados para os PETianos do PET-MAT, a fim de que esses fizessem uma análise conceitual dos dados obtidos.

Resultados e Discussões

No período 2019/2 um total de 77 estudantes realizaram a avaliação, desses 38 são do turno matutino e 39 são do turno noturno. Já no período 2020/1 um total de 44 estudantes realizaram a avaliação, 37 são do turno matutino e 7 são do turno noturno que optaram por fazer a avaliação com os discentes do matutino. Não foi possível realizar a avaliação da turma noturna por causa dos problemas recorrentes da pandemia do Coronavírus.

As notas foram atribuídas em uma escala de 0 a 100.

Foi feita uma análise descritiva dos dados, contendo média e desvio padrão das notas, questões mais e menos acertadas, bem como as maiores e menores notas. Nas imagens 1 e 2 são apresentados alguns gráficos feitos a partir dos dados obtidos da prova aplicada no período 2019/2.

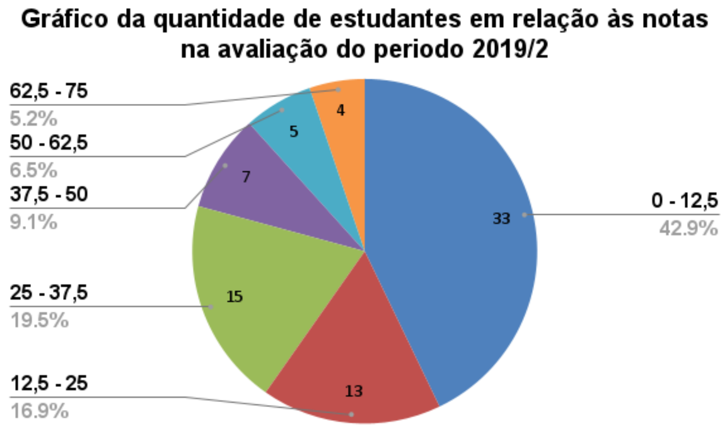


Figura 1: Imagem contendo o gráfico da quantidade de estudantes em relação às notas na avaliação do periodo 2019/2

Além dessa análise geral, foram feitas análises relativas a cada uma das questões de ambas as provas. Para fins de exemplificação, a seguir, é apresentada a questão 7 da prova de 2020/1, bem como a análise da mesma.

Questão 7. Considerando a função $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, julgue as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

I. O gráfico da função é uma parábola

II. Possui concavidade para baixo

III. Possui uma única raiz real

Figura 2: Imagem contendo o gráfico da quantidade de estudantes que acertaram cada questão na avaliação no período 2019/2

IV. A interceção com o eixo y é (0,2)

(A) V,V,F,V **(B)** V,F,F,V **(C)** V,F,V,F **(D)** F,F,F,V

A questão aborda a análise do gráfico de uma função de segundo grau e dos significados dos coeficientes a, o que acompanha o termo quadrático, e c, o termo independente. A questão tem como resposta correta a alternativa B e foi acertada por 45.45% dos estudantes, mas 25% não responderam a ela. Os 15.91% que marcaram a letra A mostraram não saber os significados gráficos do coeficiente a. Os 11.36% que marcaram a letra C mostraram não saber o significado gráfico do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) e não saber que o coeficiente c é o valor da ordenada do ponto de intersecção com o gráfico da função. Os 2.27% que marcaram a letra D mostraram não saber que uma função de segundo grau possui a representação gráfica de uma parábola.

Conclusão

A partir da análise descritiva dos dados, pode-se concluir que o desempenho geral das turmas de 2019/2 e 2020/1 foi insatisfatório. Verificou-se que todos os conteúdos abordados nas avaliações diagnósticas apresentam altos índices de defasagem para a grande maioria dos estudantes, então não há uma área específica a ser focada. O processo de ensino aprendizagem deve ser fomentado em um aspecto geral, e nesse sentido, o projeto de Monitoria de Matemática para os Cursos de

Administração pode oferecer alternativas para esse fomento.

Esses resultados obtidos nas avaliações podem ter duas explicações que talvez ocorram concomitantemente: os estudantes não têm interesse em realizar as avaliações diagnósticas com seriedade, e/ou os estudantes, em geral, apresentam uma defasagem grande em relação aos conteúdos básicos da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] *Monitoria Matemática 1 no Ava.* Disponível em: <https://ava.ufes.br>. Acesso em: 20 de julho de 2021.

[2] *Pet Matemática Ufes no Youtube.* Disponível em: <https://www.youtube.com/channel/UCuBZwN2pozXDJixi8oKracw>. Acesso em: 20 de julho de 2021.

[3] *Relatórios ADM.* Disponível em: <https://drive.google.com/drive/folders/1dY9mLoqZkfrPyMnN9rYxo21q2fiDPXs8?usp=sharing>. Acesso em: 20 de julho 2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Em tempos de pandemia: um minicurso presencial se reconfigura em videoaulas

Maria José Sanabria Correa, Manuela Engelmann dos Santos[1], Guilherme Schildt Duarte[2], Inês Farias Ferreira[3].
Centro de Ciências Naturais e Exatas - Universidade Federal de Santa Maria
maria.sanabria@acad.ufsm.br, guilherme.duarte@acad.ufsm.br, manuela.engelmann@acad.ufsm.br, ines.ferreira@ufsm.br

Trabalho do PET

Palavras-chave: PET; Pré-Cálculo; Minicurso; Videoaulas.

Introdução

Este trabalho descreve uma atividade que constava no planejamento de 2020 do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), envolvendo a dinamização de um minicurso presencial de Pré-Cálculo e Pré-Física e que, por conta da pandemia do Coronavírus, teve que sofrer readequações, as quais serão descritas nesse trabalho.

O Cálculo foi um dos maiores instrumentos matemáticos descobertos no século XVII. Nesse aspecto, a construção dos conceitos estabelecidos no mesmo se deu graças as contribuições de diversos matemáticos em diferentes períodos da história, ocorrendo de forma independente, entre eles, cita-se: Arquimedes, Kepler, Fermat, Newton e Leibniz. Além disso, outras personalidades matemáticas trabalharam para aperfeiçoar os conceitos, como os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann [3].

Dada a relevância dessa área do conhecimento matemático, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral fazem parte de praticamente todos os cursos de nível superior nas áreas exatas e tecnológicas. Além de estarem também em muitos cursos na área de Ciências Rurais, bem como, Sociais e Humanas. No entanto,

[1]Acadêmicas do curso de Licenciatura em Matemática - Petianas.
[2]Acadêmico do curso de Bacharelado em Matemática - Petiano.
[3]Docente do Departamento de Matemática - Tutora.

sua complexidade, faz com que disciplinas que o contenham em seu conteúdo programático tenham altos índices de reprovação nos cursos de graduação. Esse obstáculo na disciplina, por vezes, leva ao abandono do curso e, até mesmo, impacta na decisão da escolha profissional, no qual a disciplina seja obrigatória. Desse modo, julga-se imprescindível uma proposta de intervenção para minimizar essa realidade [4].

Nesse sentido, o PET Matemática da UFSM, orientado pelo princípio da indissociabilidade de pesquisa, ensino e extensão tem, dentre seus pressupostos básicos, o compromisso de contribuir para a elevação da qualidade da formação acadêmica dos alunos de graduação [2]. Nessa perspectiva, o grupo desenvolveu em parceria com o PET Física da instituição, a proposta de um minicurso intitulado "Pré-Cálculo e Pré-Física", ficando os petianos da Matemática encarregados de dinamizarem a parte referente ao Pré-Cálculo. O objetivo principal era contribuir para a aquisição de conhecimentos da Educação Básica por parte dos acadêmicos ingressantes dos cursos de Matemática e Física, Licenciatura e Bacharelado, a fim de oportunizar-lhes um melhor rendimento nas disciplinas iniciais dos cursos envolvendo conhecimentos de Pré-Cálculo.

A proposta inicial dessa atividade que se caracterizava no eixo de ensino, fora incluída no planejamento de 2020, porém a pandemia do Coronavírus acarretou na adoção do Regime de Exercícios Domiciliares Especiais (REDE) pela instituição, em que as atividades acadêmicas passaram a ser desenvolvidas de forma remota, demandando uma reestruturação. A partir dessa reorganização, o grupo elaborou videoaulas com tópicos que seriam abordados no minicurso e, posteriormente, foram disponibilizadas em seu canal do YouTube[4]. Dessa forma, a atividade passou a se caraterizar em uma interface ensino-extensão. A seguir, será descrito como essa atividade foi proposta inicialmente e como foi reestruturada.

Metodologia

Nos dois meses iniciais de 2020, o grupo realizou pesquisa e estudo, a partir disso organizou um material bibliográfico, produzindo uma apostila envolvendo conteúdos matemáticos específicos da Educação Básica (Pré-Cálculo). Esses conteúdos foram selecionados, a fim de que pudessem servir de referencial teórico para a construção de um minicurso envolvendo esse assunto, que seria dinamizado a cada início de semestre voltado para os acadêmicos ingressantes dos cursos de Matemática e Física, como mencionado anteriormente. Nessa etapa inicial foram formados subgrupos entre os petianos que ficaram responsáveis por determinar os tópicos que iriam compor a apostila. A partir disso, juntamente com o PET Física,

[4]Link: `https://www.youtube.com/channel/UCbybdrX0tWjkQMHE3QP2JOg`Canal PET Matemática da UFSM

o grupo definiu data, carga horária e número de vagas para a execução do primeiro minicurso que seria realizado na terceira semana de aula do primeiro semestre de 2020, meados de março.

Quanto à apostila, essa foi revisada em encontros presenciais entre todos os integrantes, em que cada subgrupo apresentou o material organizado. Após, foram abertas as inscrições do minicurso por meio das redes sociais dos dois grupos PET, obtendo-se um número superior a 50 inscritos. No entanto, em decorrência da pandemia do Coronavírus, as atividades presenciais na UFSM foram suspensas na semana anterior ao minicurso. Dessa forma, o mesmo fora também suspenso.

Com o intuito de oportunizar o acesso aos interessados em materiais relacionados aos assuntos que seriam abordados no minicurso, o grupo entendeu que seria mais apropriado, com o semestre em andamento, a elaboração de videoaulas disponibilizadas de forma pública. Assim, as produções audiovisuais poderiam ser acessadas por qualquer pessoa interessada no assunto, pois abordavam um único tópico, com pequena duração.

Após, o grupo se dividiu em subgrupos para melhor organizar o desenvolvimento das videoaulas, a partir disso ficaram definidos os seguintes tópicos que seriam explorados nas videoaulas por meio do material da apostila: Conjuntos e Frações; Potências, Raízes, Produtos Notáveis e Polinômios; Identidades e Equações; Funções: Afim, Quadrática, Modular, Inversa, Composta, Trigonométrica, Exponencial e Logarítmica.

Além disso, com o intuito de minimizar as discrepâncias das gravações realizadas pelos petianos, criaram-se padrões de produção, gravação e edição para os vídeos. A elaboração do material audiovisual foi realizada usando os softwares RecordFree e OpenBoard. Quanto a duração das videoaulas, essas variaram conforme o tempo necessário, em média 15 minutos. Com a conclusão da elaboração dos vídeos por parte de cada petiano, foi constituída uma comissão com a finalidade de editar os vídeos e carregá-los para a plataforma de streaming YouTube. Assim, não havendo mais considerações a serem feitas entre os integrantes para a melhoria do material que estava sendo produzido, as videoaulas foram postadas no canal do YouTube do grupo.

Resultados e Discussões

Diante do que foi explicitado, pode-se ressaltar a elaboração de uma apostila intitulada de Pré-Cálculo, disponível no site oficial do PET Matemática da UFSM[5]. Essa apostila é constituída por um breve referencial teórico, exemplos e exercícios resolvidos que visam auxiliar na construção do conhecimento acerca de tópicos

[5]Link: `https://www.ufsm.br/pet/matematica/downloads-2/`Apostila de Pré-Cálculo

de Pré-Cálculo. Além disso, conforme mencionado no decorrer desse trabalho, o contexto social imposto pela pandemia acarretou um novo formato para uma proposta inicial de minicurso presencial, ou seja, produção de recursos digitais em formato de vídeos.

No canal do YouTube do PET Matemática da UFSM, encontra-se o material digital produzido sendo composto por 48 vídeos, sendo esse um número relativamente grande, considerando que o grupo era totalmente inexperiente em um projeto dessa natureza.

Em termos da relevância para a formação inicial dos envolvidos nessa atividade, menciona-se [1], que afirma que os graduandos podem e devem atuar como disseminadores de conhecimentos teóricos e práticos. Isso fica evidente com o desenvolvimento dessa atividade proposta no planejamento de 2020 do grupo, mesmo com a sua adaptação por conta da necessidade de suspensão das atividades presenciais. Uma vez que, essa reestruturação oportunizou ao grupo uma qualificação na utilização de inúmeros aplicativos, bem como explorou habilidades e desenvolveu competências que vão além do conteúdo abordado, pois envolvem aspectos de ensino com tecnologias.

Espera-se que os materiais digitais elaborados pelo grupo possam contribuir para a aquisição de conhecimento ao público interessado.

Referências Bibliográficas

[1] BRANDÃO, C. R. Comunidades aprendentes. In: FERRARO JR, L. A. (Org). *Encontro e Caminhos: Formação de Educadoras (ES) Ambientais e Coletivos Educadores*, v. 1. Brasília: Ministério do Meio Ambiente,**2005**.

[2] BRASIL. Portaria n. 976, de 27 de Julho de 2010. Atualizada pela Portaria n. 343/2013 – dispõe sobre o Programa de Educação Tutorial – PET. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF, 27 jul. 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/>. Acesso em: 22 jul. 2021.

[3] FULINI, M. A. **História do cálculo diferencial e integral**. 2016. 56 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática à Distância, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, **2016**.

[4] RAFAEL, R. C. *Cálculo Diferencial e Integral: estratégias adotadas por*

universidades para reduzir o percentual de reprovação/evasão na disciplina. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2015. **Anais**... Juiz de Fora: Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, 2015, p. 1-12.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Ensino de Matemática na Educação Básica: monitoria em etapas de transição

Mauricio Menna Barreto[1], Carlos Daniel Raminelli[1], Isadora Roth[1], Inês Farias Ferreira[2] [3].
Centro de Ciências Naturais e Exatas - Universidade Federal de Santa Maria
barreto.mauricio@acad.ufsm.br, ines.ferreira@ufsm.br
Trabalho do PET
Palavras-chave: Transição; Rede Estadual; Matemática Básica.

Introdução

A pandemia da COVID-19 causou mudanças repentinas na vida da população mundial, provocando alterações comportamentais e um processo de resiliência em todos. Nessa perspectiva, no âmbito educacional, analisando o ensino-aprendizagem e os sujeitos nele envolvidos: professores, alunos e comunidade escolar, precisaram resignificar suas práticas. Desse modo, iniciou o aprender e ensinar remotamente, sendo necessário compreender dificuldades para propiciar oportunidades no fazer pedagógico e intervir com ações que pudessem buscar melhorias nas práticas. [3].

Nesse contexto, viu-se um ascendente no uso de tecnologias e, consequentemente, um agravamento nos aspectos sociais, econômicos e tecnológicos. No entanto, entende-se que o ensino remoto ainda é a melhor alternativa para contribuir com o distanciamento social, iniciativa necessária para conter o avanço da pandemia e minimizar perdas maiores na aprendizagem dos discentes. Assim, para tornar o processo mais significativo, é fundamental que toda a classe educacional esteja disposta a superar as dificuldades impostas nesse cenário.

À vista disso, tendo como um dos objetivos do Programa de Educação Tutorial o estímulo ao desenvolvimento da consciência e do papel perante a sociedade, visando a realidade em que os integrantes e instituições de Ensino Superior estão

[1]Petiano(a).
[2]Orientadora.
[3]Tutora

inseridos [1], foi que o grupo PET Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, aceitou uma parceria com um professor regente da disciplina de Matemática das turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e do 1° ano do Ensino Médio de uma escola da Rede Estadual de Ensino, situada na zona rural do município de Santa Maria.

Essa ação, que transita entre os eixos de extensão e ensino, baseou-se na produção de material audiovisual pedagógico, a fim de auxiliar os estudantes em atividades preparadas pelo professor e disponibilizadas às turmas da escola. Sendo uma oportunidade a todos petianos de se aproximarem de práticas docentes em tempos de pandemia.

Sob esse viés ([4], p. 2), discorre que:

> Um dos recursos didáticos mais valiosos para significar a forma de ensinar na Educação a Distância é a videoaula, podendo ser, ao mesmo tempo, informativa, lúdica e motivadora da aprendizagem. Ela pode associar, em um mesmo objeto didático, elementos visuais, sonoros e textuais, além de também possibilitar o acesso a outros materiais, na forma interativa, possibilitando que o estudante tome decisões diante dos desafios lançados pelo professor.

Assim sendo, abordaremos a organização e elaboração desses materiais digitais produzidos pelo grupo que foram disponibilizados ao estudantes durante todo o segundo semestre de 2020. Para tanto, apresentaremos nesse trabalho, um recorte do material referente às turmas que sofrem o impacto da transição escolar na Educação Básica: dos Anos Iniciais para os Anos Finais do Ensino Fundamental e dos Anos Finais do Ensino Fundamental para o Ensino Médio.

Desse modo, em concordância com [2], compreende-se que a transição é um processo de mudança que provoca uma interrupção em hábitos e condiciona modificações de conduta, medida por fatores institucionais e sociais. Nessas cirscutâncias, identificando essa passagem junto ao ensino remoto, relataremos na próxima seção aspectos organizacionais dos membros do PET para realização de tal ação e o levantamento do material elaborado pelo grupo.

Aspectos relacionados a organização e de levantamento da produção do projeto

Para realização do projeto intitulado Monitoria na Educação Básica, constituiu-se uma comissão composta por petianos, em que eram encarregados de efetuar a mediação do grupo com as solicitações do professor regente das turmas.

À vista disso, os integrantes do grupo PET Matemática, dividiram-se em subgrupos, tendo o propósito de elaborar e discutir sobre a produção do material didático a ser enviado para os alunos. Assim, foram criadas pastas compartilhadas no Google Drive, para que o professor fornecesse os exercícios encaminhados às turmas e, na sequência, cada subgrupo pudesse fazer o estudo do material, bem como se articulassem na efetivação das resoluções das atividades orientadas.

Dessa maneira, o subgrupo encarregado pela produção de material da turma do 6º ano, composto por três petianos, criou um grupo no WhatsApp para proceder com o andamento das atividades. Com isso, a partir dos exercícios pontuados pelo professor, os petianos subdividiam as questões entre si e elencavam itens que consideravam pertinentes a serem discutidos nos vídeos.

Quanto ao subgrupo responsável por atuar na turma do 1º ano do Ensino Médio, o qual fora constituído por quatro petianos, houve, em um primeiro momento, divisão em duplas, sendo que alternavam-se nas semanas. Posteriormente, se reorganizaram dividindo igualmente o número de exercícios entre os pares.

Isso posto, os recursos digitais produzidos eram disponibilizados na pasta compartilhada. Para que assim, o professor das turmas tivesse acesso, os analisassem e após encaminhasse aos estudantes. Na próxima seção será descrito os conteúdos abordados nesses anos de transição.

Finalizado o ano letivo na Rede Estadual, contabilizaram-se um total de 96 vídeos para as turmas em estudo. Com isso, tem-se 39 vídeos produzidos direcionados ao 6º ano do Ensino Fundamental e 57 para o 1º ano do Ensino Médio. Nos quadros 1 e 2, evidenciam-se os quantitativos de vídeos e os conteúdos/conceitos abordados, no 6º e 1º anos, respectivamente, para cada semana.

Semana	Número de vídeos	Conteúdos/Conceitos abordados
1	6	Frações equivalentes; Simplificação de frações; Fração irredutível; Números mistos; Frações impróprias.
2	9	Adição e subtração de frações; Comparação de frações.
3	13	Multiplicação e divisão de frações.
4	9	Números decimais; Fração geratriz; Dízima periódica simples; Período; Operações com números decimais (adição, subtração, multiplicação, divisão); Comparação de dois números decimais.
5	2	Dízimas periódicas compostas.

Quadro 1: Dados das videoaulas produzidas para a turma de 6º ano do Ensino Fundamental

Quadro 2: Dados das videoaulas produzidas para a turma de 1º ano do Ensino Médio .

Nesse ínterim, é imprescidível destatacar o estudo de determinados conteúdos

Semana	Número de vídeos	Conteúdos/Conceitos abordados
1	3	Representação gráfica.
2	5	Coordenadas no plano cartesiano.
3	16	Introdução ao conceito de função
4	12	Funções do 1º grau.
5	9	Função afim - coeficientes angular e linear.
6	12	Função do 2º grau.

e conceitos pelos petianos, tendo o propósito de entregar uma explicação que alcancasse da melhor forma possível a linguagem dos estudantes, dado que a linguagem formal das terminologias, por vezes, não atingiam um entedimento satisfatório.

Resultado e Discussões

Nesse trabalho discorremos sobre a constituição de um projeto em parceira com um professor regente de uma escola estadual da zona rural. Desse modo, as ações realizadas junto aos estudantes, por meio da disponibilização de materiais audiovisuais produzidos pelos petianos, oportunizou a estes uma inserção no contexto escolar fora do âmbito universitário. Além disso, forneceu-lhes experiências voltadas ao ensino, a partir da apropriação de ferramentas tecnológicas que pudessem contribuir e facilitar a abordagem de assuntos relacionados a sua área de atuação futura.

Ademais, atuaram em duas etapas de transição da Educação Básica, gerando reflexões quanto a dificuldades em conteúdos/conceitos bases que, por vezes, eram retomados durante as explicações nas videoaulas, haja vista que serviam de pré-requisitos para a resolução de determinadas atividades. Ainda, com o auxílio das videoaulas o professor notou um aumento no número de entrega das tarefas, as quais, muitas vezes, chegavam incompletas anteriormente. Portanto, o grupo PET Matemática, entende que essa ação realizada, mesmo sendo realizada de forma remota, pode ser extendida a um público fora da instituição de Ensino Superior, contruibuindo em um ambiente escolar.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Programa de Educação Tutorial - **Manual de Orientações Básicas**. Brasília: MEC, **2006**. Disponível em: <encurtado r.com.br/dyGO6>. Acesso em: 21 jul. 2021.

[2] FAGUNDES, C. V. Transição Ensino Médio - Educação Superior: Qualidade no Processo Educativo. In: **Revista Educação por Escrito**, PUCRS, v.3, n.1, p. 62-73, jul.2012. Disponível em: <encurtador.com.br/frU49>. Acesso em: 12 jul. 2021.

[3] FEITOSA, M. C.; MOURA, P. S.; RAMOS, M. S. F.; LAVOR, O. P. Ensino Remoto: O que Pensam os Alunos e Professores?. In: V Congresso sobre Tecnologia na Educação (CTRL+E), **2020**, João Pessoa. **Anais**... Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação. Disponível em: <encurtador.com.br/mGKOU>. Acesso em: 21 jul. 2021.

[4] MOGETTI, R. S.; BROD, F. A. T.; LOPES, J. L. B. Videoaula Interativa como Material Potencialmente Significativo na Educação a Distância. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 18, n. 1, 2020. Disponível em: <encurtador.com.br/vFJZ6>. Acesso em: 21 jul. 2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Introdução ao LaTeX para alunos da UFRRJ

Matheus Degliomini Silva[1], Renan de Almeida Fernandes, Eulina Coutinho Silva do Nascimento[2] [3], Gisela Maria da Fonseca Pinto[4]
PET - Matemática e Meio Ambiente
Departamento de Matemática - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
matheusdegliomini@ufrrj.br, vitarenan@ufrrj.br, eulina@ufrrj.br
Trabalho do PET
Palavras-chave: LaTeX; Matemática; Apostila.

Introdução

O projeto surgiu de um minicurso estruturado e aplicado no II Colóquio PET Matemática e Meio Ambiente da UFRRJ, devido a esse evento e pelo incentivo da tutora deu-se início a ideia de produzir um material introdutório ao LaTeX. O projeto da apostila como um tutorial para o sistema LaTeX de edição de textos, foi pensado para fornecer uma alternativa viável aos editores de texto mais utilizados. O material foi estruturado e pensado para os alunos do curso de Matemática da UFRRJ e de outros cursos da área de exatas, tendo seu conteúdo muito próximo da realidade vivida por todos esses alunos, em especial os da matemática. Além das estruturas matemáticas, o material tem em sua primeira etapa o objetivo de proporcionar os conceitos básicos para produção de artigos, listas de exercícios e provas. Já na segunda etapa, o objetivo é proporcionar o desenvolvimento de apresentações em slides ou pôsteres. Espera-se que com a leitura desse material seja possível que o leitor consiga ter o básico do conhecimento para fazer um texto em LaTeX, e tenha o estímulo de seguir aprimorando o conhecimento da plataforma uma vez que o conteúdo é extremamente vasto.

[1]Petiano.
[2]Orientador.
[3]Tutor.
[4]Colaborador.

Justificativa

Uma das ferramentas mais conhecida para edição de textos é o pacote Office, mas apesar de ser bem útil para textos em geral, quando se trata de textos com conteúdo matemático, um editor como o Word, pode deixar de ser tão prático. Segundo ([1], p.1):

> Ao contrário de programas famosos como o MSDD Word, o texto em LaTeX não é digitado na tela na forma como vai ser impresso. O texto é digitado com vários comandos inseridos, como se fosse HTML ou um programa fonte de alguma linguagem de programação.(DE ANDRADE, 2011)

Para ter tal praticidade e sem perda alguma de qualidade, temos o LaTeX, um editor de texto que possui um foco na matemática que permite produzir fórmulas e expressões de maneira simples, que acreditamos ser de serventia aos graduandos em Matemática da UFRRJ assim como também para outros cursos na área de exatas. Segundo De Andrade, "LaTeX é um conjunto de comandos adicionais(macros) para o TeX, elaborado em meados da década de 80 por Leslie Lamport. A primeira versão do LaTeX a ser divulgada foi a versão 2.09."([1], pg v). Além da praticidade matemática, Reginaldo(2011) afirma que uma vantagem do LaTeX é que ele é um software livre, ou seja, ele é gratuito e conta com a colaboração da comunidade de usuários no seu aperfeiçoamento. Assim como outros editores de texto, o LaTeX possui suas versões offline, online e mobile. Uma desvantagem do sistema LaTeX é na parte mobile que se torna mais limitada.

Um dos fatores mais importante que motivou a produção desse material é o nosso desejo, enquanto integrantes do PET, de colaborar com a formação dos graduandos da UFRRJ, onde através desta apostila tentaremos proporcionar conhecimento que agregue à suas formações. Outro fator importante, que vale o destaque, é que as produções em LaTeX possuem um aspecto mais profissional, e comumente há templates em LaTeX para a submissão de trabalhos desenvolvidos para eventos. Isso é uma realidade que exibe a necessidade do conhecimento dessa ferramenta e dialoga, novamente, com o querer dos autores em produzir essa apostila de caráter tutorial em auxílio as demandas acadêmicas, sejam para fins de eventos, submissões e publicações, como também para apresentações, fichamentos, resumos e apresentações.

Existem outros fatores que nos motivaram na criação desta apostila, como o produto final ser em PDF, como a afinidade dos autores com a temática, como a noção da importância desse conteúdo para as 3 esferas do curso de matemática, como também a importância de produções feitas por alunos para alunos, dentre outros. Este último evidência um caráter particular do curso da matemática da

UFRRJ, onde na visão dos autores, existe pouca afinidade de boa parte dos graduandos com essa ferramenta, os motivos são diversos, mas a intenção é contribuir com o incentivo ao uso.

A proposta de confeccionar uma apostila em LaTeX não visa desmerecer ou inviabilizar outros softwares comumente utilizados, mas sim proporcionar uma opção adicional, uma alternativa diferente a eles. Desta forma, o LaTeX se apresenta como uma possibilidade, uma ferramenta que pretende atender a maioria das demandas acadêmicas, que faz uso de alguns comandos de programação, que acaba por estimular o uso dessa prática também.

A programação no LaTeX é simples, e entenda simples como uma programação para iniciantes, com um pouco de prática o discente consegue utilizar da maioria das potencialidades dele, entretanto a busca por conhecimento não cessará após a leitura da apostila, ela é um apoio ao aprendizado e não uma finalidade, desta forma é interessante destacar que muito se aprende pesquisando durante o aprendizado, colaborar com isso é o que pretendemos também.

Metodologia

Através da leitura de outros materiais existentes filtramos os conteúdos que são mais relevantes à realidade do aluno da matemática da UFRRJ. Inicialmente a apostila foi estruturada selecionando os temas a serem abordados, e a partir deles foram criados os capítulos. Em seguida, de capítulo em capítulo, foi feita uma escrita mais densa abordando o conteúdo proposto. A todo momento tivemos que recorrer a referenciais teóricos, uma vez que a nossa apostila de LaTeX foi desenvolvida inteiramente no próprio LaTeX, então precisamos buscar como executar algumas funções para fazer a escrita. O procedimento metodológico foi basicamente buscar conteúdo, principalmente em manuais oficiais e outras apostilas , e após o entendimento operacional dos conteúdos, escrever de maneira clara e explicativa, mas ressaltamos que como o foco é para os alunos da graduação em matemática, consideramos a todo momento a realidade deles, assim a nossa escrita se moldou à essas necessidades.

Resultados e Discussões

Como resultado, esperamos desenvolver um material de LaTeX que seja de grande utilidade para os alunos do curso de Matemática como também para alunos de outros cursos de exatas. Com o LaTeX, como alternativa ao pacote Office, esperamos que o material permita que os alunos façam seus textos, seja para uma avaliação ou para uma apresentação com uma ferramenta de alta qualidade matemática com produção mais simples para aplicações de conteúdos matemáticos. Existe também o interesse de que essa apostila sirva como base para futuros minicursos, em particular no próximo Colóquio PET Matemática e Meio Ambiente da UFRRJ que já contará com um minicurso baseado nesse material. Salientamos que vemos nessa apostila uma possibilidade para futuras produções, feitas por novos integrantes do PET para a comunidade acadêmica, dando assim continuidade ao trabalho realizado.

Com o conteúdo da apostila, esperamos que os discentes consigam produzir artigos, confeccionar slides e pôsteres, tanto para demandas nas disciplinas da graduação como também para eventos de publicação científica. Esperamos contribuir igualmente na vida após a graduação, seja para aqueles que vão seguir a carreira docente, onde trabalhamos com o ensinamento sobre construções de provas e listas de exercícios por exemplo, como também nos que não vão, proporcionando um editor de texto gratuito de requinte profissional.

Dessa maneira, pretendemos acrescentar mais uma ferramenta aos discentes que a tecnologia permite para facilitar as atividades desenvolvidas no meio acadêmico e profissional, esperamos que seja um estímulo aos discentes da UFRRJ, em especial os da matemática, para o uso de tecnologias no exercício futuro de suas funções. Faz-se necessário reafirmar a nossa preocupação com a realidade específica do curso da matemática, isso é identificado pelo nosso foco no conteúdo matemático como também nas demandas do curso. Esse é um debate identificado pelos autores e levado em consideração durante a confecção da apostila, conhecemos o público alvo e suas necessidades, levando essa reflexão durante todas as etapas de confecção deste material, sempre com atenção e cuidado para que todos possam se sentir contemplados por essa produção, feita por alunos para alunos. Destacamos também que o incentivo à utilização de tecnologias, essa particularmente gratuita e que faz uso de programação, pode colaborar com a formação dos discentes de forma positiva, seja durante sua formação ou já durante sua vida profissional.

Conclusões

Já concluímos a etapa 1- que engloba conhecimentos textuais gerais- da apostila e atualmente estamos na etapa 2. Pretendemos com isso expandir os conteúdos para além da escrita de um texto, abordando a produção de slides e de pôsteres em LaTeX, proporcionando também a possibilidade de apresentações em eventos. Acreditamos que o objetivo foi atingido, conseguimos confeccionar um material introdutório que auxiliará e incentivará os discentes da UFRRJ. Ao longo da escrita desta apostila fez-se necessário muita pesquisa para o referencial teórico, devido a isso todos os autores cresceram muito no conhecimento da temática, e espera-se que os discentes que lerão tenham o mesmo efeito. Logo destaca-se que o projeto, além de propor o enriquecimento da formação dos discentes em geral, também agrega a formação daqueles que produziram este material.

Referências Bibliográficas

[1] DE ANDRADE, L. N.; *Breve Introdução ao LaTeX2$_\varepsilon$*, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2000.

[2] SANTOS, R. J; *Introdução ao LaTeX*, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Minicursos de GeoGebra

Ana T. Pereira, Henrique C. de Oliveira, Júlia C. Gonçalves, Rafael G. Alves, Thais E. Gonçalves[1]. Eder Marinho[2]
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - Universidade Federal de Ouro Preto
ana.twayene@aluno.ufop.edu.br,henrique.camara@aluno.ufop.edu.br, julia.chaves@aluno.ufop.edu.br,rafael.gustavo@aluno.ufop.edu.br, thais.ester@aluno.ufop.edu.br, eder@ufop.edu.br
Trabalho do PET
Palavras-chave: Geogebra; Matemática; Tecnologia; Ensino; Aprendizagem.

Introdução

O avanço e o uso de novas tecnologias tem crescido nos últimos anos e, com isso, a comunicação e a interação entre as pessoas estão em constante modificação. Vale observar que a etimologia da palavra "tecnologia", que vem do grego, é composta por duas partes: *techné*, que pode ser definido como arte, ofício ou saber fazer e *logos*, que pode ser interpretado como argumento ou razão. Deste modo, podemos dizer que a palavra tecnologia tem sua origem na razão do saber fazer, em outras palavras, é o estudo da técnica e da própria atividade de transformar.

Atualmente, a tecnologia é amplamente associada a computadores, smartphones, internet e mídias digitais em geral e, neste sentido, é necessário repensar a prática didático-pedagógica de forma a incorporar estes elementos nas salas de aula como mecanismo e ferramenta de ensino. O software livre GeoGebra (criado em 2004) nos traz inúmeras possibilidades de repensar as aulas de matemática dentro deste contexto e inserir o mundo digital no ensino da matemática.

[1]Petiano.
[2]Tutor.

Ao encontro dessas ideias, desde 2018, o PET promove um minicurso utilizando o software GeoGebra, atualmente chamado GeoGebra Pré-Cálculo, para introduzir conceitos de funções, limites e derivadas como auxílio nas disciplinas de Elementos de Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral I. Contudo, com a pandemia de Covid-19, fez-se necessário readequar as atividades do PET para a forma remota e, além deste projeto, surgiu a proposta de outro minicurso com foco nos professores do ensino básico. Trataremos este minicurso como GeoGebra para Professores.

O objetivo deste novo projeto é apresentar para professores de matemática o software livre GeoGebra e desenvolver atividades para sala de aula que colaborem na melhor compreensão de conceitos matemáticos. Este projeto, contendo três fases: preparação, aplicação e balanço, foi registrado na Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) da Universidade Federal de Ouro Preto.

A Aplicação

Para o minicurso de GeoGebra para Professores, inicialmente foi realizada a divulgação do projeto junto a comunidade, via redes sociais, a fim de atrair professores do ensino básico. Foram criados um fórum de discussão em sala específica do *Google Classroom* e em grupo específico do aplicativo *WhatsApp* para interação dos inscritos e divulgação dos materiais e atividades.

Durante cada uma das oito semanas de aplicação, é disponibilizado um roteiro semanal orientando os inscritos a assistir vídeos disponíveis nos canais do professor Éder Marinho Martins e O GeoGebra e propondo atividades para discussão, realizada em encontros online, via plataforma *Google Meet*.

O minicurso de GeoGebra Pré-Cálculo será aplicado no próximo semestre. De acordo com o planejamento, será realizada a divulgação do projeto para os alunos, via redes sociais e *e-mail* institucional.

A aplicação ocorrerá em encontros online, via plataforma *Google Meet*, mas será analisada, junto ao professor da disciplina de Elementos de Cálculo ou de Cálculo Diferencial e Integral I, a possibilidade da aplicação de parte das atividades durante a aula. Em cada encontro será abordado tópicos relativos às funções (polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas), no qual será apresentado um roteiro de construção, seguido de questionamentos pertinentes ao conteúdo discutido.

Resultados e Discussões

No presente momento, o minicurso de GeoGebra para Professores está em andamento e tem previsão de conclusão para o início de agosto. Os resultados esperados ao final da aplicação deste minicurso são: a produção de material didático para nortear o uso do GeoGebra em sala de aula com tutoriais e atividades e a capacitação de professores para o uso do software em sala de aula. Vale destacar que 28 professores, de diferentes estados e cidades, se inscreveram para o minicurso e, até o momento, tem interagido positivamente com relação ao projeto.

O minicurso de GeoGebra Pré-Cálculo é uma atividade recorrente e,, como dito anteriormente, será aplicado no próximo semestre. Espera-se que este minicurso possa contribuir no aprendizado e nos índices de aprovação nas disciplinas de Elementos de Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral 1.

Por fim, salientamos que, através da experiência que estamos adquirindo, pretendemos aprimorar ambos os minicursos, incorporando novas aplicações, incluindo novas ferramentas, produzindo novas atividades, entre outros, a fim de difundir e estimular o uso do software GeoGebra como uma poderosa ferramenta de ensino.

Referências Bibliográficas

[1] STEWART, James. *Cálculo, volume 1*- 7. ed. São Paulo: Cengage Learning. **2013**

[2] EDER MARTINS; EderMat, 2020. Canal do YouTube. Disponível em: <`https://www.youtube.com/c/EderMarinho/`>. Acesso em: 15 de jul. de 2021.

[3] GEOGEBRA; GeoGebra, 2021. Página inicial. Disponível em: <`https://www.geogebra.org/`>. Acesso em: 15 de jul. de 2021.

[4] O GEOGEBRA; O GeoGebra, 2014. Canal do YouTube. Disponível em: <`https://www.youtube.com/ogeogebra`>. Acesso em: 15 de jul. de 2021.

[5] O GEOGEBRA; O GeoGebra, 2021. Página inicial. Disponível em: <`https://ogeogebra.com.br/site/index.php`>. Acesso em: 15 de jul. de 2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Monitorias para o curso de Administração

Abraão Santana Pezente, Aline Martins Nascimento Belchior, Chiara Vassoler Merizio, Victor Rigoni de Lima, Fabiano Petronetto do Carmo.
Centro de Ciências Exatas - Universidade Federal do Espírito Santos, campus Goiabeiras
abraao.pezente@edu.ufes.br, aline.belchior@edu.ufes.br, chiara.merizio@edu.ufes.br, victor.lima.42@edu.ufes.br, fabiano.carmo@ufes.br
Atividade PETiana - PET Matemática Ufes
Palavras-chave: Ensino; Defasagem; Dificuldades em Matemática; Monitoria; Projeto.

Introdução

O presente trabalho trás uma apresentação de um projeto realizado em parceria entre os grupos PET Matemática e PET Administração, da Universidade Federal do Espírito Santo. Nele, serão apresentadas as motivações para o surgimento da atividade, assim como melhorias feitas durante os anos de sua realização. Neste trabalho, também contemplam-se as adaptações feitas para a realização do projeto durante os períodos de ensino remoto. Por fim, os resultados e percepções obtidos durante a realização do projeto nos diferentes períodos são expostos.

Surgimento do Projeto

Dentre as atividades que contemplam ensino, pesquisa e extensão realizadas no programa PET, encontram-se atividades que unem diferentes PETs da universidade. Nesse contexto, no primeiro semestre do ano letivo de 2019, os grupos PET

Administração e PET Matemática iniciaram a execução do projeto *Monitoria de Matemática para o Curso de Administração.*

A motivação principal do projeto foi a constatação de uma alta taxa de reprovação dos alunos do curso de Administração na disciplina de *Matemática 1.* Nela, estão presentes os ingressantes do do curso de Administração e, em reuniões entre os grupos PET Matemática e PET Administração, observado-se que a possível defasagem no aprendizado básico de matemática e confusão entre os conteúdos já estudados, são barreiras que podem impedir a aprovação na disciplina.

Nessa perspectiva, foi montada uma equipe composta por PETianos dos dois grupos para que fossem pensadas soluções para contornar a problemática existente. A primeira decisão do grupo foi organizar no ambiente virtual de aprendizagem, AVA[1], um banco de dados de exercícios para que os alunos da disciplina utilizem como referência para a fixação dos conceitos discutidos em sala de aula. Inicialmente, o banco de dados era composto de exercícios contidos em listas elaboradas em turmas anteriores, além de uma solução digitalizada proposta por um PETiano.

Desta forma, o projeto surgiu com o objetivo específico de proporcionar aos alunos da disciplina um canal virtual de acesso a exercícios e soluções, onde o aluno buscasse uma solução para o exercício proposto e confrontasse o seu resultado obtido com a solução apresentada no ambiente, podendo verificar seus acertos e, em caso de erros, buscar a compreensão dos mesmo e alternativas de correção.

O projeto foi planejado no último semestre de 2018, teve o período 2019/1 como piloto e algumas adequações aconteceram ao longo do períodos 2019/2, 2020/1, 2020/2 até o período 2021/1, que está em andamento na universidade. No que se segue, um relato de experiência do grupo PET Matemática ao longo destes períodos é apresentado.

Execução do Projeto e sua Metamorfose

No período 2019/1 o projeto entrou em vigor. Nesse sentido, o grupo PET Administração ficou responsável pela inserção dos enunciados das questões no banco de dados citado anteriormente e a pela comunicação com os alunos, enquanto o grupo PET Matemática realizou a postagem das soluções de tais questões.

Porém, com o andamento das atividades do projeto, foram necessárias algumas adequações para a melhorar a experiência dos alunos. Nesse contexto, a procura dos alunos da disciplina pelos alunos do grupo PET Matemática para a retirada de dúvidas mostrou a necessidade de criação de um horário de atendimento fixo. Com isso, no próprio período piloto, foram criados os horários de atendimento,

[1]AVA é uma plataforma de aprendizagem virtual institucional, da Ufes, onde os professores podem realizar a postagem de materiais e atividades para os alunos.

onde os PETianos do grupo PET Matemática atendiam alunos com dúvidas pontuais proporcionando um atendimento pessoal e, portanto, mais qualificado para identificar e solucionar problemas na aprendizagem.

Em reuniões realizadas entre os períodos 2019/1 e 2019/2, observou-se que o projeto teve um resultado positivo e ficou decidido pela continuidade do mesmo. O banco de dados continuou a ser atualizado e os horários de atendimento foram mantidos. Porém, a participação mais intensa dos alunos nas datas próximas às avaliações, já observada no período 2019/1, chamou a atenção dos membros do projeto e buscou-se discutir maneiras de contornar essa frequente característica das monitorias convencionais que não era esperada nessa modalidade de monitoria.

Durante o planejamento para o ano de 2020, ainda no fim de 2019, foi decidido que os integrantes do grupo PET Administração seriam responsáveis pela realização de ações que mostrassem aos alunos, no início do período, a importância da utilização dos canais de comunicação do projeto, desde o início do semestre.

Assim, com o início do semestre 2020/1, os PETianos do PET Administração realizaram rodas de conversa com os calouros, incentivando-os a participar do projeto de forma mais eficiente. Porém, logo em seguida veio a Pandemia.

Pandemia e um período sem Aulas. Como em várias universidades, devido à pandemia, o ano de 2020 contou com um período sem aulas. Apesar disso, os grupos PET da UFES continuaram com diversas atividades que poderiam ser realizadas virtualmente, cumprindo a carga horária exigida. Nesse período, houve mais tempo para reflexão das atividades dos grupos e, assim, surgiram novas ideias.

Nesse contexto, como alguns ingressantes do curso de Administração apresentam uma defasagem em relação aos conteúdos de matemática da educação básica, surgiu a ideia de produção de vídeos contendo os conteúdos básicos necessários para o andamento da disciplina de Matemática 1. Assim, os integrantes do PET Matemática realizaram a gravação de vídeo-aulas sobre 9 temáticas diferentes, contento teoria e exercícios. Tais vídeos foram postados no canal do YouTube do grupo PET Matemática, disponível em [3]. Além disso, vale ressaltar que todos os vídeos foram legendados, para aumentar a acessibilidade do público em geral.

Em seguida começou o ensino remoto na Ufes e, com ele, novos desafios.

Novo desafio: ensino remoto. Com o início do ensino remoto, no semestre 2020/1 surgiu a ideia de adaptar a monitoria ofertada presencialmente para um formulário. Nele, os alunos da disciplina poderiam enviar suas dúvidas, que seriam respondidas pelos membros do PET Matemática via e-mail institucional.

Porém, durante o curso do semestre, notou-se que os alunos utilizaram pouquíssimas vezes esse recurso, optando por entrar em contato com os monitores por outros canais de comunicação. Por outro lado, verificou-se que de maneira geral houve aumento da procura dos alunos pelos atendimentos, muito em função do espectro de canais de comunicação via internet, que foram utilizados.

Sendo assim, para o semestre 2020/2 foram pensadas algumas mudanças que poderiam agregar ao projeto. Inicialmente, notou-se que o banco de dados, mesmo sendo atualizado durante todos os períodos anteriores, apresentava algumas lacunas de exercícios trabalhando a aplicação de determinados conteúdos da disciplina. Sendo assim, esta tarefa continuou sendo trabalhada dentro do projeto pelo PET Matemática. Além disso, foram oficializados dois novos canais de comunicação: um grupo no WhatsApp e a monitoria síncrona pelo Google Meet. O grupo do WhatsApp recebeu grande adesão e surgiu com o intuito de funcionar como um fórum de perguntas e respostas para os alunos, onde eles poderiam interagir com os monitores e com outros alunos também. O Google Meet surgiu para substituir o formulário de dúvidas e para ser uma adaptação do processo de monitorias que era realizado presencialmente. Foram disponibilizados 3 horários diferentes de monitoria para os alunos e, após a realização delas, as anotações foram enviadas para eles com o intuito de ajudar também quem não pode participar de forma síncrona.

As mudanças adotadas no período 2020/2 surtiram efeitos, como será exposto a seguir. Por fim, para o semestre 2021/1, em curso atualmente, foram mantidas as mesmas atividades, porém, um novo objetivo surgiu: atrair mais alunos.

Conclusões e alguns resultados

Ao final do semestre 2020/2, notou-se que as mudanças que se iniciaram nele fizeram com que alunos de outros cursos também participassem da monitoria, através do Ava, WhatsApp e Google Meet. Além disso, pela maior facilidade de comunicação, os integrantes do projeto perceberam um maior volume de dúvidas enviadas para os monitores.

Além disso, durante todo o período, um formulário de avaliação do projeto, anônimo, ficou disponível para os alunos da disciplina. Nele, os alunos poderiam sugerir alterações e definir uma nota na escola de 0 (zero) a 10 (dez), sendo 0 muito ruim e 10 ótimo, além de enviar feedbacks gerais. Ao final do semestre, foi feito observação dos resultados e verificou-se que o formulário recebeu 21 avaliações, com uma nota média de 9,25, além de diversos feedbacks positivos.

Os monitores, durante o curso do semestre 2020/2 também realizaram um controle informal de presença na monitoria. Com isso, as monitorias via Google Meet contaram com uma média de 5 a 10 alunos. Ao final do período, diversos alunos que fizeram uso dos recursos do projeto enviaram seus relatos de como foi importante a atuação do grupo e, mais importante, que conseguiram a aprovação.

Por fim, o projeto mostra-se importante e necessário, porém, ainda possui uma baixa adesão dos alunos. Nesse sentido, a partir do semestre 2021/1, um dos principais objetivos vem sendo atrair cada vez mais alunos da disciplina para os meios de comunicação e atividades realizadas.

Referências Bibliográficas

[1] Pesquisa de Satisfação - Monitoria Matemática 1. Disponível em: <https://docs.google.com/forms/d/14C5gzV5FXsMgN4Dpmq9C96iRkqN2Eqythd1R7zZa9GA/edit>. Acesso em: 20 de julho 2021.

[2] Monitoria Matemática 1 no Ava. Disponível em: <https://ava.ufes.br>. Acesso em: 20 de julho de 2021.

[3] Pet Matemática Ufes no Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/channel/UCuBZwN2pozXDJixi8oKracw>. Acesso em: 20 de julho de 2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Pré-Cálculo UFMG

Daniel Xavier Almeida. Bárbara de Paula Motta Mirson. Kelvin Guilherme Aureliano Souza. Gabriel de Oliveira Borges Braga. Hebert Alves Izequiel Junior. Lucas Gabriel de Souza Cruz. Victor Gabriel Xavier Janeiro. Vivian Gonçalves de Araujo[1]. Carmen Rosa Giraldo Vergara[2]
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais
danielxaviera@ufmg.br, carmita@mat.ufmg.br

Trabalho do PET

Palavras-chave: Ensino; Curso de pre-cálculo; Práticas pedagógicas.

Introdução

Os alunos, ao ingressarem no ensino superior, podem enfrentar diversas dificuldades frente à realidade do ambiente universitário. Essa experiência, por exigir um processo de adaptação em muitos aspectos sociais e acadêmicos, pode ser um potencial estressor para alguns estudantes e pode refletir no seu desempenho acadêmico, no relacionamento com os docentes e colegas e até aumentar os índices de evasão da universidade (OLIVEIRA e DIAS, 2014).

A fim de auxiliar na transição do ensino médio para a universidade, surge o curso de Pré-Cálculo, oferecido pelo PET Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O curso tem por objetivo nivelar os estudantes e reforçar os conceitos fundamentais exigidos pelos professores nas disciplinas de Cálculo e de Geometria Analítica e Álgebra Linear, visando baixar o número de reprovações dessas matérias. As aulas ministradas no curso, no contexto atual de crise sanitária

[1]Petianos.
[2]Tutora.

frente à pandemia de COVID-19, sofreram modificações para se adequar ao formato do Ensino Remoto Emergencial (ERE) adotado pela UFMG.

Neste sentido, este trabalho tem como objetivo relatar a experiência com a realização do curso de Pré-Cálculo na UFMG, lecionado por integrantes do PET Matemática UFMG, e que atualmente está sendo ofertado no modelo de ERE. Para isso, elencamos a metodologia do trabalho realizado, as discussões feitas sobre o assunto, as considerações finais do trabalho e as respectivas referências.

Metodologia

O Pré-Cálculo é um curso semestral ofertado pelo PET Matemática - UFMG no período entre semestres letivos da universidade. O modelo adotado é o modelo de aulas semi-remotas, em que os estudantes inscritos recebem o material confeccionado pelo próprio grupo PET e realizam previamente o estudo dos conteúdos, conforme o cronograma fornecido nas orientações, antes dos encontros presenciais com o monitor.

O curso é composto por 5 módulos com subitens separados por tema, sendo estes módulos: Álgebra, Equações, Inequações, Geometria e Funções. O material utilizado é desenvolvido pelos próprios integrantes do grupo, com a supervisão da professora-tutora e pode ser encontrado em [2]. São 22 textos de apoio, 21 vídeo-aulas, postadas em nosso canal no Youtube, 22 listas de exercícios resolvidos e 22 listas de exercícios propostos.

O Curso de Pré-Cálculo é, originalmente, um curso semipresencial, ofertado em fevereiro e julho, no período de recesso da universidade, e direcionado a calouros e/ou graduandos que cursarão a disciplina de Cálculo I. Atualmente, devido à pandemia causada pela COVID/19, fez-se necessário a adaptação e passou a ser ofertado de forma completamente remota pela plataforma do Microsoft Teams com 9 encontros síncronos ao longo de 3 semanas. O número de alunos atendidos cresceu consideravelmente quando comparado ao último curso ofertado presencialmente, constituindo em média 50 alunos inscritos por turma.

Cabe destacar que o Curso do Pré-Cálculo conta com a participação de alunos voluntários do Curso de Matemática da UFMG para ministrar as aulas. Ao final do curso, os estudantes que mantiveram uma frequência superior a 70% do total de aulas dadas e os monitores voluntários recebem certificação de 30 horas dedicadas ao curso que pode ser usada para a integralização do percurso curricular.

Inscrições e Nivelamento

Como os níveis dos alunos variam bastante, indo desde um grau muito básico a um mais avançado, optamos por separar os alunos em turmas de acordo com o desempenho adquirido no teste de nivelamento proposto no momento da inscrição que é feita pela internet em nosso site. Além disso, o monitor adquire consciência dos temas em que seus alunos possuem mais dificuldade, otimizando os encontros síncronos. O teste consiste em 16 perguntas que abrangem os principais conteúdos necessários para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica e Álgebra Linear. A partir do teste realizado no último Pré-Cálculo, foi elaborada a seguinte tabela para avaliar as defasagens dos alunos:

	Acertos	Erros	Em branco
Questão 5	517	88	62
Questão 6	198	297	172
Questão 16	23	131	513

Tabela 4: Questões em destaque do Teste de Nivelamento 2021/1.

Conforme a tabela, o tema em que os alunos apresentaram maior familiaridade é com equações do primeiro grau, que é o assunto que a questão 5 engloba. Já a questão 6 que trata sobre exponenciação e o conjunto dos números racionais e irracionais foi a mais errada entre os ingressantes. Por fim, a questão 16 que fala sobre equação exponencial e sistema de equações foi a mais deixada em branco. Apresentamos a seguir as questões citadas:

Questão 5: Qual o valor de x que satisfaz $(3x-1)(5-4x)^{-1} = -1$?

Questão 6: Simplifique a expressão que define z e determine se o número resultante é racional ou irracional

$$z = \frac{7 \cdot 25^2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2} \cdot 49 \cdot \sqrt{54}} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2}$$

Questão 16: Sabendo que $x^2 - 2x - 6 = 3y^2$, determine o conjunto solução S dos pares (x, y) em $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação $3^{x^2-y^2} = 15^{y^2+x} \cdot 9^3$.

De forma mais geral, temos o seguinte resultado deste teste:

Segundo os dados, 523 alunos dos 657 inscritos não acertaram 60% das questões propostas. Dessa forma o curso de Pré-Cálculo se mostra de suma importância para o futuro desempenho dos alunos nas matérias iniciais de seus cursos, uma vez que nem sempre é possível que os professores façam esta revisão dos conteúdos básicos.

Número de Acertos	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-16
Quantidade de Alunos	72	78	118	134	121	87	31	16

Tabela 5: Resultado Teste de Nivelamento 2021/1.

Relatos e Discussões

Como forma de ressaltar os efeitos do Pré-cálculo a partir da perspectiva dos alunos, pedimos a alguns deles que nos relatassem como foi a experiência. Dentre os alunos que se disponibilizaram, destacamos o depoimento do aluno José [3], do primeiro período de Engenharia Mecânica:

> *Antes começar as minhas matérias do semestre realizei um curso Pré-Cálculo do PET. Vi nesse curso a oportunidade de começar bem na matéria de cálculo e criar toda uma base para ir bem na matéria. O curso superou todas minhas expectativas, primeiro de tudo o curso me mostrou que criar uma base na matemática é fundamental! Percebi isso nas primeiras semanas de faculdade. [...] Ainda, tive uma experiência incrível com a professora Juliana e meus colegas da turma Kath Johnson! Sinto que todos evoluíram muito durante o curso. Portanto o curso Pré-Cálculo foi uma experiência essencial para o meu bom começo nessa jornada de faculdade.* (JOSÉ, 2021)

Através de suas palavras, José transparece um dos principais objetivos do Pré-Cálculo: auxiliar na jornada universitária dos alunos ingressantes. De semelhante forma, ressaltamos novamente a importância da formação para o ensino como um dos três pilares da universidade por meio do depoimento de uma petiana:

[3] Nome fictício

> *Estou no quinto período de Matemática Computacional. Meu primeiro contato com a faculdade foi por meio do Pré Cálculo, desde então me encantei pelo PET. Passaram-se alguns semestres e eu tive finalmente a oportunidade de me tornar uma participante do projeto e monitora do Pré Cálculo! A experiência foi incrível. Mesmo em um regime remoto, consegui desenvolver relacionamento com os alunos e senti, mais uma vez, como esse contato com a Matemática antes das aulas se iniciarem tornam o aluno mais confiante e esperançoso em relação ao curso que ele está ingressando. O Pré Cálculo permite que os integrantes do PET se envolvam com formulação de materiais, preparação de aulas e experimentem a educação de maneira geral. Sem dúvidas, amadureci meus próprios conhecimentos por dividi-los com os alunos. Sou muito grata ao PET por todas essas oportunidades.* Juliana Espíndola Botelho, 2021)

Assim, vê-se o curso de Pré-Cálculo como a síntese da consciência cidadã do PET onde, através do trabalho em equipe, busca-se ampliar as condições do ensino público, gratuito e universal para todas e todos.

Referências Bibliográficas

[1] OLIVEIRA, C. T. DE; DIAS, A. C. G.; *Dificuldades na Trajetória Universitária e Rede de Apoio de Calouros e Formandos.*, v. 45, n. 2, p. 187-197, 18 ago. **2014**.

[2] PET Matemática UFMG. *Pré-Cálculo.* Disponível em: <`http://www.mat.ufmg.br/pet/pre-calculo/`>. Acesso em 23 jul. 2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Tutoria em Matemática Básica

Lucas Camaz Ferreira[1], Larissa de Assis Coutinho[1], Eulina Coutinho Silva do Nascimento[2 3], Gisela Maria da Fonseca Pinto[2 4], Douglas Monsores de Melo Santos[4], Fernanda Barbosa Damasceno[4], Mariana da Silva Soriano[4], Marianni Chagas Lima[4], Gabriel Bernardo Pimentel[4], Victoria Dias Martins[4].
Departamento de Matemática - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
camazlucas@ufrrj.com, larissacoutinho@ufrrj.br, eulina@ufrrj.br, giselapinto@ufrrj.br
Trabalho do PET
Palavras chave: Tutoria; Ensino de Matemática; Cálculo.

Introdução

Os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo I configuram um problema mundial. Segundo Silva Filho et al (2007)[1], a taxa de evasão no primeiro ano dos cursos de graduação chega a ser de duas a três vezes maior do que nos anos posteriores. São diversos motivos que levam os alunos a reprovarem na disciplina de Cálculo I, dentre elas, destacamos os seguintes motivos:

• O ritmo de lecionação de conteúdos na graduação é diferente do ritmo da Educação Básica;

• O ritmo de estudo necessário para alcançar êxito numa disciplina é muito maior do que na Educação Básica;

• A deficiência nos conteúdos da Educação Básica compromete o aprendizado na disciplina de Cálculo I.

[1]Petiano.
[2]Orientador.
[3]Tutor.
[4]Colaborador.

Pensando em solucionar esse problema, as universidades adotaram algumas medidas como, por exemplo, substituir a disciplina de Cálculo I do 1º período pela disciplina de Pré-Cálculo, no entanto tal medida não foi tão eficaz, uma vez que a partir daí os estudantes passaram a reprovar a nova disciplina. Segundo Mathias (2014)[2], a reprovação na disciplina de Pré-Cálculo na UFF chega a alcançar 90%.

O projeto de Tutoria de Matemática Básica na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro foi criado em 2015, após o desenvolvimento de um projeto de Monografia, a fim de proporcionar aos calouros conhecimento acerca dos conteúdos da Educação Básica paralelamente à disciplina de Cálculo I. Nos primeiros semestres de vigência desse projeto, o número de aprovações aumentou consideravelmente, o que justifica a importância do mesmo.

Na outra versão o projeto de tutoria contava com a participação de dois alunos bolsistas atuando como tutores. A turma de calouros de Matemática era dividida em duas e cada tutor ficava responsável por uma metade. A tutoria deixou de ser oferecida aos novos alunos no primeiro semestre de 2019 devido um corte de verba destinada ao projeto.

Metodologia

Visto que esse projeto era de suma importância, e que seu não oferecimento poderia ser prejudicial aos calouros, o grupo PET Matemática e Meio Ambiente assumiu o projeto de Tutoria de Matemática Básica como mais um de seus projetos. De início, o planejamento era de que dois alunos participantes do projeto PET Matemática iriam atuar como tutores ministrando as aulas no contraturno das disciplinas dos alunos ingressantes do curso de Matemática, revezando seus horários abarcando cerca de 4 horas semanais para cada tutor. O início dessas atividades estava previsto para o primeiro semestre de 2020, porém com a pandemia a atividade ficou suspensa enquanto aguardávamos a volta das atividades presenciais. Com o passar do tempo e aumento de casos na pandemia esse retorno foi se mostrando cada vez mais distante e com isso resolvemos executar um plano de aulas remotas para a tutoria.

Foi debatido e decidido que as aulas remotas ocorreriam pela plataforma do Google Sala de Aula da seguinte forma: seria passado um conteúdo teórico escrito, uma videoaula e uma lista de exercícios para que fosse entregue durante a semana. No dia da entrega dessa lista de exercícios disponibilizaríamos o gabarito das questões e abriríamos uma reunião de uma hora na plataforma do GoogleMeet para tentar sanar as dúvidas remanescentes. Como ninguém era familiarizado com o formato de aulas remotas, foi observado que esta tarefa demandaria mais de dois tutores e pensando nisso foi acrescentado uma quantidade maior de tutores no projeto. Esse desenvolvimento da atividade foi debatido novamente e reavaliado acrescentando mais dois tutores para divisão das atividades a serem desenvolvidas. Decidimos que o material a ser postado deveria estar desenvolvido duas semanas antes das atividades a serem disponibilizadas para os alunos, ou seja, teríamos que ter o material desenvolvido com duas semanas de antecedência. Com essa necessidade de agilizar o material foram chamados mais dois tutores para o desenvolvimento das atividades, totalizando assim 6 tutores para o projeto.

O desenvolvimento das atividades ficou dividido entre os seis da seguinte forma:

- Desenvolvimento das aulas teóricas
- Desenvolvimento das listas de exercícios
- Apresentação das aulas ao vivo
- Desenvolvimento do roteiro para videoaula
- Narração do roteiro para a videoaula
- Desenvolvimento da arte a ser usada na videoaula
- Desenvolvimento dos slides a serem apresentados na videoaula
- Edição das videoaulas

Toda a produção da aula se iniciava pelo desenvolvimento das aulas teóricas, esse material era passado para os responsáveis pelo roteiro, depois de pronto era enviado para o encarregado de fazer a gravação de voz e para os desenvolvedores dos slides e então esse material era enviado para o editor do vídeo, assim que o vídeo ficava editado era enviado para o intérprete fazer a tradução em libras, o vídeo da tradução retornava para o editor que acrescentava a janelinha de libras nas videoaulas e então era postado. Para os encontros síncronos, os tutores se dividiram de forma que cada semana três deles estivessem presentes no encontro.

O projeto teve sua apresentação aos alunos e como primeira atividade foi aplicado um teste de nivelamento, a fim de analisar o efeito da tutoria quando esta chegasse ao fim. Essa primeira turma teve 17 aulas, contando com uma oficina no geogebra, um material de revisão, duas listas extras, algumas questões de desafio e um teste final. Os conteúdos abordados nesses materiais foram: números e operações, expressões algébricas, produtos notáveis e fatoração, MMC e MDC, métodos de completar quadrados, função composta e inversa, funções e inequações do primeiro e segundo grau, exponencial e logarítmica, trigonometria e funções trigonométricas, inequações quociente e produto, e por fim translações de gráficos.

Foram utilizados na elaboração do material teórico e exercícios:
DANTE (2013)[3], IEZZI, MURAKAMI (2013)[4] e MALTA (2002)[5].

Já a segunda turma, que está em andamento, o cronograma precisou ser adaptado para acontecer durante o segundo período do ano de 2021. Foram oferecidas 60 vagas, contando com a participação dos calouros de Matemática de 2020.2 e 2021.1, além de convidar os calouros de Física e Sistema de Informação, e as vagas remanescentes foram oferecidas para alunos de qualquer curso. O novo cronograma foi pensado de acordo com o planejamento das aulas de Cálculo I do professor dos calouros de Matemática, a fim de oferecer a tempo o conteúdo necessário na disciplina, apenas alteramos as datas, o conteúdo segue o mesmo.

Semanas	Conteúdo	Duração dos vídeos
Opcional	Semana de integração/Liberação do teste/Liberar conteúdo de Números e operações e Expressões algébricas	10:43/12:21
28/06 - 02/07	Função/Função composta e inversa	13:01/13:01/15:17
05/07 - 09/07	Função, equação e inequação modular	11:49
12/07 - 16/07	Produtos Notáveis e Fatoração/MMC e MDC, Método de completar quadrados e frações algébricas	18:46/11:19
19/07 - 23/07	Trigonometria no triângulo retângulo e no circulo/Razões trigonométricas e função seno, cosseno e tangente/Funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente	18:10/19:53/8:57
26/07 - 30/07	Função, equação e inequação exponencial/ Função, equação e inequação logaritmica	17:46/21:48
02/08 - 06/08	Inequações quociente e produto	08:48
19/08 - 13/08	Translações	06:36
16/08 - 20/08	Teste de Nivelamento	

Figura 1: Cronograma de aulas

Como o conteúdo já foi todo produzido para 2020.1, nessa turma atual o material foi reutilizado e a reduziu-se a necessidade de tantos tutores, logo temos 3 tutores que revezam na apresentação das lives de dúvidas e postagem dos exercícios e material teórico.

Resultados e Discussões

Na primeira turma da tutoria oferecida pelo PET, os alunos ainda não estavam cursando nenhuma disciplina, e no início, contamos com a entrega de 21 testes de nivelamento, esse número diminuiu um pouco com o passar das aulas, e na entrega do teste final, contamos com 11 entregas. Durante o passar das aulas também notamos uma diminuição na participação de alguns alunos. O grupo disponibilizava semanalmente um questionário para os alunos avaliarem a tutoria, as avaliações no geral são boas, elogios em relação as aulas síncronas e a explanação do conteúdo.

Essa primeira turma cursou a disciplina de Cálculo I no período remoto de 2020.1, entre os meses de março e maio de 2021. Na avaliação final obtivemos um retorno muito positivo dos alunos que fizeram a Tutoria, eles responderam ao questionário se dizendo satisfeitos e principalmente relatando o quanto sua participação no projeto havia sido importante para eles. Dos alunos que chegaram até o fim, o percentual de aprovação na disciplina foi de 91%, desses, 82% ficaram com média final entre 9,0 e 10,0, apenas um aluno que fez a tutoria reprovou em Cálculo I.

Após a finalização das aulas, o grupo reuniu o material teórico produzindo uma apostila bem diagramada com todo o material teórico, listas de exercícios e gabaritos. Essa apostila recebeu o nome Tutoria de Matemática Básica. O objetivo do grupo é que essa apostila venha a ser publicada e utilizada em outras edições do projeto tutoria e por todos que se interessarem.

Já na segunda turma oferecida remotamente, apesar do oferecimento de um número maior de vagas, a adesão foi menor, uma vez que os alunos estão cursando a tutoria juntamente com as disciplinas. Tivemos uma adesão maior dos alunos ingressantes no período de 2021.1. Alguns alunos justificaram-se por não participar por falta de tempo, alguns trabalham e alguns não conseguiram conciliar a tutoria com as disciplinas.

Conclusão

A ideia é que para os próximos períodos que ainda estejam nesse cenário de aula online, e quem sabe mesmo depois do retorno às aulas presenciais reutilizarmos o material produzido tanto teórico como os vídeos, que se encontram disponíveis no canal do youtube do PET Matemática e Meio Ambiente para os novos alunos. Este material tem um diferencial muito grande se comparado com outros de mesmo tipo por ser um material inclusivo, uma vez que todos os nossos vídeos têm tradução em LIBRAS e foram pensados e produzidos para tal.

Analisando os resultados dos alunos que cursaram a tutoria e a disciplina Cálculo I em 2020.1, podemos concluir que os resultados são satisfatórios. Esperamos que o projeto cresça e continue auxiliando os alunos nessa matéria e que o índice de aprovação siga aumentando.

Referências Bibliográficas

[1] SILVA FILHO, R. L. L., MOTEJUNAS, P. R., HIPÓLITO, O., & LOBO,

M. B. D. C. M. *A evasão no ensino superior brasileiro.* Cadernos de pesquisa, 37, 641-659. **2007**

[2] MATHIAS-MOTTA, C.; *Ouroboros: o fracasso das disciplinas de Matemática Básica e Pré-Cálculo nas universidades brasileiras.* Jornal Dá licença, Universidade Federal Fluminense. **2014**

[3] DANTE, L. R.; *Matemática: Contexto e Aplicações.* Volume 1, 2ª ed. São Paulo. Atica, **2013**.

[4] IEZZI, G. M. C.; *Conjuntos e Funções Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*, 9ª edição. São Paulo. Atual Editora, **2013**.

[5] MALTA, I; PESCO, S; LOPES, H. *Cálculo a uma Variável.* Volume I. Coleção MatMídia. Edição Loyola. Rio de Janeiro. Editora PUC-Rio, **2002**.

Trabalhos de Iniciação Científica

Nesta seção apresentaremos trabalhos de Iniciação Científica submetidos no evento XII ENAPETMAT no ano de 2021 realizados por participantes do evento.

Serão apresentados os seguintes trabalhos:

1. "A Desigualdade Isoperimétrica", trabalho feito pelo aluno Henrique Câmara de Oliveira, orientado pelo Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza;
2. "A Importância da Etnomatemática na Formação de Professores", trabalho feito pela aluna Nathalia de Lima da Silva, orientada pela Profª. Drª. Eulina Coutinho Silva do Nascimento;
3. "Aplicações das desigualdades entre médias para problemas de otimização do Cálculo Diferencial e Integral", trabalho feito pelo aluno Caio Tomás, orientado pela Profª. Drª. Luciana Ávila Rodrigues;
4. "Conceitos e Uso de Projeções Multidimensionais", trabalho feito pela aluna Aline Martins Nascimento Belchior, orientada pelo(a) Prof. Dr. Alcebíades Dal Col Júnior;
5. "Decomposição de Schur", trabalho feito pela aluna Roberta Agnes Mendes Melo, orientada pela Profª. Drª. Patrícia Borges dos Santos;
6. "Espaços Métricos Completos (e exemplos)", trabalho feito pela aluna Thais Ester Gonçalves, orientada pelo Prof. Dr. Vinícius Vivaldino Pires de Almeida;
7. "Família quadrática e Teorema de Jakobson", trabalho feito pelo aluno Victor Gabriel Xavier Janeiro, orientado pelo Prof. Dr. Pablo Daniel Carrasco Correa;
8. "Grupos fundamentais de superfícies e teoremas de separação", trabalho feito pelo aluno Gustavo Sylvio de Paula Menani, orientado pelo Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos;
9. "Isometrias do Plano Euclidiano de dimensão 2", trabalho feito pelo aluno Anderson Moreira da Silva, orientado pela Profª. Drª. Patrícia Kruse Klaser;
10. "Isotopismos de quasegrupos", trabalho feito pelo aluno Gabriel Simão Mucci, orientado pela Profª. Drª. Dylene Agda Souza de Barros;
11. "Lei da Tricotomia em $\mathbb{N}$", trabalho feito pela aluna Amanda Vitória de Jesus Mendes, orientada pelo Prof. Dr. João Carlos Moreira;

12. “Lei de Snell e o Problema da Braquistócrona”, trabalho feito por Anita Boaventura, Davi Batisaco, Jorge Lucas e Lívia Nascimento, orientados pela Profª. Drª. Luciana Ávila Rodrigues;

13. “O assombroso caso do fantasminha no transporte estudantil”, trabalho feito pela aluna Larissa de Assis Coutinho, orientada pela Profª. Drª. Eulina Coutinho Silva do Nascimento;

14. “Onde Estão os Negros? Uma discussão sobre representações de pessoas negras em livros didáticos de Matemática”, trabalho feito pelo aluno Lucas Gabriel de Souza Cruz, orientado pelo(a) Prof. Dr. Filipe Santos Fernandes;

15. “Teorema de Vieta não comutativo”, trabalho feito pela aluna Julia Bernardes Coelho, orientada pela Profª. Drª. Dylene Agda Souza de Barros;

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

A Desigualdade Isoperimétrica

Henrique Câmara de Oliveira[1]. Gil Fidelix de Souza[2]
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Ouro Preto
henrique.camara@aluno.ufop.edu.br, gilsouza@ufop.edu.br

Trabalho de iniciação científica

Palavras-chave: Cálculo das Variações, Problema Isoperimétrico, Geometria Diferencial.

Introdução

O objetivo deste trabalho foi estudar o avanço das técnicas em Matemática através do desenvolvimento de um importante resultado que é citado, talvez pela primeira vez, na obra *Eneida* de Virgílio, em que o problema citado aparece proposto à princesa Dido que poderia obter um pedaço de terra, cerceada pelo mar em um dos lados, que pudesse ser cercada por uma corda de comprimento l. A pergunta é: Qual seria a curva de comprimento l que englobaria a maior área? A solução para o problema proposto é um semicírculo em que a parte correspondente ao mar estaria na base dessa figura. O problema em si parece ser de fácil resolução, mas não é bem assim, pois a sua primeira demonstração amplamente aceita surgiu em 1870 como uma consequência da pesquisa de Weierstrass com o surgimento do "Cálculo das Variações".

Resultados e Discussões

O Problema Isoperimétrico clássico estabelece que dentre todas as curvas fechadas com um perímetro fixo l, o círculo é o que engloba a maior área, o que é formalmente estabelecido pelo resultado a seguir.

[1]Petiano.
[2]Orientador.

Teorema 1. ***(Problema Isoperimétrico)*** *Seja uma curva simples fechada plana C de comprimento l e seja A a área da região limitada por C. Então*

$$l^2 - 4\pi A \geq 0,$$

e a igualdade acontece se, e somente se, C for um círculo.

Até o momento da produção deste artigo, apresentamos a demonstração do problema isoperimétrico por meio de quatro abordagens, baseadas nas referências bibliográficas citadas.

Abordagem 1: Desigualdade Isoperimétrica para Polígonos

Para esta primeira abordagem do Teorema 1, partimos da sua utilização de uma forma particular em polígonos, baseados em [2], [3] e [4]. Os primeiros deles foram os triângulos. Utilizando noções de derivada e a fórmula de Heron para o cálculo da área dado um perímetro e seus lados, concluímos que a área será maior dentre os triângulos de mesmo perímetro, naquele que for equilátero. Em seguida utilizamos o problema isoperimétrico em retângulos, e encontramos como solução aqueles que são quadrados.

A fim de apresentarmos uma generalização desse processo para os polígonos, notamos que não precisamos considerar aqueles que não são convexos, pois estes terão uma área menor que a dos convexos. Um exemplo da comparação da área entre dois polígonos de mesmo perímetro, pode ser visto na figura 1.

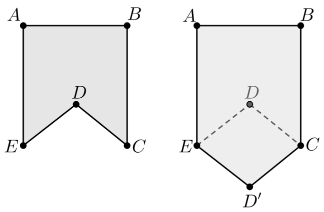


Figura 1: O polígono convexo $ABCD'E$ possui área maior que a do não convexo $ABCDE$, apesar de terem o mesmo perímetro.

Ao restringirmos o problema isoperimétrico para os n-ágonos, temos o resultado abaixo.

Teorema 2. *Dentre os n-ágonos de perímetro l dado, o regular possui a maior área.*

A fim de buscar um resultado mais geral, deixamos de restringir o número de lados a n e comparamos polígonos quaisquer que tenham um mesmo perímetro. Dessa forma, temos o seguinte resultado

Teorema 3. *Dados dois polígonos regulares de perímetro l, aquele com o maior número de lados é o de maior área.*

Mas ainda assim, não somos capazes de determinar um limite, isto é, uma figura geométrica que entre as outras de mesmo perímetro tenha a maior das áreas. No entanto, ao compararmos as áreas dos polígonos com a do círculo de mesmo perímetro, vemos que este terá a maior área, resultado garantido no teorema a seguir.

Teorema 4. *A área de qualquer polígono é menor que a de um círculo de mesmo perímetro.*

Demonstração. Por um cálculo direto, a área A de um n-ágono regular de perímetro l é dada por

$$A = \frac{l^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Denotemos $f(x) = \frac{x}{\tan(x)}$ com $0 < x < \frac{\pi}{2}$. A análise da derivada de f nos fornece

$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x) - x}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(2x) - 2x}{2\sin^2(x)} < 0$$

para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Portanto, f é decrescente, restando analisar o comportamento de f quando $x \to 0^+$ e quando $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \cos^2(x) = \cos^2(0) = 1$$

e, além disso, segue da desigualdade $0 \leq \frac{x}{\tan(x)} \leq \frac{\pi}{2\tan(x)}$ e pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\tan(x)} = 0.$$

Logo, $0 < f(x) < 1$ e

$$A = \frac{l^2}{4\pi} \cdot \underbrace{f\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{<1} \Rightarrow A < \frac{l^2}{4\pi}.$$

Essa desigualdade é dita **desigualdade isoperimétrica para polígonos**. O lado direito da desigualdade acima corresponde à área de um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$, ou seja, a área A de qualquer n-ágono satisfaz $A \leq \frac{l^2}{4\pi}$, concluindo a demonstração. $\square$

Abordagem 2: Curvas Parametrizadas Diferenciáveis

Para a segunda abordagem do Teorema 1, fazemos uso de alguns conceitos e definições envolvendo curvas parametrizadas, e nos baseamos em [1]. Uma **curva parametrizada diferenciável** é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de um intervalo I da reta real $\mathbb{R}$. Além disso, dizemos que uma curva α está parametrizada pelo comprimento de arco s se $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo valor do parâmetro s. Ou seja, se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, então α é parametrizada pelo comprimento de arco (p.p.c.a.) se $\alpha'(s)$ é unitário para todo $s \in I$. Esta abordagem é feita por meio de

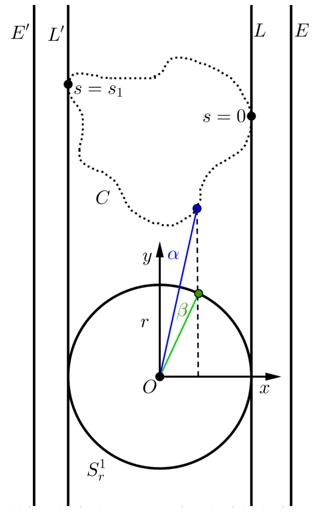


Figura 2: Construção do círculo S_r^1 a partir da curva C.

uma construção que consiste, em traçarmos, a partir de a curva fechada p.p.c.a. C, duas de suas retas tangentes, paralelas entre si, de forma que toda a curva esteja contida entre estas duas retas. Depois disso, construímos um círculo S_r^1 tal que ele também tangencie estas retas e $S_r^1 \cap C = \varnothing$. A Figura 2 mostra esta construção. Pela construção, se a curva C é parametrizada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, podemos parametrizar o círculo como $\beta(s) = (x(s), \overline{y}(s))$. Seja A a área delimitada por C, $\overline{A} = \pi r^2$ a área de S_r^1 e l o comprimento de C, por meio de integrais a soma das áreas pode ser expressa por

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - \overline{y}x')\, ds && \leq \int_0^l \sqrt{(xy' - \overline{y}x')^2}\, ds \\ &= \int_0^l \sqrt{\left(\langle (x,\overline{y}), (y', -x')\rangle\right)^2}\, ds && \leq \int_0^l \|(x,\overline{y})\| \cdot \|(y', -x')\|\, ds. \end{aligned}$$

Como C é p.p.c.a., temos $\|(y', -x')\| = 1$ e $\|(x, \overline{y})\| = r$, portanto, a última expressão se reduz a

$$A + \pi r^2 \leq lr$$

e o uso da desigualdade das médias aritmética e geométrica, leva a

$$\sqrt{A \cdot \pi r^2} \leq \tfrac{A+\pi r^2}{2} \leq \tfrac{lr}{2} \quad ou \quad l^2 - 4\pi A \geq 0 \ ,$$

como queríamos.

Abordagem 3: Cálculo Variacional

Conforme [8], seja $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva fechada simples p.p.c.a. de classe C^2, de comprimento l e cujo traço delimita uma área R, e $N : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ o vetor normal à curva no ponto $\alpha(s)$. Do fato de α ser regular, existe um $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que se $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ é a função diferenciável satisfazendo $f(0) = f(l) = 0$ e $|f(s)| < \epsilon$, $\forall s \in [0, l]$, então a curva

$$\alpha_f(s) := \alpha(s) + f(s)N(s)$$

também é regular e sem autointerseção. Além disso, $\alpha_f(l) = \alpha_f(0)$, verificando que α_f é uma curva fechada delimitando uma região R_f. Seja $\mathcal{F}$ o espaço vetorial da função f com $f(0) = f(l)$. Denotaremos $\mathcal{F}_\epsilon \subset \mathcal{F}$ o conjunto das funções f tais que $|f(s)| < \epsilon$ e $f(0) = f(l) = 0$. Claramente, $0 \in \mathcal{F}_\epsilon$. Definindo $\mathcal{A}, \mathcal{F} : \mathcal{F}_\epsilon \to \mathbb{R}$ tais que $\mathcal{A}(f) = A(R_f)$ e $\mathcal{L}(f) = L(R_f)$, isto é, a área de R_f e o comprimento de α_f. Aqui temos $\alpha_0 = \alpha$, $\mathcal{A}(0) = R$ e $\mathcal{L}(0) = l$. Supondo que α é uma solução do Problema Isoperimétrico, segue da versão variacional do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que

$$\nabla \mathcal{A}(0) = \lambda \nabla \mathcal{L}(0)$$

em que a fórmula acima significa

$$\lim_{n \to 0} \frac{\mathcal{A}(0 + hv) - \mathcal{A}(0)}{h} = \lambda \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h}$$

para qualquer $v \in \mathcal{F}$. O desenvolvimento dos limites acima e alguns cancelamentos levam a

$$-\int_0^l v \, ds = \lambda \int_0^l kv \, ds,$$

sendo k a curvatura de α, ou seja,

$$\int_0^l (1 + \lambda k) v \, ds = 0,$$

escolhendo $v = 1 + \lambda k \in \mathcal{F}$, temos

$$\int_0^l (1 + \lambda k)^2 \, ds = 0 \Rightarrow 1 + \lambda k = 0,$$

e, consequentemente, k é constante. Logo, α é um círculo.

Abordagem 4: Séries de Fourier

Na mais recente abordagem do problema isoperimétrico já concluída, utilizamos as séries de Fourier, nos baseando em [6] e [8].

Teorema 5. ***(Teorema de Fourier)*** *Nos pontos de $(-l, l)$ nos quais f é contínua, a série de Fourier de f converge para f. Isto é, nesse caso, podemos representar f pela sua série de Fourier:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \ \forall t \in (-l, l), \textit{tal que } f \textit{ é contínua,}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt, \ \forall n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

e

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt, \ \forall n \in \{1, 2, 3, ...\}.$$

Além disso, para f', utilizamos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Se $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua C^2 por partes tal que $f(-l) = f(l)$, então os coeficientes da série de Fourier de f', que converge, podem ser obtidos derivando, termo a termo, a série de Fourier de f.*

Aliamos ao Teorema 5 a Identidade de Parseval e um de seus resultados, enunciados a seguir.

Teorema 6. ***(Identidade de Parseval)*** *Sendo $f : [-l, l] \to R$ contínua e C^1 por partes, tal que $f(-l) = f(l)$, é válida a igualdade a seguir.*

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} (f(t))^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Corolário 2. *Sejam f e g funções satisfazendo as hipóteses do teorema 6 e sejam a_n e b_n, os coeficientes da série de Fourier de f, e c_n e d_n os de g, então*

$$\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)g(t)\, dt.$$

Se $\overline{\alpha} : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva p.p.c.a., fechada e simples, através da mudança de coordenadas, vemos que $\alpha(t) = \overline{\alpha}\left(\frac{l}{2} + lt\right)$. Ao reparametrizarmos $\overline{\alpha}$, para

$\alpha : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2$, temos que $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = ||\alpha'(t)||^2 = \left|\left| \frac{d}{dt}\, \overline{\alpha}\left(\frac{l}{2} + lt\right)\right|\right|^2 = l^2$. Pelo Teorema 5 podemos considerar

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n\pi t)$$

e

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(2n\pi t).$$

Trabalhando com as séries de Fourier de $x'(t)$ e $y'(t)$, concluímos que

$$l^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ||\alpha'(t)||^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$$

e

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)y'(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_n d_n - b_n c_n)$$

e

$$l^2 - 4A\pi = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(na_n - d_n)^2 + d_n^2(n^2-1) + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2-1)\right] \geq 0,$$

o que leva à validade da igualdade somente se $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ quando $n > 1$, e que $b_1 = -c_1 = -c$ e $a_1 = d_1 = d$. Desta forma,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d\cos(2\pi t) - c\sin(2\pi t)$$

e

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + c\cos(2\pi t) - d\sin(2\pi t).$$

Chegamos então, à equação do círculo de centro em $\left(\frac{a_0}{2},\ \frac{c_0}{2}\right)$ e de raio $\sqrt{c^2 + d^2}$ e somente esta curva nos dá $l^2 - 4A\pi = 0$, resolvendo o problema isoperimétrico.

Conclusões

O objetivo deste trabalho foi apresentar a demonstração do Problema Isoperimétrico, enunciado no Teorema 1, a partir de quatro óticas distintas. Além disso, ele contém uma parte dos estudos da Iniciação Científica, que vêm sendo desenvolvida, buscando abordar este problema clássico utilizando outros campos da matemática como ferramenta para verificarmos sua solução.

Referências Bibliográficas

[1] Do CARMO, M. P.; *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* SBM, Rio de Janeiro. **2005**.

[2] FIGUEIREDO, D. G.; *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana.*. Instituto de Matemática, UNICAMP, Campinas. Matemática Universitária, números 9/10, **1989**.

[3] LAY, S. R.; *Convex sets and their applications*, Department of Mathematics, Aurora College. **1944**.

[4] YAGLOM, I. M.; BOLTYANSKII, V. G.; *Convex Figures.* Nova Iorque, **1961**.

[5] TENENBLAT, Keti.; *Introdução à Geometria Diferencial*, 2ª ed., São Paulo, Edgard Blüsher, **2008**.

[6] SANTOS, R. J.; *Tópicos de Equações Diferenciais*, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, **2018**.

[7] MERCURI, Francesco; PEDROSA, R. H. L.; *Uma Introdução às Desigualdades Isoperimétricas*, In: 19º Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. **1993**.

[8] KLASER, P. K.; TELICHEVESKY, Miriam; *O Problema Isoperimétrico*, In: IV Colóquio de Matemática da Região Sul, Rio Grande, **2016**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

A Importância da Etnomatemática na Formação de Professores

Nathalia de Lima da Silva[1] Yasmim Simões Pimenta[1] Eulina Coutinho Silva do Nascimento[2] [3] Gisela Maria Fonseca Pinto[1] [4]
Departamento de Matemática - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
nathalia.silvax@gmail.com, yasmimspimenta@hotmail.com, eulina@ufrrj.br, gmfpinto@gmail.com

Trabalho de iniciação científica

Palavras-chave: Ensino de matemática, Etnomatemática, Formação de professores.

Introdução

Etnomatemática, mais do que uma metodologia, é uma perspectiva de ensino de matemática que considera o indivíduo aprendiz, estudante, por uma perspectiva cultural, ao entender que o homem é um ser social e que, como tal, vive imerso em uma ambiência que o caracteriza de maneira única, com convergências e divergências em relação aos seus pares. No entanto, nas salas de aula, não é raro encontrarmos situações em que essas individualidades na multiplicidade são desvalorizadas ou quiçá desconsideradas, acarretando em olhar as turmas de estudantes como um corpo só, como um indivíduo e não como um coletivo.

Ao refletirmos acerca da etnomatemática, podemos afirmar que ela busca valorizar o saber/fazer de diferentes culturas, e em primeiro lugar considerar o conhecimento dos alunos. Os professores que forem expostos a esse ponto de vista durante o processo de formação podem buscar métodos de ensino diferentes do tradicional, mecânico e de memória, valorizando assim as práticas sociais e culturais dos

[1] Petiano.
[2] Orientadora.
[3] Tutora
[4] Colaboradora.

alunos e do ambiente em que estão inseridos como plano didático-metodológico-pedagógico. Assim, a pesquisa norteou-se, partindo do problema: qual a relevância do conhecimento sobre o programa Etnomatemática para a formação de professores que ensinam matemática na visão dos professores da Educação Básica? De que modo esse conhecimento se reflete na prática profissional?

A matemática é um assunto de difícil compreensão para muitas pessoas e sua complexidade pode tornar a aula de matemática um desafio para alunos e professores. O que torna esse desafio ainda maior por vezes são os métodos de ensino da disciplina, lembrando que muitos professores ainda se baseiam no ensino mecânico, recriando as práticas formativas que provavelmente receberam durante a educação básica e em seus percursos formativos. Muitos professores de matemática continuam a lecionar com base na transmissão de conhecimentos, memorização e repetição de exercícios, ignorando assim os conhecimentos prévios dos alunos.

Outrossim, o objetivo do Programa Etnomatemática é estimular discussões mais aprofundadas sobre a origem das ideias matemáticas de vários ângulos, sejam esses conceitos cognitivos, sociais, pedagógicos ou históricos. Um dos fundamentos da etnomatemática é a crença de que diferentes relações ou práticas matemáticas podem ser transmitidas informalmente para resolver necessidades imediatas. Portanto, a etnomatemática é um campo de pesquisa que reflete as raízes culturais do conhecimento matemático. (D'AMBROSIO, 2009; DOMITE, 2012).

Desse modo, dando importância às considerações mencionadas pelos autores, essa pesquisa foi desenvolvida tendo como objetivos investigar se há uma perspectiva etnomatemática na formação de professores e relatar como o conhecimento etnomatemático impacta na prática do professor. Para tanto, foi realizado um estudo descritivo, que utilizou a inspeção bibliográfica como meio de imersão na teoria. Além de entrevistas com professores de matemática que trabalham na educação básica, também usamos um formulário online voltado para professores e graduandos em licenciatura em matemática e pedagogia afim de conhecer mais sobre possíveis interlocuções nas formações e práticas desses professores com a etnomatemática.

Em suma, de acordo com D'Ambrosio (1984, p. 32, apud SKOVSMOSE, 2001, p. 49) para entender suas motivações e objetivos finais, devemos aprender sua linguagem, sua lógica, sua história e evolução, sua ciência e tecnologia. Mas, ao mesmo tempo, a matemática nas escolas deve promover o conhecimento, a compreensão, a integração e a compatibilidade com as práticas curriculares populares e as práticas não curriculares populares ou, em outras palavras, a inclusão e o reconhecimento da etnomatemática no currículo.

Metodologia

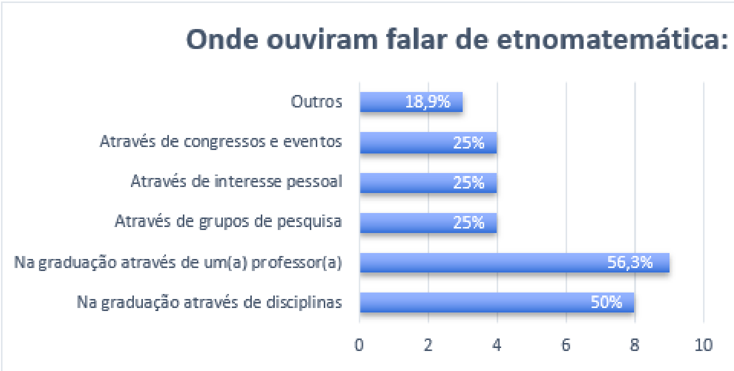
Para o desenvolvimento desta pesquisa foi utilizado o método de pesquisa quanti-quali, com o objetivo de debater sobre a importância da Etnomatemática na formação de professores. De acordo com as definições encontradas em Mattos (2013), a natureza da pesquisa é básica, pois não teve uma aplicação prática ao promover conhecimento. Quanto ao objetivo, é uma pesquisa exploratória, pois para coletar as informações usamos os métodos de análise documental, entrevistas com professores que têm experiência prática na educação básica e através do formulário on-line realizado trouxemos exemplos que estimulam a compreensão. Os procedimentos que serão usados são de uma pesquisa bibliográfica e de levantamento.

Inicialmente, foram analisadas as respostas de um formulário on-line, desenvolvido para esta pesquisa, intitulado "A Importância da Etnomatemática para a Formação de Professores". Este questionário teve como público-alvo professores, discentes de pedagogia e licenciatura em matemática. 21 pessoas se disponibilizaram a responder as perguntas, dentre os quais 57,1% ainda não concluíram a graduação, sendo eles licenciandos com e sem experiência de atuação. Os outros 42,9% respondentes são professores com atuação na educação básica, ensino superior ou que não atuam na área. A fim de investigar o conhecimento do público do questionário sobre o assunto abordado foi questionado se eles sabiam o que era a etnomatemática, 43% já ouviram falar, mas não conhecem bem, enquanto 38% conhecem bem e apenas 19% não tem conhecimento sobre a temática.

Pensando em investigar mais sobre a forma com que os participantes tiveram contato com a Etnomatemática, solicitamos que aqueles que tivessem respondido de forma positiva se sabiam o que era etnomatemática marcassem de que forma foi esse contato. De acordo com as respostas, vide figura 1, podemos observar que a etnomatemática se faz presente na graduação através de outras disciplinas, que não necessariamente é voltada para a temática. Vale enfatizar que os respondentes poderiam marcar mais de uma opção nesta questão, o que ocasiona porcentagens que ultrapassam 100%.

Baseado nos conhecimentos prévios dos participantes, pedimos para que eles avaliassem se a Etnomatemática poderia influenciar na atuação docente. Dos respondentes 24% declararam não ter conhecimento sobre a etnomatemática, enquanto os outros 76% dos participantes concordaram que a etnomatemática pode influenciar sim na atuação do professor em sala, ou seja, nessa questão não tivemos nenhuma resposta negativa sobre a influência da etnomatemática.

Deixamos um espaço para que os participantes pudessem compartilhar um pouco do seu ponto de vista em relação a importância da etnomatemática na atuação docente, abaixo temos um dos depoimentos que recebemos:



Fonte: Elaborado pelas autoras (2021)

Figura 1: Onde ouviram falar de etnomatemática.

Participante 1: “Acho importante que o professor entenda que a matemática não é única e que não há uma prática matemática universal. Ao reconhecer a pluralidade da matemática, ele passa a valorizar e validar as práticas matemáticas dos contextos socioculturais em que seus alunos estão inseridos. É sobre compreender que os alunos já carregam na sua história práticas matemáticas que precisam dialogar com o que está sendo feito em sala de aula.”

Com base nos depoimentos feitos pelos participantes, podemos ver como a etnomatemática pode incentivar o professor a sair da zona de conforto, buscando pela valorização de outras culturas e de outras formas de ver e entender a matemática não só aquela abordada em livros, saindo assim dos métodos tradicionais e mecânicos de ensino. Além disso, o questionário buscava saber sobre a influência da etnomatemática na atuação profissional de cada participante em particular. Das 21 respostas, 19% responderam que a etnomatemática já influenciou de alguma maneira suas práticas docentes, vale ressaltar que 52,4% dos participantes declararam não atuar profissionalmente ou não ter conhecimento sobre etnomatemática. Segue um dos depoimentos:

Participante 2: “Passei a me interessar mais pela bagagem dos meus alunos, isto é, pelos saberes matemáticos que não foram construídos dentro de uma sala de aula.” Baseado nesses relatos podemos ver que em virtude da etnomatemática é possível ampliar horizontes em sala de aula, além de valorizar os saberes prévios dos alunos e outras culturas. Por fim, destacamos um trecho sobre a etnomatemática, onde de acordo com D’Ambrosio (1990) ”Etnomatemática é a arte ou técnica de explicar e conhecer, em diferentes ambientes culturais”e pedimos para que a partir desta afirmativa os participantes dissessem se consideram a temática importante na formação dos professores, 95,2% das respostas foram positivas. Os participantes compartilharam conosco um pouco da sua visão a partir deste pensamento. Participante 3: "Um conhecimento que é construído por determinado grupo social em seu cotidiano tem tanto valor educacional quanto os conteúdos ensinados nos ambientes formais de aprendizagem. Com isso, até mesmo os saberes populares podem ser vistos sob uma ótica de formalidade."

Portanto, com base nas respostas, números e depoimentos que vimos até aqui, podemos ver como a etnomatemática pode, de acordo com a visão dos próprios professores formados ou em formação, influenciar positivamente a atuação profissional de um professor. Entendemos assim, que debater sobre esta temática é de suma importância para a formação docente e que cada vez mais esse debate deve ser levantado para que mais professores tenham acesso ao que é a etnomatemática, uma vez que esta abordagem pode ser uma aliada em sua prática profissional.

Resultados e Discussões

Com os resultados obtidos no formulário on-line, resolvemos trazer, como forma de aprofundar as discussões do nosso trabalho, entrevistas com professores atuantes na Educação Básica. No total foram quatro entrevistados, selecionados a partir de suas manifestações de interesse no formulário on-line, priorizamos aqueles que tinham algum conhecimento sobre etnomatemática e que atuam na Educação Básica. As entrevistas foram realizadas no mês de março, de forma individual, através da plataforma Zoom e com duração de vinte a trinta minutos.

O professor P1 é formado em Licenciatura Matemática pela rede privada de ensino, possui especialização em Ensino de Matemática, tem graduação em Pedagogia e mestrado profissional, todos pela rede pública de ensino. Além de lecionar no Ensino Fundamental II da rede Municipal. O professor P2 é formado em Licenciatura Matemática, é mestrando em Educação em Ciências e Matemática e cursa Licenciatura em Física, todos pela rede pública de ensino. Atua no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio da rede privada, e diz continuar estudando sobre etnomatemática. O professor P3 é formado em Licenciatura Matemática e é mestrando em Ensino de Matemática, ambos pela rede pública de ensino. Atua no Ensino Fundamental II da rede privada. O professor P4 é formado em Licenciatura Matemática e é mestrando em Ciência, Tecnologia e Educação, ambos pela rede pública de ensino, e atua na rede privada na área de física.

Ouvir e analisar o ponto de vista desses professores é importante pois eles além de já terem passado pela formação acadêmica, estão vivenciando a prática e, nada melhor do que relacionar a teoria com a prática.

O mais importante, a princípio, é saber o que esses professores entendem por etnomatemática, portanto perguntamos isso a eles. Destacamos a resposta do professor P2, ele cita Ubiratan D'Ambrosio:

> ”O que eu entendo por etnomatemática é pela definição que o próprio professor Ubiratan D'Ambrosio fala, que é você relacionar a matemática de etnias diferentes. Então, por exemplo, você pega a matemática de uma tribo africana e trabalha aquela matemática ali, você pega aquela matemática e joga pro meio acadêmico, sabe? Porque você percebe que existe vários tipos de matemática, existem vários tipos de formas de contagem, de você numerar, de você ter uma relação métrica, uma unidade de medida diferente de diversos povos...” (P2)

Observamos uma certa ligação nas respostas de cada professor, mas cada um definiu de uma forma diferente, e acreditamos que isso se dá pelo fato de que nenhum deles tiveram uma disciplina somente sobre etnomatemática durante a graduação. O que eles entendem por etnomatemática é apenas o que conseguiram ver na graduação através de outras disciplinas que abordaram o tema de forma breve ou através de estudos autônomos.

Ao serem questionados sobre terem tido contato com a etnomatemática durante a graduação ou não, todos os professores entrevistados declararam que não tiveram contato com a etnomatemática durante a graduação através de uma disciplina voltada apenas para essa temática, o que nos leva a refletir sobre a importância de ocorrer a implementação de uma disciplina obrigatória voltada somente para este tema. De acordo com nossos estudos, a resposta é sim. Mas, resolvemos perguntar isso a eles que estão vivenciando a prática. Vejamos uma das respostas:

> “Com certeza! Porque, principalmente com o que eu vejo hoje na pós-graduação, eu acho que a gente tem que abordar esse assunto e, mais do que abordar esse assunto, abordar como os futuros professores de matemática devem levar essa temática para a sala de aula. [...] eu acho importante isso ser abordado na graduação e principalmente não só abordar que ela existe, mas em como ela deve ser aplicada.” (P4)

Todos eles concordam que seja sim importante a implementação de uma disciplina voltada para a etnomatemática na grade curricular das licenciaturas em matemática. Além disso, o professor P4 levantou uma questão importantíssima que é como levar a etnomatemática para a prática do professor, e será que colocá-la em prática é importante para eles? A resposta é sim, todos eles consideram que a etnomatemática é importante na prática do professor.

Por fim, perguntamos se na prática deles havia uma perspectiva etnomatemática e como ela se dava. O professor P1 foi o único que não teve contato com a etnomatemática de forma alguma durante a graduação, seu contato foi recentemente através do mestrado, com isso, ele explicou que não conseguiu ter contato pessoalmente com alunos devido a pandemia que se iniciou no ano de 2020. Os demais professores relataram que buscam fazer o possível para que haja sim uma perspectiva etnomatemática em suas práticas.

Essas foram as questões que levantamos em nossas entrevistas e com as respostas dadas, concluímos mais uma vez que estudar sobre a etnomatemática é importantíssimo e que essa temática deveria ser abordada com mais ênfase durante a formação. Arriscamos afirmar que uma disciplina voltada para este tema deveria ser obrigatória na grade curricular das licenciaturas, pois lidamos com pessoas diferentes, vindas de costumes, culturas, ambientes e realidades diferentes e nada melhor do que a etnomatemática para nos preparar para tamanha diversidade.

Conclusões

A presença de reflexões acerca da etnomatemática na formação de professores de fato pode despertar o interesse do professor na busca por novos modos e técnicas de entender e explicar a matemática considerando os estudantes e as diferentes formas com que eles se situam culturalmente. De acordo com os números e depoimentos obtidos através do formulário on-line, podemos afirmar que a etnomatemática tem um impacto positivo na prática dos professores, pois muitos deles relataram que ter o conhecimento sobre a etnomatemática influenciou sua forma de ver e agir em sala de aula.

Desse modo, é indispensável debater sobre esta temática na formação de professores quando o assunto é a prática em sala de aula. Dentre os diálogos durante as entrevistas, pudemos concluir que os entrevistados consideram a etnomatemática importante tanto na graduação, quanto na prática docente. Além disso, ao serem questionados sobre a importância da implementação de uma disciplina obrigatória voltada para etnomatemática na grade curricular das licenciaturas em matemática, sem hesitar, todos se declararam a favor desta mudança, o que vai ao encontro de nossas opiniões pessoais como pesquisadoras.

Em suma, com os estudos feitos, o formulário e as entrevistas, conseguimos alcançar nosso objetivo principal que é reafirmar a importância da etnomatemática na formação dos professores e que essa temática tem muito a contribuir para a prática docente. O professor que tiver contato com essa temática durante sua formação, certamente terá um posicionamento em sala de aula diferente do tradicional, buscando entender a realidade em que está inserido e valorizar as diversas formas de entender e explicar a matemática. O debate em torno desta questão deve ser proposto durante a trajetória do professor, não só acadêmica, mas também a profissional, a fim de que o conhecimento etnomatemática alcance as práticas docentes voltadas para o ensino de matemática na educação básica.

Referências Bibliográficas

[1] D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade**. 3a Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, **2009**.

[2] D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática S.A, **1990**.

[3] DOMITE, Maria do Carmo Santos. **Etnomatemática e formação de professores: no meio do caminho (da sala de aula) há impasses**. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, **2012**. Disponível em: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/10563/10000>. Acesso em: 09/06/2020.

[4] MATTOS, Sandra. **Como elaborar a metodologia de pesquisa**, pré-print, **2013**. Disponível em: `https://www.academia.edu/37608956/.1_E_book_Metodologia_do_Trabalho_Cientifico`. Acessado em: 06/04/2021.

[5] SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica: A questão da democracia**. Campinas - SP: Papirus, **2001**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Aplicações das desigualdades entre médias para problemas de otimização do Cálculo Diferencial e Integral

Caio Tomás, Railandi Sousa[1]. Luciana Ávila Rodrigues[2 3]
Departamento de Matemática - Universidade de Brasília
caiotomas6@gmail.com, railandisousa8@gmail.com, luavila@unb.br

Trabalho de iniciação científica
Palavras-chave: Cálculo; Problemas de máximo; Otimização; Desigualdades; Médias.

Introdução

Neste trabalho, apresentamos os resultados de uma pesquisa de iniciação científica realizada no PET Matemática da Universidade de Brasília - UnB. Estudamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica e damos exemplos de problemas clássicos de maximização/otimização do Cálculo Diferencial e Integral, comparando as soluções utilizando apenas a desigualdade, sem a necessidade de empregar ferramentas do Cálculo, com as soluções "clássicas", que empregam tais ferramentas.

Desigualdade das médias aritmética e geométrica de dois números

Começamos abordando uma das desigualdades mais antigas da história: dados a, b números reais positivos, mostraremos que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \tag{1}$$

ou seja, a média geométrica não excede a média aritmética.

[1]Bolsistas do PET/MEC/FNDE.
[2]Orientadora: Luciana Ávila Rodrigues.
[3]Tutora: Luciana Ávila Rodrigues

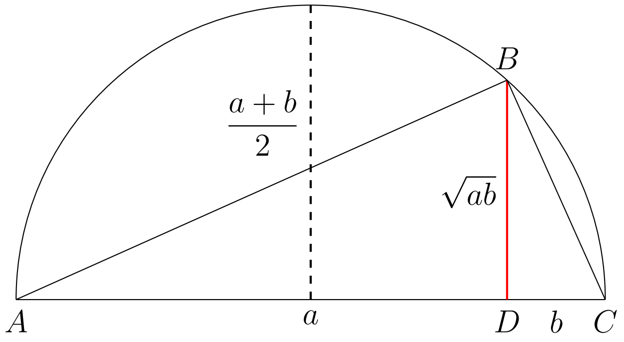


Figura 1: Demonstração geométrica de (1).

Demonstração. Faremos a demonstração da desigualdade de maneira geométrica. Tomamos um segmento AC, de comprimento fixo $a + b$, e D entre A e C tal que $\overline{AD} = a$ e $\overline{DC} = b$. Construímos o semicírculo de diâmetro AC e traçamos a perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por D. Seja B a interseção do semicírculo com a perpendicular. Temos, então, $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ pelo critério ângulo-ângulo, donde segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \implies \overline{BD} = \sqrt{ab}.$$

Assim, observando que $\overline{BD} \leq \overline{AC}/2$, fica demonstrada a desigualdade. $\square$

Na próxima seção, mostraremos que a desigualdade vale para um subconjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$.

A desigualdade (1) pode ser aplicada em vários problemas de maximização, como:

(a) encontrar o máximo do produto de dois números cuja soma é constante;

(b) encontrar a maior área de um triângulo retângulo cujos catetos têm soma constante.

Para (a), note que maximizar o produto é o mesmo que maximizar a raiz do produto, já que $a, b \geq 0$. Logo, (1) nos diz que o máximo da raiz ocorre quando $a = b$ e vale $\dfrac{a+a}{2} = a$, de modo que o máximo do produto é $\left(\dfrac{a+a}{2}\right)^2 = a^2$, ou seja, o quadrado da metade da soma.

Para (b), basta notar que a área do triângulo retângulo de catetos a e b é $ab/2$. Fixando $a+b$, temos, por (1), que essa área é máxima quando $a = b$, isto é, quando o triângulo é isósceles.

Desigualdade das médias aritmética e geométrica de n números

Como mencionamos anteriormente, podemos generalizar (1) como segue: dados $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$, vale

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \tag{2}$$

que é também chamada a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Assim como em (1), a igualdade em (2) ocorre só se $x_1 = \cdots = x_n$, e também há várias maneiras de demonstrá-la. Apresentamos a seguir uma bonita e sucinta prova, devida a Ellers[4].

Demonstração. Ellers, por indução, mostrou que $x_1 \cdots x_n = 1, x_i > 0$, implica $x_1 + \cdots + x_n \geq n$. Daí segue que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq 1 = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Para $n = 1$ vale a implicação acima. Suponha que ela vale para $n = m$. Se $x_1 \cdots x_{m+1} = 1$, então há dois números, digamos x_1 e x_2, tais que $x_1 \geq 1$ e $x_2 \leq 1$. Isso é equivalente a $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$, isto é, $x_1 x_2 + 1 \leq x_1 + x_2$. Isso e a hipótese de indução implicam em

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} \geq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} \geq 1 + m,$$

como queríamos. $\square$

Apresentamos alguns problemas estereométricos, isto é, que envolvem volume de sólidos, e que podem ser resolvidos usando (2).

Consideremos então os seguintes problemas:

(i) numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo;

(ii) num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo;

(iii) dada uma folha quadrada $a \times a$, corte quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tem volume máximo.

[4]O autor de [2] cita apenas o sobrenome deste matemático. Ao que nossas pesquisa indicaram, se trata de Erich Werner Ellers, professor emérito da Universidade de Toronto.

Começemos com (i). Sejam R o raio da esfera, O o centro da esfera, r o raio da base do cone e h a altura do cone. Observe a seção vertical do cone com a esfera na Figura 2.

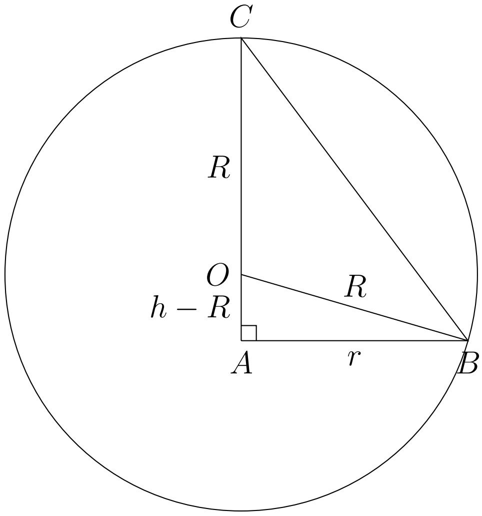


Figura 2: Seção vertical do cone com a esfera.

Por Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (h - R)^2 \iff r^2 = R^2 - (h - R)^2,$$

e, substuindo na fórmula do volume V do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3}[R^2 - (h - R)^2] = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h).$$

Daí, usando (2), temos

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}(2R - h) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade ocorre quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

ou seja, $h = (4/3)R$ maximiza $3V/(4\pi)$ e, portanto, maximiza V.

Agora, tratemos de (ii). Sejam R o raio do cone, H a altura do cone, r o raio do cilindro e h a altura do cilindro. Observe a seção vertical do cilindro com o cone na Figura 3.

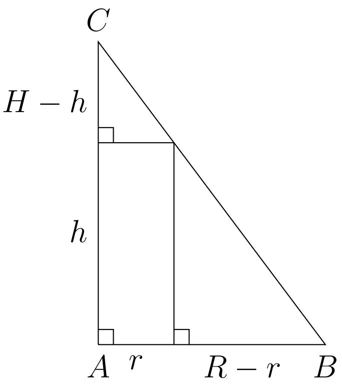


Figura 3: Seção do cone com o cilindro.

Por semelhança, temos

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H},$$

ou seja,

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Daí, o volume do cilindro é

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{H}{R}(R-r).$$

Logo, temos

$$\frac{RV}{4\pi H} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}(R-r) \leq \left(\frac{R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade ocorre quando

$$\frac{r}{2} = R - r \iff r = \frac{2R}{3},$$

ou seja, $r = (2/3)R$ maximiza $RV/(4\pi H)$ e, portanto, maximiza V.

Por fim, (iii). Seja x o lado dos quadrados retirados. Observe a Figura 4.

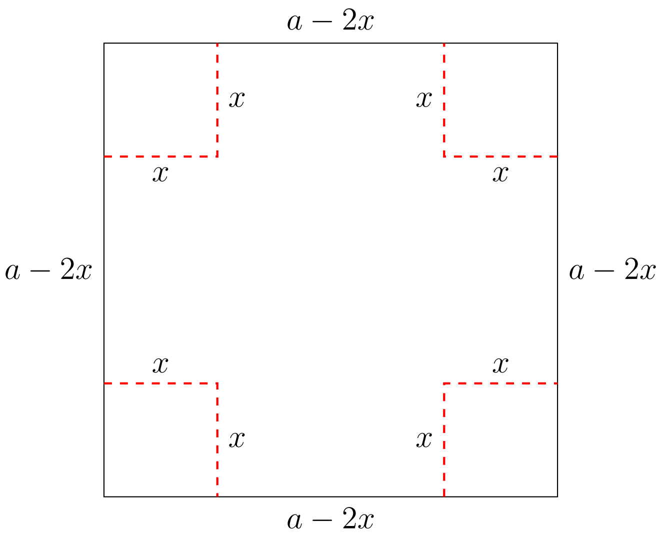


Figura 4: Folha quadrada com os quadrados retirados.

O volume da caixa é $V = (a - 2x)(a - 2x)x$. Daí, temos

$$4V = (a - 2x)(a - 2x)4x \leq \left(\frac{2a}{3}\right)^3,$$

donde V é máximo para $a - 2x = 4x \iff x = a/6$.

Soluções "clássicas"

Nesta seção resolvemos alguns dos problemas apresentados acima usando ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral, com o objetivo de fornecer uma comparação entre as soluções dadas anteriormente e as soluções "clássicas".

Começamos considerando o problema (i): numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo. Observando a Figura 2, vimos que

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2.$$

Substituindo na fórmula do volume do cone, obtemos

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R - h),$$

ou seja, escrevemos V em função de h; derivando, temos

$$V'(h) = \frac{2\pi h}{3}(2R - h) - \frac{\pi h^2}{3} = \frac{4\pi R h}{3} - \pi h^2 = \pi h\left(\frac{4R}{3} - h\right).$$

Igualando a zero e desconsiderando a raiz $h = 0$, que não nos interessa, obtemos que

$$h_{\text{crít}} = \frac{4R}{3}$$

é ponto crítico de $V(h)$. Derivando novamente, obtemos

$$V''(h) = \pi\left(\frac{4R}{3} - h\right) - \pi h = \frac{4\pi R}{3} - 2\pi h \implies V''(h_{\text{crít}}) = -\frac{4\pi R}{3} < 0,$$

de modo que, pelo teste da derivada segunda, $h_{\text{crít}}$ maximiza V, como esperado.

Por último, consideramos (a): encontrar o máximo do produto de dois números cuja soma é constante. Note que esse problema é equivalente a encontrar, dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, aquele de maior área.

Sejam x e y os números considerados, com soma constante igual a S. Temos, então, $x + y = S \iff y = S - x$. Faça

$$f(x) = xy = x(S - x).$$

Derivando e igualando a zero, temos

$$f'(x) = S - 2x = 0 \iff x_{\text{crít}} = \frac{S}{2}.$$

Derivando novamente, temos

$$f''(x) = -2 < 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

assim, pelo teste da derivada segunda, temos que $x_{\text{crít}}$ maximiza f, como esperado.

Resultados e Discussões

Concluímos notando a beleza e simplicidade das soluções apresentadas aos problemas de maximização/otimização, que são abordados em cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, deixamos o questionamento de por que tais desigualdades entre as médias e suas aplicações são pouquíssimo discutidas em cursos de graduação em Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] THOMAS, G. B.; **Cálculo: Volume1**, Pearson, 12ª ed., **2012**.

[2] TIKHOMIROV, V. M.; **Stories about Maxima and Minima**, Mathematical World - Volume 1, American Mathematical Society, **1991**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Conceitos e Uso de Projeções Multidimensionais

Aline Martins Nascimento Belchior e Chiara Vassoler Merizio[1]
Alcebíades Dal Col Júnior[2]
PET Matemática - Centro de Ciências Exatas
Universidade Federal do Espírito Santo
aline.belchior@edu.ufes.com, chiara.merizio@edu.ufes.br,
alcebiades.col@ufes.br
Trabalho de Iniciação científica

Palavras-chave: Métodos de Projeção Multidimensional; Nearest Neighbor Projection; Force; Conjunto de dados;

Introdução

No ambiente matemático, é comum trabalhar com problemas descritos por diversas variáveis, para lidar com pandemias, por exemplo, é necessário considerar inúmeros fatores. No geral, quanto maior o número de variáveis do objeto de estudo, mais complexo se torna trabalhar com ele. A partir disso, surgem os Métodos de Projeção Multidimensional (MPM) visando tornar mais simples esse objeto de estudo. Dizemos que dados são objetos em um espaço m-dimensional, sendo m o número de variáveis envolvidas no problema. Ao utilizar os MPM's é possível representar esses dados de dimensão m em uma dimensão menor para que a sua compreensão seja facilitada. E esse processo é realizado buscando preservar ao máximo na dimensão menor (no geral 1 ou 2) as características de vizinhança dos dados na dimensão maior.

No presente trabalho, será utilizado o conjunto de dados complexos Íris [2], esse conjunto possui dados de 150 flores do tipo Íris, separadas de acordo com a sua espécie sendo as 50 primeiras da espécie Íris Versicolor, as 50 seguintes da Íris Virgínica e as 50 últimas da Íris Setosa. E, ainda, a cada flor são atribuídas como variáveis as seguintes medidas (em cm):

[1] Petianas.
[2] Orientador.

1. Comprimento da sépala;
2. Largura da sépala;
3. Comprimento da pétala;
4. Largura da pétala.

Seja p_1 um vetor que representa uma flor pertencente ao conjunto, por exemplo, temos que

$$p_1 = (5,1 \quad 3,5 \quad 1,4 \quad 0,2) \in \mathbb{R}^4. \tag{3}$$

Dessa forma, ao lidar com esse conjunto de dados em um espaço de dimensão 4 é possível notar a dificuldade para inferir traços de relações ou particularidades das espécies. Portanto, será utilizado o método de projeção Nearest Neighbor Projection (NNP) [3] para que haja uma assimilação mais efetiva desse conjunto.

Segue a definição formal do processo objetivo dos MPM's: Seja S em $\mathbb{R}^m$ um conjunto de dados tal que $S = \{p_1, ..., p_n\}$. A dissimilaridade entre dois dados quaisquer p_i e p_j do espaço m-dimensional é dada por $\delta(p_i, p_j)$. A dissimilaridade quantifica o quanto os elementos são diferentes e depende da aplicação em questão, a escolha mais comum para a dissimilaridade é a distância euclidiana. Seja P um conjunto de pontos em dimensão baixa, uma projeção multidimensional é uma função bijetiva $f : S \to P$ que tem como objetivo tornar $|\delta(p_i, p_j) - d(f(p_i), f(p_j))|$ o mais próximo de zero possível para quaisquer p_i e p_j pertencentes a S, sendo d referente a distância euclidiana entre as projeções dos pontos de S no espaço dimensional menor. O ponto $f(p_i) = p_i'$ é chamado de projeção de p_i.

Nearest Neighbor Projection

O método *Nearest Neighbor Projection* (NNP) tem como objetivo, em nossa pesquisa, redimensionar o conjunto de dados *Íris* e o conjunto de dados *Wine*, isto é, o que antes possuía m dimensões irá se converter para $\mathbb{R}^2$, de forma que as distâncias entre dois pontos vizinhos mais próximos em $\mathbb{R}^m$ se mantenha na nova projeção. Com isso, será possível visualizar na tela do computador, ao final da execução, os novos pontos referentes ao conjunto de dados utilizado e suas respectivas distâncias, facilitando a percepção do conjunto.

Note que o trabalho será realizado em diversas etapas muito bem definidas que se repetem ao longo do processo: primeiro, é necessário que se escolha dois pontos vizinhos (em $\mathbb{R}^m$) para que, a partir de cálculos, a distância entre os dois pontos seja conhecida. Após isso, essa distância encontrada será mantida no novo espaço dimensional, resultando em um novo conjunto geométrico. Para as próximas etapas, escolha um ponto vizinho e realize as mesmas operações com os já projetados.

Os cálculos das distâncias entre dois pontos vizinhos é feito utilizando conceitos da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, ou seja, será feita uma análise geométrica do conjunto de dados, de forma que os cálculos serão facilmente realizados. Nesse sentido, chame de $S' \subset S$ o conjunto dos pontos que já possuem coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e seja S o conjunto de todos os pontos no espaço m-dimensional original. Seja $p \in S$ o ponto que queremos projetar em S', $\exists\ q,\ r \in S$ (que possuem projeção q', $r' \in S'$) tais que suas distâncias até p são menores que as de todos os outros elementos de S que também possuem projeção em S'. A partir desses pontos, iremos utilizar duas circunferências C_q e C_r com centros em q' e r', respectivamente; e seus raios serão as distâncias no espaço m-dimensional $\delta(p, q)$ e $\delta(p, r)$, respectivamente. Assim, encontraremos a projeção de p em S', a qual chamaremos de p'.

Perceba que, ao realizar os cálculos com auxílio de artifícios geométricos, lidaremos com algumas operações nas circunferências C_q e C_r a fim de facilitar o cálculo das distâncias, assim, três casos diferentes poderão acontecer: as duas circunferências se tangenciam (caso i), as duas circunferências possuem dois pontos de intersecção (caso ii) ou então não há interseção entre as duas circunferências no espaço dimensional menor (caso iii), isto é, uma circunferência está contida na outra (caso $iii\ a$) ou a distância entre seus centros é maior que a soma dos raios (caso $iii\ b$).

Caso i: As duas circunferências são tangentes:

Quando as circunferências se encontram em um único ponto, esse ponto é o que queremos encontrar, ou seja, calculando o ponto de tangência entre as circunferências C_q e C_r, encontramos p'.

Caso ii: As duas circunferências possuem dois pontos de intersecção:

Quando isso ocorre, o ponto $p' \in S'$ é escolhido aleatoriamente entre os dois pontos de intersecção. Essa escolha aleatória será feita a partir da biblioteca *random* e, mais especificamente, a função *np.random.randint* do programa python mas, a fim de facilitar a transcrição do problema, escolheremos sempre o primeiro ponto.

Caso $iii\ a$: Uma circunferência está contida na outra:

Traça-se um segmento de reta a partir do centro da circunferência maior e que passa pelo centro da circunferência menor e termina em um ponto contido na primeira circunferência, de forma que sua medida seja equivalente ao raio da maior circunferência. Desse segmento, iremos subtrair a distância entre os dois centros e a medida do raio da menor circunferência, restando, assim, a menor distância entre C_q e C_r. O ponto p' que queremos calcular é o ponto médio da distância obtida.

Caso *iii b*: A distância entre os centros das duas circunferências é maior que a soma de seus raios:

Traça-se um segmento de reta ligando os dois centros e, dele, subtrai-se a medida dos dois raios, assim, restará a distância entre as duas circunferências. O ponto p' que queremos calcular é o ponto médio da distância obtida.

O conjunto de dados Íris possui 150 pontos, ou seja, a resolução do problema será feita em 150 etapas, resultando em um gráfico com a representação de todos os elementos $p' \in S'$ como o mostrado na Figura 1. Note que foi possível separar os elementos em três subconjuntos de S', ou seja, foi realizada a partição de S' e, consequentemente, será possível classificar os elementos do conjunto de dados, isto é, será possível classificar as flores. As flores do conjunto representadas com a cor azul estão mais separadas, isso ocorre pois suas características são bem distintas das outras; quanto mais distintas forem as características de um objeto, mais facilmente será feita a partição.

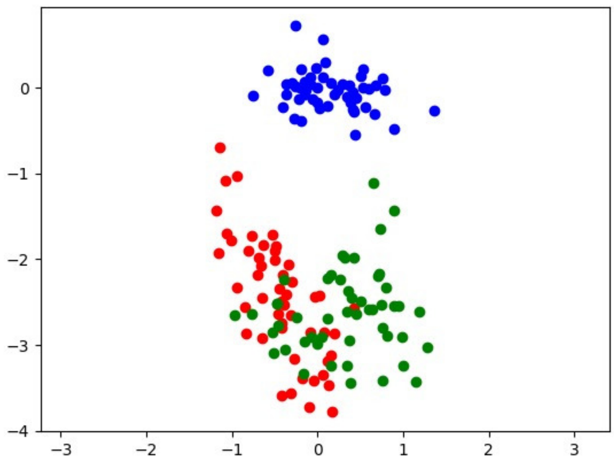


Figura 1: Gráfico do conjunto de dados Íris em $\mathbb{R}^2$

O conjunto de dados Wine possui 3 classes diferentes de vinho com 59 vinhos na primeira, 71 na segunda e 48 na terceira, totalizando, dessa forma, 178 amostras. Além disso, a cada vinho são atribuídas 13 características (quantidade de álcool, quantidade de ácido málico, intensidade da cor, quantidade de magnésio, dentre outras), isto é, o espaço dimensional do conjunto inicial é $\mathbb{R}^{13}$.

A Figura 2 abaixo mostra a projeção em $\mathbb{R}^2$ através do NNP do conjunto de dados Wine.

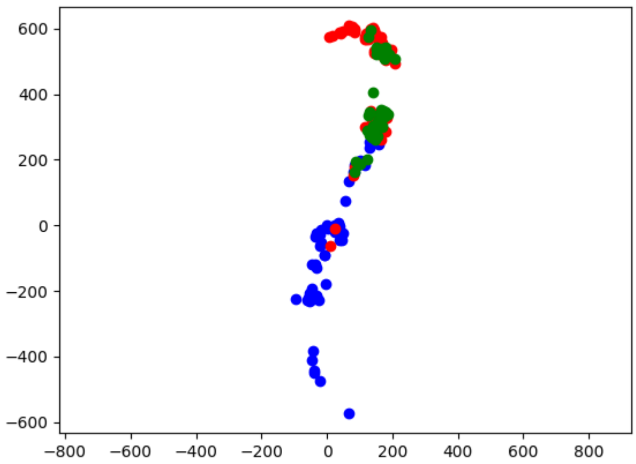


Figura 2: Gráfico do conjunto Wine em $\mathbb{R}^2$.

Método Force

Para além do NNP, o Force [3] surge na forma de implementações que podem ser feitas a partir da projeção criada pelo NNP com o objetivo de melhorar a projeção dos dados. A ideia central desse método é afastar pontos que foram projetados muito próximos e aproximar pontos que foram projetados muito distantes.

O esquema de melhoria Force funciona da seguinte forma: Em primeiro lugar, ele recebe como entrada os dados em dimensão m e sua projeção em dimensão menor. Em seguida, será realizada a comparação de cada ponto projetado em dimensão menor com todos os demais projetados (em relação aos seus dados de origem no espaço m-dimensional). Sendo $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $P = \{p'_1, \ldots, p'_n\}$ e p'_i o ponto em dimensão menor que está sendo analisado, por exemplo, será feita a comparação de $p_i \in S$ com $p_j \in S$ onde j percorre o intervalo de 1 até 150 discretamente e dependendo do resultado obtido esse pontos se tornarão mais próximos ou mais distantes. Para isso, é definido o vetor $v_{ij} = p'_j - p'_i$ e $\Delta_{ij} = \delta(p_i, p_j) - d(p'_i - p'_j)$. Assim, é aplicado no ponto $p'_j \in P$ na direção do vetor v_{ij} uma perturbação que depende de Δ_{ij} . Portanto, se $\Delta_{ij} > 0$ o ponto p'_j é afastado de p'_i na projeção, se $\Delta_{ij} < 0$ p'_j se aproxima de p'_i e, por fim, se $\Delta_{ij} = 0$ a posição de p'_j permanece a mesma.

Resultados e Discussões

Sendo $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $P = \{p'_1, \ldots, p'_n\}$ os pontos projetados via NNP, a Figura 3 mostra o gráfico de dispersão do conjunto antes da aplicação do Force, de forma que a abscissa dos pontos é $d(p'_i, p'_j)$ e a ordenada é $\delta(p_i, p_j)$. Note que, em uma projeção ideal, o gráfico de dispersão estaria o mais próximo possível da função identidade.

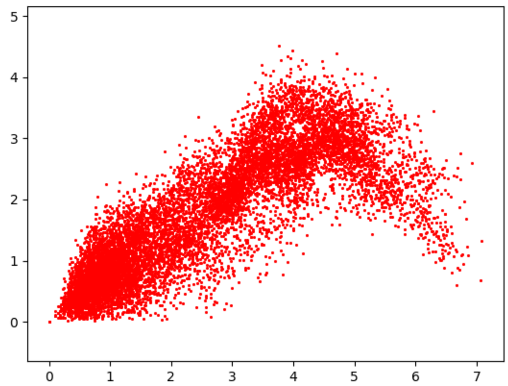


Figura 3: Gráfico de dispersão do método NNP do conjunto Íris.

Já a Figura 4 representa o gráfico de dispersão do conjunto de dados após a aplicação do método Force e a Figura 5 exibe a projeção dos dados após a melhoria aplicada.

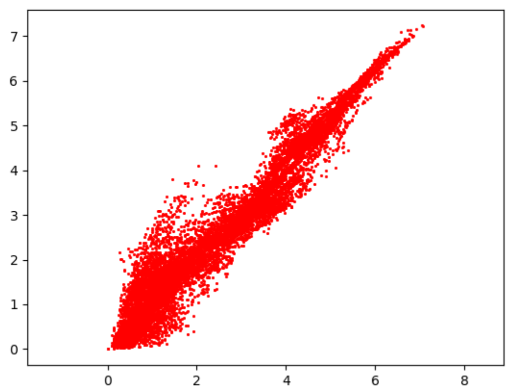


Figura 4: Gráfico de dispersão do conjunto Íris após aplicação do método Force.

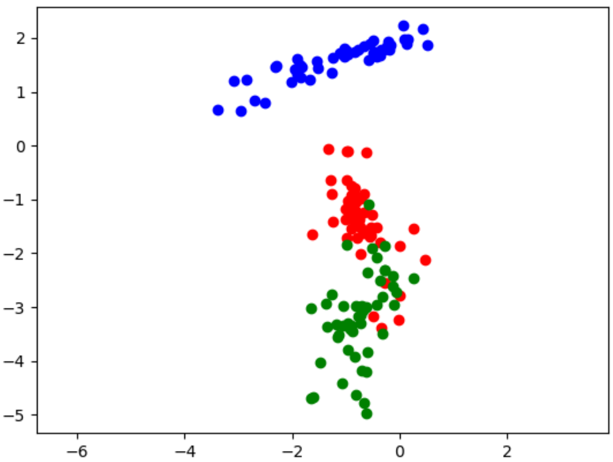


Figura 5: Projeção do conjunto de dados Íris após a aplicação do Force

Diante do exposto, é possível concluir que a utilização do método de projeção NNP de fato elevou a compreensão do conjunto de dados estudado, em função disso métodos como esse se mostram pertinentes em estudos que envolvem diversas variáveis. No entanto, cabe ressaltar que não é recomendado o uso do NNP para tratamento de todo tipo de conjunto de dados, visto que em casos onde o número de elementos é muito grande o processo se torna muito custoso para o computador realizar. Nesses casos, portanto, um método de projeção mais adequado deve ser escolhido. Métodos como o Least Square Projection (LSP) que utilizam pontos de controle em sua formulação se apresentam como uma interessante alternativa para esses casos [1].

Referências Bibliográficas

[1] PAULOVICH, F. V., NONATO, L. G., MINGHIM, R., e LEVKOWITZ, H. **Least square projection: A fast high-precision multidimensional projection technique and its application to document mapping**. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 14, 3, **2008**, 564–575.

[2] PEDREGOSA, F., VAROQUAUX, G., GRAMFORT, A., MICHEL, V.,

THIRION, B., GRISEL, O., BLONDEL, M., PRETTENHOFER, P., WEISS, R., DUBOURG, V., VANDERPLAS, J., PASSOS, A., COURNAPEU, D., BRUCHER, M., PERROT, M., e DUCHESNAY, E. **Scikit-learn: Machine Learning in Python**. Journal of Machine Learning Research 12, **2008**, 2825–2830.

[3] TEJADA, E., MINGHIM, R., E NONATO, L. G. **On improved projectiontechniques to support visual exploration of multi-dimensional data sets**. Information Visualization 2, 4, **2008**, 218–231.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Iniciação Científica

Decomposição de Schur

XII ENAPETMAT

Roberta Agnes Mendes Melo[1]. Patrícia Borges dos Santos[2]
PET Matemática Pontal
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) -
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
melo.roberta98@gmail.com, patriciabs@ufu.br
Trabalho de iniciação científica
Palavras-chave: Álgebra Linear; Decomposição Matricial; Método numérico.

Introdução

Decomposições matriciais são métodos que reduzem uma matriz em partes constituintes, facilitando o cálculo de operações matriciais mais complexas, ou seja, escreve como um produto de matrizes mais simples. Existem diferentes técnicas para decompor uma matriz, nesse trabalho apresentaremos o método de decomposição de Schur.

A decomposição de Schur decompõe uma matriz A com entradas no corpo dos complexos como $A = UTU^*$, onde U é unitária e T é triangular superior. Essa decomposição é base de um eficiente método numérico para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz quadrada e, devido a isso, possibilitam diversas aplicações em Estatística, Física, Engenharias e na Matemática.

Por ser um tema explorado e de importância na Álgebra Linear, seu entendimento é necessário, o que justifica esse estudo. O objetivo do trabalho é apresentar o método de decomposição de Schur, exibindo o teorema e sua demonstração, e mostrar a aplicação através de um exemplo.

[1]Petiano.
[2]Orientador.

Metodologia

Realizou-se uma pesquisa de caráter bibliográfico. As referências utilizadas no desenvolvimento do trabalho foram os livros [1] e [2].

Resultados e Discussões

Decomposição de Schur

Definição 1. *Se A é uma matriz quadrada $n \times n$ com entradas complexas, a decomposição de Schur nos permite expressar A como $A = U \cdot T \cdot U^*$, sendo U uma matriz unitária (sua inversa é a transposta conjugada de U) e T é uma matriz triangular superior.*

Teorema 7. (Teorema de Schur) *Seja A uma matriz $n \times n$ no corpo $\mathbb{C}$. Então existe uma matriz unitária U tal que $T = U^* \cdot A \cdot U$ é triangular superior.*

Demonstração. Faremos a prova por indução em n. Para $n = 1$ temos:

$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ e $U = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 1}$. Temos que, $U^* = \overline{U^t} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.

Daí, $T = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$.

Suponhamos que seja válido para uma matriz $k \times k$ qualquer e consideremos A, matriz $(k+1) \times (k+1)$. Seja w_1 um autovetor unitário associado ao autovalor λ_1 de A, isto é, $||w_1|| = 1$ e $A(w_1) = \lambda_1 \cdot w_1$. O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt assegura a existência de uma base ortonormal $\{w_1, w_2, \cdots, w_{k+1}\}$ para $\mathbb{C}^{k+1}$. Escrevendo a matriz R cujas colunas são dadas pelos vetores dessa base ortonormal, ou seja, a i-ésima coluna é o vetor w_i, temos que R é unitária. Consideremos então $R^* \cdot A \cdot R = (R^* \cdot A) \cdot R$.

A primeira coluna dessa matriz é $R^* \cdot A \cdot w_1$. Mas, $R^* \cdot A \cdot w_1 = R^* \cdot \lambda_1 \cdot w_1 = \lambda_1 \cdot R^* \cdot w_1 = \lambda_1 \cdot e_1$, pois as linhas de R^* são dadas pelos vetores $\overline{w_1}, \cdots, \overline{w_{k+1}}$.

Assim, a matriz $R^* \cdot A \cdot R$ tem a forma $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & & S \\ 0 & & \end{pmatrix}$, em que S é uma matriz $k \times k$.

Pela hipótese de indução existe uma matriz unitária V_1 tal que $T_1 = V_1^* \cdot S \cdot V_1$ é uma matriz triangular superior. Definimos então, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & V_1 \\ 0 & & \end{pmatrix}$.

Claramente V é unitária e $V^* \cdot (R^* \cdot A \cdot R) \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & V_1^* \\ 0 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & & S \\ 0 & & \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & V_1 \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & & V_1^* \cdot S \cdot V_1 \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & & T_1 \\ 0 & & \end{pmatrix} = T$ que é uma matriz triangular superior. Definimos então, $U = R \cdot V$. A matriz U é unitária, pois $U^* \cdot U = (R \cdot V)^*(R \cdot V) = V^* \cdot R^* \cdot R \cdot V = I$. Isso completa a demonstração. □

Observação 1. *A demonstração acima continua válida se A for uma matriz real cujos autovalores estão no corpo $\mathbb{R}$.*

O teorema (7) pode ser encontrado em [1].

Aplicação

Exemplo 1. *Encontre a decomposição de Schur da matriz* $A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.[3]

Primeiro vamos encontrar os autovalores de A.

$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 8 & 8 \\ -1 & 7-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 243\lambda + 729 = \lambda^3 - 27\lambda^2 + 243\lambda - 729 = (\lambda - 9) \cdot (\lambda - 9) \cdot (\lambda - 9) = (\lambda - 9)^3$.

Logo, os autovalores são $\lambda = 9$ com multiplicidade 3. *Agora, vamos encontrar os autovetores.*

Como os autovalores são iguais, os autovetores não serão ortogonais e, desse modo, será necessário usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$\lambda = 9 : A - \lambda I = A - 9I = \begin{pmatrix} 13-9 & 8 & 8 \\ -1 & 7-9 & -2 \\ -1 & -2 & 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4x + 8y + 8z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\sim}$$

[3] O exemplo (1) encontra-se em [2], pág.4

$$\begin{cases} 4x+8y+8z=0 \\ -x-2y-2z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \overset{L_2 \to L_1 + 4 \cdot L_2}{\sim} \begin{cases} 4x+8y+8z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2z=0. \end{cases}$$

Existem muitas soluções para essa equação. Vamos mostrar que $(2,-2,1)$ *é uma delas.*

Sabemos que:

$$\{(x,y,z)|x+2y+2z=0\} \Leftrightarrow \{(x,y,z)|x=-2y-2z\}.$$

Daí,

$$\{(-2y-2z,y,z)=(-2,1,0)y+(-2,0,1)z|y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando $y=-2$ *e* $z=1$ *obtemos:*

$$-2(-2,1,0)+1(-2,0,1)=(2,-2,1).$$

Como combinação linear de autovetor ainda será autovetor, provamos o que queríamos.

Agora, queremos uma base ortonormal para esse espaço. Para fazer isso, primeiro encontramos uma base e, em seguida, usamos Gram-Schmidt. A base é bastante simples: sabemos que $(2,-2,1)$ *está em nosso espaço, e podemos ver que* $(0,1,-1)$ *também está. Vamos mostrar isso.*

Sabemos que:

$$\{(x,y,z)|x+2y+2z=0\} \Leftrightarrow \{(x,y,z)|x=-2y-2z\}.$$

Daí,

$$\{(-2y-2z,y,z)=(-2,1,0)y+(-2,0,1)z|y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando $y=-1$ *e* $z=1$ *obtemos:*

$$(-1)\cdot(-2,1,0)+1\cdot(-2,0,1)=(0,-1,1).$$

Como combinação linear de autovetor ainda será autovetor, provamos o que queríamos.

Definindo $v_1=(2,-2,1)$ *e* $v_2=(0,1,-1)$ *aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos:*

- $w_1=v_1=(2,-2,1)$.
- $w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}\cdot w_1=(0,1,-1)-\frac{\langle(0,1,-1),(2,-2,1)\rangle}{\langle(2,-2,1),(2,-2,1)\rangle}\cdot(2,-2,1) \Leftrightarrow$
  $w_2=(0,1,-1)-\frac{3}{9}\cdot(2,-2,1)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$.

Escalamos esses vetores para obter uma base para $\{(x,y,z)|x+2y+2z=0\}$. *Agora, vamos estender isso para todo o* $\mathbb{C}^3$. *Peguemos um vetor que não está no subspaço gerado pelos dois vetores anteriores, como* $(0,0,1)$. *Realizando Gram-Schmidt, para* $v_3=(0,0,1)$, *temos:*

- $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}\cdot w_1 - \frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle}\cdot w_2 \Leftrightarrow$
  $w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(2,-2,1)\rangle}{\langle (2,-2,1),(2,-2,1)\rangle}\cdot(2,-2,1) - \frac{\langle (0,0,1),(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\rangle}{\langle (\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\rangle}\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$
  $w_3 = (0,0,1) - \frac{1}{9}\cdot(2,-2,1) - \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = (0,0,1) - \left(\frac{2}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right) - \left(-\frac{4}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right) \Leftrightarrow$
  $w_3 = \left(-\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{8}{9}\right) - \left(-\frac{4}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right).$

Portanto, a base ortonormal é:

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}.$$

Escrevendo $U = (w_1,w_2,w_3) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$.

A matriz A *na base* $\{w_1,w_2,w_3\}$ *é:*

$$\begin{aligned}(A)_{\{w_1,w_2,w_3\}} &= U^{-1}\cdot(A)_c\cdot U\\ &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13&8&8\\-1&7&-2\\-1&-2&7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}81&0&81\\0&81&81\\0&0&81\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&0&9\\0&9&9\\0&0&9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Encontramos então:

$T = \begin{pmatrix}9&0&9\\0&9&9\\0&0&9\end{pmatrix}$ *triangular superior e* $U = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$ *unitária.*

Daí,

$$A = \begin{pmatrix}13&8&8\\-1&7&-2\\-1&-2&7\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&0&9\\0&9&9\\0&0&9\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix} = U\cdot T\cdot U^*$$

é a decomposição de Schur da matriz A.

Conclusão

Vimos que a decomposição de Schur em um espaço vetorial complexo com produto interno nos fornece uma maneira de escrever uma matriz A na forma UTU*, onde U é uma matriz unitária e T é uma matriz triangular superior. Isto equivale a dizer que existe uma base ortonormal na qual a matriz A é triangular superior. Em todo caso, o cálculo desta decomposição é bem trabalhosa mesmo em dimensões pequenas. Na prática, ou seja, para o propósito da matemática, saber da existência da decomposição de Schur é mais útil do que encontrá-la explicitamente.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P.. **Álgebra Linear: Um Segundo Curso**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, **2006**.

[2] UNIVERSITY OF CALIFORNIA IN SANTA BARBARA. **Math 108B Lecture 5: The Schur Decomposition**, 2014. Disponível em: `http://web.math.ucsb.edu/~padraic/ucsb_2013_14/math108b_w2014/math108b_w2014_lecture5.pdf`. Acesso em: 24 mai. 2021

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Espaços Métricos Completos (e exemplos)

Thais Ester Gonçalves[1], Vinícius Vivaldino Pires de Almeida[2], Eder Marinho Martins[3]
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Ouro Preto
thais.ester@aluno.ufop.edu.br, viniciusalmeida@ufop.edu.br, eder@ufop.edu.br

Trabalho de iniciação científica

Palavras-chave: Espaços métricos; Completude; Métrica; Bolas abertas.

Introdução

A noção de distância é importante em vários ramos da matemática e apesar da distância euclidiana ser a mais comum, utilizada no cálculo e na geometria, podemos generalizar este conceito, levando à definição de métrica e, consequentemente, de espaço métrico. Neste trabalho temos como objetivo definir e apresentar alguns exemplos de espaços métricos e espaços métricos completos, que são importantes no estudo de Equações Diferenciais e Análise Funcional.

Espaços métricos

Nessa seção apresentamos a definição de métrica e espaços métricos, bem como exemplos. Para isso, são utilizadas as referências [1], [2], [3] e [4].

Definição 2. *Consideremos X um conjunto não vazio. Chamamos uma aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ de métrica caso possua as seguintes propriedades:*

1. *Positividade: $d(a, b) \geq 0$ para todos a, $b \in X$.*
2. *Condição de distância nula: $d(a, b) = 0$ se, e só se, $a = b$.*

[1] Petiano.
[2] Orientador.
[3] Coorientador.

3. Simetria: $d(a,b) = d(b,a)$ *para todos* a *e* $b \in X$.
4. Desigualdade triangular: $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ *para todos* a, b *e* $c \in X$.

Definição 3. *Espaço métrico é um par* (X,d) *em que* X *é um conjunto não vazio e* d *é uma métrica em* X.

Exemplo 2. *A aplicação* $d(x,y) = |x-y|$, x, $y \in \mathbb{R}$, *é uma métrica em* $X = \mathbb{R}$, *chamada métrica usual. (Veja [1]).*

Exemplo 3. *O espaço* $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f$ *é contínua em* $[0,1]\}$ *é um espaço métrico cuja métrica é definida por* $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ *(Veja [4]).*

Exemplo 4. *O espaço* $l^2 = \left\{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}}\ ;\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$ *é um espaço métrico cuja métrica é definida por* $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2}$, *em que* $y = (y_j)$ *e* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 < \infty$.

De fato, as propriedades 1, 2 e 3 de métrica são claramente satisfeitas. Assim, vamos verificar apenas que d satisfaz a desigualdade triangular. Para isso usaremos uma inequação auxiliar e a desigualdade de Minkowski, como segue:

Consideremos a função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $u(t) = t$ e os números α, $\beta > 0$, com $\alpha\beta$ sendo a área do retângulo de lados α e β, como na figura 1 dada ao lado. Temos que:

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} t dt + \int_0^{\beta} u du = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}. \quad (4)$$

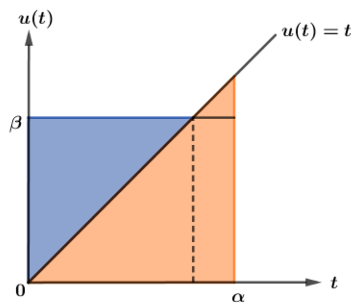


Figura 1: Retângulo de lados α, β.

Note que se $(\tilde{x_j})$ e $(\tilde{y_j})$ são tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{x_j}|^2 = 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{y_j}|^2 = 1, \tag{5}$$

definindo $\alpha = |\tilde{x_j}|$ e $\beta = |\tilde{y_j}|$, temos por (1) que $|\tilde{x_j}\,\tilde{y_j}| \leq \frac{|\tilde{x_j}|^2}{2} + \frac{|\tilde{y_j}|^2}{2}$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{x_j}\,\tilde{y_j}| \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{x_j}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{y_j}|^2 = 1. \tag{6}$$

Tomemos quaisquer $x = (x_j) \in l^2$ e $y = (y_j) \in l^2$ não-nulos e definimos:

$$\tilde{x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}} \ , \ \tilde{y_j} = \frac{y_j}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2}}. \tag{7}$$

Observe que assim definidas, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\tilde{x_j}|^2 = 1$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\tilde{y_j}|^2 = 1$.
Nessas condições, podemos aplicar (6):

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}.\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} \ . \tag{8}$$

Agora, escrevemos $x_j + y_j = w_j$. Utilizando a desigualdade triangular em $\mathbb{R}$ e somando de $j = 1$ a n fixo, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,|w_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|w_j| \tag{9}$$

Aplicando (8), temos
$\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|\,|w_j| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{n} |w_n|^2}$ e $\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|\,|w_j| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{n} |w_n|^2}$

Assim,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}$$

Obtemos, então, a desigualdade que queríamos para n. Fazendo $n \to \infty$, temos à direita a soma de duas séries que convergem, pois $x, y \in l^2$, e, daí, $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |w_j|^2}$ também converge. Portanto, temos a desigualdade de Minkowski para somas:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} \tag{10}$$

Agora, tomando $x, y, z \in l^2$, com $z = (z_j)$, $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ e usando (10), temos:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j-y_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|(x_j-z_j)+(z_j-y_j)|^2} \\ &\overset{(10)}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j-z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|z_j-y_j|^2} = d(x,z)+d(z,y)\ \forall x,y,z \in l^2, \end{aligned}$$

isto é, a desigualdade triangular é válida para $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\infty}|x_j-y_j|^2}$ e, portanto, d é uma métrica no espaço l^2.

Observação 2. *Para mais detalhes do exemplo anterior, veja [1].*

Um conceito importante no estudo de espaços métricos é o de bola aberta, que utilizamos para definir, por exemplo, quando duas métricas são equivalentes.

Definição 4. *Seja $X = (X,d)$ um espaço métrico. Dado um ponto $p \in X$ e um número real $\varepsilon > 0$, definimos bola aberta como o conjunto*

$$B(p,\varepsilon) = \{x \in X\ ;\ d(x,p) < \varepsilon\}.$$

Neste caso, dizemos que p é o centro e ε é o raio da bola B.

Exemplo 5. *Considere o espaço métrico $\mathbb{R}^2$ e $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ em $\mathbb{R}^2$.*

A aplicação $D(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ em $\mathbb{R}^2$ é uma métrica (veja [2]), chamada de métrica euclidiana. Sendo $p = (a,b)$ um ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B_D(p,\varepsilon) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2/(X-a)^2+(Y-b)^2 < \varepsilon^2\}.$$

A aplicação $D_2(x,y) = max\,\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ em $\mathbb{R}^2$ é uma métrica (veja [2]), chamada de métrica do máximo. Sendo $p = (a,b)$ um ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B_{D_2}(p,\varepsilon) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2\ /\ max\{|X-a|,|Y-b|\} < \varepsilon\}.$$

Definição 5. *Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. As métricas d e d' são equivalentes se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p,\varepsilon)$, existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p,\lambda) \subset B_d(p,\varepsilon)$ e dada uma bola qualquer $B_{d'}(p,\varepsilon)$, existe $\lambda > 0$ de forma que $B_d(p,\lambda) \subset B_{d'}(p,\varepsilon)$.*

Exemplo 6. *As métricas $D(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ e $D_2(x,y) = max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$, definidas no exemplo anterior, são equivalentes, para quaisquer $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.*

A bola $B_D(p,\varepsilon)$ é representada por um disco aberto de raio ε e centro em p e $B_{D_2}(p,\varepsilon)$ é representada por um quadrado aberto de lado 2ε e de mesmo centro. Todo disco aberto do plano contém um quadrado aberto de mesmo centro e todo quadrado dessa forma também contém um disco aberto de mesmo centro. Assim, é possível notar que D e D_2 são equivalentes, veja a figura ao lado:

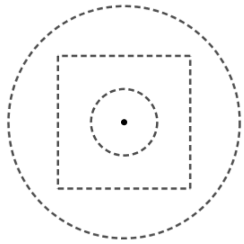


Figura 2: A figura mostra que as métricas D e D_2 são equivalentes.

Espaços métricos completos

Nessa seção, utilizando as referências [1], [3] e [4], apresentamos a definição e exemplos de espaços métricos completos. Para isso, inicialmente definimos sequência de Cauchy, que é um tipo de sequência importante para determinar a completude de um espaço métrico.

Definição 6. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita de Cauchy, quando para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Em outras palavras, dizemos que uma sequência é de Cauchy quando, a partir de um certo índice, seus termos ficam cada vez mais próximos.

Definição 7. *Um espaço métrico X não vazio é completo quando toda sequência de Cauchy em X converge, ou seja, tem um limite que é um elemento de X.*

Exemplo 7. *O espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ em que $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ é completo.*

De fato, seja (x_m) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ com $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}) = (x_j^{(m)})$, $1 \leq j \leq n$. Como (x_m) é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, r > n_0$, temos

$$d(x_m, x_r) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(m)} - x_j^{(r)}\right)^2} < \varepsilon. \tag{11}$$

Daí, para $m, r \geq n_0$, temos

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(m)}-x_j^{(r)}\right)^2<\varepsilon^2 \Rightarrow (x_j^{(m)}-x_j^{(r)})^2<\varepsilon^2, \text{ para cada } 1\leq j\leq n.$$

Assim, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que se $m,r>n_0$, então $|x_j^{(m)}-x_j^{(r)}|<\varepsilon$. Isso nos mostra que, para cada j fixado, $1\leq j\leq n$, a sequência $(x_j^{(1)},x_j^{(2)},x_j^{(3)},...)=(x_j^{(m)})$ é uma sequência de Cauchy de números reais e, portanto, convergente, pois $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo (veja [3]), isto é,

$$\lim_{m\to\infty} x_j^{(m)}=a_j,\ \ 1\leq j\leq n \text{ e } a_j\in\mathbb{R}.$$

Usando esses n limites, considere $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Podemos afirmar que $x_m\to a$. De fato, como visto, $x_j^{(m)}\to a_j$, isto é, para todo $\varepsilon>0$, existe $m_0^{(j)}\in\mathbb{N}$ tal que $|x_j^{(m)}-a_j|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Seja $m_0=\max\limits_{1\leq j\leq n} m_0^{(j)}$. Daí, se $m>m_0$, então

$$d(x_m,a)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(m)}-a_j^{(r)}\right)^2}<\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{(\sqrt{n})^2}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}1}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}=\varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m=a\in\mathbb{R}^n$, ou seja, $\mathbb{R}^n$ é completo.

Teorema 8. *Seja X um espaço métrico e (x_n) uma sequência de X convergente. Então, (x_n) é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente tal que $x_n\to x$ no espaço métrico M. Então, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0$ implica $d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$. Sendo assim, para todos $m,n>n_0$ temos que $d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_m,x)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Pela desigualdade triangular, temos que

$$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ ,$$

isto é, para todo $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ para todos $m,n>n_0$. Logo, (x_n) é de Cauchy.

□

Observação 3. *A recíproca do Teorema 8 nem sempre é verdadeira. Veja o exemplo a seguir.*

Exemplo 8. *O espaço $X=C[0,1]$, definido no exemplo 2, munido da métrica $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$ não é um espaço completo.*

No espaço $C[0,1]$, consideremos a métrica $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$. A sequência f_n de funções contínuas (ilustrada na figura 3), definida a seguir, é uma sequência de Cauchy.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \text{se } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \, . \end{cases}$$

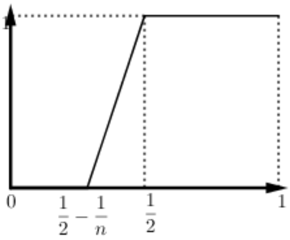


Figura 3: Definição geométrica da sequência f_n definida.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, considere $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ e, sem perda de generalidade, $m > n > n_0$. Então,

$$\begin{aligned} d(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \, . \end{aligned}$$

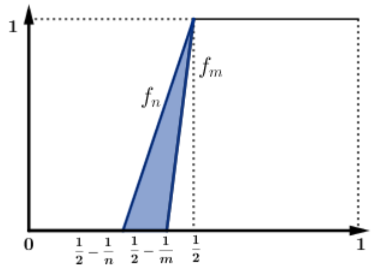


Figura 4: A figura ilustra f_n e f_m.

Portanto, f_n é uma sequência de Cauchy. Agora mostremos que essa sequência não converge em X. Suponhamos que exista $g(x) \in X$ contínua tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, g) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$$

Como f, g são contínuas, temos que

$$d(f_n, g) = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |g(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - g(x)| dx \Rightarrow$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(f_n, g) = \int_0^{\frac{1}{2}} |g(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - g(x)| dx \, .$$

Como os integrandos são não negativos, então cada integral também é. Daí, cada integral deve ser igual a zero. Assim, deveriámos ter

$$g(x) \equiv 0 \, , \ \text{se}\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \ \ e \ \ g(x) \equiv 1 \, , \ \text{se } \ x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \, ,$$

o que é uma contradição, pois g assim não é contínua. Portanto, $f_n(x)$ não converge para uma função de $C[0,1]$, o que mostra que $C[0,1]$, com a métrica d, não é um espaço completo.

Resultados e Discussões

Neste trabalho percebemos que a forma de medir "distância" entre dois pontos varia de acordo com o espaço em que estamos trabalhando, podendo haver, inclusive, formas diferentes de medir em um mesmo espaço. No entanto, estas formas diferentes podem ser equivalentes, facilitando o estudo no espaço ao escolher a métrica mais adequada, sobretudo no estudo de convergência de sequências.

O conceito de espaços métricos completos é de suma importância, pois a noção de completude é essencial, por exemplo, para obtermos a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias.

Assim, este trabalho foi importante para estudar assuntos geralmente não abordados no curso de licenciatura em matemática, além de servir como base para estudos futuros na área.

Referências Bibliográficas

[1] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**, vol. 1. New York, Wiley, **1978**.

[2] HYGINO, Domingues. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**, São Paulo: Atual Editora, **1982**.

[3] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos,** Rio de Janeiro: IMPA, **2017**.

[4] BARATA, João Carlos Alves. **Curso de Física - Matemática**, São Paulo, **2013**.

[5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, vol. 1: Funções de uma Variável, 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, **2018**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Família quadrática e Teorema de Jakobson

Victor Gabriel Xavier Janeiro[1]. Pablo Daniel Carrasco Correa[2].
Carmen Rosa Giraldo Vergara[3].
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais
vgxjaneiro@ufmg.br pdcarrasco@mat.ufmg.br
Trabalho de Iniciação Científica
Palavras-chave: Família Quadrática; Teorema de Jakobson; Medidas invariantes; Parâmetros estocásticos.

Introdução

Um método poderoso para estudar sistemas dinâmicos consiste em estabelecer propriedades estatísticas das órbitas. Este é o enfoque da teoria ergódica, e na sua versão mais simples (e usual) consiste em mostrar a existência de uma medida invariante, preferencialmente com "boas" propriedades. Neste trabalho, consideraremos a família de transformações (*família quadrática*) $f_c(x) = x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in [-2, 0]$, e estudamos a prova dada por Jean-Christophe Yoccoz para:

Teorema 9 (Teorema de Jakobson)**.** *Existe um conjunto $\Lambda \subset [-2, 0]$ de parâmetros denominados parâmetros estocásticos que satisfazem as propriedades seguintes:*

- $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{Leb(\Lambda \cap [-2,-2+\epsilon]}{Leb([-2,-2+\epsilon])} = 1$. *Em particular $Leb(\Lambda) > 0$.*
- *Para $c \in \Lambda$ existe uma medida invariante ergódica μ_c absolutamente contínua. Esta medida está suportada no intervalo $[f_c(0), f_c^2(0)]$.*
- *A medida μ_c tem exponente de Lyapunov χ_c estritamente positivo.*

[1]Petiano.
[2]Orientador.
[3]Tutora.

O objetivo principal deste trabalho é estudar conceitos da teoria ergódica e analisar as ideias da demonstração do Teorema 9 expostas em [1]. Concomitantemente, entender bases e aplicações importantes da Teoria da Medida e Integração, da Análise Real e Complexa e do estudo de Sistemas Dinâmicos.

Família Quadrática

Começamos nosso trabalho estudando a dinâmica de $f_c = x^2 + c$ para um parâmetro real c. O entendimento da dinâmica de um mapa $f : X \to X$ é baseada na compreensão do comportamento assintótico das órbitas dos pontos, isto é, o conjunto

$$\{f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}}(x) : \; n \in \mathbb{N}\},$$

ou com $n \in \mathbb{Z}$ caso f seja invertível. Para isto, os pontos que satisfazem $f^n(x) = x$ para algum n, chamados de pontos periódicos, determinam um papel crucial neste estudo.

Inicialmente, encontramos os pontos fixos de f_c:

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}, \qquad \alpha = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2},$$

notemos que para qualquer parâmetro $c > 1/4$, f_c não possui nenhum ponto fixo; qualquer $x \in \mathbb{R}$ é um ponto errante, isto é, $\lim_{n\to+\infty} |f^n(x)| = +\infty$.

Se $c = 1/4$, então $\alpha = \beta = 1/2$ e $f'_{\frac{1}{4}}(1/2) = 1$ (o único ponto fixo é parabólico); neste caso o ponto fixo atrai os pontos $x \in (-1/2, 1/2)$, e repele os demais:

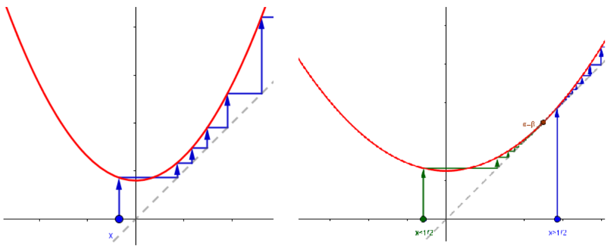


Figura 1: Iterados para f_c, à esquerda $c > 1/4$ e à direita $c = 1/4$.

Para $c < 1/4$, calculamos as derivadas de f_c e aplicamos no ponto fixo:

$$f'_c(\beta) = 1 + \sqrt{1-4c} > 1,$$

neste caso β é um ponto fixo repulsor (satisfaz $|f^n(x)-\beta| > |x-\beta|$, para x perto de β) para todo $c < 1/4$. Para estes parâmetros a única dinâmica interessante acontece no intervalo $I_c = [-\beta, \beta]$ (tanto β como $-\beta$ são repulsores), sendo que todos os outros pontos são errantes. Temos também que $f_c(I_c) \subset I_c$ só para $c \geq -2$. Em resumo, obtemos que

$$I_c = \mathbb{R} \setminus \{x : \lim_{n\to+\infty} |f_c^n(x)| = +\infty\}$$

para (e somente para) $c \in [-2, 1/4]$ como mostrado na Figura 2.

Para o ponto fixo α, temos:

$$f_c'(\alpha) = 1 - \sqrt{1-4c} \Rightarrow \begin{cases} \text{atrator, se } c \in (-3/4, 1/4) \\ \text{neutro, se } c = -3/4 \\ \text{repulsor, se } c < -3/4. \end{cases}$$

No caso em que α é atrator ($\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = \alpha$, para x perto de α) verifica-se diretamente que a órbita de todo ponto $x \in I_c \setminus \{-\beta, \beta\}$ converge a α.

Para $c < -3/4$, ambos os pontos fixos são repulsores, como o conjunto limite do $f_c|I_c$ é não vazio (e já sabemos que não pode conter $\pm\alpha, \pm\beta$), existe uma estrutura invariante que pode carregar uma dinâmica não trivial, como veremos em parâmetros que satisfazem o Teorema de Jakobson. No entanto, a possibilidade mais simples para tal estrutura são órbitas periódicas:

Definição 8. *Parâmetros hiperbólicos são os parâmetros $c \in \mathbb{R}$ tais que f_c possui um ciclo periódico $\{x_1, \ldots x_m\}$, com $f(x_i) = x_{i+1}$, $f(x_m) = x_1$ atrator,ou seja , tal que para Leb-quase todo $x \in I_c$ o conjunto $\{f^n(x) : \ n \geq 0\}$ acumula-se em $\{x_1, \cdots, x_n\}$.*

Teorema 10 (2)**.** *O conjunto de parâmetros $c \in [-2, 0]$ hiperbólicos é aberto e denso em $[-2, 0]$.*

Por fim, para parâmetros $c < -2$, já não temos mais $f_c(I_c) \subseteq I_c$, desta forma para avaliar a dinâmica dos pontos não errantes, estudamos o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} f_c^{-n}(I_c),$$

tal conjunto é o maximal invariante de f_c, que satisfaz $f_c(\Lambda) = \Lambda$. Verifica-se que a restrição $f_c|_\Lambda$ é conjugada ao shift de dois símbolos, isto é, existe um homeomorfismo $h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \Lambda$ tal que $f_c \circ h = h \circ \sigma$, onde $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é o shift $\sigma((a_n)_n) = (a_{n+1})_n$.

Com os dois teoremas apresentados, já percebemos que a família quadrática, apesar de aparentemente "simples" e bem compreendida, proporciona uma rica

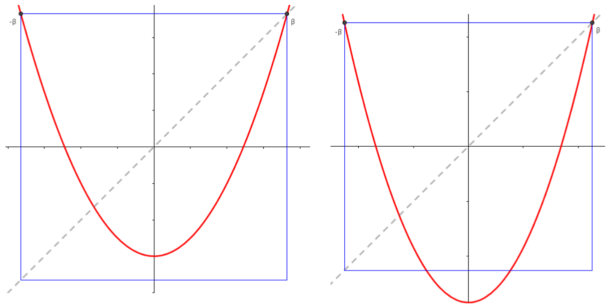


Figura 2: Funções f_c restritas ao intervalo I_c. À esquerda, ilustramos parâmetros $c \in (-2,0)$ $(f(I_c) \subset I_c)$, à direita parâmetros $c < -2$ $(f(I_c) \not\subset I_c)$.

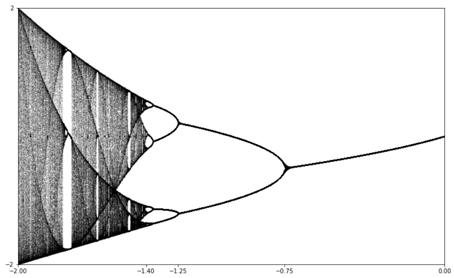


Figura 3: Diagrama de bifurcação de f_c, $c \in (-2,0)$.

discussão ao ser estudada do ponto de vista dinâmico. Uma amostra desta complexidade pode ser observada no diagrama abaixo que representa o aparecimento de novos ciclos atratores ao longo das funções f_c, $c \in (-2,0)$.

Neste sentido, ao longo dos estudos realizados nesta iniciação científica, focamos em entender as técnicas e raciocínios utilizados na prova do Teorema de Jakobson.

Teorema de Jakobson

Para entender a ideia da prova começaremos lembrando a construção de medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue (o qual denotaremos pela sigla em inglês acip) para mapas *expansores*. Um mapa $f:[0,1] \to [0,1]$ de classe C^1 é expansor se $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| > 1$. Para evitar considerações especiais na fronteira assumiremos que $f(0) = f(1) = 0$, e portanto f define um mapa diferenciável no círculo $f: S^1 \to S^1$.

Neste caso podemos mostrar que f é um mapa de cobrimento, e portanto existe uma partição $\{[x_i, x_{i+1}] : i = 0, \ldots, k-1\}$ de S^1 tal que a restrição $f| : (x_i, x_{i+1}) \to S^1 \setminus \{0\}$ é bijetora, e $f(x_i) = 0 \; \forall i$, podemos pensar no caso particular $f(x) = kx \pmod 1$:

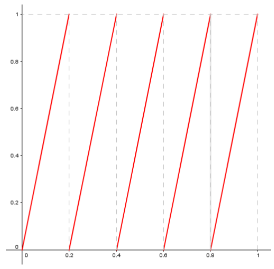


Figura 4: $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) = 5x \pmod 1$.

Fixemos um destes intervalos $I = [x_i, x_{i+1}]$, e suponhamos que $\mu = \rho dx$ é uma medida suportada em I, com ρ continua (ou diferenciável). Pelo teorema de mudança de variáveis, a medida $\mu_1 = f_*\mu = \rho_1 dx$, onde $\rho_1(x) = \frac{\rho \circ f^{-1}}{|f' \circ f^{-1}|}$. Como f^{-1} contrai, o efeito de compor com ela tem a propriedade de distribuir ρ mais uniformemente, e como dividimos por uma função com derivada de módulo maior que um, a resultante tem uma variação menor que a da função original. Com tudo isto, ρ_1 se distribui melhor que ρ a respeito da medida de Lebesgue.

O argumento agora pode se repetir com μ_1 (restringindo a cada $[x_i, x_{i+1}]$), obtendo assim uma sequência de medidas $(\mu_n = f_*\mu)_{n\geq 0}$ que se distribuem cada vez melhor com respeito à medida de Lebesgue. As médias de Césaro das μ_n têm portanto também esta propriedade, e qualquer ponto de acumulação destas médias é uma medida f-invariante. Se o mapa f for suficientemente regular ($\mathcal{C}^2$ por exemplo), a boa distribuição das médias passa ao limite, e obtemos uma acip.

Voltemos agora ao caso da família quadrática.

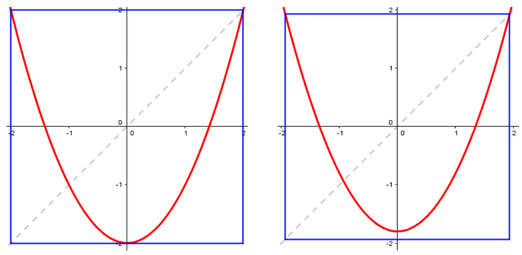


Figura 5: f_c para parâmetros com alto tempo de retorno do ponto crítico. À esquerda $f_{-2},\ c = -2$, e à direita ilustramos parâmetros $c \gtrsim -2$.

Consideremos primeiro o caso $c = -2$. O mapa correspondente não é expansor no intervalo $[-1/2, 1/2]$. O maior obstáculo para a expansão uniforme é claramente o ponto crítico: pontos perto deste não terão expansão por um iterado. Mas observemos que o ponto crítico não volta perto de si mesmo, e de fato sua imagem nunca retorna ($f_{-2}^2(0) = 2$, e $f_{-2}^n(2) = 2$ para todo $n \geq 0$), o que implica que órbitas que eventualmente chegam perto do ponto crítico tendem a "ir embora" e demoram muitos iterados para retornar à zona de pouca expansão.

Durante estes iterados o mapa se comporta como se fosse expansor, e isto nos dá um indício de que o mesmo mecanismo que garante a existência de acip para mapas expansores deveria ainda funcionar neste caso. De fato, para o caso específico do parâmetro $c = -2$ este argumento pode ser formalizado.

Para $c \gtrsim -2$, o ponto crítico não necessariamente fica longe da zona de pouca expansão, porém é razoável pensar que demora muitos iterados para voltar perto de si, e o argumento poderia ainda valer para estes parâmetros. Lamentavelmente (ou não) esta ideia simples de que o ponto crítico demora muito para voltar não é verdadeira em geral: é verdadeira para "muitos" parâmetros (no sentido da medida de Lebesgue), e para estes é que pode se provar a existência da acip.

Neste sentido, a prova deste teorema passa-se por duas partes, primeiro encontrar parâmetros $c \in [-2, 0]$ para os quais a função f_c apresenta esta propriedade e mostrar, por um método construtivo, que esta função admite uma acip com as propriedades desejadas. Em seguida, consiste na prova que, de fato, a medida que o parâmetro c aproxima-se de -2, o tempo de retorno do ponto crítico à zona em que não há expansão fica cada vez maior, e que isto determina a crescente probabilidade de parâmetros estocásticos no espaço de parâmetros.

Resultados e Discussões

Por se tratar de um primeiro contato com a área de Sistemas Dinâmicos, esta iniciação científica passou por algumas etapas. Iniciou-se com um estudo de diferentes sistemas unidimensionais e envolveu estudos para obtenção conhecimentos necessários para o entendimento das ferramentas utilizadas por Jean-Christophe Yoccoz, focando no estudo da Teoria da Medida e da Análise Complexa.

Antes de iniciarmos o estudo do texto [1], discutimos amplamente a dinâmica da família quadrática e a complexidade encontrada nesta família, é importante ressaltar que, apesar de se tratar de um caso particular, as ideias utilizadas no estudo desta família podem e são utilizados em contextos mais gerais.

Por fim, fizemos um estudo detalhado da prova do Teorema de Jakobson por Yoccoz, ao longo do qual escrevemos Notas a respeito do tema que podem ser encontradas em [4]. Em seguida, este trabalho de IC foi apresentado em um seminário no IMPA em dezembro de 2020 e em um na UFMG em julho de 2021.

Deste modo, ressaltamos que o caráter funcional da primeira parte desta prova, no qual constrói-se uma acip para determinados parâmetros, e o caráter combinatório da segunda parte possibilitam uma ampla discussão e profundidade para o estudo, mostrando assim como a área de sistemas dinâmicos pode envolver diferentes análises e perspectivas.

Referências Bibliográficas

[1] YOCCOZ, J. C. A proof of Jakobson's Theorem. Strong Regularity, Asterisque, no. 510, p. 15-52, **2015**.

[2] LYUBICH, M. Dynamics of quadratic polynomials, I-II, Acta Mathematica, Acta Math, vol. 178(2), no. 2, p. 185–297, **1997**.

[3] LASOTA, A.; YORKE, J. A. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 186, p. 481–488, **1973**.

[4] CARRASCO, P.D.; JANEIRO, V. Prova de Yoccoz do teorema de Jakobson. Disponível em: https://www.pdcarrasco.com/courses/463, Acesso em: 20/07/2021, **2021**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Iniciação Científica

Grupos fundamentais de superfícies e teoremas de separação

Gustavo Sylvio de Paula Menani. Bruno Mendonça Rey dos Santos
Departamento de Matemática - Universidade Estadual de Londrina
gustavo.menani@uel.br, srmbruno@gmail.com

Trabalho de iniciação científica

Palavras-chave: Homotopias; Grupo fundamental; Componentes; Teorema da curva de Jordan.

Introdução e metodologia

A Topologia Algébrica associa estruturas algébricas a espaços topológicos e com isso se torna uma ferramenta poderosa para resolver problemas de diversas áreas, como, por exemplo, identificar quando dois espaços são homeomorfos. Alguns dos conceitos fundamentais para fazer tal associação são homotopia, grupo fundamental e espaços de recobrimento, com eles veremos resultados interessantes envolvendo superfícies. Além disso, veremos alguns teoremas de separação, que são afirmações fáceis de visualizar mas que exigem diversos conceitos da Topologia para serem demonstradas.

O trabalho foi desenvolvido através do estudo da referência [1], onde podem ser encontradas todas as demonstrações dos resultados aqui apresentados.

Definições e resultados

Definição 9. *Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos, dizemos que f é* ***homotópica*** *a g se existe $F : X \times [0,1] \to Y$ contínua com $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A função F é chamada de* ***homotopia*** *entre f e g.*

Quando $X = [0,1]$, f e g possuem os mesmos pontos inicial e final, isto é, $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ e, ainda, $F(0,t) = f(0)$ e $F(1,t) = f(1)$ para todo $t \in [0,1]$, dizemos que f e g são ***caminhos homotópicos****. Essa relação será denotada por $f \simeq g$.*

A relação de homotopia é relação de equivalência. As classes dos caminhos serão representadas por [ ].

Definição 10. *Sejam $f, g : [0,1] \to Y$ caminhos com $f(1) = g(0)$, então o* ***produto entre*** *f* ***e*** *g, denotado por $f * g$, é o caminho de $f(0)$ a $g(1)$ dado por*

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Ainda, se f' e g' são caminhos com $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, vale que $(f * g) \simeq (f' * g')$. Portanto, podemos considerar a operação $*$ definida para as classes de equivalência:

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Quando fixamos $x_0 \in X$ e restringimos o conjunto das classes apenas a caminhos que possuem x_0 como ponto final e inicial (caminhos fechados/ciclos), o conjunto das classes de equivalência, juntamente com o produto entre classes, constitui um grupo. O que motiva a próxima definição.

Definição 11. *Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$, o grupo formado pelo conjunto das classes de caminhos fechados em x_0 juntamente com a operação $*$ é chamado de* ***grupo fundamental*** *de X em x_0 e denotado por $\pi_1(X, x_0)$*

Proposição 1. *Dados X e Y espaços topológicos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ e $h : X \to Y$ uma função contínua com $h(x_0) = y_0$, a seguinte função entre os grupos fundamentais de X e Y está bem definida e é um homomorfismo:*

$$\begin{aligned} h_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto h_*([f]) = [h \circ f]. \end{aligned}$$

Ademais, se h é homeomorfismo, então h_* é isomorfismo.

Disso segue que espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos (em cada par de pontos correspondentes por um homeomorfismo). Como consequência obtemos um critério para identificar quando dois espaços não são homeomorfos.

A seguir veremos outro conceito essencial no estudo dos grupos fundamentais.

Definição 12. *Seja $p : X \to Y$ contínua e sobrejetora. Um aberto $U \subset Y$ é dito* ***uniformemente coberto*** *por p se $p^{-1}(U)$ pode ser escrito como união de abertos disjuntos $\{V_\alpha\}$ de X de forma que $p|_{V_\alpha}$ é homeomorfismo de V_α em U.*

Se todo ponto $y \in Y$ possui uma vizinhança que é uniformemente coberta por p, então p é chamada de ***aplicação de recobrimento*** *e X é chamado de* ***espaço de recobrimento*** *de Y.*

Exemplo 9. *A função* $p : \mathbb{R} \to S^1$ *que leva* $x \in \mathbb{R}$ *em* $(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ *é aplicação de recobrimento da reta no círculo* S^1*.*

Definição 13. *Sejam* $p : X \to Y$ *e* $f : Z \to Y$ *funções com* f *contínua. Um* ***levantamento*** *de* f *é uma função* $\overline{f} : Z \to X$ *tal que* $p \circ \overline{f} = f$*.*

Quando p é aplicação de recobrimento, os levantamentos adquirem propriedades bastante úteis:

Proposição 2. *Sejam* $p : X \to Y$ *aplicação de recobrimento,* $x_0 \in X$ *e* $p(x_0) = y_0$*. Um caminho* $f : [0,1] \to Y$ *com* $f(0) = y_0$ *possui um único levantamento contínuo* $\overline{f}$ *com* $\overline{f}(0) = x_0$*.*

Além disso, se $g : [0,1] \to Y$ *é um caminho de* y_0 *a* $y_1 = f(1)$ *homotópico a* f *e* $\overline{g}$ *é levantamento contínuo de* g *começando em* x_0*, então* $\overline{f} \simeq \overline{g}$*.*

Esse resultado nos permite enunciar a próxima definição:

Definição 14. *Sejam* $p : X \to Y$ *aplicação de recobrimento e* $y_0 \in Y$*. Tome* $x_0 \in X$ *de forma que* $p(x_0) = y_0$*. Dado* $[f] \in \pi_1(Y, y_0)$*, denote por* $\overline{f}$ *o levantamento de* f *que começa em* x_0*. Definimos*

$$\phi : \pi_1(Y, y_0) \to p^{-1}(y_0)$$

de forma que $\phi([f]) = \overline{f}(1)$*. A aplicação* ϕ *é chamada de* ***correspondência de levantamentos*** *e está bem definida, dado que, para quaisquer dois ciclos homotópicos* f *e* g *em* $\pi_1(Y, y_0)$ *e fixado* $x_0 \in X$*, os levantamentos (únicos) de* f *e* g *começando em* x_0 *são homotópicos e, portanto, possuem o mesmo ponto final.*

Definição 15. *Um espaço topológico* X *é dito* ***simplesmente conexo*** *se é conexo por caminhos e, para todo ponto de* X*, o grupo fundamental no ponto consiste apenas no elemento neutro.*

Exemplo 10. *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *é simplesmente conexo para todo* $n \geq 1$*: dados dois ciclos* f *e* g *em* $\mathbb{R}^n$ *no mesmo ponto, a função* F *de* $[0,1] \times [0,1]$ *em* $\mathbb{R}^n$ *que leva* (s,t) *em* $(1-t)f(s) + tg(s)$ *é homotopia de caminhos entre* f *e* g*, logo* $[f] = [g]$*.*

Proposição 3. *Seja* $p : X \to Y$ *aplicação de recobrimento com* $p(x_0) = y_0$*. Se* X *é conexo por caminhos então a correspondência de levantamentos (em* x_0*)* $\phi : \pi_1(Y, y_0) \to p^{-1}(y_0)$ *é sobrejetora. Ademais, se* X *é simplesmente conexo,* ϕ *é bijetora.*

Proposição 4. *O grupo fundamental de* S^1 *é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.*

Demonstração. Considere p a aplicação de recobrimento do Exemplo 9, $x_0 = 0$ e $y_0 = p(x_0) = (1, 0)$. Note que $p^{-1}(y_0) = \mathbb{Z}$ e, como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, a Proposição 3 nos garante que a correspondência $\phi : \pi_1(S^1, y_0) \to \mathbb{Z}$ é uma bijeção.

A verificação de que ϕ é homomorfismo se encontra no Teorema 54.5 de [1]. Além disso, como S^1 é conexo por caminhos, o grupo fundamental independe do ponto y_0 escolhido (Corolário 52.2 de [1]). $\square$

Esse resultado, juntamente com o próximo, nos permite calcular o grupo fundamental de uma superfície conhecida: o toro.

Proposição 5. *Sejam X e Y espaços topológicos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ e p e q as projeções de $X \times Y$ em X e Y, respectivamente. Nessas condições, a função definida por $\Phi = (p_*, q_*)$ é um isomorfismo de $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ em $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Corolário 3. *O grupo fundamental do toro $T = S^1 \times S^1$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Com a próxima proposição é possível calcular o grupo fundamental da esfera S^2.

Proposição 6. *Seja X é um espaço que pode ser escrito como união de dois abertos simplesmente conexos U e V onde a interseção $U \cap V$ é conexa por caminhos, então X é simplesmente conexo.*

Proposição 7. *A n-esfera S^n, com $n \geq 2$, é simplesmente conexa.*

Demonstração. Considere $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $q = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. A projeção estereográfica f é homeomorfismo entre $S^n - p$ e $\mathbb{R}^n$ (Teorema 59.3 de [1]):

$$f : (S^n - p) \to \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Agora, sejam $U = S^n - p$ e $V = S^n - q$ abertos de S^n. Como a reflexão na última coordenada é um homeomorfismo entre U e V, então U e V são conexos por caminhos, pois são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$.

Além disso, U e V são simplesmente conexos e sua interseção $S^n - p - q$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n - 0$ pela projeção estereográfica, que é conexo por caminhos para $n \geq 2$. Portanto, pela Proposição 6, S^n é simplesmente conexo. $\square$

Outra superfície que pode ter seu grupo fundamental calculado com a Proposição 3 é o plano projetivo.

Exemplo 11. *Relacionando os pontos antipodais de S^2 obtemos um espaço quociente chamado de plano projetivo (P^2), onde a função quociente $p : S^2 \to P^2$ é uma aplicação de recobrimento (Teorema 60.3 de [1]). Com isso, podemos aplicar a Proposição 3 e concluir que existe uma bijeção entre $\pi_1(P^2, x)$ e $p^{-1}(x)$, para $x \in P^2$, pois S^2 é simplesmente conexo. Mas como p relaciona pares de pontos, obtemos:*

Proposição 8. *O grupo fundamental de P^2 possui dois elementos, ou seja, é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.*

Com isso obtemos que S^2, T e P^2 são superfícies topologicamente distintas, afinal possuem grupos fundamentais não isomorfos.

Agora veremos algumas definições e resultados sobre componentes e separações, que também derivam do estudo de homotopias e grupos fundamentais.

Definição 16. *Sejam $x, y \in X$, defina uma relação de equivalência $\sim$ da seguinte forma: $x \sim y$ se existe um subespaço conexo de X contendo x e y. As classes de equivalência de $\sim$ são chamadas **componentes** de X.*

As componentes são os conexos disjuntos cuja união é X, de forma que qualquer conexo de X só intersecta uma componente.

O próximo resultado garante que, se $x \in S^2$, um homeomorfismo de $S^2 - \{x\}$ em $\mathbb{R}^2$ leva vizinhanças de x em conjuntos ilimitados.

Proposição 9. *Seja $C \subset S^2$ um subespaço compacto e $x \in S^2 - C$. Tome $h : S^2 - \{x\} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo e U uma componente de $S^2 - C$. Se $x \notin U$, então $h(U)$ é uma componente limitada de $\mathbb{R}^2 - h(C)$. Se $x \in U$, então $h(U - \{x\})$ é uma componente ilimitada de $\mathbb{R} - h(C)$. Em particular, se $S^2 - C$ possui n componentes, então $\mathbb{R}^2 - h(C)$ possui n componentes.*

Agora veremos que funções que levam compactos em $S^2 - \{a, b\}$ $(a, b \in S^2)$ podem ser deformadas em um ponto, caso a e b não estejam em componentes distintas, isto é, não estão no "meio do caminho" da deformação.

Proposição 10. *Sejam $a, b \in S^2$, A compacto e $f : A \to S^2 - \{a, b\}$ contínua. Se a e b estão na mesma componente de $S^2 - f(A)$, então f é homotópica a uma função constante.*

Adicionando a hipótese de que f é injetiva, temos a recíproca, conhecida como Lema de Borsuk:

Proposição 11. *Sejam $a, b \in S^2$, A compacto e $f : A \to S^2 - \{a, b\}$ contínua e injetora. Se f é homotópica a uma constante, então a e b estão na mesma componente de $S^2 - f(A)$.*

Exemplo 12. *Se f não for injetiva, a proposição deixa de ser válida: considere $a = (0,0,1)$, $b = (0,0,-1)$ e $f : [0,1] \to S^2 - \{a,b\}$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$. Essa função é contínua e definida num compacto, porém $f(0) = f(1)$.*

Note que a e b estão em hemisférios distintos, que são as componentes de $S^2 - f([0,1])$. Por outro lado, a função F de $[0,1] \times [0,1]$ em $S^2 - \{a,b\}$ dada por

$$F(s,t) = (\cos(2\pi st), \sin(2\pi st), 0)$$

é homotopia em f e a função constante em $(1,0,0)$.

Com estes resultados e as definições que seguem é possível demonstrar os teoremas de separação.

Definição 17. *Se X é um espaço conexo e $Y \subset X$, dizemos que Y **separa** X se $X - Y$ não é conexo. Se $X - Y$ possui n componentes, então Y separa X em n componentes.*

Definição 18.

- *Um **arco** é um espaço homeomorfo ao intervalo $[0,1]$.*
- *Uma **curva simples fechada** é um espaço homeomorfo a S^1.*

Proposição 12. *Se C é uma curva simples fechada em S^2 e D é um arco em S^2, então C separa S^2 e D não separa.*

Por fim, temos o Teorema da curva de Jordan:

Teorema 11. *Seja C uma curva simples fechada em S^2. Então C separa S^2 em exatamente duas componentes conexas, sendo que a fronteira de cada uma das componentes é igual a C.*

Denote por A e B as componentes de $S^2 - C$ e tome $x \in S^2$ tal que $x \notin C$. Suponha, sem perda de generalidade, $x \in A$. Existe um homeomorfismo h entre $S^2 - \{x\}$ e $\mathbb{R}^2$. Pela Proposição 9, $h(C)$ separa $\mathbb{R}^2$ em duas componentes: $h(A - \{x\})$, que é ilimitada, e $h(B)$, que é limitada. Com isso, o teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja C um curva simples fechada em $\mathbb{R}^2$. Então C separa $\mathbb{R}^2$ em exatamente duas componentes conexas, sendo que uma é limitada, a outra ilimitada e a fronteira de cada uma é igual a C.

Conclusão

Podemos perceber que usando apenas conceitos introdutórios da Topologia Algébrica conseguimos diversos resultados importantes, assim como a possibilidade de aplicá-los em diferentes áreas da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] MUNKRES, J. R.; ***Topology***, Upper Saddle River, **2000**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Iniciação Científica

Isometrias do Plano Euclidiano de dimensão 2

Anderson Moreira da Silva. Prof[a]. Dr[a]. Patrícia Kruse Klaser
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Santa Maria
anderson.moreira@acad.ufsm.br, patricia.klaser@ufsm.br
Trabalho de iniciação científica (PET Matemática da UFSM)
Palavras-chave: Plano Euclidiano; Isometrias; Reflexões.

Introdução

As isometrias desempenham um papel muito importante no estudo da Geometria. Neste texto, iremos estudar as isometrias do plano euclidiano de dimensão 2, o qual denotaremos por $\mathbb{R}^2$. Apresentaremos um resultado, sem demonstrá-lo, que diz que dada uma isometria $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ distinta da identidade, temos que φ é uma reflexão em reta, uma translação, uma rotação ou uma reflexão em reta com deslizamento. Além disso, serão apresentadas algumas definições e outros resultados importantes acerca do estudo das transformações $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que são isometrias e demonstraremos um resultado importante da teoria das isometrias do plano, que diz que toda isometria pode ser escrita como a composição de, no máximo, três reflexões em retas.

Do ponto de vista dos espaços métricos, dados dois espaços métricos quaisquer (X, d_X), (Y, d_Y), onde d_X e d_Y são as métricas definidas nos conjuntos X e Y, respectivamente, diz-se que uma aplicação bijetiva $f : X \to Y$ é uma isometria se $d_X(P, Q) = d_Y(f(P), f(Q))$ para quaisquer $P, Q \in X$. Para o nosso caso, os espaços de partida e chegada irão coincidir com o espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d)$, onde d é a métrica euclidiana.

Metodologia

Este trabalho foi concebido durante as atividades de iniciação cientifica desenvolvidas pelos autores através de estudo de material bibliográfico e encontros de discussão semanais.

Resultados e Discussões

Neste trabalho, iremos estudar as isometrias do plano euclidiano de dimensão 2, ou seja, estudaremos as isometrias do espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d)$, onde $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a métrica euclidiana

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Para o nosso caso particular, a definição de isometria é a seguinte.

Definição 19 (Isometria do plano euclidiano)**.** *Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função bijetiva. Dizemos que φ é uma isometria se para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$, valer:*

$$d(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q)).$$

Como um exemplo de isometria, temos a identidade $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $Id(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$. De fato, se $P, Q \in \mathbb{R}^2$, então $d(P, Q) = d(Id(P), Id(Q))$, pois $Id(X) = X$, por definição.

Lema 1. *Composição de isometrias é uma isometria*

Demonstração

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ duas isometrias quaisquer. Então, considerando quaisquer $P, Q \in \mathbb{R}^2$, como f é uma isometria, temos que $d(f(g(P)), f(g(Q))) = d(g(P), g(Q))$. Ainda, como g também é isometria, segue que $d(f(g(P)), f(g(Q))) = d(g(P), g(Q)) = d(P, Q)$. Consequentemente, para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$, temos que $d(P, Q) = d(f(g(P)), f(g(Q)))$, ou seja, $f \circ g$ é uma isometria. $\square$

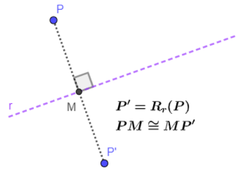
Definiremos, a seguir, algumas transformações do plano no plano, as quais são isometrias e, além disso, apresentaremos um resultado que diz que qualquer isometria do plano euclidiano, distinta da identidade, é de um dos tipos apresentados a seguir.

Definição 20 (Reflexão em reta)**.** *Seja r uma reta e defina a função $R_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:*

$$R_r(P) = \begin{cases} P \quad , & \textit{se } P \in r \\ P' \quad , & \textit{tal que } r \textit{ é mediatriz do segmento } PP', \textit{ se } P \notin r. \end{cases}$$

A figura 1, a seguir, ilustra a ação da função R_r, no caso em que $P \notin r$.

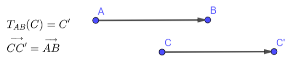
Figura 1: Reflexão de um ponto $P \notin r$.



Fonte: O Autor (2021).

Definição 21 (Translação)**.** *Sejam A e B pontos de $\mathbb{R}^2$ e defina a translação pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, $T_{\overrightarrow{AB}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T_{\overrightarrow{AB}}(P) = P'$, onde P' é o único ponto do plano $\mathbb{R}^2$ tal que $ABP'P$ é um paralelogramo (Figura 2).*

Figura 2: Translação aplicada num ponto C.



Fonte: O Autor (2021).

Definição 22 (Rotação)**.** *Sejam O um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\alpha = \angle(OA, OC)$ um ângulo orientado. Se $P \in \mathbb{R}^2 \backslash O$, então seja P' o único ponto do plano euclidiano que satisfaz $\angle(OP, OP') = \angle(OA, OC)$ e $OP' = OP$. Defina a aplicação $R_{O,\alpha}$ do plano no plano da seguinte forma:*

$$R_{O,\alpha}(P) = \begin{cases} O & , \quad se\ P = O; \\ P' & , \quad se\ P \neq O. \end{cases}$$

Tal aplicação é chamada de rotação de centro O e ângulo α (Figura 3).

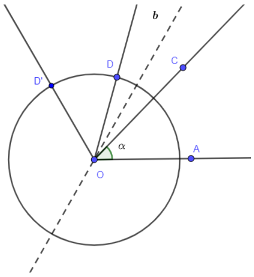
Definição 23 (Reflexão com deslizamento)**.** *Sejam r uma reta e $\vec{u}$ um vetor paralelo à reta r. A reflexão com deslizamento, determinada por r e $\vec{u}$ é a transformação $T_{\vec{u}} \circ R_r$, que é a composição da translação pelo vetor $\vec{u}$ com a reflexão em r (Figura 4).*

É possível mostrar que $R_r \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ R_r$ para qualquer reta r e qualquer vetor $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ paralelo à r.

Apresentamos, a seguir, um resultado acerca de isometrias do plano euclidiano que usaremos na demonstração do resultado principal.

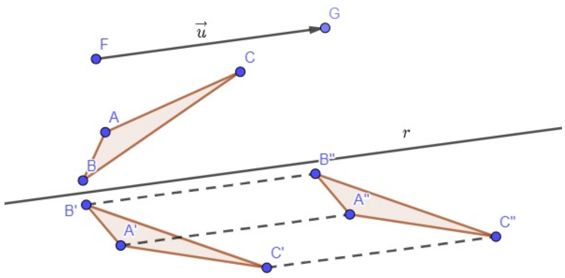
Lema 2. *(i) Se uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fixa três pontos não colineares, então $T = Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;*

Figura 3: Rotação aplicada num ponto D, distinto de O, seu centro de rotação.



Fonte: O Autor (2021).

Figura 4: Reflexão com deslizamento aplicada num triângulo ABC.



Fonte: O Autor (2021).

(ii) Se duas isometrias coincidem em três pontos não colineares, então são iguais.

Um outro resultado importante, mas que não iremos utilizar, é o seguinte:

Lema 3. *(i) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria distinta da identidade, então T é reflexão, translação, rotação, ou reflexão com deslizamento;*

(ii) Toda isometria preserva ângulos.

Os resultados acima não serão demonstrados aqui, pois a prova é longa. Entretanto, o leitor interessado em obter uma prova pode consultar a referência [2], onde o autor demonstra esses resultados item por item, ao longo do texto.

Apresentaremos agora o resultado principal do trabalho e, em seguida, faremos uma demonstração para o mesmo.

Teorema 12. *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria, então f é a composição de, no máximo, três reflexões em retas.*

Para demonstrar este resultado, buscarei ser mais breve, porém, menos intuitivo. A referência [2] apresenta uma demonstração fragmentada, onde o autor demonstra, que dada uma isometria qualquer do plano no plano, então a mesma é de um dos tipos apresentados acima e, em seguida, para cada tipo de isometria, mostra que pode ser escrita como a composição de, no máximo, três reflexões em retas. Porém, esse processo é longo e, portanto, tomaremos um atalho, assim como é apresentado na referência [1].

Demonstração

Para encontrar uma demonstração, dividirei o problema em casos e aplicarei os resultados mencionados anteriormente. Para isso, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria e considere A, B e C três pontos não colineares de $\mathbb{R}^2$ quaisquer. Considere, ainda, as seguintes notações: $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$.

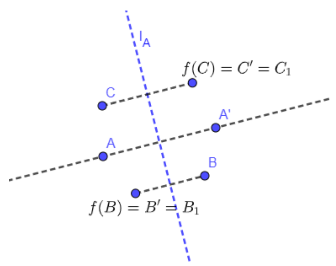
(1) Suponha $A' = A$, $B' = B$ e $C' = C$.

Como f fixa três pontos, então $f = Id = R_l \circ R_l$, onde R_l é a reflexão em l, com l sendo qualquer reta.

(2) Suponha que $A' \neq A$ e sejam l_A a mediatriz do segmento $A'A$ e R_{l_A} a reflexão em l_A. Definamos $R_{l_A}(B) := B_1$ e $R_{l_A}(C) := C_1$.

(2.1) Suponha que $B_1 = B'$, $C_1 = C'$ (Figura 5).

Figura 5: Caso 2.1



Fonte: O Autor (2021).

Como $R_{l_A}(A) = A'$, então

$$R_{l_A}(A) = A' = f(A); R_{l_A}(B) = B' = f(B); \text{ e}$$

$$R_{l_A}(C) = C' = f(C).$$

Usando o fato de que se duas isometrias coincidem em três pontos não colineares então são iguais, segue que $R_{l_A} = f$.

(2.2) Suponha $B_1 \neq B'$ ou $C_1 \neq C'$. Consideremos $B_1 \neq B'$ e seja l_B a mediatriz do segmento B_1B'.

Primeiramente, como as funções envolvidas são isometrias, segue

$$d(R_{l_A}(A), R_{l_A}(B)) = d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

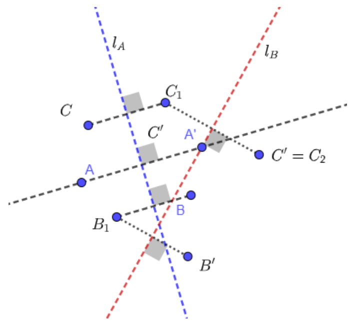
que equivale a

$$d(A', B_1) = d(A', B').$$

Dessa forma, $A' \in l_B$ e, consequentemente, $R_{l_B}(A') = A'$.

Por conseguinte, $h = R_{l_B} \circ R_{l_A}$ é tal que $h(A) = A'$, $h(B) = R_{l_B}(B_1) = B'$ e $h(C) = C_2$. Se $C_2 = C'$, então $h = f$, pelo Lema 2 (Figura 6).

Figura 6: Caso 2.2



Fonte: O Autor (2021).

(2.3) Caso contrário, seja l_C a mediatriz do segmento C_2C' e considere R_{l_C} a reflexão nesta mediatriz.

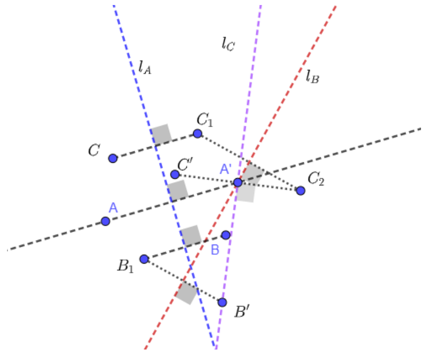
Provemos que os pontos A' e B' pertencem à reta l_C. De fato, como as funções $h = R_{l_B} \circ R_{l_A}$ e f são isometrias, segue que:

$$\begin{gathered} d(h(A), h(C)) = d(f(A), f(C)) \\ \Updownarrow \\ d(A', C_2) = d(A', C'), \text{e} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} d(h(B), h(C)) = d(f(B), f(C)) \\ \Updownarrow \\ d(B', C_2) = d(B', C'). \end{gathered}$$

Logo, $A', B' \in l_C$ e, consequentemente, considerando $g = R_{l_C} \circ R_{l_B} \circ R_{l_A}$, temos que $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ e $g(C) = C'$. Aplicando o Lema 2, segue que $f = g$ (Figura 7).

Figura 7: Caso 2.3



Fonte: O Autor (2021).

Dessa forma, considerando todos os casos acima, temos que qualquer isometria do plano no plano pode ser escrita como a composição de, no máximo, três reflexões em retas.

Conclusão

Como vimos, as isometrias do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ distintas da identidade são de quatro tipos, sendo elas, as reflexões em retas, as translações, as rotações e, por fim, as reflexões com deslizamento. Vimos ainda, que dada uma isometria qualquer, sempre podemos escrevê-la como a composição de, no máximo, três reflexões em retas.

Com relação à continuação das atividades de iniciação científica vamos estudar as isometrias do plano hiperbólico. Nele adotaremos o modelo do semiplano superior de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ e estudaremos uma classificação semelhante à que apresentamos neste texto.

Referências Bibliográficas

[1] BACALHAU, F. M. **Isometrias do plano e Simetria**. 2012. 41 p. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, **2012**. Disponível em: `https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8852/1/ulfc104259tmFernandoBacalhau.pdf`. Acesso em: 23 de jul. 2021.

[2] LIMA, E. L. *Isometrias*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, **1996**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Isotopismos de quasegrupos

Gabriel Simão Mucci, Dylene Agda Souza de Barros
FAMAT (Faculdade de Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia
gabriel.mucci@ufu.br, dylene@ufu.br
Trabalho de iniciação científica
Palavras Chaves: Quasegrupos; Loops; Isomorfismos; Isotopismos de quasegrupos.

Introdução

Para duas das operações, vistas no ensino básico, não vale a propriedade associativa e esse fato, por si só, já justificaria o estudo das estruturas não associativas. Entretanto, a teoria de quasegrupos e loops é uma área da Matemática razoavelmente recente cujas raízes vêm da geometria, álgebra e combinatória. Os primeiros trabalhos sobre anéis alternativos surgiram com Ruth Moufang na década de 1930. Nesse trabalho, apresentamos o conceito de quasegrupos e loops que são, em um certo sentido, generalizações de grupos e o conceito de isotopismo, que pode ser visto como uma generalização de isomorfismos, mas que é relevante apenas para estruturas não associativas.

Quasegrupos e Loops

Nesta seção apresentaremos os primeiros objetos do nosso trabalho, que é base para o seu desenvolvimento.

Seja $(G, \cdot)$ um grupóide, isto é, G é um conjunto não vazio e "$\cdot$" é uma operação binária em G e seja a um elemento de fixado em G. Definimos as **funções de translação à esquerda** e **à direita**, $L(a), R(a) : G \to G$, respectivamente, por

$$xL(a) = a \cdot x \ \text{ e } \ xR(a) = x \cdot a, \text{ para todo } x \in G.$$

Definição 24. *O grupóide* $(G, \cdot)$ *é comutativo quando* $L(a) = R(a)$ *para todo* $a \in G$.

Definição 25. *O grupóide* $(G, \cdot)$ *é associativo é quando* $R(ab) = R(a)R(b)$ *para todo* $a, b \in G$.

Um grupóide $(G, \cdot)$ é chamado **quasegrupo** se as funções $L(a) : G \to G$ e $R(a) : G \to G$ são bijetoras, para todo $a \in G$. Equivalentemente, dados a equação $x \cdot y = z$ e quaisquer dois elementos de $\{x, y, z\} \subset G$, pode-se determinar o terceiro elemento. Consequentemente em um quasegrupo são válidas as leis de cancelamento à direita e à esquerda, para $a, x, y \in G$

$$x \cdot a = y \cdot a \implies x = y \quad \text{e}$$
$$a \cdot x = a \cdot y \implies x = y.$$

O próximo resultado nos fala das consequências da associatividade em um quasegrupo.

Teorema 13. *Se* $(G, \cdot)$ *é um quasegrupo associativo, então* $(G, \cdot)$ *tem um (único) elemento identidade.*

Demonstração. Como $G \neq \emptyset$, tome $a \in G$. Sabemos que existe $\varrho \in G$, tal que $a \cdot \varrho = a$. Seja b qualquer elemento em G. Novamente, existe $y \in G$ tal que $y \cdot a = b$. Segue-se que

$$bR(\varrho) = b \cdot \varrho = (y \cdot a)\varrho = yR(a)R(\varrho) = yR(a \cdot \varrho) = yR(a) = y \cdot a = b.$$

Portanto, $R(\varrho) : G \to G$ é a função identidade em G, e, portanto, ϱ é o elemento identidade à direita para $(G, \cdot)$. Agora, novamente, seja b qualquer elemento de G. Temos

$$b \cdot b = (b \cdot \varrho)b = bR(\varrho)R(b) = bR(\varrho \cdot b) = b(\varrho \cdot b).$$

Pelo cancelmaneto à esquerda, notamos que $b \cdot b = b(\varrho \cdot b)$ implica $b = \varrho \cdot b$. Assim, $bL(\varrho) = b$ para $\forall\ b \in G$. Portanto, ϱ é elemento identidade para $(G, \cdot)$. Se $\varrho' \in G$ é um elemento identidade, $\varrho' = \varrho' \cdot \varrho = \varrho$. Logo, $(G, \cdot)$ possui um único elemento identidade. □

Observe que em um quasegrupo associativo, se ϱ é seu elemento identidade, as equações $ax = \varrho$ e $ya = \varrho$ possuem respectivas soluções a^ρ e a^λ. Daí, usando a propriedade associativa, temos

$$a^\rho = \varrho a^\rho = (a^\lambda a)a^\rho = a^\lambda(aa^\rho) = a^\lambda \varrho = a^\lambda.$$

Portanto, **grupos** são, precisamente, aqueles quasegrupos que são associativos. Entretanto, existem quasegrupos, com elemento identidade, que não são associativos.

Definição 26. *Um loop é um quasegrupo $(G, \cdot)$ que possui elemento identidade.*

Considere o seguinte exemplo:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	5	1	2	4
4	4	3	5	1	2
5	5	4	3	2	1

Temos que $(G, \cdot)$ é um quasegrupo, pois cada elemento aparece uma, e somente uma, vez em cada linha e coluna de sua Tábua de Cayley. Além disso, 1 é claramente o elemento identidade de $(G, \cdot)$. Entretanto, $(G, \cdot)$ não é associativo, pois $3R(3 \cdot 4) \neq 3R(3)R(4)$.

Isotopismos

Nesta seção apresentamos o conceito de isotopismo, que pode ser visto como uma generalização do conceito de isomorfismo, relevante apenas para quasegrupos não associativos.

Definição 27. *Uma tripla (α, β, γ) de bijeções de um cojunto G em um conjunto H, é chamada de* ***isotopismo*** *de um grupóide $(G, \cdot)$ em um grupóide $(H, \circ)$ se*

$$x\alpha \circ y\beta = (x.y)\gamma$$

para todo $x, y \in G$. $(H, \circ)$ é então chamado um ***isótopo*** *de $(G, \cdot)$, e os grupóides $(G, \cdot)$ e $(H, \circ)$ são chamados* ***isotópicos*** *um para o outro.*

Segue-se que a bijeção $\theta : G \to H$ é um isomorfismo de $(G, \cdot)$ para $(H, \circ)$ se, e somente se, (θ, θ, θ) é um isotopismo de $(G, \cdot)$ em $(H, \circ)$. Consequentemente, grupóides isomorfos são isotópicos. Por outro lado, loops isotópicos não são necessariamente isomorfos. A tabela a seguir compara o número de loops, a menos de isomorfismos e a menos de isotopia, em relação a ordem do loop.

Ordem do loop	1	2	3	4	5	6	7
Número de classes de isomorfia	1	1	1	2	6	109	23.750
Número de classes de isotopia	1	1	1	2	2	22	563

Se $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ é um isotopismo de um grupóide $(G, \cdot)$ em um grupóide $(H, \circ)$ e $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ é um isotopismo de $(H, \circ)$ em um grupoíde $(K, \star)$, então temos que $(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2)$ é um isotopismo de $(G, \cdot)$ em $(K, \star)$.

Definição 28. *Sejam α e β permutações de G e ι a função identidade em G. Assim, (α, β, ι) é um **isotopismo principal** de um grupóide $(G, \cdot)$ em um grupóide $(G, \circ)$, se (α, β, ι) é um isotopismo de $(G, \cdot)$ e $(G, \circ)$.*

Note que um isotopismo (α, β, γ) de $(G, \cdot)$ em $(H, \circ)$ é um isotopismo principal se, e somente se, $G = H$ e $g\gamma = g$ para todo $g \in G$. Diz-se que um grupóide $(H, \circ)$ é um isótopo principal de um grupóide $(G, \cdot)$ desde que $G = H$ e existem permutações α e β de G tais que $x\alpha \circ y\beta = x \cdot y$, para todo $x, y \in G$. Uma isotopia principal (assim como uma isotopia) é uma relação de equivalência em qualquer conjunto não vazio de grupóides.

A importância da isotopia principal reside no fato de que, a menos de isomorfismo dos isótopos principais de um grupóide $(G, \cdot)$, ela responde por todos os isótopos de $(G, \cdot)$.

Teorema 14. *Se $(G, \cdot)$ e $(H, \circ)$ são grupóides isotópicos, então $(H, \circ)$ é isomorfo a algum isótopo principal de $(G, \cdot)$.*

Demonstração. Desde que $(G, \cdot)$ e $(H, \circ)$ sejam grupóides isotópicos, existem bijeções α, β e γ de G para H, tais que (α, β, γ) é um isotopismo de $(G, \cdot)$ em $(H, \circ)$. Para provar esse teorema é suficiente produzir uma operação binária fechada $(\star)$ para G, permutações δ e ε em G e uma bijeção θ de G em H, tais que

1. $(\delta, \varepsilon, \iota)$ é um isotopismo principal de $(G, \cdot)$ e
2. θ é um isomorfismo de $(G, \star)$ em $(H, \circ)$.

Em outras palavras, procura-se um $(G, \star)$ através do qual (α, β, γ) pode ser fatorado. Portanto, escolhendo $\theta = \gamma$, $\delta = \alpha\gamma^{-1}$, $\varepsilon = \beta\gamma^{-1}$, temos $x \cdot y = x\alpha\gamma^{-1} \star y\beta\gamma^{-1}$ para todo $x, y \in G$ e, assim, são satisfeitas as condições 1 e 2 acima. □

Sejam $(G, \cdot)$ e $(H, \circ)$ grupóides isotópicos. Pode ser mostrado que $(G, \cdot)$ é um quasegrupo se, e somente se, $(H, \circ)$ for um quasegrupo. Entretanto, essa afirmação para loops não é válida. De fato, é possível ter um par de quasegrupos isotópicos com um sendo um loop e o outro não. Por exemplo, $G = \{1, 2, 3\}$ e sejam $(\cdot)$ e $(\circ)$ definidas pelas seguintes tábuas de Cayley:

	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	2	1

Assim, $(G,\cdot)$ é um quasegrupo que não é um loop e $(G,\circ)$ é um loop (de fato, $(G,\circ)$ é um grupo). Agora, sejam α e β permutações de G dadas por $1\alpha = 3$, $2\alpha = 2$, $3\alpha = 1$ e $1\beta = 2$, $2\beta = 1$, $3\beta = 3$, ou seja, α e β são transposições $(1,3)$ e $(1,2)$, respectivamente. Temos que (α,β,ι) é um isotopismo principal de $(G,\cdot)$ em $(G,\circ)$. De forma geral, temos que qualquer loop, com pelo menos três elementos distintos, é isotópico com um quasegrupo que não é um loop.

Seja $(G,\cdot)$ um quasegrupo e sejam f e g quaisquer elementos em G (não necessariamente distintos). Considerando as translações $L(f)$ e $R(g)$, definimos no conjunto G

$$x \circ y = xR(g)^{-1} \cdot yL(f)^{-1}$$

para todo $x, y \in G$. Claramente, $(R(g), L(f), \iota)$ é um isotopismo principal de $(G,\cdot)$ em $(G,\circ)$ e, assim, $(G,\circ)$ é um quasegrupo. Além disso, $f \cdot g$ é elemento identidade para $(G,\circ)$, portanto $(G,\circ)$ é um loop. Essa construção mostra que todo quasegrupo é isotópico a um loop.

Teorema 15. *Seja $(G,\cdot)$ um quasegrupo. Se $(H,\star)$ é um loop que é isotópico a $(G,\cdot)$, então existem $f, g \in G$ tais que $(H,\star)$ é isomorfo a $(G,\circ)$, onde $x \circ y = xR(g)^{-1} \cdot yL(f)^{-1}$ para todo $x, y \in G$.*

Demonstração. Sabemos que $(H,\star)$ é isomorfo a um isotopo principal $(G,\circ)$ de $(G,\cdot)$, pelo Teorema 2. Seja (α,β,ι) um isotopismo principal de $(G,\cdot)$ em $(G,\circ)$. Desde que $(G,\circ)$ seja isomorfo ao loop $(H,\star)$, sabe-se que $(G,\circ)$ deve, também, ser um loop e, consequentemente, que $(G,\circ)$ tem um elemento identidade ϱ. Agora, defina f e g como se segue: $f = \varrho\alpha^{-1}$ e $g = \varrho\beta^{-1}$. Desde que (α,β,ι) seja um isotopismo principal de $(G,\cdot)$ em $(G,\circ)$, tem-se $x\alpha \circ y\beta = x \cdot y$ para todo $x, y \in G$. Assim, substituindo x por $x\alpha^{-1}$ e y por $y\beta^{-1}$, tem-se

$$x \circ y = x\alpha^{-1} \cdot y\beta^{-1} \ (1)$$

para todo $x, y \in G$. Segue-se que

(i) $y = \varrho \circ y = \varrho\alpha^{-1} \cdot y\beta^{-1} = y\beta^{-1}L(\varrho\alpha^{-1}) = y\beta^{-1}L(f)$ e

(ii) $x = x \circ \varrho = x\alpha^{-1} \cdot \varrho\beta^{-1} = x\alpha^{-1}R(\varrho\beta^{-1}) = x\alpha^{-1}R(g)$

para todo $x, y \in G$. Portanto, segue-se que $\alpha^{-1} = R(g)^{-1}$ e $\beta^{-1} = L(f)^{-1}$. Usando essa informação e (1), pode-se deduzir que

$$x \circ y = xR(g)^{-1} \cdot yL(f)^{-1}$$

para todo $x, y \in G$. □

Corolário 4. *Se $(G,\cdot)$ e $(H,\star)$ são loops isotópicos, então existem $f, g \in G$ tais que $(H,\star)$ é isomorfo a $(G,\circ)$, onde $x \circ y = xR(g)^{-1} \cdot yL(f)^{-1}$ para todo $x, y \in G$.*

O próximo resultado nos revela que grupos isotópicos são, de fato, grupos isomorfos, donde não é comum o estudo de isotopias entre grupos.

Teorema 16. *Se $(G, \cdot)$ e $(H, \star)$ são loops isotópicos e se $(G, \cdot)$ for um grupo, então $(G, \cdot)$ e $(H, \star)$ serão grupos isomorfos.*

Definição 29. *Um isotopismo de $(G, \cdot)$ em $(G, \cdot)$ é chamado de **autotopismo** de $(G, \cdot)$.*

Se $T = (U, V, W)$ é um autotopismo de um quasegrupo $(G, \cdot)$, então

$$xU \cdot yV = (xy)W, \text{ para todo } x, y \in G$$

Autotopismos desempenham um papel significante como ferramenta usada para investigação das propriedades dos quasegrupos. As vezes, é conveniente expressar identidades de um quasegrupo como autotopismos. Por exemplo, a associatividade de um grupo $(G, \cdot)$ pode ser escrita como um autotopismo $(\iota, R(z), R(z))$ em $(G, \cdot)$. De fato, $(\iota, R(z), R(z))$ em $(G, \cdot)$ é um autotopismo se, e somente se, para todo $x, y \in G$, temos

$$x \cdot yR(z) = (xy)R(z)$$

.

Teorema 17. *Se $T = (U, V, W)$ é um autotopismo de um quasegrupo $(G, \cdot)$, então quaisquer dois elementos de T determinam o terceiro, de maneira única.*

Claramente, (ι, ι, ι) é um autotopismo de $(G, \cdot)$ e, além disso, dados dois autotopismos (U_1, V_1, W_1) e (U_2, V_2, W_2) temos que (U_1U_2, V_1V_2, W_1W_2) também é um autotopismo de $(G, \cdot)$.

Teorema 18. *O conjunto de todos autotopismos de um quasegrupo $(G, \cdot)$ forma um grupo com elemento identidade (ι, ι, ι) e este é denotado por $Atp(G, \cdot)$.*

Lema 4. *Se $\varphi = (\alpha, \beta, \gamma)$ é um isotopismo de um quasegrupo $(G, \cdot)$ em um quasegrupo $(H, \circ)$, e se $T = (U, V, W)$ é um autotopismo de $(G, \cdot)$, então*

$$\varphi^{-1}T\varphi = (\varphi^{-1}U\varphi, \beta^{-1}V\beta, \gamma^{-1}W\gamma)$$

é um autotopismo de $(H, \circ)$.

Teorema 19. *Se dois quasegrupos são isotópicos, então seus grupos de autotopismos são isomorfos.*

Demonstração. Seja (α, β, γ) um isotopismo $(G, \cdot) \to (H, \circ)$ e seja θ uma função $Atp(G, \cdot) \to Atp(H, \cdot)$ definido por $T\theta = (U, V, W)\theta = (\alpha^{-1}U\alpha, \beta^{-1}V\beta, \gamma^{-1}W\gamma)$ pata todo $T \in Atp(G, \cdot)$. Sejam $T_1 = (U_1, V_1, W_1)$ e $T_2 = (U_2, V_2, W_2)$ autotopismos de $(G, \cdot)$. Então

$$(T_1 \cdot T_2)\theta = (U_1U_2, V_1V_2, W_1W_2)\theta = (\alpha^{-1}U_1U_2\alpha, \beta^{-1}V_1V_2\beta, \gamma^{-1}W_1W_2\gamma) =$$
$$(\alpha^{-1}U_1\alpha\alpha^{-1}U_2\alpha, \beta^{-1}V_1\beta\beta^{-1}V_2\beta, \gamma^{-1}W_1\gamma\gamma^{-1}W_2\gamma) = T_1\theta \cdot T_2\theta.$$

Pela definição de θ, temos que $Ker\theta = (\iota, \iota, \iota)$. □

Quanto mais conhecemos os autotopismos de um quasegrupo, mais informações obtemos sobre a estrutura de um quasegrupo. O inverso também é verdadeiro: quanto mais sabemos sobre o próprio quasegrupo, mais podemos dizer sobre seus autotopismos.

Teorema 20. *Cada autotopismo de um loop* $(L, \cdot)$ *tem a forma* $(\delta R(g)^{-1}, \delta L(f)^{-1}, \delta)$ *onde* g *e* f *são alguns elementos fixados em* L*, e* δ *é uma bijeção em* L*.*

Corolário 5. *Existe um correpondência injetora entre os autotopismos de um loop* $(L, \cdot)$ *e os principais isótopos de* $(L, \cdot)$ *que são isomorfos a* $(L, \cdot)$*.*

Resultados e Discussões

Ao estudarmos as propriedades dos isotopismos de quasegrupos e loops, vemos que quaisquer dois grupos isotópicos são, de fato, isomorfos. Entretanto, existem quasegrupos isotópicos que não são isomorfos. Além disso, estudamos como se relacionam os grupos de autotopismo de qusegrupos isotópicos.

Referências Bibliográficas

[1] PFLUGFELDER, H. O., **Quasigroups and Loops: Introduction**. Berlin: Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, 1990.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Lei da Tricotomia em $\mathbb{N}$

Amanda Vitória de Jesus Mendes[1], João Carlos Moreira[2], Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira[3].
Instituto de Ciências Integradas do Pontal - Universidade Federal de Uberlândia
amanda.mendes@ufu.br, joao.carlos.moreira@ufu.br
Trabalho de iniciação científica
Palavras-chave: Axiomas de Peano; Linguagem de Primeira Ordem; Lei da Tricotomia.

Introdução

No século XIX uma construção axiomática dos números naturais foi apresentada pelo matemático Giuseppe Peano, que formulou um sistema simples de axiomas para definir os números naturais. Atualmente, esses axiomas são denominados como os Axiomas de Peano. A construção desses axiomas foi um passo importante na aritmética, visto que, durante muito tempo, a matemática foi desenvolvida de forma intuitiva e informal e a sua consistência era verificada na construção de objetos. Assim, permitiu que os matemáticos saíssem do campo da intuição aritmética e entrasse no campo da abstração. Apresentamos neste trabalho uma construção para o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, e uma demonstração da Lei da Tricotomia na linguagem de primeira ordem, cuja derivação formal é obtida a partir dos axiomas de Peano. Esses axiomas formalizam a ideia intuitiva de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número um pela soma sucessiva da unidade.

[1]Petiano.
[2]Orientador.
[3]Tutor.

Desenvolvimento

Notações: $\wedge$ (conjunção - "e"), $\underline{\vee}$ (disjunção exclusiva – "ou"), ι (operador descrição - "um objeto tal que..."), $\models$ (sentença topologicamente verdadeira), $\vdash$ (prova), Λ (absurdo), A_4 (axioma 4), H.I. (hipótese de indução), P_1 (proposição 1), P_2 (proposição 2), P_3 (proposição 3), def. (definição), L_1 (lema 1) e L_2 (lema 2).

Axioma 1. *Axiomas de Peano:*
1. $(\exists 1)(1 \in \mathbb{N})$.
2. $(\forall x)(\exists! x^*)$.
3. $(\forall x)(x^* \neq 1)$.
4. $(\forall x)(\forall y)\big((x \neq y) \rightarrow (x^* \neq y^*)\big)$.
5. $\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota Y)(\forall x)\Big((x \in Y) \Leftrightarrow \big((1 \in Y) \wedge (x \in\ Y \Rightarrow x^* \in\ Y)\big)\Big)$.

Desses axiomas, segue que:

$$(\exists 1)(1 \in \mathbb{N}),$$
$$(\exists 1)\big((1^* \in \mathbb{N}) \wedge (1^* \neq 1)\big),$$
$$\big(\exists (1^*)^*\big)\Big(\big((1^*)^* \in \mathbb{N}\big) \wedge \big((1^*)^* \neq 1\big) \wedge \big((1^*)^* \neq 1^*\big)\Big), ...$$

Podemos observar que cada elemento novo é diferente dos elementos anteriores. Esse processo continua indefinidamente; e, portanto,

$$\mathbb{N} = \{1, (1^*), (1^*)^*, ...\}.$$

Os elementos desse conjunto $1, 1^*, (1^*)^*, ...$ são chamados de números naturais.

Definição 1: A operação de adição sobre $\mathbb{N}$ é uma operação binária sobre $\mathbb{N}$, denotada por $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que a cada par ordenado (x, y) de números naturais associa o número natural $x + y$ definida por

$$(\forall x)(\forall y)\Big(\big(x + 1 = x^*\big)\underline{\vee}\big(x + y^* = (x + y)^*\big)\Big).$$

Definição 2: Dizemos que y é menor que x se existir um z tal que x é a soma de y e z.

$$(y < x) \Leftrightarrow (\exists z)(x = y + z).$$

Proposição 1: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big(\big(x + y\big) + z = x + \big(y + z\big)\Big)$.

$\vdash \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota W)(\forall z)\big((z \in W) \leftrightarrow (x+y)+z = x+(y+z)\big)$.
$H.I.: (\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big((z \in W) \leftrightarrow \big((x+y)+z = x+(y+z)\big)\Big)$.
$(1 \in W) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big((x+y)+1 \overset{def.}{=} (x+y)^* \overset{def.}{=} x+y^* \overset{def.}{=} x+(y+1)\big)$.
$(\forall z)\big((z \in W) \rightarrow (z^* \in W)\big)$.

$$(z^* \in W) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\Big((x+y)+z^* \overset{def.}{=} \big((x+y)+z\big)^* \overset{H.I.\,e\,A_4}{=} \big(x+(y+z)\big)^* \overset{def.}{=} \overset{def.}{=} x+(y+z)^* \overset{def.}{=} x+(y+z^*)\Big).$$

$\therefore W = \mathbb{N}$.
$\square$

Proposição 2: $(\forall x)(x+1 = 1+x)$.
$\vdash \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota W)(\forall x)\big((x \in W) \leftrightarrow (x+1 = 1+x)\big)$.
$H.I.: (\forall x)\big((x \in W) \leftrightarrow (x+1 = 1+x)\big)$.
$(1 \in W) \leftrightarrow (1+1 = 1+1)$.
$(\forall x)\big((x \in W) \rightarrow (x^* \in W)\big)$.
$(x^* \in W) \leftrightarrow \Big(1+x^* \overset{def.}{=} 1+(x+1) \overset{P_1}{=} (1+x)+1 \overset{H.I.\,e\,A_4}{=} (x+1)+1 \overset{def.}{=} x^*+1\Big)$.
$\therefore W = \mathbb{N}$.
$\square$

Lema 1: $(\forall x)(\forall y)(\forall c)\big((x = y) \rightarrow (x+c = y+c)\big)$.
$\vdash \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota W)(\forall c)\Big((c \in W) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\big((x = y) \rightarrow (\forall c)(x+c = y+c)\big)\Big)$.
$H.I.: (\forall x)(\forall y)\big((x = y) \rightarrow (\forall c)(x+c = y+c)\big)$.
$(1 \in W) \rightarrow (\forall x)(\forall y)\big((x = y) \overset{A_2}{\rightarrow} (x+1 = y+1)\big)$.
$(\forall c)\big((c \in W) \rightarrow (c^* \in W)\big)$.

$$(c^* \in W) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\Big((x = y) \overset{H.I.}{\rightarrow} (x+c = y+c) \overset{A_2}{\rightarrow} \big((x+c)^* = (y+c)^*\big) \overset{def.}{\rightarrow} \overset{def.}{\rightarrow} (x+c^* = y+c^*)\Big).$$

$\therefore W = \mathbb{N}$.
$\square$

Proposição 3: $(\forall x)(\forall y)(x+y = y+x)$.
$\vdash \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota W)(\forall x)\big((x \in W) \rightarrow (x+y = y+x)\big)$.
$H.I.: (\forall x)\big((x \in W) \rightarrow (\forall y)(x+y = y+x)\big)$.
$(1 \in W) \rightarrow (x+1 \overset{P_2}{=} 1+x)$.
$(\forall x)\big((x \in W) \rightarrow (x^* \in W)\big)$.

$$(x^* \in W) \leftrightarrow (\forall y)\Big(y+x^* \overset{def.}{=} (y+x)^* \overset{H.I.\,e\,A_4}{=} (x+y)^* \overset{def.}{=} x+y^* \overset{def.}{=} x+(y+1) \overset{L_1\,e\,P_2}{=} \overset{L_1\,e\,P_2}{=} x+(1+y) \overset{P_1}{=} (x+1)+y \overset{def.}{=} x^*+y\Big).$$

$\therefore W = \mathbb{N}.$

$\square$

Lema 2: $(\forall m)(m \neq 1) \rightarrow (\exists l)(m = l^*)$.

$\vdash \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota W)(\forall m)(m \in W) \leftrightarrow (\exists l)\big((m = l^*)\underline{\vee}(m = 1)\big)$.

$(m \in W) \rightarrow (m^* \in W)$.

$(m \in W) \overset{H.I.}{\rightarrow} (m = l^*) \rightarrow \big(m^* = (l^*)^*\big) \rightarrow (m^* \in W)$.

$\therefore W = \mathbb{N}.$

$\square$

Teorema 1: (*Lei da Tricotomia*). $(\forall x)(\forall y)\big((x = y)\underline{\vee}(x < y)\underline{\vee}(y < x)\big)$.

Mostraremos inicialmente, usando o quinto axioma de Peano, que vale a lei da tricotomia em $\mathbb{N}$. Depois, mostraremos que apenas uma das três relações ocorre.

$$\vdash \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota W)(\forall x)\Big((x \in W) \leftrightarrow (\forall y)\big((x = y)\underline{\vee}(x < y)\underline{\vee}(y < x)\big)\Big).$$

$$(1 \in w) \leftrightarrow (\forall y)\big((1 = y)\underline{\vee}(1 < y)\underline{\vee}(y < 1)\big).$$

$$\big((1 = y)\underline{\vee}(1 \neq y)\big).$$

$$(1 \neq y)\big) \overset{L_2}{\rightarrow} (\exists m)\big(y = m^* \overset{def.}{=} m + 1 \overset{P_3}{=} 1 + m\big) \rightarrow (1 < y).$$

$$(\forall x)\big((x \in w) \rightarrow (x^* \in w)\big).$$

$$(\forall x)(x^* \in w) \leftrightarrow (\forall y)\big((x^* = y)\underline{\vee}(x^* < y)\underline{\vee}(y < x^*).$$

$$\big((x^* = y)\underline{\vee}(x^* \neq y)\big).$$

$$(x^* \neq y) \rightarrow (y \neq x^* \neq x) \rightarrow \big((x < y)\underline{\vee}(y < x)\big).$$

$$(y < x) \leftrightarrow (\exists n)(x = y + n) \rightarrow (x^* \overset{A_4}{=} (y + n)^* \overset{def.}{=} y + n^*) \rightarrow (y < x^*).$$

$$(x < y) \leftrightarrow (\exists m)(m \neq 1)(y = x + m) \overset{L_2}{\rightarrow} (\exists l)\Big(y = x + l^* \overset{def.}{=} (x + l)^* \overset{P_3 \text{ e } A_4}{=}$$

$$\overset{P_3 \text{ e } A_4}{=} (l + x)^* \overset{def.}{=} l + x^* \overset{P_3}{=} x^* + l\Big) \rightarrow$$

$\rightarrow (x^* < y)$.

$\therefore W = \mathbb{N}$.

$\models (\forall x)(\forall y)\big((x = y)\underline{\vee}(x < y)\underline{\vee}(y < x)\big)$.

$$\big((x = y)\underline{\vee}(x \neq y)\big)$$
$$(x \neq y) \to \big((x < y)\underline{\vee}(y < x)\big).$$
$$\big((x < y) \wedge (y < x)\big) \to (x < x) \to \Lambda.$$

$\square$

A lei da tricotomia equivale a dizer que, dados $x, y \in \mathbb{N}$, tem-se, necessariamente $x \leq y$ ou $y \leq x$, isto é, dois números naturais quaisquer são sempre comparáveis pela relação de ordem acima definida. Por isso, uma relação de ordem que satisfaz à lei da tricotomia é chamada de relação de ordem total (FERREIRA, 2013).

Resultados e Discussões

Uma das primeiras teorias da matemática em que foi apresentada uma proposta de formalização foi a teoria dos números naturais. Nessa teoria, se encontra o teorema demonstrado neste trabalho. Utilizando a linguagem de primeira ordem para demonstrar o teorema, observamos que tal demonstração decorre dos axiomas de Peano.

Referências Bibliográficas

[1] MOREIRA, João Carlos. **Lei da Tricotomia em $\mathbb{N}$**. Disponivel em: <https://escoladecalculo.webnode.com/artigos/>. Acesso em: 3 ago. **2021**.

[2] MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAE-DUFMG, **2013**.

[3] ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, **2012**.

[4] FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, **2013**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Lei de Snell e o Problema da Braquistócrona

Anita Boaventura, Davi Batisaco, Jorge Lucas e Lívia Nascimento[1].
Luciana Ávila Rodrigues[2 3]
Departamento de Matemática - Universidade de Brasília
anita.boaventura@hotmail.com, davi0512bl@gmail.com,
jlucasribeiro0809@gmail.com, livia.livia2808@gmail.com,
luavila@unb.br

Trabalho de iniciação científica
Palavras chave: Palavras chave: Braquistócrona; Lei de Snell; Problemas de extremos.

Introdução

Neste trabalho apresentamos os resultados da pesquisa de iniciação científica realizada no PET Matemática da Universidade de Brasília - UnB. Estudamos o problema da braquistócrona, proposto no século XVII, e que pode ser solucionado a partir da Lei de Snell, a segunda lei da refração descoberta alguns anos antes do problema da curva mais rápida ser publicado.

Lei de Snell

Ao longo da história, muitos cientistas e filósofos tentaram entender o fenônemo da refração, sem sucesso. De acordo com [1], em 1621, o cientista holandês Snell se tornou o primeiro a encontrar a Lei da Refração e, embora sua descoberta não tenha se tornado pública em vida, o fenômeno leva seu nome.

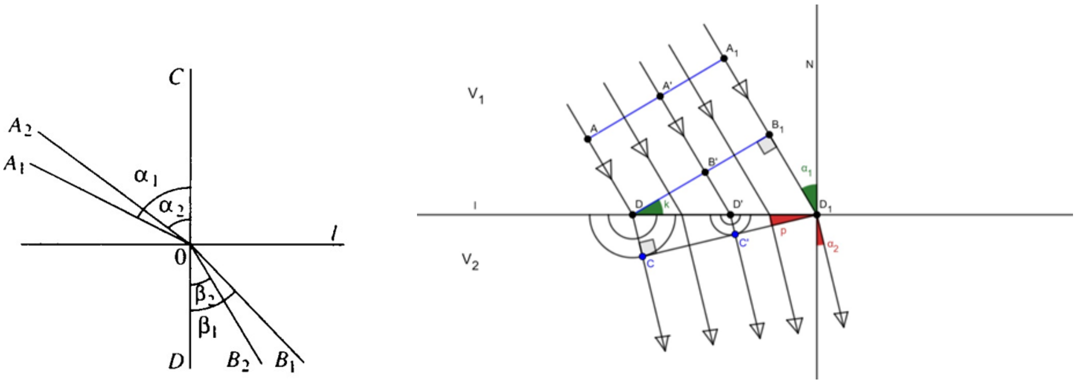
[1]Bolsistas do PET/MEC/FNDE.
[2]Orientadora: Luciana Ávila.
[3]Tutora: Luciana Ávila.

A Lei de Snell diz que a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é constante, ou seja, conforme Figura 1a, temos: $\dfrac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \dfrac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2}$. Para provar isso, utilizaremos as ideias de Huygens.

Primeiramente, precisamos entender o que é frente de onda. Uma frente de onda é a região do espaço que reúne todos os pontos da onda que estão no mesmo estado de vibração. De todas as suas propriedades, enunciaremos duas. A primeira diz que os feixes de luz são perpendiculares à frente de onda. A segunda é o chamado princípio de Huygens: cada ponto de uma frente de onda se torna uma fonte secundária e, com isso, obtemos uma família de frentes de onda. Sabe-se também que a nova frente de onda é a superfície tangente a todas as frentes de onda secundárias.

Agora, vamos usar o princípio de Huygens para deduzir a Lei de Snell.

Inicialmente, vamos considerar raios paralelos de luz vindos de cima que se propagam através de dois meios homogêneos e vamos supor que l é um plano horizontal que divide esses dois meios. Denotaremos a velocidade no meio superior como v_1 e a velocidade no meio inferior como v_2.



(a) (b)

Figura 1: Representação da refração da luz e do princípio de Huygens.

Na Figura 1b, considere α_1 o ângulo que o feixe de luz forma com a reta normal N, ele é chamado ângulo de incidência e α_2, o ângulo formado entre o feixe refratado e N, é chamado ângulo de refração.

Vamos analisar a frente de onda $A_1A'A$. Ela está se movendo com velocidade v_1 e no instante t ela alcança a fronteira l no ponto D. A frente de onda continua a se mover e alcança o ponto D_1 no instante

$$t_1 = t + \frac{|B_1D_1|}{v_1} = t + \frac{|DD_1| \sin(\alpha_1)}{v_1}.$$

Para chegar nesse resultado, usamos a fórmula da velocidade: $\Delta v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, então

$$v_1 = \frac{\Delta S}{t_1 - t} \quad \Longrightarrow \quad (t_1 - t) = \frac{\Delta S}{v_1} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = t + \frac{\Delta S}{v_1}.$$

Também podemos observar que no intervalo $t_1 - t$, o deslocamento é $\Delta S = |B_1D_1|$. Logo, encontramos a primeira parte

$$t_1 = t + \frac{|B_1D_1|}{v_1}. \tag{12}$$

Para a segunda parte da fórmula, vamos considerar o triângulo DB_1D_1. Sabemos que o ângulo de incidência é α_1, por isso temos que o ângulo $B_1\widehat{D_1}D$ é igual a $\dfrac{\pi}{2} - \alpha_1$. Então, $k = \alpha_1$. Agora, podemos analisar o $\sin(\alpha_1)$. Pela Figura 1b, temos

$$\sin\alpha_1 = \frac{|B_1D_1|}{|DD_1|} \Longrightarrow |B_1D_1| = |DD_1|\sin\alpha_1.$$

Substituindo na equação (12), temos

$$t_1 = t + \frac{|DD_1|\sin\alpha_1}{v_1}. \tag{13}$$

Essa frente de onda alcança o ponto D', que é um ponto intermediário entre D e D_1, no instante t'. Analogamente ao processo realizado para encontrar (13), obtemos

$$t' = t + \frac{\left|DD'\right|\sin\alpha_1}{v_1}.$$

Verificaremos agora o que acontece no segundo meio. Pelo princípio de Huygens, os pontos D e D' são fontes secundárias de luz. Vamos analisar as ondas esféricas originadas nesses pontos. No instante t_1, a onda com origem em D tem raio r_1. Se observarmos a Figura 1b, vemos que $r_1 = |CD|$. Sabendo que

$$\Delta v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta S = \Delta v \Delta t,$$

e considerando $\Delta v = v_2$, $\Delta t = t_1 - t$ e $\Delta S = |CD| = r_1$, temos

$$r_1 = v_2(t_1 - t).$$

Substituindo $t_1 - t$, encontramos

$$r_1 = v_2(t_1 - t) = |DD_1|\sin\alpha_1 \frac{v_2}{v_1}.$$

No instante t_1, a onda que tem origem em D' tem raio igual a r'. Para encontrar sua fórmula faremos o mesmo processo, utilizando $\Delta t = t_1 - t'$ e $\Delta S = \left|C'D'\right| = r'$. Logo,

$$r' = v_2\ (t_1 - t'). \tag{14}$$

Podemos encontrar uma fórmula para $t_1 - t'$.

$$t_1 - t' = \frac{(|DD_1| - \left|DD'\right|)\ \sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\left|D'D_1\right| \sin\alpha_1}{v_1}.$$

Substituindo na equação (14), temos

$$r' = v_2(t_1 - t') = v_2 \frac{\left|D'D_1\right| \sin\alpha_1}{v_1} \implies r' = |D'D_1| \sin\alpha_1 \frac{v_2}{v_1}.$$

Agora, vamos observar os triângulos DD_1C e $D'D_1C'$. Pela Figura 1b, concluímos que os ângulos $D\widehat{D_1}C$ e $D'\widehat{D_1}C$ são iguais a α_2. A partir disso, podemos verificar que as tangentes D_1C e D_1C' das esferas coincidem. Isso significa que todas as ondas secundárias são tangentes à linha CD_1 no instante t_1, isso é uma das partes do Princípio de Huygens. Essa linha forma um ângulo α_2 com o plano l.

Para concluir que $p = \alpha_2$, vamos chamar o ângulo entre eles de x. Note que $x + \alpha_2 = \pi$, pela da propriedade citada acima. Note também que $p + x = \pi$, logo $p = \alpha_2$.

Com os triângulos DD_1C e $D'D_1C'$ conseguimos encontrar duas fórmulas para $\sin\alpha_2$.

$$\sin\alpha_2 = \frac{|CD|}{|DD_1|} = \frac{r_1}{|DD_1|} \quad \text{e} \quad \sin\alpha_2 = \frac{|C'D'|}{|D'D_1|} = \frac{r'}{|D'D_1|}.$$

Voltando para as equações de r' e r_1, conseguimos isolar $\sin\alpha_1 \dfrac{v_2}{v_1}$:

$$\frac{r'}{|D'D_1|} = \sin\alpha_1 \frac{v_2}{v_1} \text{ e } \frac{r_1}{|DD_1|} = \sin\alpha_1 \frac{v_2}{v_1}.$$

Igualando as duas equações, temos

$$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \frac{v_2}{v_1} \implies \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

obtendo, assim, a **Lei de Snell**.

Uma aplicação prática da Lei de Snell será vista na solução do problema da braquistócrona fornecida por Johann Bernoulli, como veremos a seguir.

O Problema da Braquistócrona

Um pouco de história

Na edição de junho de 1696 da *Acta Eruditorum*, a primeira revista científica alemã, apareceu uma nota do famoso estudioso suíço Johann Bernoulli com um título intrigante, "Um novo problema que matemáticos estão convidados a resolver".

Problema (Braquistócrona)**.** *Sejam dois pontos A e B (Figura 1) dados em um plano vertical. Encontre a curva que um ponto M, movendo-se em um caminho AMB deve seguir de tal forma que, partindo de A, alcance B no menor tempo possível sob sua própria gravidade.*

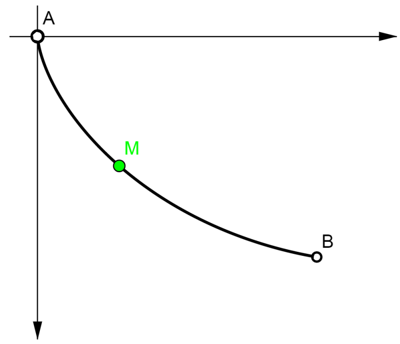


Figura 1: Problema de Johann Bernoulli.

Muitos matemáticos responderam ao "convite" Johann Bernoulli. Um dos primeiros a resolver o problema da braquistócrona foi Leibniz, em seguida Jakob Bernoulli (irmão de Johann) e L'Hôpital anunciaram seu êxito. E claro, o próprio Johann Bernoulli tinha uma solução. Havia também uma solução anônima identificada por especialistas como sendo proporcionada por Newton (que mais tarde admitiu ter levado 12 horas de ininterrupta análise para chegar à solução). Todos esses estudiosos chegaram à mesma conclusão: A braquistócrona é a *cicloide invertida.*

Denominamos cicloide a curva em vermelho (Figura 2) descrita pelo ponto P quando a circunferência rola sobre o eixo x, sem deslizar.

Solução de Johann Bernoulli

A mais popular das cinco soluções da baquistócrona foi feita pelo autor do problema e faz um analogia à ótica-mecânica, tendo relação direta com o Fenômeno da Refração e o Princípio de Fermat. Essa é a solução que apresentaremos aqui.

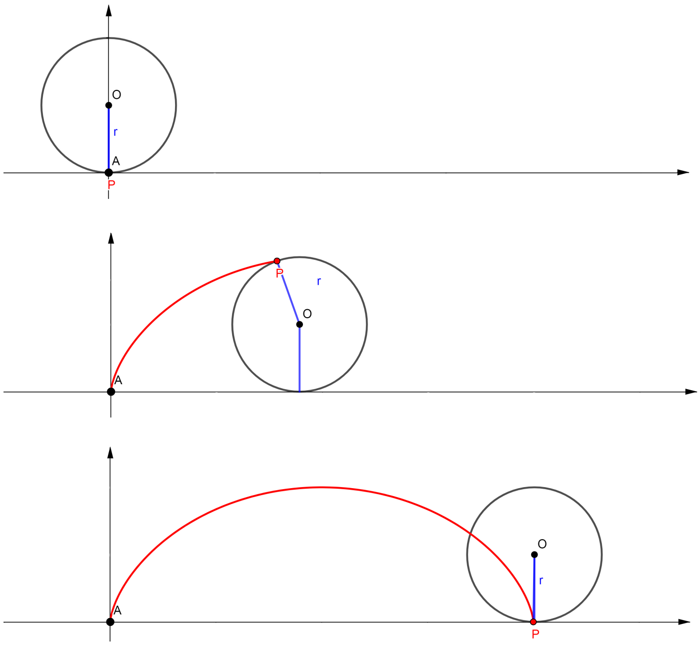


Figura 2: Construção da cicloide.

Primeiramente, vamos considerar o sistema de coordenadas cartesiano com o eixo das abcissas horizontal e o eixo das ordenadas direcionado para baixo. Coloquemos o ponto A na origem, como mostra a Figura 4a.

Sendo $y = f(x)$ a equação da curva que junta os pontos A e $B = (a, b)$, precisamos determinar o tempo necessário para um corpo de massa m cair de A até B, desconsiderando o atrito, ao longo da curva y.

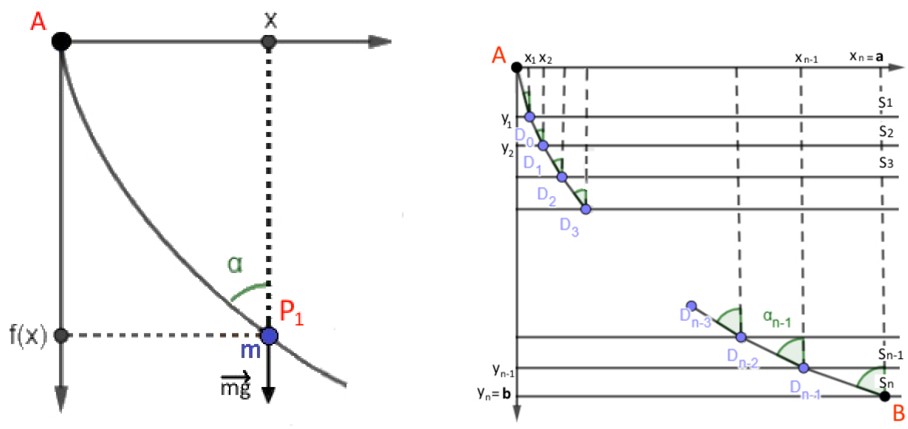
Para determinar a velocidade de m (em azul) num ponto P_1 genérico, utilizamos a lei de conservação de energia: a energia cinética de um corpo em $P_1 = (x, f(x))$ é igual a diferença das energias potenciais em A e P_1. Assim,

$$\frac{mv^2}{2} = mgf(x) \Rightarrow v = \sqrt{2gf(x)},$$

isto é, a velocidade do corpo no ponto M é dada por $\sqrt{2gf(x)}$, onde g é a aceleração da gravidade.

Daí, dividimos o segmento $[0, b]$ do eixo y em n partes de tal forma que $0 = y_0,\ y_1, y_2,\ \ldots,$
$y_n = b$ e encontramos as abcissas x_i de forma que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2,\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = y_{n-1},\ x_n = a$. Por fim, juntamos os pontos (x_i, y_i) e $(x_{i+1}, y_{i+1}),\ i = 0, 1,\ \ldots,\ n-1$, com segmentos de reta, como mostra a Figura 4b.

Quanto maior for o número n, mais próximo os segmentos de reta se aproximarão da curva $y = f(x)$ que estamos procurando.



(a) (b)

Figura 4: Solção do problema de Bernoulli pela Lei de Snell.

Podemos supor que a velocidade no i-ésimo segmento é constante e igual a $\sqrt{2gy_{i+1}}$,
$i = 0, 1, \ldots, n-1$. Além disso, a distância para percorrer um segmento i será dada por $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. Logo, o tempo exato para percorrer toda a trajetória é

$$T_n = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{2gy_2}} + \cdots + \frac{\sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}}{\sqrt{2gy_n}}. \tag{15}$$

Imagine um meio óptico não homogêneo com n camadas homogêneas $(s_1, \ldots, s_n)$ de, digamos, n diferentes tipos de vidro. Seja $\sqrt{2gy_i}$ a velocidade de propagação da luz na camada s_i (Figura 4b). O tempo total para a propagação da luz será igual a T_n, dado pela equação (15). Em outras palavras, a luz, de acordo com o princípio de Fermat, resolve o problema da braquistócrona. Vamos aplicar a Lei de Snell à variante óptica do problema.

Seja α_i o ângulo de incidência da i-ésima camada. Pela Lei de Snell,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{2gy_1}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sqrt{2gy_2}} = \cdots = \frac{\sin \alpha_n}{\sqrt{2gy_n}} = \text{constante}. \tag{16}$$

Se permitirmos que as camadas fiquem menores e mais numerosas, no limite, a equação (16) será

$$\frac{\sin \alpha(x)}{\sqrt{2gf(x)}} = \text{constante}, \tag{17}$$

onde $\alpha(x)$ é o ângulo entre a tangente da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$ e o eixo das ordenadas. Daí, para encontrar o valor da tangente em função de α fazemos

$$f'(x) = \tan(\pi/2 - \alpha) = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha)}{\cos(\pi/2 - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{f'(x)}.$$

Para aplicarmos a Lei de Snell, precisamos encontrar uma expressão em função de $\alpha(x)$, então fazemos algumas substituições.

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \frac{\sin^2(\alpha)}{\underbrace{\cos^2(\alpha)}_{1-\sin^2(\alpha)}} = \frac{1}{(f'(x))^2} \Rightarrow (\sin^2(\alpha)) \cdot (f'(x))^2 = 1 - \sin^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow (\sin^2(\alpha)) \cdot (1 + (f'(x))^2) = 1 \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}.$$

Como $\sqrt{2g}$ é constante, a relação em (17) implica que $\sqrt{1 + (f'(x))^2}\sqrt{f(x)} = D$, onde D é uma constante qualquer. Se fizermos $f(x) = y$,

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2}\sqrt{f(x)} = D \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2}\sqrt{y} = D \Rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{C}{y},$$

ou seja, a função deve satisfazer a equação diferencial

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}}. \tag{18}$$

Já era sabido, desde a época de Bernoulli, que (18) é a equação diferencial da cicloide. Em [2], substitui-se y' por $\frac{dy}{dx}$, daí encontramos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C - y}{y}} \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{y}{C - y}}dy \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{C - y}}dy.$$

Primeiro, fazendo a substituição $u^2 = \frac{y}{C - y}$, tem-se $y = \frac{u^2 c}{1 + u^2}$ e $dy = \frac{2uc}{(1 + u^2)^2}du$ e, portanto,

$$x = \int \frac{2u^2 c}{(1 + u^2)^2}du.$$

Agora, fazendo a substituição trigonométrica $u = \tan\alpha$, tem-se $du = \sec^2\alpha \cdot d\alpha$ e, portanto,

$$x = \int \frac{2c\tan^2(\alpha)\sec^2(\alpha)}{\underbrace{(1+\tan^2(\alpha))}_{sec^2(\alpha)}{}^2} d\alpha = 2c\int \frac{\tan^2(\alpha)}{\sec^2(\alpha)} d\alpha = 2c\int \underbrace{\sin^2(\alpha)}_{\frac{1-cos(2\alpha)}{2}} d\alpha$$

$$= c\int (1-\cos(2\alpha))d\alpha = \frac{c}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) + k, \quad (k \text{ constante}).$$

Uma vez que $y = \dfrac{u^2 c}{1+u^2}$, temos que

$$y = \frac{c\tan^2(\alpha)\sec^2(\alpha)}{\underbrace{(1+\tan^2(\alpha))}_{sec^2(\alpha)}{}^2} = \frac{c}{2}(1-\cos(2\alpha)).$$

Se tomarmos $\dfrac{c}{2} = r$ e $2\alpha = \alpha$, temos a equação paramétrica da cicloide

$$x(\alpha) = r(\alpha - \sin\alpha), \qquad y(\alpha) = r(1-\cos\alpha).$$

Resultados e Discussões

Notamos que alguns problemas com origens e finalidades distintas podem estar relacionados de formas surpreendentes. Conhecer essas relações e saber utilizar diferentes ferramentas para a solução de problemas é, além de belo, uma habilidade fundamental na Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BRITANNICA, The Editors of Encyclopaedia; *Snell's Law*; Encyclopedia Britannica; 29 de abril de **2021**. Disponível em: <`https://www.britannica.com/science/Snells-law`>.
Acesso em: 23 de julho de 2021;

[2] PEDRO, H. A.; PRECIOSO, J. C.; *Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição*; C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática; **2014**;

[3] TIKHOMIROV, V. M.; *Stories about Maxima and Minima*, Mathematical World - Volume 1, American Mathematical Society, **1991**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

O assombroso caso do fantasminha no transporte estudantil

Larissa de Assis Coutinho[1]. Eulina Coutinho Silva do Nascimento[2] [3] Gisela Maria da Fonseca Pinto[1] [4]
Departamento de Matemática - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
larissacoutinho@ufrrj.br, eulina@ufrrj.br
Trabalho de iniciação científica
Palavras chave: Transporte estudantil; Transporte público; Superlotação.

Introdução

Podemos entender Gerenciamento da Mobilidade como uma reflexão científica sobre estratégias para a locomoção de pessoas ou cargas de forma mais prudente em relação a questões sociais, econômicas e ambientais (Parra e Portugal, 2007). Pensando nisso no contexto da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, há várias formas que seus alunos podem usar para se locomover até o campus universitário. Vamos, neste trabalho, tecer algumas considerações e apresentar pesquisa realizada no âmbito do campus Seropédica, mais precisamente a respeito dos alunos que residem no entorno desse campus (km 49 e 50 da BR465, Seropédica-RJ). Esses alunos se deslocam para o campus utilizando transportes informais, como vans, kombis ou ônibus que circulam pela cidade, ou usam a ciclovia para ir caminhando ou de bicicleta. Alternativamente, podem fazer uso de veículo próprio ou de transporte por aplicativos ou ainda adotar o recurso promovido pelo gerenciamento da mobilidade da universidade, que consiste na oferta de um ônibus gratuito guarnecido pela UFRRJ – o conhecido *fantasminha* para os estudantes.

[1]Petiano.
[2]Orientador.
[3]Tutor.
[4]Colaborador.

Esta pesquisa é fruto das atividades desenvolvidas no âmbito do grupo PET-Matemática e Meio Ambiente da referida universidade. Entendemos o conceito de meio ambiente em uma perspectiva biológica-física-social, conforme propalado por Reigota (1998) e tem por objetivos tecer uma análise acerca de sua funcionalidade e horários, investigando relatos dos usuários relacionados a sua superlotação, atrasos e até mesmo a não circulação – o que complementa o apelido de fantasminha, conforme veremos mais adiante.

Meios de Transporte trajeto Seropédica - UFRRJ

Faremos nesta seção uma breve análise sobre esses meios de transporte, seus custos, prós e contras.

Transportes fretados: as vans e kombis têm custo de R$2,50, enquanto os ônibus variam de R$4,00 a R$4,50. O gasto médio de deslocamento semanal envolvendo residência-campus-residência estaria na ordem de R$32,00 por semana. Vale também lembrar que nem todos esses transportes entram no campus, e os que entram, vão até o Pavilhão Central e voltam. Considerando que o campus é bastante extenso e que os prédios dos institutos costumam estar a grande distância uns dos outros, haverá provável demanda adicional de tempo de caminhada.

Ciclovia: é comum encontrarmos alunos na civlovia tanto caminhando, quanto de bicicleta. Essa ciclovia se inicia no KM49; a universidade está situada no KM47. São 2 Km de caminhada, descontando a caminhada de casa até a ciclovia, e até o prédio em que o aluno terá aula. Devemos levar em consideração que a ciclovia não é coberta; portanto há o problema do clima, tanto em dias quentes pode ser incômodo devido às altas temperaturas características da cidade, como em dias chuvosos. É interessante ainda mencionar os riscos de assaltos e abordagens que por vezes se tornam de cunho agressivo (agressão física, estupro etc.) que tornam esta uma opção nem sempre segura para o estudante.

Veículo próprio: é um dos recursos menos frequentes, pois para isso, o aluno precisará ter seu veículo, arcar com os gastos necessários, o combustível, a manutenção, esse varia de acordo com a condição financeira de cada um. Fica evidenciada a situação de conforto e conveniência a partir desta situação.

Veículo de aplicativo: esse tipo de veículo tem a vantagem de buscar na porta de casa e deixar no prédio solicitado; por outro lado, o altocusto não torna essa uma opção maiormente viável para a maioria dos estudantes.

Ônibus universitário: o *fantasminha*, como já falado anteriormente, é gratuito. Ele circula dentro da universidade fazendo o caminho entre os prédios de veterinária até a prefeitura universitária, passando antes pelo Prédio do Institutode Geociências (vide figura 1 para visualizar o trajeto), e também faz o trajeto *KM50xUniversidade* e o caminho contrário em alguns horários do dia. A alcunha de *fantasminha* relaciona-se à cor desse ônibus ser branca.

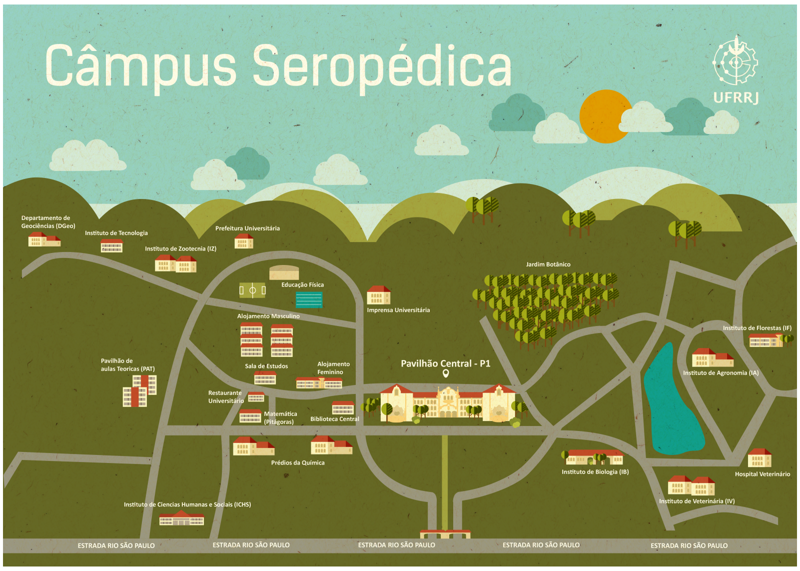


Figura 1: mapa do câmpus Seropédica

Fonte: Catálogo UFRRJ, 2021

Segundo dados divulgados pela Coordenadoria de Comunicação Social, no catálogo institucional da UFRRJ, 50% das vagas nesses ônibus são destinadas a alunos que estudaram o ensino médio em escola pública, e dessas vagas, no mínimo 50% são voltadas para alunos com renda bruta familiar entre 1 e 2 salários-mínimos. Tendo em vista a questão socioeconômica de uma parte dos estudantes da rural, consideramos o *fantasminha* como um transporte essencial, uma vez que este é gratuito.

Metodologia

Para esse estudo foi utilizado um método de pesquisa quantitativa a fim de descobrirmos a quantidade de alunos que ingressaram no circular em cada horário. Foi realizado um estudo de campo, a partir do qualdois alunos embarcavam no ponto de partida do ônibus, umsentando-se próximo à porta dianteira, e o segundo próximo a porta traseira do circular, e realizavam a contagem de acordo com que os passageiros iam entrando.

Para o desenvolvimento foi realizada a análise dos dados obtidos por meio do estudo de campo para cálculo de média, a fim de determinar a média de passageiros por horário do circular.

Resultados e discussões

Primeiramente, a explicação para o apelido desse ônibus deve ser exposta. O que deu origem ao apelido fantasminha foi uma brincadeira entre os alunos pelo fato de algumas vezes ele não circular. Normalmente isso acontece porque o veículo está avariado, acarretando na necessidade de que ele seja enviado para a manutenção.

Para a pesquisa acontecer foi necessário realizar a contagem dos alunos nos principais horários do circular, uma vez que não foram encontrados dados disponíveisa respeito dessequantitativo. Veja abaixo os horários do ônibus circular e quantidade de ônibus disponíveis por horário, e ainda qual o caminho feito.

Figura 2: Horários do circular

Fonte: UFRRJ, 2021

Os horários reconhecidos como horários principais são os de 7h30min e 12h50min, nos quais o fluxo de alunos é grande devido ao horário de início das aulas da manhã, 8 horas, e da tarde, 13 horas. Além desses, os horários dos intervalos entre as aulas (15 horas e 17 horas) também encontra um grande número de alunos recorrendo a esse transporte. Por essa razão, esses foram os horários nos quais foram realizadas as contagens.

Data	Horário	Ônibus	Clima	Quantidade
14/08/2019	07:30	Segundo	Nublado	123
19/08/2019	12:50	Segundo	Nublado e fresco	69
20/08/2019	07:30	Primeiro	Nublado e fresco	142
20/08/2019	15:00	Segundo	Nublado e fresco	112
21/08/2019	12:50	Primeiro	Nublado/serenando	121
21/08/2019	17:00	Primeiro	Nublado e fresco	135
26/08/2019	17:00	Segundo	Fresco	112
29/08/2019	15:00	Primeiro	Sol/ventando	169

Tabela 6: contagem dos passageiros

Num primeiro momento, analisando superficialmente os números, podemos ver grande quantidade de passageiros, mas precisamos levar em consideração que em todos os dias de contagem os dois ônibus estavam circulando. No entanto, há dias em que apenas um deles circula, o que obviamente gera situação de desconforto ainda maior ou de alunos acabando por ficar desguarnecidos em relação ao transporte.

Agora, vamos analisar esses números de maneira mais profunda. Fazendo uma média aritmética simples, obtemos um valor aproximado de 123 pessoas por vez de circulação. Segundo a Norma Brasileira(2009), em ônibus básicos, capacidade máxima é de 70 passageiros, sentados e em pé, os ônibus devem conter essa informação fixada em um lugar visível aos passageiros. No fantasminha há uma indicação de capacidade máxima de 81 passageiros.

Segundo dados disponíveis no catálogo institucional da UFRRJ, (UFRRJ, 2021) o câmpus Seropédica possui aproximadamente 17 mil alunos, sendo que 28,8% residem no centro de Seropédica, ou seja, aproximadamente 4.896 estudantes que fazem o trajeto KM50/Km49xUniversidade. Os dois ônibus circulando juntos, têm capacidade para 162 passageiros, um número extremamente baixo em comparação ao número de residentes no centro de Seropédica.

Voltando agora a comentar os dados expostos na tabela 2, vemos que num dos dias analisados, no horário das 15 horas, o número de estudantes em um dos ônibus circulares foi de 169 alunos, o que ultrapassa a capacidade máxima dos dois circulares juntos. Voltando agora a falar da média calculada de 123 passageiros, esse número é aproximadamente 52% a mais do que o máximo recomendado. Daí surgem algumas conjecturas, como por exemplo, a associação da superlotação a eventuais avarias do circular, gerando uma indisponibilidade e irregularidade no serviço de caráter tão essencial, conforme pode ser constatado.

Figura 3: Porta do fantasminha

Fonte: Arquivo pessoal

Na figura 3, podemos ver a porta do circular em um momento que ela não estava fechando direito. Pode-se associar isso ao fato do elevado número de alunos que andam encostados na porta por absoluta questão de superlotação, o que atrapalha esse fechamento.

Conclusão

Com os resultados apresentados acima, podemos ver que as reclamações constantes sobre o funcionamento e a superlotação do ônibus universitário são evidenciadas com os números elevados de passageiros, sendo um problema real enfrentado pelos alunos da universidade.

Com essa pesquisa, deixamos em aberto algumas perguntas necessárias, como por exemplo, não valeria mais a pena um novo ônibus circulando, do que gastar frequentemente com manutenção? Será que nunca foram feitos cálculos para mostrar que são necessários mais que dois ônibus para atender a população alvo desse transporte? Para adentrar mais nesse assunto de manutenção, seria necessário um acesso a todo seu histórico de manutenção preventiva e manutenção corretiva, para saber quais são os defeitos e o intervalo com que ocorrem. No entanto, esses dados não estão disponíveis em ambientes de consulta pública. Ademais, o advento da pandemia, que fechou a universidade e seus setores, inviabilizou que se pudesse conseguir estes dados pessoalmente, em arquivos manuscritos.

Podemos concluir dizendo que a proposta desse circular é muito boa e necessária para os milhares de alunos da rural, mas precisa ser estudado um modo de atender ainda mais alunos, para que não sejam deixados para trás nos pontos devido a superlotação. Que o *fantasminha* siga assombrando os alunos pela eficiência e presteza, e não por ser irregular e por vezes assustador por conta de manutenção insuficiente ou superlotação.

Referências Bibliográficas

[1] ABNT **Norma Brasileira 15570**. Transporte — Especificações técnicas para fabricação de veículos de características urbanas para transporte coletivo de passageiros. Disponível em: <https://www.cnmp.mp.br/portal/images/Comissoes/DireitosFundamentais/Acessibilidade/NBR_15570-2009_Transp_Coletivo_Urbano.pdf>. Acesso em: 15/07/2021.

[2] PARRA, M. C.; PORTUGAL, L. S. Estratégias de gerenciamento da mobilidade para um campus universitário: caso da UFRJ. In: **Anais (...)Congresso de Ensino e Pesquisa em Transportes, 21**. '2007. Disponível em: <http://redpgv.coppe.ufrj.br/arquivos/Marsela_Parra_Portugal_Anpet_2007_Ger_Mob.pdf>. Acesso em: 12/05/2020.

[3] REIGOTA, M. **Meio ambiente e representação social**. 3a ed.. São Paulo, Cortez: **1998**. 87p. (Questões da nossa época: V. 41). ISBN 85-249-0552-2.

[4] UFRRJ. **Catálogo Institucional da UFRRJ**. Coordenadoria de Comunicação Social. Disponível em: <https://institucional.ufrrj.br/ccs/ufrrj-em-numeros/>. Acesso em: 14/07/2021.

[5] UFRRJ. Mapa da UFRRJ. Disponível em: <https://institucional.ufrrj.br/ccs/mapa-da-ufrrj/>. Acesso em: 14/07/2021.

[6] UFRRJ. Ônibus. Disponível em: <tinyurl.com/27n5zzj5>. Acesso em: 20/07/2021.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Onde Estão os Negros? Uma discussão sobre representações de pessoas negras em livros didáticos de Matemática

Lucas Gabriel de Souza Cruz[1]. Filipe Santos Fernandes[2]. Carmen Rosa Giraldo Vergara[3].
Departamento de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais
cruz.lucas826@gmail.com, fernandes.fjf@gmail.com

Trabalho de Iniciação Científica

Palavras-chave: Diversidade; Livro didático; Educação Matemática; PET.

Introdução

A imagem em Figura 1 é um registro da ocupação realizada, em 2016, por estudantes do prédio do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Durante o movimento, os tablados que haviam nas salas, utilizados para facilitar a visualização do professor por parte dos alunos, foram removidos e serviram como suporte de diversos questionamentos sobre o momento político vivido na época, pautado por cortes orçamentários e constante sucateamento da pesquisa. Dentre as indagações levantadas, uma se destaca pela generalidade da reflexão: "Onde estão os negros?".

Reconhecendo a baixa presença de pessoas negras no Ensino Superior, esta questão coloca em pauta uma reflexão mais profunda e necessária, sendo um dos objetos de pesquisa do projeto *A opção decolonial em Educação Matemática: desobediências e insurgências junto ao ensino de Matemática na Educação Básica*, vinculado à Faculdade de Educação da UFMG e projeto de Iniciação Científica do autor, membro do PET Matemática/UFMG. Como parte do projeto de pesquisa, foi oferecida, pelo professor Filipe Fernandes, coordenador do projeto, a disciplina

[1]Petiano.
[2]Orientador
[3]Tutora

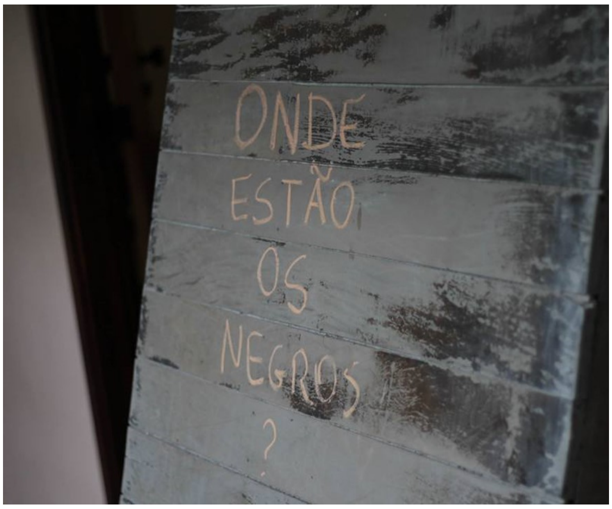


Figura 1: Fotografia de ocupações do ICEx/UFMG

optativa *Educação Matemática e diversidades no enfrentamento do contemporâneo* para alunos da graduação e da pós-graduação em Matemática, onde, como parte dos estudos, foi analisada a representação de pessoas negras em livros didáticos de Matemática. Dentre as análises, foram percebidas duas principais tendências representativas principais: o negro entre a força física e o discurso de superação; e o negro entre as mazelas sociais.

Este trabalho toma como base o artigo de mesmo título (ver [1], publicado em 2021 pela revista África e Africanidades, escrito pelo autor e companheiros de pesquisa, onde busca-se discutir sobre as questões raciais na Educação Matemática, analisando as principais percepções referentes à representação imagética da pessoa negra e propondo alternativas, especialmente a decolonialidade, para a racialização desta disciplina tida como neutra.

As relações etnicorraciais em livros didáticos de Matemática

Muitas vezes, o livro didático serve não somente como apoio para o professor, como também define a organização do conteúdo e a forma como este deve ser trabalhado em sala de aula. Sobre o papel exercido pelos livros didáticos, Lima (2014, p. 163) destaca que:

> [...] muitas vezes, o capítulo do livro se transforma, literalmente, na aula do professor porque ele reproduz a organização dos conteúdos, a linguagem utilizada e a sequência de exercícios. Se o aluno faz, por exemplo, um questionamento sobre um determinado conceito, a resposta é eminente: "está no livro" ou "você não leu o livro?". Por vezes, o principal objetivo do professor para o ensino é "fechar o livro de capa a capa", trabalhando todos os conteúdos contidos no livro. O que importa nessa concepção de ensino contemplar os chamados "pré-requisitos" tão cultuados, sobretudo, no ensino matemática, mesmo que o processo de aprendizagem do aluno fique comprometido.

Em vista disso, a grande abrangência deste recurso nas salas de aulas e a forma unilateral como a comunicação desta mídia se efetiva com os alunos destacam a característica de comunicação em massa do livro didático. Essa característica ressalta, ainda, a disputa de narrativas alinhada às ideologia de seus autores.

Por isso, reconhecer a importância do livro didático na educação brasileira, diz respeito a compreender que, através de imagens e enunciados, ele influenciará a construção do imaginário dos estudantes acerca do mundo ao seu redor e de si mesmos, levantando, portanto, a necessidade por um tratamento cuidadoso quanto ao discurso presente, visando não provocar a reprodução de preconceitos e estigmas que violentam grupos inferiorizados.

A lei 10.639/2003, que estabelece o ensino da história e cultura afro-brasileira, define bases para o tratamento da identidade da pessoa negra nos livros didáticos e busca dar respaldo para já citada representação cuidadosa e positiva que os livros devem apresentar para os alunos. Entretanto, essa representação não se efetiva, seja pelo despreparo que os professores possuem para trabalhar questões etnicorraciais em sala de aula (MATTE JÚNIOR; ALVES; GEVEHR, 2017), seja pela carência de materiais que tratam da história afro-brasileira.

É importante observar que, conforme apresentado por Silva (2020), a pessoa negra é subrepresentada nos livros didáticos. Ao analisar o conteúdo imagético de seis obras aprovadas no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), entre 2005 e 2017, a autora avaliou a presença quantitativa de pessoas brancas e de pessoas negras e, definindo a razão entre o número de personagens brancas e o número de personagens negras (pretas e pardas) como sendo a *taxa de branquidade*, obteve uma taxa igual a $3,2$, isto é, a cada 16 representações de pessoas brancas, há apenas 5 representações de pessoas negras. Esta taxa não representa a realidade do povo brasileiro, público-alvo deste material didático, visto que, de acordo com o IBGE (2019), $56,2\%$ da população se autodeclara negra, enquanto $42,7\%$ da população se autodeclara branca, isto é, para cada 16 pessoas brancas, há 21 pessoas negras.

A sub-representação tem um efeito profundo no discurso dos livros didáticos pois, ainda que implicitamente, reforça a ideia da branquitude como ideal de conhecimento e de humanidade, visto que o corpo, os valores e os saberes da população negra são apagados pela presença branca.

Além disso, ao observar a constante sub-representação, faz-se questionar, também, a forma como a representação se efetiva (quando se efetiva) nestas mídias.

Quem é o negro no lívro didático?

Ressaltando a importância do livro didático para as aulas de Matemática, é possível observar, através de análises de outras referências (SILVA, 2020; MANOEL, MANOEL, 2019; MATTE JUNIOR, ALVES, GEVEHR, 2017) que, quando não acometidas pela sub-representação, as pessoas negras ainda são alvo de certos estereótipos.

Sabendo disso, durante a disciplina optativa *Educação Matemática e diversidades no enfrentamento do contemporâneo*, foi pedido aos alunos que se fizesse a análise de materiais didáticos de Matemática às suas escolhas. Tal análise deveria responder as seguintes questões, baseadas nos processos de avalição do PNLD: A obra está livre de estereótipos ou preconceitos ligados a condições raciais, assim como de qualquer outra forma de discriminação, violência ou violação de direitos humanos relacionadas à população negra? A obra promove positivamente a imagem de afrodescendentes, considerando sua participação em diferentes trabalhos, profissões e espaços de poder, com o intuito explícito de valorizar sua visibilidade e protagonismo social? A obra promove positivamente a cultura e a história afro-brasileira e quilombola, com o intuito explícito de valorizar seus saberes, conhecimentos, tradições, organizações, valores e formas de participação social? Se sim, como? Se não, o que há na obra?

Desta forma, os estudantes da disciplina foram convidados a discutir questões etnicorraciais junto ao ensino de Matemática. As imagens disponibilizadas pelos estudantes neste trabalho serviram como base para a análise de obras da educação básica, buscando compreender de que forma o discurso sobre o negro era construído em salas de aula de Matemática.

Cientes que o recorte imagético de cada obra era bastante reduzido em comparação com a totalidade da própria obra, fez-se a escolha por não especificar obras e autores analisados, a fim de não se particularizar a discussão, isto é, generalizar o recorte para o discurso. O objetivo é analisar o panorama geral e não generalizar cada obra particularmente. Ressalta-se apenas, que as imagens escolhidas para análise eram voltadas para a Educação Básica.

Dentre as presenças mais marcantes, dois padrões principais foram percebidos: o negro entre a força física e o discurso da superação; e o negro entre mazelas socias.

Imagens que representam pessoas negras em situações ligadas à prática espor-

Figura 2: Representações de mulher negra em situação ligada ao esporte

tiva, como a Figura 2, foram muito comuns nas análises. Não sem motivo, a constância da associação do corpo negro com atividades físicas carregam consigo um histórico do colonialismo, onde o negro, enquanto escravizado, deveria apresentar uma força física surpreendente (SEVERO, 2011). Os efeitos desta constância podem ser profundos nos estudantes visto que, atualmente, a Matemática ocupa uma posição de prestígio no discurso escolar e contemporâneo. Assim, "saber Matemática"torna-se um requisito fundamental para a excelência enquanto ser humano.

E, havendo também, um distanciamento imposto pelo pensamento hegemônico entre o corpo e a mente, define-se um dualismo corpo-mente, através do qual, enquanto tal representação tem o papel de reduzir o corpo negro à sua capacidade física, ocorre a dissociação da pessoa negra de práticas intelectuais.

Presente nesse discurso, há não somente a exclusão do negro dos processos de pensar, mas também, o discurso de superação. Este discurso, perpetua o ideiário da meritocracia ao mesmo tempo que apresenta um (e apenas um) caminho para superar as mazelas em que a população negra comumente se encontra, sem fazer qualquer ponderação quanto às desigualdades raciais.

No imaginário popular e do senso comum, é comum associar a África à pobreza e à fome, assim como é comum associar a pessoa negra às favelas e à baixa qualidade de vida que as cercam. Quando o livro didático de Matemática perpetua esta imagem, como a Figura 3, ele destaca o corpo negro em condições

Figura 3: Representações de negras e negros em situações ligadas a mazelas sociais

distintas do corpo branco, apresentando a diferença e, inclusive, a desumanização. Silva (2005, p. 21) afima:

> [. . .] os sujeitos dessas culturas [as oriundas dos grupos subordinados na sociedade] são representados, em grande parte, nos meios de comunicação e materiais pedagógicos, sob forma estereotipada e caricatural despossuídos de humanidade e cidadania. No livro didático, a humanidade e a cidadania, na maioria das vezes, são representadas pelo homem branco e de classe média. A mulher, o negro, os povos indígenas, entre outros, são descritos pela cor da pele ou pelo gênero, para registrar sua existência.

Novamente, associa-se a humanidade ao povo branco, enquanto o povo negro localiza-se à margem da humanidade, ou, mais precisamente, enquanto uma subhumanidade.

Além disso, vale-se destacar a baixa criticidade quanto a essas condições. A apresentação de imagens e de gráficos do negro entre mazelas sociais sem um acompanhamento crítico além de não aproveitar um trabalho pedagógico para o desenvolvimento do pensamento crítico, naturaliza esta representação.

O estudante negro que se utiliza do livro didático, não tem distintas possibilidades de identificação. Restritas, muitas vezes, às mazelas sociais, as obras deixam de abordar a riqueza da ancestralidade, da cultura e da história afro-brasileira, elementos essenciais para o empoderamento do aluno negro.

Resultados e Discussões

O colonialismo, uma estrutura de dominação e exploração, mesmo após seu fim, manteve uma poderosa estrutura ainda ativa: a colonialidade (QUIJANO, 1992). Esta, tão igualmente forte, mantém, ainda hoje, relações de desigualdades, dentre elas, as raciais.

Neste trabalho, observou-se a multiplicidade de questões por trás do discurso carregado pelos livros didáticos. Buscando encontrar *onde estão os negros*, refletimos também, *como são* os negros representados neste recurso tão importante para a sala de aula de Matemática.

É buscando desdobrar estas relações de desigualdades que se propõe a opção decolonial, que enquanto postura, visa combater a colonialidade e todas suas desigualdades produzidas. Portanto, reconhecendo a Matemática como uma disciplina racializada, alinha-se ensino de Matemática e lutas sociopolíticas, ontológicas, epistêmicas, éticas, estéticas e ambientais que desafiam suas desigualdades e hegemonias, como a luta antirracista.

Referências Bibliográficas

[1] SOUZA, J. S. S. S.; CRUZ, L. G. S.; LIMA, P. H. F. S.; FERNANDES, F. S. *Onde Estão os Negros? Uma discussão sobre representações de pessoas negras em livros didáticos de Matemática*, Revista África e Africanidades, Ano XIV, Ed. 38, **2021**.

[2] LIMA, I. O ensino de Matemática e os livros didáticos para os anos iniciais do ensino fundamental em escolas do campo. In: CARVALHO, G. T.; MARTINS, M. F. A. (Orgs.) *Livro Didático e Educação do Campo.* Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, p. 161-175, **2014**.

[3] BRASIL. Lei n. 10.639, de 9 de janeiro de 2003. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, **2003**.

[4] MATTE JÚNIOR, A. A.; ALVES, D.; GEVEHR, D. A Representação da Etnia Negra nos Livros Didáticos: o papel social da figura do negro no material de apoio pedagógico da educação básica. *Revista Acadêmica Licencia&acturas*, v. 5, n. 1, p. 40-47, **2017**.

[5] SILVA, M. F. *O Romper do Silêncio Discriminatório:* o manuseio do livro didático de Matemática na perspectiva da educação para as relações étnico-raciais. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, **2020**.

[6] IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua*, **2019**.

[7] SEVERO, L. F. *O negro nos livros didáticos.* Um enforque nos papéis sociais. Monografia (Licenciatura em Pedagogia). Universidade Federal da Bahia, Faculdade de Educação, Salvador, **2009**.

[8] QUIJANO, A. Colonialidad y Modernidad/Racionalidad. *Perú Indígena*, 13(29), p. 11-20, **1992**.

XII Encontro Nacional dos Grupos PET Matemática
10, 11 e 12 de Setembro de 2021

Teorema de Vieta não comutativo

Julia Bernardes Coelho[1], Dylene Agda Souza de Barros[2]
FAMAT (Faculdade de Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia
julia.bernardes@ufu.br, dylene@ufu.br

Trabalho de iniciação científica
Palavras-chave: Teorema de Vieta; Anéis não-comutativos; Quasedeterminantes.

Introdução

Dado um polinômio mônico de grau n com coeficientes reais,

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

o Teorema de Vieta nos garante que podemos expressar os coeficientes a_i, $i = 1, \ldots, n$, como funções das suas n raízes complexas $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a versão não comutativa deste teorema. Para isso, introduzimos o conceito de raiz de um polinômio definido sobre um anel não comutativo e o trabalhamos com os chamados quasedeterminantes, conceito apresentado por Gelfand e Retakh em 1997.

Polinômios sobre Anéis Não Comutativos

Para qualquer anel $R, R[t]$ denota o anel dos polinômios em uma variável t sobre R, onde t é elemento central, isto é, t comuta com todos os elementos de R.

Para um polinômio $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in R[t]$, e um elemento $r \in R$, definimos $f(r)$ como elemento $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i \in R$.

[1]Petiana do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia - Campus Santa Mônica, cidade de Uberlândia .
[2]Orientadora.

Notemos que embora $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n} t^i a_i \in R[t]$, os dois elementos $\sum_{i=0}^{n} a_i r^i$, $\sum_{i=0}^{n} r^i a_i$ sobre R podem ser diferentes.

Para avaliar $f(t)$ em um elemento $r \in R$, devemos primeiro expressar f na forma $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, e então substituir t por r.

Exemplo 13. *Seja $f_1(t) = (t-j)(t-i) \in \mathbb{H}[t]$, onde $\mathbb{H}$ denota o anel dos quatérnios reais. Desenvolvendo $f_1(t)$ temos que $f_1(t) = t^2 - (i+j)t + ji$. Assim, $f_1(i) = 0$ e $f_1(j) = -2ij$. Por outro lado, escrevemos $f_2(t) = t^2 - t(i+j) + ji$, temos que $f_2(i) = -2ij$ e $f_2(j) = 0$.*

Afirmamos que i é a única raiz de f_1. Suponhamos que $f_1(z) = 0$. Daí, $f_1(z) = z^2 - (i+j)z + ji = 0$. Logo, $z^2 - (i+j)z = -ji$ assim $(z-i)z = j(z-i)$. Isto mostra que z é conjugado a j por $(z-i)$. Em particular $z^2 = j^2 = -1$. Temos então, $ji = (i+j)z - z^2 = (i+j)z + 1$.

Resolvendo esta equação linear em z, obtemos que $z = i$. Logo, f_1 é um polinômio quadrático em $\mathbb{H}[t]$ que possui uma única raiz em $\mathbb{H}$.

Definição 30. *Um elemento $r \in R$ é dito uma raiz à direita de $f(t) \in R[t]$ se $f(r) = 0$.*

Ao longo deste texto, o termo 'raiz' significa "raiz"significa "raiz à direita".

Proposição 13. *(Forma não-comutativa do Teorema do Resto): Um elemento $r \in R$ é uma raiz de um polinômio não nulo $f(t) \in R[t]$ se, e somente se, $t - r$ é um divisor à direita de $f(t)$ em $R[t]$. O conjunto de polinômios em $R[t]$ tendo r como uma raiz é o ideal à esquerda $R[t](t-r)$.*

Demonstração. Se $f(t)$ é da forma $\sum c_i t^i (t-r) = \sum c_i t^{i+1} - \sum c_i r t^i$, então $f(r) = \sum c_i r^{i+1} - \sum c_i r r^i = 0$. Reciprocamente assuma $f(r) = 0$. Pelo algoritmo de Euclides $f(t) = g(t)(t-r) + s$ para algum $g(t) \in R[t]$ e algum $s \in R$. A primeira parte mostra que r é uma raiz de $g(t)(t-r)$. Assim, $0 = f(r) = s$, isto é, $f(t) = g(t)(t-r)$. □

Proposição 14. *Seja D um anel de divisão e seja $f(t) = g(t)h(t) \in D[t]$. Seja $d \in D$ tal que $a := h(d) \neq 0$. Então, $f(d) = g(ada^{-1})h(d)$. Em particular, se d é uma raiz de f mas não de h, então ada^{-1} é uma raiz de g.*

Quasedeterminantes

Sejam I e J dois conjuntos finitos de mesma cardinalidade n e X um conjunto de n^2 elementos $a_{ij}, i \in I$ e $j \in J$. Denotemos por $F(X)$ o anel de divisão livre gerado por X sobre $\mathbb{Q}$.

Seja $A = (a_{ij}), i \in I, j \in J$ uma matriz de ordem n, onde os a_{ij} são elementos não-nulos de $F(X)$.

Proposição 15. *A matriz A é invertível sobre $F(X)$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [1] e ela nos motiva a seguinte definição:

Definição 31. *O quasedeterminante de índice p e q da matriz A de ordem n, indicado por $|A|_{pq}$, é dado por:*
i) se $n = 1$, $|A|_{pq} := a_{pq}$;
ii) se $n > 1, |A|_{pq} := a_{pq} - \sum a_{pj}|A^{pq}|_{ij}^{-1}a_{iq}$, onde $i \in I - \{p\}$ e $j \in J - \{q\}$.

Esta definição também é válida para matrizes genéricas sobre um anel de divisão R, isto é, matrizes para as quais todas as expressões na fórmula para $|A|_{pq}$ são definidas. Consideremos ao longo do trabalho, nossas expressões em um caso genérico.

Exemplo 14. *Para uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, temos quatro quasedeterminantes. Para*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

temos,

$$|A|_{11} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21};$$
$$|A|_{12} = a_{12} - a_{11}a_{21}^{-1}a_{22};$$
$$|A|_{21} = a_{21} - a_{22}a_{12}^{-1}a_{11};$$
$$|A|_{22} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}.$$

Exemplo 15. *Para uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 3, temos nove quasedeterminantes. Vejamos a expressão de um deles, se*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ,$$

temos que

$$A^{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

e

$$|A^{13}|_{21}^{-1} = (a_{21} - a_{22}a_{32}^{-1}a_{31})^{-1};$$
$$|A^{13}|_{22}^{-1} = (a_{22} - a_{21}a_{31}^{-1}a_{32})^{-1};$$

$$|A^{13}|_{31}^{-1} = (a_{31} - a_{32}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1};$$
$$|A^{13}|_{32}^{-1} = (a_{32} - a_{31}a_{21}^{-1}a_{22})^{-1}.$$

Assim, obtemos:

$|A|_{13} = a_{13} - a_{11}(a_{21} - a_{22}a_{32}^{-1}a_{31})^{-1}a_{23} - a_{12}(a_{22} - a_{21}a_{31}^{-1}a_{32})^{-1} - a_{11}(a_{31} - a_{32}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1}a_{33} - a_{12}(a_{32} - a_{31}a_{21}^{-1}a_{22})^{-1}a_{33}$.

Quasedeterminantes de Vandermonde e o Teorema de Vieta

Sejam $x_1, \dots, x_k$ elementos de um anel de divisão de R. Para $k > 1$, o quasedeterminante

$$V(x_1, \dots, x_k) = \left| \begin{array}{ccc} x_1^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_k \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right|_{1k}$$

é chamado o quasedeterminante de Vandermonde.

Dizemos que uma sequência $x_1, \dots, x_n \in R$ é independente se os quasedeterminantes $V(x_1, \dots, x_k), k = 2, \dots, n$ são todos definidos e invertíveis. Para sequências independentes $x_1, \dots, x_n$ e $x_1, \dots, x_{n-1}, z$ em R seja

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ z_1 &= z, \\ y_k &= V(x_1, \dots, x_k)x_kV(x_1, \dots, x_k)^{-1}, k \geq 2, \\ z_k &= V(x_1, \dots, x_{k-1}, z)zV(x_1, \dots, x_{k-1}, z)^{-1}, k \geq 2. \end{aligned}$$

Observe que, se R é um anel comutativo, $y_k = x_k$ e $z_k = z$ para $k = 1, \dots, n$.

Teorema 21. *Para uma sequência independente $x_1, \dots, x_n, z$ em R, temos $V(x_1, \dots, x_n, z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ onde, para $k = 1, \dots, n$,*

$$a_k = - \left| \begin{array}{ccc} x_1^n & \dots & x_n^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-k+1} & \dots & x_n^{n-k-1} \\ x_1^{n-k-1} & \dots & x_n^{n-k-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right|_{1n} \left| \begin{array}{ccc} x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-k} & \dots & x_n^{n-k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right|_{kn}^{-1} \tag{19}$$

Consideremos a seguinte equação:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{20}$$

Lema 5. *Suponha que* $x_1, \ldots, x_n$ *é um conjunto independente de raízes da equação (20). Então os coeficientes* $a_1, \ldots, a_n$ *podem ser escritos na forma (19).*

As demonstrações do teorema e do lema acima podem ser encontradas em [1].

Teorema 22. *(Decomposição de Bezout do quasedeterminante de Vandermonde). Suponha que as sequências* $x_1, \ldots, x_n$ *e* $x_1, \ldots, x_{n-1}, z$ *são independentes. Então*

$$V(x_1, \ldots, x_n, z) = (z_n - y_n)(z_{n-1} - y_{n-1}) \ldots (z_1 - y_1).$$

Em particular se z *comuta com* x_i*, para* $i = 1, \ldots, n$*, então*

$$V(x_1, \ldots, x_n, z) = (z - y_n)(z - y_{n-1}) \ldots (z - y_1).$$

Teorema 23. *(Decomposição de Vieta de um quasedeterminante de Vandermonde). Para uma sequência independente* $x_1, \ldots, x_n, z$ *temos*

$$V(x_1, \ldots, x_n, z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

onde

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n}^{n} y_{i_k} y_{i_{k-1}} \ldots y_{i_1}. \tag{21}$$

Em particular,

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & -(y_1 + y_2 + \cdots + y_n), \\ a_2 & = & \displaystyle\sum_{i<j} y_j y_i, \\ \vdots & & \\ a_n & = & (-1)^n y_n y_{n-1} \ldots y_1. \end{array}$$

Demonstração. Usaremos indução sobre n. Para $n = 1$ tem-se $V(x_1, z) = z - x_1$ e o teorema é satisfeito.

Suponhamos que estas fórmulas são satisfeitas para $m = n - 1$. Pelo Teorema 22, temos que

$$\begin{array}{rcl} V(x_1, \ldots, x_n, z) & = & (z_n - y_n) V(x_1, \ldots, x_{n-1}, z) \\ & = & (z_n V(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)) - (y_n V(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)) \\ & = & (V(x_1, \ldots, x_{n-1}, z) z) - (y_n V(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)). \end{array}$$

Pela hipotése de indução,

$$V(x_1,\dots,x_{n-1},z) = z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1},$$

onde

$$b_1 = -(y_1 + \cdots + y_{n-1}),$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} y_{n-1} \dots y_1.$$

Desta forma,
$V(x_1,\dots,x_n,z) = z^n + (b_1 - y_n)z^{n-1} + (b_2 - y_n b_1)z^{n-2} + \cdots + (b^{n-1} - y_n b_{n-2})z - y_n b_{n-1} = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$,
onde $a_1,\dots,a_n$ são dados por

$$a_k = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}^{n} y_{i_k} y_{i_{k-1}} \dots y_{i_1}.$$

□

Assim, a partir dos últimos resultados temos a versão não-comutativa do Teorema de Vieta.

Teorema 24. *(Teorema de Vieta não-comutativo) Seja $\{x_1,\dots,x_n\}$ um conjunto independente de raízes da equação*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Então os coeficientes $a_1,\dots,a_n$ são dados pelas fórmulas

$$a_k = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}^{n} y_{i_k} y_{i_{k-1}} \dots y_{i_1}.$$

Resultados e Discussões

Neste trabalho usamos os quasedeterminantes de Vandermonde para apresentar uma generalização do Teorema de Vieta para polinômios definidos sobre anéis não comutativos. Vimos que os coeficientes de um polinômio definido sobre um anel não comutativo são funções simétricas de conjugados de suas raízes por quasedeterminantes de Vandermonde.

Referências Bibliográficas

[1] PIRES, R. M.; SERCONECK, S. *Quasedeterminantes e o Teorema de Vieta*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Goiás, **2019**.

Entrevistas do PET

No ano de 2021, o PET Matemática realizou entrevistas com Julia Jaccoud - a Matemaníaca e José Régis A. Varão Filho - Professor do Departamento de Matemática da UNICAMP. Confira as entrevistas a seguir.

Julia Jaccoud - a Matemaníaca

Julia Jaccoud é formada em Licenciatura em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP) e criadora do canal no Youtube "A Matemaníaca por Julia Jaccoud". No XII ENAPETMAT, Júlia ministrou a palestra intitulada "Matemática: da formação à divulgação científica", compartilhando fatos sobre sua trajetória, projetos que está envolvida e instigando reflexões sobre o cenário da divulgação científica.

Entrevista com a Julia Jaccoud - a Matemaníaca

Confira as respostas da entrevista com Julia Jaccoud - a Matemaníaca:

1. **Como surgiu a ideia de criar um canal no Youtube?**

   Julia: "A partir do ponto em que eu percebi que não queria fazer engenharia, eu descobri que queria muito fazer com que as pessoas tivessem uma relação diferente com a matemática. 'Então quer dizer que você queria que todo mundo fosse um matemático?' Não, Deus me livre, não é isso. Eu queria que as pessoas tivessem a oportunidade de se maravilhar e de achar que pudesse ser interessante e, mais do que isso, que pode sim ser para ela.

   Enfim, há vários mitos na vida, não é? Falando que matemática é para gênio, que a matemática é só para algumas pessoas e eu falava assim: 'Mano, sei lá, se eu estou fazendo matemática e sou uma pessoa completamente normal, como pão com ovo de manhã, as outras pessoas podem curtir matemática também' Então foi muito essa vontade quando eu entrei na graduação, e continuou sendo essa vontade, ela só se antecipou no canal.

   Então 'A Matemaníaca' surgiu com tipo 'Caraca, eu estou vendo essa matemática muito show e não é possível que ela tenha que ficar dentro da sala de aula. Só com esses professores contando para esse grupo de pessoas. Não, eu quero contar pra mais gente.' Aí nasceu essa tal 'd'A matemaníaca' que, em particular, sou eu mesma.

   Então entrei no YouTube, depois no Instagram, aí do Instagram fui para o Twitter, do Twitter fui para os podcasts, e agora estou escrevendo um livro, então todas as coisas que vierem depois disso parecem estar longe. Mas estão sempre para o mesmo objetivo que é fazer com que as pessoas tenham um encontro mais positivo ou percebam que não precisa ser um alienígena. Uma pessoa muito especial com características bem específicas para poder curtir matemática como a gente curte qualquer outra coisa."

2. **Como conciliar o canal com o restante de suas atividades?**

   Julia: "Às vezes não concilia. Essa é a verdade, às vezes há um grande surto, eu acho que esse ano de 2021 foi um ano de experimentar muito. Eu sou formada em licenciatura em matemática, sou professora desde então, eu atuo como professora para crianças de 5 a 12 anos numa escola extracurricular de matemática. 'A Matemaníaca' já existe há uns 7 anos e assim as coisas vão se moldando. Então no início eu tinha uma frequência de vídeos que hoje não é mais a mesma. Hoje eu entendo que tem um formato que eu gosto mais de falar.

   E esse formato exige uma preparação, um cuidado, um zelo nessa criação de conteúdo e, por exemplo, a frequência começa a diminuir um pouco para poder ter esse preciosismo que eu quero dentro do formato da fala da apresentação desses conteúdos. Então eu vejo que hoje eu me preparo muito mais matematicamente para poder falar sobre um assunto, e até em outras disciplinas, por exemplo, num vídeo sobre paradoxos eu fui estudar biologia para entender quanto tempo demora para todas as células do corpo mudarem, então tem várias coisas que a gente vai viajando para poder criar aquele conteúdo da forma mais legal possível. Então, como conciliar? Adaptando, entendendo quais são os nossos maiores motivos de animação, de interesse no momento, por exemplo, hoje eu produzo muito menos vídeos para o YouTube, mas isso não significa que ao mesmo tempo eu não esteja fazendo outras coisas de divulgação científica que, talvez, sejam mais invisíveis em relação ao público.

   Tem outras coisas que a gente vai experimentando. Esse ano eu estudei mais literatura do que matemática. Mesmo fazendo mestrado como aluna especial na UFES, eu fiz vários cursos de escrita, porque eu entendi que no ano que vem talvez eu não possa continuar na mesma 'pegada' dos vídeos, pois o que mais está me interessando agora é a escrita, então estou super me preparando para escrever livros que ainda não existem nas prateleiras todos dentro desse preciosismo de ter uma forma de falar, um jeito de cativar as pessoas, esse maravilhamento sem perder o que a gente gosta na matemática nessa rigorosidade, essas reflexões e tudo mais.

   Então eu concilio tudo isso dependendo dos meus interesses, eu sinto que sou essa pessoa extremamente plural que está nas artes, na literatura, na matemática, na sala de aula, tanto como professora quanto como aluna, e dependendo do momento vou entendendo que as intensidades mudam dependendo de um lugar para o outro. Mas eu acho que a grande graça é aceitar sua pluralidade e de alguma maneira cuidar dela também porque é muito fácil a gente ficar num negócio só e acabar esquecendo de todas essas outras coisas que compõem a gente como seres humanos.”

3. **Na sua opinião, quais são os maiores obstáculos da divulgação matemática, e de que maneira você acredita que ela poderia melhorar?**

   Julia: “Acho que um grande obstáculo é a falta de incentivo no sentido de que a divulgação matemática, num sentido mais amplo, não precisa de uma galera torcendo, não é isso que a gente precisa. Quando a gente fala sobre viabilizar algo acontecer é, de fato, colocar dinheiro naquilo e tornar aquilo relevante. Eu vejo que hoje, por exemplo, a divulgação de uma maneira geral não vai ser tratada como relevante a partir do momento que a gente não enxergar nossos pares como algo relevante. Então, por exemplo, quem faz hoje na academia um projeto de divulgação científica é visto como ‘Ah, que legal! Ele tem um projeto paralelo’, sendo que no final das contas isso é tão importante quanto fazer pesquisa. A gente sabe que os usos da divulgação científica são múltiplos, então a gente tem esse objetivo de aproximar a ciência da população, fazer jus do que estamos pesquisando, com ou sem objetivos, então a gente precisa que essas coisas existam para entender suas utilidades, aplicações e tudo mais. E uma sociedade que investe em divulgação científica é uma sociedade que é mais informada, que é criticamente instruída, que vota melhor, que toma decisões melhores, que levantam pontos interessantes, e que é muito mais interessante de viver, então todo mundo entende a importância da divulgação científica. Mas ninguém tem dinheiro para poder fazer isso, então eu acho que a partir do momento que, sei lá, para fazer um concurso público seja necessário ter realizado um projeto de divulgação científica, que existam editais para isso dentro da academia e ela seja de alguma forma colocada como uma pauta importante, acho que as pessoas vão ter mais interesse, porque a gente acaba vendo hoje pessoas que não são matemáticas falando de matemática. Talvez os maiores e únicos nomes de pessoas na internet brasileira falando sobre matemática são o Régis e eu, e, no geral, as outras pessoas que falam de matemática são pessoas que estão compartilhando suas experiências na graduação, por exemplo. Mas quando vemos um matemático no ‘Fantástico’? Nós temos o Marcelo Viana escrevendo na ‘Folha de S.Paulo’, mas é só o Viana. E nos outros jornais, quem nós vemos falando de matemática? E também existe uma preocupação de não só jogar a pessoa lá para fazer a divulgação, existe um preparo de comunicação, não adianta só você pegar o seu artigo e ler em voz alta, entende? Esse tipo de divulgação teria como alvo um grupo muito seleto, então se nós quisermos fazer algo mais social, precisamos ter esse preparo de entender como falar, para quem falar, onde falar, e isso é algo extremamente necessário. Então eu acho que a divulgação matemática em relação às outras disciplinas ainda engatinha no quesito de que há poucas pessoas fazendo, pouco preparo e pouca valorização."

4. **Você enfrentou muita desigualdade no curso de matemática, ou no meio de divulgação científica, por ser mulher?**

   Julia: "Eu fico muito feliz em dizer que as pessoas que entram na matemática hoje têm vivências muito diferentes com a questão de gênero do que quando eu entrei em 2012. No início, eu não questionava essas coisas, então eu olhava para o lado e eu não percebia essas desigualdades, mas uma vez que você vê, não dá para 'desver', o que é muito bom, pois você não consegue entrar num lugar onde você é a única mulher e não questionar isso. E as meninas pretas, então? Nós estamos apenas no começo, a gente precisa trazer as trans, trazer todo mundo, porque tem muita gente que poderia estar no meio acadêmico mas não se sente confortável nesse ambiente. Mas, por exemplo, hoje eu sou convidada para falar com alunas de ensino médio sobre a questão de gênero, ou falar sobre matemática nesse lugar que eu não fui incentivada a questionar que eu não tinha amigas que questionavam também. Então foram 10 anos em que é possível observar um avanço pelo menos na discussão ou na exposição de que existe um problema, e eu sinto que é só o começo porque não adianta só falar, a gente também precisa ter ações afirmativas de realmente fazer com que mudanças sejam feitas para nos sentirmos mais acolhidas. Agora, se eu senti muita discriminação? Na época eu era cega. Até a metade da minha graduação, eu era essa pessoa que não questionava muito, até eu entender que, por exemplo, para quem estava no bacharelado era muito mais difícil do que para quem estava na licenciatura. Aí depois você começa a questionar que talvez a gente só esteja aqui porque a sociedade acha que se for para a mulher fazer matemática, que seja uma licenciatura porque a gente cuida, a gente é mãe, e todas essas coisas estranhas que continuam propagando, ou seja, nós vemos que, realmente, o buraco é muito mais embaixo e que tem coisas que precisamos fazer para que esses ambientes sejam confortáveis e as pessoas se sintam convidadas a participar deles, e não só falar 'Pode vir', porque a gente sabe que quando está na sala de aula o professor e os alunos vão duvidar da sua capacidade por você ser mulher, e você não vai se sentir convidada para perguntar, ou vão achar que você foi aprovada numa disciplina por conta do tamanho do seu short. E eu espero que a gente seja igual um foguete que não dá ré e que daqui para frente a gente realmente consiga coisas muito maiores para esse ambiente ser mais acolhedor para as meninas."

5. **Quais são as suas expectativas em relação às mulheres na ciência?**

   Julia: "Quando a gente se une eu acho que a gente é meio que imparável. De verdade, porque a partir do momento que eu vi no meio da minha graduação, um coletivo sendo criado, em que a gente discutia o que estava acontecendo e as experiências das meninas, a gente de fato consegue criar ações que fazem sentido para a gente dentro daquele espaço. Quando eu estava na graduação, eu vi isso acontecendo nos anos iniciais, nos primeiros semestres, de ter pelo menos uma mulher sendo professora. O que já é um avanço muito grande, porque pensar que se essa menina entra no bacharel, provavelmente, se ela existe lá, vai ser única ou vai ter 2, 3 meninas. Mas então imagina esse ambiente que já não é convidativo para a gente estar, só de ter uma professora ali na frente já é um motivo para conversar antes de desistir. Então acho que quando a gente se une a gente consegue de fato entender e lutar de uma forma mais assertiva por coisas que fariam diferença para a gente dentro daquele ambiente, então acho que o que eu vejo daqui para frente é conseguir colocar essas ações em pauta e também efetivas dentro da academia. E, também, eu vejo hoje muitas mulheres sendo convidadas para congressos e eventos falarem sobre as suas vivências como mulheres na matemática. Eu espero que para o ano que vem, para amanhã a gente veja essas mulheres serem convidadas também para falar sobre as pesquisas. Porque fica parecendo tipo zoológico, que a girafa olha como mesmo que com toda a evolução ela persiste, existe. Não quero ser uma girafa no zoológico. Além de falar como é difícil ser mulher nesse ambiente, também falar as minhas pesquisas que é o que me integra na maior parte do tempo. Então acho que se há uma ação legal seria: eu venho falar aqui no seu evento sobre como é ser mulher na matemática se você também me der tempo para falar sobre a minha pesquisa. Eu acho que isso seriam coisas legais de ver acontecendo neste futuro bem próximo.."

6. **Você acredita que existe uma falta de democratização do acesso ao conhecimento científico no Brasil?**

   Julia: "Sim, com certeza é extremamente elitizado. Por exemplo, da forma que eu faço divulgação científica eu acesso só as pessoas que têm um aparelho, seja um computador, um celular e tem acesso a internet; e a gente já sabia, mas muita gente descobriu na pandemia, que a gente não acessa nem metade das pessoas com esse tipo de coisa, então a gente tem uma caminhada bem longa em questão de democratizar os assuntos. Sendo breve, não é nem um pouco democratizado. É engraçado pensar que a gente comentou aqui antes da entrevista que a matemática, dentre as ciências é a mais democrática, no sentido de você só precisar de um papel e de uma caneta para fazer, ciência barata. Mas em contrapartida, é a mais inacessível em questão de propagar mitos dentro de uma sociedade que vai fazer cada vez menos gente se interessar ou mostrar uma parte da matemática que não incentiva novas perguntas, novas respostas, criatividade que são as coisas que a gente vê acontecendo na academia. Mas eu vejo por outro lado também, eu não acho que a OBMEP deveria ser a única coisa acontecendo. Não estou aqui para falar que olimpíadas de matemática é a salvação do cenário matemático, mas acho que é uma política pública que funciona. Eu acho que deveriam ter outras ações que convidasse não por meio de competição e tal. Mas a Olimpíada funciona, é um jeito de você apresentar uma matemática mais aberta, mais criativa e que movimenta os professores, movimenta os alunos e tem toda a política de não é só passar numa prova, é você ser convidado para continuar estudando e você entrar numa graduação e ter uma bolsa. É algo que eu vejo que funciona, eu espero que a gente, daqui um próximo tempo, tenha outras políticas públicas de acesso a matemática que também funcionem e que não precisem ter, por exemplo, uma base em competição como uma Olimpíada."

7. **Houve incentivo das pessoas ao seu redor quando você decidiu fazer graduação num curso de licenciatura?**

   Julia: "Ah, tem muita dúvida. As pessoas não entendem muito bem, e acho que o papel da divulgação matemática é isso. Estou desde 2012 na graduação, na vida de matemática, mas eu me peguei no ano passado, explicando para o meu pai o que o matemático faz no mestrado, o que é esperado que ele faça no doutorado e já faz 10 anos que a filha dele faz matemática, então mesmo assim há dúvidas. Porque eu acho que é muito mais fácil as pessoas entenderem o que o engenheiro faz, o que o médico faz, um advogado faz; então assim, eu comecei a explicar pro grupo da minha família o que um matemático faz, o que é esperado até mesmo depois de 10 anos sendo matemática. Mas eu acho que de maneira geral houve incentivo, por exemplo, a minha mãe ficou com muita dúvida no início mas depois ela ficou assim 'quem é que vai falar de matemática para seus filhos? Precisa dessa pessoa'. Minha mãe é uma pessoa que acabou abraçando mesmo que não entendesse muito bem o que eu estava fazendo."

8. **Sabemos que a matemática não é tão difundida na cultura pop. Quais filmes, séries ou livros você recomendaria para os apaixonados pela matemática e para aqueles que querem conhecê-la um pouco melhor?**

   Julia: "Então, sobre divulgação científica, como a gente falou anteriormente, a matemática engatinha perto das outras ciências. Então eu vou dizer que têm classes de produtos de divulgação científica. Dentro do cinema tem a classe das biografias. Muito fácil falar que teve uma pessoa que ficou plantada na Terra e fez coisas extraordinárias para matemática. Então a gente vê ótimos filmes como 'Estrelas Além do Tempo', 'O Homem Que

Viu O Infinito', 'Jogo da Imitação', que vão falar de pessoas que passaram aqui nesse mundo, que fizeram coisas incríveis de uma forma muito legal e tal. Mas em contrapartida, não tem nenhum filme especificamente que fala de matemática por ela mesma, e é nesse sentido que a gente engatinha. E se vai para área da literatura é muito comum os livros de divulgação científica serem os livros que falam dez teoremas que você precisa conhecer, 50 ideias da matemática que você não pode morrer sem saber, dez biografias incríveis e são esses títulos normalmente de lista que são ótimos, eu tenho ótimos para indicar para vocês, eu acho '50 ideias da matemática' da edição da editora Planeta perfeito! Eu acho que ele cumpre um ótimo papel e seria uma das minhas recomendações. Mas eu gosto de dar mais atenção para os que são literaturas que tem matemática ali, não são muitos mas eu vou citar todos que eu gosto. Eu gosto muito do 'Logicomix' que é um quadrinho que fala sobre a história inclusive da lógica matemática. Eu gosto muito do 'O diabo dos números' que é sobre o Robert que é uma criança que não tem muita intimidade com a matemática e ele começa a sonhar com matemática dentro dos sonhos e tem o tal do diabo dos números e essa personagem é muito intrigante, muito cética, muito sarcástica e tal, ele tem uma capa infantil talvez até a escrita seja mais para infantojuvenil mas as ideias matemáticas como elas são apresentadas dentro do livro são extremamente ricas, então recomendo muito. E eu amo 'Planolândia', para mim é perfeito. É basicamente uma distopia, aqueles livros que vão falar sobre esses cenários que não existem, de populações que falam como chegou nesse lugar e vai criticar muito política, religião, padrões sociais e tal. O que eu acho incrível de planolândia é que essa distopia acontece no mundo de fato 2D com pessoas 2D. Ele vai pegar a sua mãozinha e vai falar assim 'ó, é assim que um quadrado que vive na planolândia vê os outros quadrados e é assim que um quadrado, quando encontra o mundo linhalândia, vê a linha e a linha não vê a linha', só que em algum momento a planolândia vai ser invadida por nós da espaçolândia ou pelo menos por uma pessoa da espaçolândia e tudo o que tem de matemática dentro dessa distopia é muito bem construído. Tem também a animação de 'Planolândia', talvez seja mais digerível ler e depois assistir porque seria muito de matemática e talvez o apoio visual ajude bastante, se bem que a edição da Tordesilhas tem bastante imagens e pega bastante na mãozinha a escrita do Edwin, então vai dar tudo certo, só navegue por esse plano que é muito legal. São essas minhas recomendações. Participei recentemente, a convite da Tordesilhas, de uma mesa sobre ficção científica. Eu já citei lá mas eu vou contar aqui, em segunda mão, que não vai sair só um livro, vão sair dois livros meus no ano que vem. Já estou em fase de escrita então vai vir, Júlia autora está chegando."

9. **Você acredita que faltam pessoas no meio da divulgação científica ou que falta destaque para ele?**

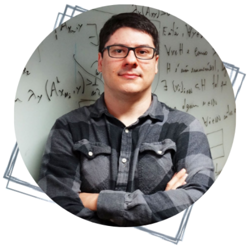
   Julia: "Sim. Na questão de jornalismo científico, as outras ciências tem muito mais espaço, se vai lançar um foguete a rapaziada para para assistir o foguete, vai falar de pandemia tem muita gente da biológicas em destaque também falando e tal. Mas eu sinto que falta esse espaço na matemática. O que é notícia é teorema, um problema do milênio sendo resolvido e coisa e tal que é muito legal mas acho que falta um pouco mais de pauta. Eu acho que o Marcelo Viana faz um papel muito importante na Folha, a BBC também tem uma parte de matemática muito legal. Eu costumo gostar dos produtos tanto em vídeo quanto escritos deles são bem interessantes, mas acho que falta a frequência e o destaque que as outras ciências tem. E a questão de divulgação científica e meio de internet, infelizmente dá pra contar em uma mão as pessoas que falam português e divulgam matemática. Nesse grupo vai ter eu, o Regis, e a Inês do 'Mathgurl' que é português de Portugal que faz com frequência. Não conheço outras pessoas e eu estou aí há 7 anos. O que eu posso dizer é que falta e eu estou muito aberta a ajudar qualquer pessoa que queira falar de matemática em qualquer lugar. Eu sempre me disponho muito. Me escreve, marca uma reunião. Eu estou estou abrindo o mato mas eu quero que vocês trilhem aqui comigo. Que a gente de fato faça um caminho de pedra, depois asfalte, para todo mundo conseguir fazer isso. Só me chamar que eu vou. Vou sempre com muito prazer ajudar a quem quiser começar. Já ajudei muita gente mas não especificamente de matemática então tem uma rapaziada nova e de física que eu ajudo bastante até em conversa com marca e tal. O Régis também a gente está sempre em contato, eu estou muito aberta."

10. **Quais dificuldades você encontrou na sala de aula?**

    Julia: "Acho que as maiores dificuldades de sala de aula é quebrar os mitos que a gente constrói diariamente de quem pode ou como é que faz matemática. Porque assim, particularmente, têm 2 grupos de pessoas que você dá aula: os que têm muito interesse que a gente vai falar o que é o fundamental e a graduação e tem aquele limbo, ali no meio, que é a rapaziada que quer acreditar que não gosta. Então essa rapaziada é a mais difícil de pegar, justamente porque tem uns influenciadores digitais que são quem vai ditar o que é legal agora ou não, que vai até falar que não gostava de matemática e tá tudo bem que não gosta de matemática e vai ouvir de casa que os pais não eram muito bons em matemática e que você só precisa vir na média. É socialmente aceito que não gostar de matemática tá tudo bem e que não é para todo mundo. Então eu acho que essa é a maior dificuldade. Eu dou aula para crianças de 5 a 12 anos e não tem uma aula que elas não gostem. Por exemplo, ontem eu estava falando sobre poppet e os alunos mostraram uma bolinha que tinham que organizar por cores, e começaram a discutir diferentes formas de organizar as bolinhas, então surgiram perguntas: 'Eu faço assim, mas você faz do mesmo jeito que eu?', 'Mas será que não tem outro jeito de fazer?' Aí mostraram um cubo que vai abrindo de diferentes formas. Aí eu falei 'nossa vou mostrar um negócio pra vocês' e já puxei para um conteúdo hexa flex e a gente ficou discutindo sobre estrutura de simetria, de hexágono, por que acontece o que acontece e como que fica essa estrutura. Não tem como não se apaixonar pela matemática. É muito legal, só entrar nesse primeiro assunto e pegar esse gancho e fazer com que todo mundo se interesse, essa é a maior dificuldade, justamente porque a gente vive numa sociedade que fala que está tudo bem não gostar de matemática e aí já está respaldado. Por isso, quebrar essa primeira barreira eu acho que é o mais difícil depois disso não tem como não se apaixonar é muito legal pensar nas coisas que a gente se propõe a pensar."

11. **Quais conselhos você daria para uma pessoa que pretende ser professor de matemática?**

    Julia: "O que eu mais indico para quem está pretendendo ser professor de matemática é que você leia as teorias mais recentes. Não que o que foi feito antes de agora não seja tão importante, é muito legal. Mas eu acho que tem pesquisas que estão sendo feitas agora e que tem pessoas no Brasil que estão identificando e trazendo para o português até antes da academia, que são muito relevantes e que fala justamente sobre esses pontos de quebrar os mitos acerca da matemática. E é uma rapaziada de Stanford então eu digo que são as '3 super poderosas' que a gente precisa ler hoje que é Carol Dweck, Jo Boaler e Rachel Lotan. A Jo Boaler, que para mim é a 'Florzinha' das 3 poderosas, é a pessoa que vai juntar uma teoria antiga muito boa, ela faz uns links muito bons de pesquisas que precisam ser lidos de forma atualizada, e não só na teoria. Ela tem uma escola de aplicação que funciona. 'Ah, mas a minha turma tem 40 (alunos)' também aplica isso daqui numa de 40 (pessoas), 'mas é de periferia' também aplica. Então, hoje não basta pensar 'Eu li a teoria mas não se aplica na minha sala de aula', pois a Jo Boaler tem feito isso de uma maneira muito legal. E também entrem em um site chamado 'YouCubed'. É tão importante isso que está sendo feito agora. Tem uma escola em São Paulo chamada Sidarta que traduz tudo e traz essas mulheres para o Brasil para poder falar e fazer reciclagem de professores de escola pública no Brasil. Então, para ontem, se você quer ser professor de matemática comece vendo o site da 'YouCubed' e maratona tudo que Jo Boaler escreveu e gravou na vida. Essa é a maior dica que eu posso dar. E ainda para o lance de trabalho em grupo, que é uma das habilidades que a gente está vendo aí que é bem importante para essa nossa nova geração, temos Rachel Lotan que vai falar sobre equalização de status, que é um ensino para equidade. As pessoas não são iguais e elas não partem de lugares iguais, então elas não têm que ter as mesmas condições, elas têm que ter condições diferentes para que essa essa corrida seja justa. Porque do jeito que está não está justo. Então é esse ensino para equidade e não para igualdade. Não é sobre ter as mesmas oportunidades. Então, se quer ser professor, leia o que as 3 super poderosas estão fazendo porque é muito significativo."



José Regis A. Varão Filho

José Regis A. Varão Filho é docente e pesquisador em matemática na Unicamp e divulgador científico. Graduado em Matemática pela Unicamp, Mestre e Doutor pelo IMPA. Pós-doutor pelo ICMC-USP e pela Universidade de Chicago. Criador do canal no Youtube "Fantástico Mundo Matemático", no XII ENAPETMAT, Régis ministrou a palestra intitulada "Eu acho o curso de cálculo muito difícil".

Entrevista com o Prof. Dr. José Régis A. Varão Filho

Confira as respostas da entrevista com o Prof. Dr. José Régis A. Varão Filho:

1. **Como surgiu a ideia de criar um canal no YouTube?**

   Régis: "A ideia não surge assim do nada. Não é assim: 'ah, eu vi alguma coisa, aconteceu alguma coisa, oh, eu quero ter um canal no YouTube'. De certa forma, é uma ideia que foi amadurecendo ao longo do tempo, não significa que o YouTube já estava sendo pensado.

   O que estava sendo amadurecido é o seguinte: eu sempre quis e sabia que em algum momento ia me envolver com divulgação, esse tipo de coisa, entendeu? O YouTube em si foi, digamos, a plataforma que no momento parecia viável para fazer divulgação, então a ideia surgiu mais do meu interesse, aliado à minha personalidade, em fazer divulgação mesmo. E aí em um determinado momento eu parei para pensar: 'olha, eu acho que tá um bom momento de tentar fazer, as coisas deram uma tranquilizada, já tô com um emprego fixo aqui e tal'. Fazia sentido diante das circunstâncias eu começar a trabalhar um pouco mais especificamente com a divulgação, então foi isso.

   Resumindo, a ideia, ela não surge do nada, ela é mais um amadurecimento mesmo do meu interesse, e em um determinado momento, eu achei que era o momento de fazer e o YouTube foi, digamos, o local escolhido."

2. Como conciliar o canal com o restante de suas atividades?

   Régis: "É difícil, tanto é que se você for ver, o canal, ele às vezes tem alguns gaps muito longos de publicação. Já fiquei seis meses sem postar, agora acho que já estou há mais de seis meses. Eu já tentei mudar um pouco o formato, uma vez fui dar o curso de História da Matemática, tentei incorporar também ali no canal.

Eu não consigo fazer de uma maneira apropriada. Uma das razões do canal não crescer como acho que deveria, é porque eu realmente não consigo conciliar mesmo. Ele é mais um hobby, e aí eu vou fazendo na medida do possível.

Eu ainda tô pensando em estratégias e às vezes até formatos de como fazer, de forma que seja o mais natural possível. Porque de fato é difícil. O fato é que eu não consigo conciliar muito bem, e aí o canal acaba sendo prejudicado.”

3. **Por que você escolheu o curso de Matemática?**

   Régis: “Esse tipo de pergunta eu acho legal responder, porque ajuda a quebrar um pouco o estereótipo, as ideias, alguns preconceitos que as pessoas têm. Por exemplo: ‘olha, uma determinada pessoa nasceu pra matemática, desde sempre a pessoa queria aquilo’. Uma resposta rápida é assim: foi uma grande questão de sorte. Não foi uma escolha tão consciente.

   Quando eu estava lá no segundo grau... Vou encurtar um pouco a história, porque ela é meio longa. A primeira vez que eu fui me inscrever num vestibular, escolhi uma Engenharia, e ainda escolhi a Engenharia mais disputada que tinha. Ou seja, perceba que tem zero racionalização na minha escolha ali. Muito um jogo de sorte: ‘ah, talvez eu queira ir pra área assim de exatas e tal”. Mas, confesso também, isso nem era algo em pedra, algo que para mim era muito óbvio.

   Resumindo, uma boa parte do que acontece na minha vida, é a influência do acaso. E é a mesma coisa por ter escolhido a Matemática, então foi um quase um jogo de sorte. Eu vi que a Unicamp fazia vestibular lá em Brasília, eu sou de Brasília, aí fui me inscrever. Eu vi que tinha esse curso lá, que era o curso que mais vagas tinha na UNICAMP, eram cento e tantas vagas... Que para entrar na UNICAMP, você não entra diretamente na Matemática, você entra nisso que chama ‘cursão’, que são muitas vagas, e aí você pode escolher Matemática, Física... então eu pensei: ‘ah, sei lá, é muita vaga, deve dar certo. Me inscrevi.’. Ou seja, essa é a grande escolha que eu faço. Quando você está na escola, quando você é muito novo, você não tem muita noção das coisas, então é uma escolha muito aleatória.

   O que acontece é que coisas aleatórias vão acontecendo um pouco na nossa vida, mas claro que daí os nossos interesses vão fazendo a gente permanecer naquilo ou não. E aí eu gostei, fui me interessando, e aí eu fui ficando. E aí eu fui traçando esse caminho que estou hoje. É isso.”

4. **Quais foram os maiores desafios que você enfrentou na sua trajetória acadêmica?**

Régis: "Eu vou responder pensando como quem estiver lendo, talvez sejam alunos. Na graduação... É a mesma dificuldade que todo mundo passa, é que às vezes a gente não está muito convencido que está todo mundo passando pelas mesmas dificuldades. É claro que todo mundo vivencia a vida de uma maneira muito única, porém muitos sentimentos e muitas frustrações que a gente tem, de alguma forma elas são compartilhadas por todo mundo.

Então, quais foram as maiores dificuldades? Foi você se questionar: 'puxa! Será que é isso mesmo que eu quero? Será que eu escolhi a coisa certa? Será que eu tô indo pelo caminho certo?'. Do ponto de vista acadêmico: 'poxa, será que eu tô aprendendo mesmo?'. Eu olho para trás as matérias que eu fiz, e aí pensava: 'nossa, eu não estudei direito, eu tinha que ter estudado mais'. Aí eu paro para pensar na minha formação e vejo que eu sei pouco. Então, esse tipo de angústia é muito comum, e é importante a gente entender que essas angústias, elas são comuns para todo mundo, para que a gente não se machuque muito nesse processo, entendeu?

Ter dificuldades, é normal, elas fazem parte. Então, nesse sentido eu tive dificuldades grandes, mas muito normais. Hoje eu sei que elas são muito normais. Depois, para virar professor, tem as dificuldades do próprio desafio do trabalho em si. É um trabalho que demanda bastante, mas eu não tenho nada muito especial que eu possa dizer: 'minha dificuldade é muito diferente da dos outros por causa disso ou daquilo'. Não, foram dificuldades grandes, mas eu sei que são comuns a todo mundo. E novamente, por que eu digo isso? Porque eu acho que tem um papel pedagógico pras pessoas entenderem que a dificuldade e a frustração de não saber e a dúvida do que vai acontecer na vida, ela faz parte da vida como um todo mesmo."

5. **Com o aumento do número de pessoas com pós-graduação em Matemática e visto que o número de vagas para professores nas universidades públicas é muito limitado, e cada vez mais diminui, qual é a sua perspectiva para os alunos que buscam entrar na vida acadêmica?**

   Régis: "É uma pergunta muito delicada de responder, porque teriam muitas respostas para ela. O que aconteceu? Em tempos recentes, nós tivemos uma expansão, eu não sei se é uma expansão ou mais uma reparação, talvez, da comunidade acadêmica. De toda forma, em tempos um pouco mais recentes nós tivemos muitas contratações, então todo mundo tinha melhores expectativas, as pessoas conseguiam se posicionar. Por exemplo, quem quisesse continuar na carreira acadêmica e encontrar posições em universidades.

   Agora a coisa mudou, mas, se você olhar numa perspectiva histórica, infelizmente o Brasil não tem uma tradição de fazer as coisas de uma maneira muito organizada. Então, você teve períodos muito grandes em que o mercado de trabalho estava mais difícil, aí depois melhorava. Agora nós estamos num momento muito crítico, então eu não posso aqui dar exatamente uma recomendação para as pessoas. O que eu quero colocar é que os tempos vão mudando, e aí de novo tem o papel da sorte. Às vezes a pessoa pode ter tido o azar de ter se formado, digamos, terminado o doutorado no momento em que a crise está começando, é óbvio que ela sai na desvantagem de alguém que terminou o doutorado no momento que está tendo aquela bonança. Então, tem o fator sorte, não posso recomendar se as pessoas devem ou não fazer alguma coisa. Eu acho importante elas estarem motivadas para seguir o que elas querem seguir na vida delas.

Dum ponto de vista pragmático, o que eu poderia falar é que nós vivemos um momento delicado, pensando academicamente, está mais difícil você se posicionar no mercado de trabalho, arranjar um emprego e, por exemplo, quem tiver com intenções de fazer mestrado, doutorado, está mais difícil conseguir bolsas. Então tem essa realidade. A decisão... não posso exatamente indicar o que as pessoas deveriam ou não fazer, mas essa é a realidade, e uma outra observação é que a realidade também muda. Momentos melhores virão e momentos piores retornarão, então é realmente uma decisão difícil, mas o que eu posso dizer é que a realidade tá aí e a gente precisa encará-la como ela está, cada um fazendo a sua análise de perspectivas, de condições, de possibilidades, tentando tomar a melhor decisão."

6. **O que o motivou a ser pesquisador?**

   Régis: "Como eu estava comentando, foi a escolha de vir pra Matemática que foi muito uma coisa de sorte.

   Mas, confesso que, apesar de não saber o que significava, eu lembro que, quando eu era mais novo, eu queria ser cientista, então eu até queria, seja lá o que significasse isso, trabalhar com pesquisa. E as coisas foram caminhando, eu tinha um interesse, mas muito vago: 'eu queria continuar na carreira acadêmica e tal'. As coisas foram acontecendo, então eu fui também tomando ações nessa direção, fui tendo boas experiências. Lembrando, o caminho é muito confuso, é muito tortuoso, você fica na dúvida se está fazendo o que é certo, se deveria continuar. Mas, de toda forma, eu fui seguindo esse caminho, e as coisas foram acontecendo, foi um 'mix' de sorte, aliado com o meu interesse, e as coisas indo acontecendo. Foi mais ou menos assim.

   Se eu tivesse chegado num momento que estivesse superdifícil, eu não tivesse arranjado emprego, por exemplo, na academia, eu teria ido, talvez, para outro lugar, estaria fazendo alguma outra coisa e estando superfeliz. Isso faz parte, isso pode acontecer."

7. **Na sua opinião, quais são os pontos positivos e negativos da sua profissão?**

   Régis: "Boa pergunta! Os pontos positivos, é que a gente tem uma liberdade de poder buscar o que a gente quer trabalhar, o que quer pensar. Então, essa liberdade de pensamento realmente é um grande prazer que essa profissão fornece: a possibilidade da gente poder pensar, na medida do possível, de uma maneira muito livre. E a maneira que o trabalho é feito, a interação com alunos, seja alunos de pós-graduação, mestrado, doutorado, com alunos de graduação, esse ambiente é muito rico, é uma coisa muito viva. Então, esses são os grandes pontos positivos, a própria dinâmica do trabalho.

   Os pontos negativos são justamente a valorização da educação, da ciência mesmo. A dificuldade de você ter acesso a verbas. Alunos perdendo bolsas, alunos excelentes não conseguindo se posicionar, não sendo reconhecidos. A parte negativa está nesse grande contexto do pouco reconhecimento, como um todo, da importância de fazer ciência, da educação, da universidade."

8. **Você acredita que fez a escolha certa para decidir a sua profissão?**

   Régis: "Eu não acredito que existia a escolha certa, eu acho que eu não fiz escolhas muito erradas. Então acho que as coisas deram certo mas, de novo, como eu acredito que existe o fator sorte e ele é muito decisivo na vida das pessoas, tem algumas coisas que eu sinto que não posso controlar. Por exemplo, voltando à questão estrutural do momento do país, são coisas que você não consegue controlar, você que terminou o doutorado agora, não dá para mudar a realidade que está posta, então muita coisa eu não tenho controle, e então vou tomando decisões baseadas em circunstâncias que nem fui eu que as criei. Mas, de toda forma, dentro dessas possibilidades, eu acho que não tomei as piores escolhas.

9. **Você acredita que a divulgação matemática está "atrasada" em relação às demais divulgações científicas?**

   Régis: "Talvez eu pudesse responder que sim, mas entendo que é um pouco mais delicado e que existem muitos fatores. Fazer divulgação matemática por si só é muito difícil, a matemática, em algum sentido, é um pouco menos chamativa. Eu não sei se a palavra correta é 'atrasada', mas talvez falte um pouco mais de divulgação e de reconhecimento desses trabalhos, por exemplo, eu falei que não posso me dedicar muito ao ao canal no YouTube por outras questões, e se fosse algo que tivesse um reconhecimento do ponto de vista profissional, eu poderia inclusive me dedicar mais. Então acho que falta muito ainda para a gente melhorar a divulgação. Acho um pouco complicado falar que ela está mais atrasada, eu acredito que, por natureza, ela é mais difícil do que as outras áreas, então pode ser que ela sempre dê a impressão de estar atrasada, mas, de toda forma, a gente precisa melhorar sim, e o que temos ainda é muito pouco.”

10. **Houve incentivo das pessoas ao seu redor a seguir uma carreira acadêmica?**

    Régis: “Sim, por exemplo, a minha família nunca se opôs, então eles achavam legal que eu queria continuar estudando, então a minha família via essa carreira com bons olhos. Isso eu acho muito importante, e eu sei de colegas cuja família pensa ‘Ah, mas ele está só estudando?’, às vezes está fazendo um mestrado, um doutorado e ganhando bolsa, mas a família vê uma outra pessoa que já está num outro emprego ganhando mais e questiona a decisão da pessoa de seguir com os estudos. Essa realidade é muito complicada, e também está relacionada com os valores baixos das nossas bolsas. Mas, falando especificamente de mim, não tive nenhum problema ou oposição por parte da minha família que sempre viu com bons olhos minha decisão de continuar no mundo da academia.”

11. **Quais conselhos você daria para uma pessoa que pretende seguir carreira acadêmica ou de pesquisador?**

    Régis: “A minha sugestão é que é importante fazer uma reflexão sobre o que a gente está fazendo da nossa vida. Porque a carreira acadêmica tem uma competição, então, se você for pesquisador ou aluno, a minha recomendação é você tomar cuidado para a maneira que olha as outras pessoas. Você não sabe a realidade das pessoas, o que acontece, como elas estão lidando com as coisas, então cuidado para não fazer comparações do tipo ‘Nossa, aquela pessoa sabe bem mais, ela conseguiu isso e aquilo’, isso é muito comum e serve para a vida toda, não só para a academia. Então você tem que aprender a lidar com isso, e eu acho que uma coisa importante é você aprender a desenvolver isso desde a graduação, o mestrado, o doutorado e também dar o valor para o momento em que você está, para aquilo que você está fazendo, porque, de novo, muitas coisas na vida vão acontecer por um fator sorte, e a gente não tem como controlar, então os caminhos vão acontecer de maneira diferente. Talvez, por alguma razão, você inicialmente pensou que queria continuar na academia e vai sair e isso não quer dizer nada, entende? Eu acho que a minha recomendação geral é quase uma recomendação de vida: É você viver o momento que está vivendo, é você planejar para o futuro mas aproveitar a tua jornada para não ficar vivendo só o futuro ou pensando só no passado, é tentar viver a tua vida plenamente naquele instante, é tentar ver a grandiosidade das coisas naquele momento que você está vivendo. Acho que essa é minha principal recomendação.”

Pense aí

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.

1. A calculadora de Joseane ficou maluca: para cada algarismo que ela aperta, aparece seu dobro no visor. As teclas de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão funcionam normalmente e não podem ser apertadas duas vezes seguidas. Por exemplo, uma sequência de operações permitida é escrever $2 \to \times \to 3$, que gera o número $4 \cdot 6 = 24$.

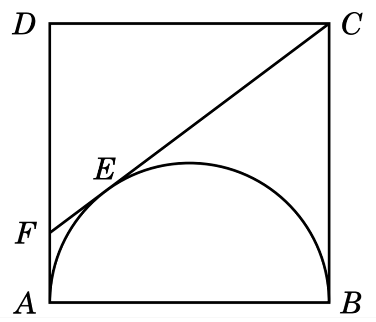
   (a) Como ela pode fazer aparecer 80 apertando 3 teclas?

   (b) Como ela pode fazer aparecer 50 apertando 3 teclas de algarismos e duas de operações de forma alternada?

   (c) Qual a menor quantidade de teclas que ela deve apertar para obter o número 23?

2. O número $5^2 = 25$ é um quadrado perfeito e o número $4^3 = 64$ é um cubo perfeito. Qual é o menor número inteiro positivo n, cujo dobro é um quadrado perfeito e cujo triplo é um cubo perfeito?

3. No desenho ao lado, o segmento CF é tangente ao semicírculo de diâmetro AB. Se $ABCD$ é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de CF.



4. Duas circunferências C_1 e C_2 se intersectam nos pontos A e B. A tangente a C_1 por A corta novamente no ponto P e a tangente a C_2 por B corta novamente C_1 no ponto Q. Sabendo que $PB = 640$ e $QB = 1000$, determine o comprimento do segmento AB.

5. O polinômio não constante $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 2015$. No máximo quantas raízes inteiras distintas tem $P(x)$?

6. Em uma reunião de matemáticos, Carlos diz a Frederico: *O dobro do produto dos dois dígitos do número de matemáticos na reunião é exatamente a nossa quantidade. Qual a quantidade mínima de matemáticos que deve se juntar a nós para que nossa quantidade seja um número primo?* Ajude Frederico a resolver o problema.

7. A professora Jane escreveu na lousa os números $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2020^2$. Ela propõe o seguinte jogo: Alice e Matias devem apagar números alternadamente, um número por vez, sendo que Matias começa, até que sobrem apenas dois números no quadro. Se a diferença entre estes dois números for múltiplo de 2021, Alice vence, caso contrário, Matias vence. Determine quem sempre pode garantir a vitória independentemente de como o outro jogador jogue.

8. Seja x o menor número inteiro positivo que satisfaz simultaneamente as seguintes condições: $2x$ é o quadrado de um número inteiro, $3x$ é o cubo de um número inteiro e $5x$ é a quinta potência de um número inteiro. Encontre a fatoração em primos de x.

9. Para cada número inteiro positivo n se associa um inteiro não negativo $f(n)$ de modo que se cumpram as três regras seguintes:

   i) $f(ab) = f(a) + f(b)$;
   ii) $f(n) = 0$ se n é um primo maior que 10;
   iii) $f(1) < f(243) < f(2) < 11$.

   Sabendo que $f(2106) < 11$, determine o valor de $f(96)$.

10. Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AB = 8$ e $BC = 4$. O círculo Γ passa por A, C e pelo ponto médio M de BC, e corta o lado CD no ponto $P \neq C$. Sabendo que AD é tangente a Γ, calcule a medida do segmento.

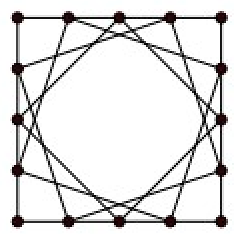
Resoluções

Está na dúvida, ou não conseguiu resolver algum problema da nossa quarta edição da revista? Então confira as resoluções logo abaixo.

1. A imagem do primeiro elemento de A pode ser selecionada de n modos, a do segundo de $n-1$ modos, etc. A resposta é então $n(n-1)\cdots 1 = n!$.

2. Uma das formas de responder esse problema é contar separadamente os planos determinados por três dentre os doze pontos ($C_{12}^3 = 220$), por dois entre os doze e um dentre os oito ($C_{12}^2 \cdot 8 = 528$), por um entre os doze e dois entre os oito ($12.C_8^2 = 336$) e por três dentre os oito (1 plano apenas). A resposta é $220 + 528 + 336 + 1 = 1085$.

3. (a) Podemos desenhar explicitamente todos os quadrados na figura e encontrar o total de 4 quadrados como mostra o próximo desenho.



   (b) Veja que temos alguns quadrados com lados horizontais e verticais e outros com lados inclinados. Para contar todos, podemos observar que cada quadrado com lados inclinados possui seus lados sobre um quadrado com lados horizontais e verticais, como observado no item anterior. Mais precisamente, se o quadrado de lados horizontais e verticais possui 5 pontos no seu lado, ele possui 4 quadrados com vértices sobre seus lados. Nessa figura, contando inicialmente apenas os quadrados com lados horizontais e verticais, temos 1 quadrado com lados de 5 pontos, 4 quadrados com lados de 4 pontos, 9 quadrados com lados de 3 pontos e 16 quadrados com lados de 2 pontos.Somando as quantidades de quadrados para cada caso temos no total $1\cdot 4 + 4\cdot 3 + 9\cdot 2 = 16\cdot 1 = 50$ quadrados com os quatro vértices nos pontinhos da figura.

4. Dado um número natural n, vamos denotar por $S(n)$ a soma dos dígitos de n. Podemos fazer uma tabela com os primeiros inteiros positivos para encontrar algum exemplo de número interessante. Podemos concluir que o número 8 é interessante. Nossa estratégia será construir outros números interessantes

n	$3n+11$	$s(n)$	$s(3n+11)$	n	$3n+11$	$s(n)$	$s(3n+11)$
1	14	1	5	5	26	5	8
2	17	2	8	6	29	6	11
3	20	3	2	7	32	7	5
4	23	4	5	8	35	8	8

a partir dele. Considere, por exemplo, um número obtido a partir de 8 com a inserção de vários dígitos nulos à sua esquerda e do algarismo 1, ou seja, da forma $n = 10^k + 8$. Veja que $3n + 11 = 3 \cdot 10^k + 35$ e que $S(n) = 1 + 8 = 9 = S(3n + 11) = 3 + 3 + 5 = 11$. Infelizmente ele não é interessante, mas a inserção de muitos dígitos nulos à esquerda do 8 nos permite ainda identificar a soma dos dígitos $3 + 5 = 8$ no número $3n + 11$. Para alcançar a propriedade que buscamos, basta trocarmos o dígito inicial 1 de n por algum outro dígito que ao ser multiplicado por 3 ainda mantenha a mesma soma de seus dígitos. Considere agora $n = 9 \cdot 10^k + 8$. Assim, $3n + 11 = 27 \cdot 10^k + 35$ e $S(n) = 17 = 2 + 7 + 3 + 5 = S(3n + 11)$. Como k pode ser qualquer inteiro positivo, existem infinitos números naturais da forma $10^k + 8$ que são interessantes.

5. Perceba inicialmente que se x e y estão definidos, só existe uma possível escolha para z e, além disso, z e n possuem a mesma paridade. Consideremos os seguintes casos:

   (a) O número n é par, ou seja, $n = 2i$. Assim, devemos ter $z = 2j$ e

   $$2x + 2y + z = n$$

   $$x + y = i - j$$

   Temos então as seguintes $i - j - 1$ possibilidades para o par (x, y):

   $$(1, i - j - 1), (2, i - j - 2), \cdots, (i - j - 1, 1).$$

   Como devemos ter $1 \leqslant i - j - 1 \leqslant \frac{n-4}{2}$, fixado n par, temos

   $$\frac{n-4}{2} + \frac{n-3}{2} + \cdots + 1 = \frac{(n-4)(n-2)}{8}$$

   soluções.

   (b) O número n é ímpar, ou seja, $n = 2i+1$. Assim, devemos ter $z = 2j+1$ e

   $$2x + 2y + z = n$$

$$x + y = i - j$$

$$(1, i - j - 1), (2, i - j - 2), \cdots, (i - j - 1, 1).$$

De modo semelhante ao caso anterior, devemos ter $1 \leqslant i - j - 1 \leqslant \frac{n-3}{2}$ e, fixado n ímpar, temos

$$\frac{n-3}{2} + \frac{n-5}{2} + \cdots + 1 = \frac{(n-3)(n-1)}{8}$$

soluções.
Portanto,

$$\frac{(n-4)(n-2)}{8} = 28$$

ou

$$\frac{(n-3)(n-1)}{8} = 28.$$

As únicas soluções positivas das equações anteriores são $n = 17$ e $n = 18$.

6. Não. Suponha que os números foram arrumados como no enunciado. Numere os lugares onde estão os números de 1 a 9 (digamos, da esquerda para a direita). Se o número 1 estiver no lugar N, não é difícil ver que o número do lugar 2 difere de N por um número par e, portanto, é da mesma paridade. O mesmo é verdade para 2 e 3, pra 3 e 4, e assim por diante. Isto significa que todos os números dos lugares onde estão os números têm a mesma paridade. Como temos nove números e no máximo 5 lugares com a mesma paridade isto é uma contradição.

7. Se x é o menor dos dois números então $x + 8$ é o outro seu produto $f(x) = x(x + 8)$ assume o valor mínimo $f(-4) = -16$, logo o valores possíveis desse produto formam o intervalo $[-16, +\infty)$. Não há, portanto, valor máximo.

8. Durante o jogo, o máximo divisor comum dos dois números iniciais vai ter que acabar aparecendo. Portanto, todos os múltiplos do máximo divisor comum que não forem maiores do que os números originais também irão aparecer. No caso em pauta, o máximo divisor comum dos números originais é 1, logo todos os números de 1 até 36 terão que aparecer. Teremos, então, 34 jogadas e o segundo jogador sempre vai vencer.

9. Podemos usar a seguinte quantidade como invariante: cada pardal tem um índice especial igual ao número da árvore onde ele está atualmente (contando da esquerda para a direita). Então, a soma S desses índices é a quantidade

invariante. De fato, depois do voo de dois pássaros quaisquer, só seus índices variam – um é aumentado de algum número x e o outro diminui do mesmo número. Logo, a soma S é invariante. Inicialmente, o valor de S é $1+2+3+4+5+6=21$ e, se todos os pardais estiverem na mesma árvore com número k, então o valor de S é $6k$. Como 21 não é divisível por 6, concluímos que os pardais não podem se juntar em uma mesma árvore.

Por outro lado, se forem sete árvores e sete pardais, então inicialmente a soma $S = 28$, que é divisível por 7, e não podemos excluir a possibilidade de todos os pardais se juntarem em uma mesma árvore. De fato, o leitor pode, facilmente, construir uma sequência de voos que resultam na situação desejada: todos os pardais ficam juntos na árvore do meio.

10. Comecemos usando a segunda pista. Se um número possui 6 divisores, então sua fatoração em números primos só pode ser da forma p^6 ou r^2s, para primos r e s distintos.

    Pela terceira pista, teremos os seguintes casos para analisar:

    - p^5 com p=5. Neste caso, teremos o número $5^5 = 3125$, que é maior que 3001.
    - r^2s com r=5. Então teremos $25s$. Para ser maior que 3001, devemos ter $s > \frac{3001}{25} > \frac{3000}{25} = 120$ Notando que não há primos de 121 até 125, vemos que $s > 125$ e consequentemente $r^2s > 3125$. Portanto, este caso gera apenas soluções maiores que 3125.
    - r^2s com s=5. Teremos o número $5r^2$. Usando a primeira pista, devemos ter $r^2 > \frac{3001}{5} > \frac{3000}{5} = 600$. Logo, $r^2 > 24^2$, ou seja, $r \geq 25$. Mas como 25 não é primo, teríamos $r > 25$ e consequentemente $r^2s > 3125$. Então esse caso gera soluções maiores que 3125.

    A senha de Abel é 3125.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; *Temas e Problemas* (Coleção do Professor de Matemática, 17), SBM, Rio de Janeiro **2010**.

[2] FOMIM, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I.; *Círculos Matemáticos - A Experiência Russa*, IMPA, Rio de Janeiro **2012**.

[3] *Banco de Questões*, OBMEP, **2017**.

[4] *EUREKA!*; Rio de Janeiro: SBM, edição 39, **2016**.